Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

28.6.2024.

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

$$\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$$

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Teorem.

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme $H(d, q)$ su

$$\theta_j = (q-1)(d-j) - j$$

Kratnosti se podudaraju sa stupnjevima: $m_j = n_j = \binom{d}{j}(q-1)^j$

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Kravčukov polinom:

$$K_i(x) = \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^\ell (q-1)^{i-\ell} \binom{d-x}{i-\ell} \binom{x}{\ell}$$

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Kravčukov polinom:

$$K_i(x) = \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^{\ell} (q-1)^{i-\ell} \binom{d-x}{i-\ell} \binom{x}{\ell}$$

Propozicija.

U Hammingovoj shemi vrijedi $P_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Kravčukov polinom:

$$K_i(x) = \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^{\ell} (q-1)^{i-\ell} \binom{d-x}{i-\ell} \binom{x}{\ell}$$

Propozicija.

U Hammingovoj shemi vrijedi $P_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Propozicija.

U Hammingovoj shemi vrijedi $Q_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme

Kravčukov polinom:

$$K_i(x) = \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^{\ell} (q-1)^{i-\ell} \binom{d-x}{i-\ell} \binom{x}{\ell}$$

Propozicija.

U Hammingovoj shemi vrijedi $P_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Propozicija.

U Hammingovoj shemi vrijedi $Q_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Korolar.

Hammingova shema je samodualna i Q-polinomijalna.

Johnsonova shema?

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

Zadatak.

Pokažite da Johnsonova shema $J(v, d)$ nije samodualna.

Johnsonova shema?

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

Zadatak.

Pokažite da Johnsonova shema $J(v, d)$ nije samodualna.

$$n_i = \binom{d}{i}\binom{v-d}{i}, \qquad m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$$

Johnsonova shema?

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

Zadatak.

Pokažite da Johnsonova shema $J(v, d)$ nije samodualna.

$$n_i = \binom{d}{i}\binom{v-d}{i}, \qquad m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$$

Johnsonova shema ipak je Q-polinomijalna!

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$$p_{ij}^k = \sum_{l \geq 0} \binom{d-k}{l} \binom{k}{d-i-l} \binom{k}{d-j-l} \binom{v-d-k}{i+j-d+l}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$$p_{ij}^k = \sum_{l \geq 0} \binom{d-k}{l} \binom{k}{d-i-l} \binom{k}{d-j-l} \binom{v-d-k}{i+j-d+l}$$

$$a_i = p_{1,i}^i = i(v - 2i)$$

$$b_i = p_{1,i+1}^i = (d-i)(v-d-i)$$

$$c_i = p_{1,i-1}^i = i^2$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.
https://people.math.wisc.edu/~pmterwil/Htmlfiles/asAll.pdf

$$J(v,d) \hookrightarrow H(v,2)$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.
https://people.math.wisc.edu/~pmterwil/Htmlfiles/asAll.pdf

$$J(v,d) \hookrightarrow H(v,2)$$

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.
https://people.math.wisc.edu/~pmterwil/Htmlfiles/asAll.pdf

$$J(v,d) \hookrightarrow H(v,2)$$

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

C. Godsil, K. Meagher, *Erdős-Ko-Rado theorems: algebraic approaches*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Alat: matrice indeksirane podskupovima od $V = \{1, \ldots, v\}$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Alat: matrice indeksirane podskupovima od $V = \{1, \ldots, v\}$

Inkluzijska matrica $W_{j,d}$ je tipa $\binom{v}{j} \times \binom{v}{d}$. Reci su indeksirani s $X \in \binom{V}{j}$, stupci s $Y \in \binom{V}{d}$ i vrijedi

$$(W_{j,d})_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X \subseteq Y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Alat: matrice indeksirane podskupovima od $V = \{1, \dots, v\}$

Inkluzijska matrica $W_{j,d}$ je tipa $\binom{v}{j} \times \binom{v}{d}$. Reci su indeksirani s $X \in \binom{V}{j}$, stupci s $Y \in \binom{V}{d}$ i vrijedi

$$(W_{j,d})_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X \subseteq Y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$C_j = W_{j,d}^{\tau} W_{j,d}, \quad j = 0, \dots, d$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Alat: matrice indeksirane podskupovima od $V = \{1, \ldots, v\}$

Inkluzijska matrica $W_{j,d}$ je tipa $\binom{v}{j} \times \binom{v}{d}$. Reci su indeksirani s $X \in \binom{V}{j}$, stupci s $Y \in \binom{V}{d}$ i vrijedi

$$(W_{j,d})_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X \subseteq Y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$C_j = W_{j,d}^{\tau} \, W_{j,d}, \quad j = 0, \ldots, d$

Bose-Mesnerova algebra Johnsonove sheme $J(v, d)$:

$$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle = \langle C_0, \ldots, C_d \rangle$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Alat: matrice indeksirane podskupovima od $V = \{1, \ldots, v\}$

Inkluzijska matrica $W_{j,d}$ je tipa $\binom{v}{j} \times \binom{v}{d}$. Reci su indeksirani s $X \in \binom{V}{j}$, stupci s $Y \in \binom{V}{d}$ i vrijedi

$$(W_{j,d})_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X \subseteq Y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$C_j = W_{j,d}^{\tau} W_{j,d}, \quad j = 0, \ldots, d$$

Bose-Mesnerova algebra Johnsonove sheme $J(v,d)$:

$$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle = \langle C_0, \ldots, C_d \rangle$$

"Matrica disjunktnosti" $\overline{W}_{j,d}$:

$$(\overline{W}_{j,d})_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X \cap Y = \emptyset \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

- $\overline{W}_{j,d}$ je permutacija stupaca od $W_{j,v-d}$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

- $\overline{W}_{j,d}$ je permutacija stupaca od $W_{j,v-d}$
- $\overline{W}_{d,v-d}$ je permutacijska matrica

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

- $\overline{W}_{j,d}$ je permutacija stupaca od $W_{j,v-d}$
- $\overline{W}_{d,v-d}$ je permutacijska matrica

Propozicija.

1. $W_{i,j}\,\overline{W}_{j,d} = \binom{v-d-i}{j-i}\overline{W}_{i,d}$
2. $\overline{W}_{i,d}\,W_{j,d}^{\tau} = \binom{v-i-j}{d-j}\overline{W}_{i,j}$
3. $W_{i,d}\,\overline{W}_{j,d}^{\tau} = \binom{v-i-j}{d-i}\overline{W}_{i,j}$
4. $\overline{W}_{j,d} = \sum_i (-1)^i W_{i,j}^{\tau}\,W_{i,d}$
5. $W_{j,d} = \sum_i (-1)^i W_{i,j}^{\tau}\,\overline{W}_{i,d}$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A \in M_{nm}(\mathbb{R}) \quad \longleftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A \in M_{nm}(\mathbb{R}) \quad \longleftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\} \leq \mathbb{R}^n$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A \in M_{nm}(\mathbb{R}) \quad \longleftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\} \leq \mathbb{R}^n$$

Propozicija.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je $\quad \operatorname{Im} W_{j,d}^{\tau} = \operatorname{Im} \overline{W}_{j,d}^{\tau}$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A \in M_{nm}(\mathbb{R}) \qquad \longleftrightarrow \qquad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\} \leq \mathbb{R}^n$$

Propozicija.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je $\quad \operatorname{Im} W_{j,d}^{\tau} = \operatorname{Im} \overline{W}_{j,d}^{\tau}$

Teorem.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je matrica $W_{j,d}$ punog ranga, tj. $\operatorname{rk} W_{j,d}$ je minimum od broja redaka $\binom{v}{j}$ i broja stupaca $\binom{v}{d}$.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A \in M_{nm}(\mathbb{R}) \quad \longleftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\} \leq \mathbb{R}^n$$

Propozicija.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je $\quad \operatorname{Im} W_{j,d}^{\tau} = \operatorname{Im} \overline{W}_{j,d}^{\tau}$

Teorem.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je matrica $W_{j,d}$ punog ranga, tj. rk $W_{j,d}$ je minimum od broja redaka $\binom{v}{j}$ i broja stupaca $\binom{v}{d}$.

Pretpostavka: $2d \leq v$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A \in M_{nm}(\mathbb{R}) \qquad \longleftrightarrow \qquad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\} \leq \mathbb{R}^n$$

Propozicija.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je $\quad \operatorname{Im} W_{j,d}^{\tau} = \operatorname{Im} \overline{W}_{j,d}^{\tau}$

Teorem.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je matrica $W_{j,d}$ punog ranga,
tj. rk $W_{j,d}$ je minimum od broja redaka $\binom{v}{j}$ i broja stupaca $\binom{v}{d}$.

Pretpostavka: $2d \leq v$

Oznaka: $U_j = \operatorname{Im} W_{j,d}^{\tau}$ (potprostor od $\mathbb{R}^n$ razapet recima od $W_{j,d}$)

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A \in M_{nm}(\mathbb{R}) \quad \longleftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m\} \leq \mathbb{R}^n$$

Propozicija.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je $\quad \operatorname{Im} W_{j,d}^{\tau} = \operatorname{Im} \overline{W}_{j,d}^{\tau}$

Teorem.

Ako vrijedi $j \leq d \leq v - j$, onda je matrica $W_{j,d}$ punog ranga, tj. rk $W_{j,d}$ je minimum od broja redaka $\binom{v}{j}$ i broja stupaca $\binom{v}{d}$.

Pretpostavka: $2d \leq v$

Oznaka: $U_j = \operatorname{Im} W_{j,d}^{\tau}$ (potprostor od $\mathbb{R}^n$ razapet recima od $W_{j,d}$)

$$\dim U_j = \binom{v}{j}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathscr{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathscr{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathscr{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathscr{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

$C_0 = J \Rightarrow U_0 = \operatorname{Im} J = \langle \mathbb{1} \rangle$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathscr{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathscr{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

$C_0 = J \Rightarrow U_0 = \operatorname{Im} J = \langle \mathbb{1} \rangle$

$C_d = I \Rightarrow U_d = \operatorname{Im} I = \mathbb{R}^n$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathscr{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathscr{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

$C_0 = J \Rightarrow U_0 = \operatorname{Im} J = \langle \mathbb{1} \rangle$

$C_d = I \Rightarrow U_d = \operatorname{Im} I = \mathbb{R}^n$

Lema.

$$U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_d$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathscr{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathscr{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

$$C_0 = J \Rightarrow U_0 = \operatorname{Im} J = \langle \mathbb{1} \rangle$$

$$C_d = I \Rightarrow U_d = \operatorname{Im} I = \mathbb{R}^n$$

Lema.

$$U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_d$$

$$\begin{aligned} T_0 &= U_0 = \langle \mathbb{1} \rangle \\ T_i &= U_i \ominus U_{i-1} = U_i \cap U_{i-1}^{\perp}, \quad i = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathscr{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathscr{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

$$C_0 = J \Rightarrow U_0 = \operatorname{Im} J = \langle \mathbb{1} \rangle$$

$$C_d = I \Rightarrow U_d = \operatorname{Im} I = \mathbb{R}^n$$

Lema.

$$U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_d$$

$$\begin{aligned} T_0 &= U_0 = \langle \mathbb{1} \rangle \\ T_i &= U_i \ominus U_{i-1} = U_i \cap U_{i-1}^{\perp}, \quad i = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

$$\dim T_i = \binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathcal{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathcal{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

$$C_0 = J \Rightarrow U_0 = \operatorname{Im} J = \langle \mathbb{1} \rangle$$

$$C_d = I \Rightarrow U_d = \operatorname{Im} I = \mathbb{R}^n$$

Lema.

$$U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_d$$

$$\begin{aligned} T_0 &= U_0 = \langle \mathbb{1} \rangle \\ T_i &= U_i \ominus U_{i-1} = U_i \cap U_{i-1}^{\perp}, \quad i = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

$$\dim T_i = \binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}$$

$$\mathbb{R}^n = T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_d$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Potprostori $U_0, \ldots, U_d$ su invarijantni pod djelovanjem matrica $A \in \mathscr{A}$, tj. za sve $j \in \{0, \ldots, d\}$, $A \in \mathscr{A}$, $x \in U_j$ vrijedi $Ax \in U_j$.

$$C_0 = J \Rightarrow U_0 = \operatorname{Im} J = \langle \mathbb{1} \rangle$$

$$C_d = I \Rightarrow U_d = \operatorname{Im} I = \mathbb{R}^n$$

Lema.

$$U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_d$$

$$\begin{aligned} T_0 &= U_0 = \langle \mathbb{1} \rangle \\ T_i &= U_i \ominus U_{i-1} = U_i \cap U_{i-1}^{\perp}, \quad i = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

$$\dim T_i = \binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}$$

$$\mathbb{R}^n = T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_d$$

T_i su također $\mathscr{A}$-invarijantni!

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Neka je M matrica tipa $m \times n$, a N matrica tipa $n \times m$. Onda matrice MN i NM imaju iste svojstvene vrijednosti različite od nule s istim kratnostima.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Neka je M matrica tipa $m \times n$, a N matrica tipa $n \times m$. Onda matrice MN i NM imaju iste svojstvene vrijednosti različite od nule s istim kratnostima.

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

$$\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Lema.

Neka je M matrica tipa $m \times n$, a N matrica tipa $n \times m$. Onda matrice MN i NM imaju iste svojstvene vrijednosti različite od nule s istim kratnostima.

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

$$\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$$

Teorem.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme $J(v, d)$ su

$$\theta_j = d(v - d) - j(v + 1 - j)$$

Odgovarajuće kratnosti su $m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$, $j = 0, \ldots, d$.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

	$\theta_0(d)$	$\theta_1(d)$	$\theta_2(d)$	$\theta_3(d)$	$\theta_4(d)$	$\theta_5(d)$
$d=1$	$v-1$	-1				
$d=2$	$2v-4$	$v-4$	-2			
$d=3$	$3v-9$	$2v-9$	$v-7$	-3		
$d=4$	$4v-16$	$3v-16$	$2v-14$	$v-10$	-4	
$d=5$	$5v-25$	$4v-25$	$3v-23$	$2v-19$	$v-13$	-5

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

	$\theta_0(d)$	$\theta_1(d)$	$\theta_2(d)$	$\theta_3(d)$	$\theta_4(d)$	$\theta_5(d)$
$d=1$	$v-1$	-1				
$d=2$	$2v-4$	$v-4$	-2			
$d=3$	$3v-9$	$2v-9$	$v-7$	-3		
$d=4$	$4v-16$	$3v-16$	$2v-14$	$v-10$	-4	
$d=5$	$5v-25$	$4v-25$	$3v-23$	$2v-19$	$v-13$	-5

Teorem.

Potprostor $T_j \leq \mathbb{R}^n$ je svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\theta_j = d(v-d) - j(v+1-j)$ Johnsonove sheme $J(v,d)$, za $j = 0, \ldots, d$.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

	$\theta_0(d)$	$\theta_1(d)$	$\theta_2(d)$	$\theta_3(d)$	$\theta_4(d)$	$\theta_5(d)$
$d=1$	$v-1$	-1				
$d=2$	$2v-4$	$v-4$	-2			
$d=3$	$3v-9$	$2v-9$	$v-7$	-3		
$d=4$	$4v-16$	$3v-16$	$2v-14$	$v-10$	-4	
$d=5$	$5v-25$	$4v-25$	$3v-23$	$2v-19$	$v-13$	-5

Teorem.

Potprostor $T_j \leq \mathbb{R}^n$ je svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\theta_j = d(v-d) - j(v+1-j)$ Johnsonove sheme $J(v,d)$, za $j = 0, \ldots, d$.

Numeracija primitivnih idempotenta od $J(v,d)$: E_j je matrica ortogonalne projekcije na T_j, za $j = 0, \ldots, d$.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$D_i = W_{i,d}^{\tau} \overline{W}_{i,d}$:

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$D_i = W_{i,d}^{\tau} \overline{W}_{i,d}$:

$$(D_i)_{X,Y} = \binom{|X \setminus Y|}{i} = \binom{d - |X \cap Y|}{i}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$D_i = W_{i,d}^{\tau} \overline{W}_{i,d}$:

$$(D_i)_{X,Y} = \binom{|X \setminus Y|}{i} = \binom{d - |X \cap Y|}{i}$$

$D_0 = J, \quad D_d = \overline{W}_{d,d} = A_d$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$D_i = W_{i,d}^{\tau} \overline{W}_{i,d}$:

$$(D_i)_{X,Y} = \binom{|X \setminus Y|}{i} = \binom{d - |X \cap Y|}{i}$$

$D_0 = J, \quad D_d = \overline{W}_{d,d} = A_d$

Lema.

Matrice $D_0, \ldots, D_d$ čine bazu Bose-Mesnerove algebre $\mathscr{A}$ Johnsonove sheme.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$D_i = W_{i,d}^{\tau} \overline{W}_{i,d}$:

$$(D_i)_{X,Y} = \binom{|X \setminus Y|}{i} = \binom{d - |X \cap Y|}{i}$$

$D_0 = J, \quad D_d = \overline{W}_{d,d} = A_d$

Lema.

Matrice $D_0, \ldots, D_d$ čine bazu Bose-Mesnerove algebre $\mathscr{A}$ Johnsonove sheme.

$$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle = \langle C_0, \ldots, C_d \rangle = \langle D_0, \ldots, D_d \rangle$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$D_i = W_{i,d}^{\tau} \overline{W}_{i,d}$:

$$(D_i)_{X,Y} = \binom{|X \setminus Y|}{i} = \binom{d - |X \cap Y|}{i}$$

$D_0 = J, \quad D_d = \overline{W}_{d,d} = A_d$

Lema.

Matrice $D_0, \ldots, D_d$ čine bazu Bose-Mesnerove algebre $\mathscr{A}$ Johnsonove sheme.

$$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle = \langle C_0, \ldots, C_d \rangle = \langle D_0, \ldots, D_d \rangle$$

Teorem.

Svojstvene vrijednosti različite od nule matrice D_k su

$$(-1)^j \binom{d-j}{k-j} \binom{v-k-j}{d-j}$$

s odgovarajućim kratnostima $\binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$, za $j = 0, \ldots, k$.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A_i = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} D_k$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A_i = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} D_k$$

$$D_k \quad \rightsquigarrow \quad (-1)^j \binom{d-j}{k-j} \binom{v-k-j}{d-j} \text{ na } T_j, \quad \text{za } j = 0, \ldots, k$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A_i = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} D_k$$

$$D_k \;\;\rightsquigarrow\;\; (-1)^j \binom{d-j}{k-j} \binom{v-k-j}{d-j} \text{ na } T_j, \quad \text{za } j = 0, \ldots, k$$

Korolar.

U Johnsonovoj shemi $J(v,d)$ svojstvena vrijednost i-te Schurove idempotente A_i na j-tom svojstvenom potprostoru T_j je

$$P_i(j) = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{k-i+j} \binom{k}{i} \binom{d-j}{k-j} \binom{v-k-j}{d-j}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

$$A_i = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} D_k$$

$$D_k \quad \rightsquigarrow \quad (-1)^j \binom{d-j}{k-j} \binom{v-k-j}{d-j} \text{ na } T_j, \quad \text{za } j = 0, \ldots, k$$

Korolar.

U Johnsonovoj shemi $J(v,d)$ svojstvena vrijednost i-te Schurove idempotente A_i na j-tom svojstvenom potprostoru T_j je

$$P_i(j) = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{k-i+j} \binom{k}{i} \binom{d-j}{k-j} \binom{v-k-j}{d-j}$$

$$P_i(j) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} \binom{d-j}{k} \binom{v-d+k-j}{k}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Eberleinin polinom:

$$E_i(x) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} \binom{d-x}{k} \binom{v-d+k-x}{k}$$

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Eberleinin polinom:

$$E_i(x) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} \binom{d-x}{k} \binom{v-d+k-x}{k}$$

Propozicija.

U Johnsonovoj shemi vrijedi $P_i(j) = E_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme

Eberleinin polinom:

$$E_i(x) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} \binom{d-x}{k} \binom{v-d+k-x}{k}$$

Propozicija.

U Johnsonovoj shemi vrijedi $P_i(j) = E_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Teorem.

Poredak primitivnih idempotenta od $J(v, d)$ koji odgovara svojstvenim potprostorima $T_0, \ldots, T_d$ je Q-polinomijalan.

Dizajni u Johnsonovoj shemi

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \Omega = \binom{V}{d}$ kažemo da je dizajn s parametrima t-(v, d, λ) ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Dizajni u Johnsonovoj shemi

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \Omega = \binom{V}{d}$ kažemo da je dizajn s parametrima t-(v, d, λ) ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Podskup $\mathscr{D} \subseteq \Omega$ identificiramo s indikatorskom funkcijom:

$$f : \Omega \to \{0, 1\}, \quad f(X) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X \in \mathscr{D} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Dizajni u Johnsonovoj shemi

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \Omega = \binom{V}{d}$ kažemo da je dizajn s parametrima t-(v, d, λ) ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Podskup $\mathscr{D} \subseteq \Omega$ identificiramo s indikatorskom funkcijom:

$$f : \Omega \to \{0, 1\}, \quad f(X) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X \in \mathscr{D} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Propozicija.

Indikatorska funkcija $f : \Omega \to \{0, 1\}$ predstavlja t-(v, d, λ) dizajn ako i samo ako vrijedi $W_{t,d} f = \lambda \mathbb{1}$.

Dizajni u Johnsonovoj shemi

$U_t = T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_t = \mathrm{Im}\, W_{t,d}^{\tau} =$ potprostor razapet recima od $W_{t,d}$

$T_0 = U_0 = \langle \mathbb{1} \rangle$

Dizajni u Johnsonovoj shemi

$U_t = T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_t = \operatorname{Im} W_{t,d}^{\tau} =$ potprostor razapet recima od $W_{t,d}$

$T_0 = U_0 = \langle \mathbb{1} \rangle$

Lema.

Potprostor razapet **razlikama redaka** od $W_{t,d}$ je

$$T_1 \oplus \ldots \oplus T_t$$

Dizajni u Johnsonovoj shemi

$U_t = T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_t = \text{Im}\, W_{t,d}^{\tau} =$ potprostor razapet recima od $W_{t,d}$

$T_0 = U_0 = \langle \mathbb{1} \rangle$

Lema.

Potprostor razapet **razlikama redaka** od $W_{t,d}$ je

$$T_1 \oplus \ldots \oplus T_t$$

Teorem.

Indikatorska funkcija $f : \Omega \to \{0,1\}$ predstavlja t-dizajn ako i samo ako vrijedi $E_i f = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Definicija.

Neka je $\mathfrak{X}$ asocijacijska shema sa skupom vrhova X i primitivnim idempotentama $E_0, \ldots, E_d$ u Q-polinomijalnom poretku. Za podskup vrhova $Y \subseteq X$ kažemo da je *t-dizajn* ako odgovarajuća indikatorska funkcija

$$f : X \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in Y, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zadovoljava $E_i f = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Definicija.

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa skupom vrhova X i primitivnim idempotentama $E_0, \ldots, E_d$ u Q-polinomijalnom poretku. Za podskup vrhova $Y \subseteq X$ kažemo da je *t-dizajn* ako odgovarajuća indikatorska funkcija

$$f : X \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in Y, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zadovoljava $E_i f = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

t-dizajn je ujedno s-dizajn za svaki $s \leq t$.

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Definicija.

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa skupom vrhova X i primitivnim idempotentama $E_0, \ldots, E_d$ u Q-polinomijalnom poretku. Za podskup vrhova $Y \subseteq X$ kažemo da je *t-dizajn* ako odgovarajuća indikatorska funkcija

$$f : X \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in Y, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zadovoljava $E_i f = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

t-dizajn je ujedno s-dizajn za svaki $s \leq t$.

Propozicija.

Ako je $\mathfrak{D}$ dizajn s parametrima t-(v, d, λ), onda je i s-(v, d, λ_s) dizajn za $s = 0, \ldots, t$, pri čemu je $\lambda_s = \lambda \binom{v-s}{t-s} / \binom{d-s}{t-s}$.

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Relacije asocijacijske sheme $\mathcal{X}$: $R_0, \ldots, R_d$

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Relacije asocijacijske sheme $\mathcal{X}$: $R_0, \ldots, R_d$

Za $\emptyset \neq Y \subseteq X$ definiramo unutarnju distribuciju kao vektor $a(Y) = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ s komponentama

$$a_i = \frac{1}{|Y|} |R_i \cap (Y \times Y)|, \quad i = 0, \ldots, d$$

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Relacije asocijacijske sheme $\mathscr{X}$: $R_0, \ldots, R_d$

Za $\emptyset \neq Y \subseteq X$ definiramo unutarnju distribuciju kao vektor $a(Y) = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ s komponentama

$$a_i = \frac{1}{|Y|} |R_i \cap (Y \times Y)|, \quad i = 0, \ldots, d$$

Ako je $Q = [Q_i(j)]$ dualna svojstvena matrica od $\mathscr{X}$, dualna distribucija od Y je $a^*(Y) = (a_0^*, \ldots, a_d^*) = a(Y)Q$.

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Relacije asocijacijske sheme $\mathscr{X}$: $R_0, \ldots, R_d$

Za $\emptyset \neq Y \subseteq X$ definiramo unutarnju distribuciju kao vektor $a(Y) = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ s komponentama

$$a_i = \frac{1}{|Y|} |R_i \cap (Y \times Y)|, \quad i = 0, \ldots, d$$

Ako je $Q = [Q_i(j)]$ dualna svojstvena matrica od $\mathscr{X}$, dualna distribucija od Y je $a^*(Y) = (a_0^*, \ldots, a_d^*) = a(Y)Q$.

Teorem.

Komponente dualne distribucije od Y su nenegativni realni brojevi. Ako je f indikatorska funkcija od Y, vrijedi $a_i^* = 0$ ako i samo ako vrijedi $E_i f = 0$.

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Teorem.

Neka je $\mathcal{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y t-dizajn u $\mathcal{X}$ i $e = \lfloor t/2 \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \geq m_0 + \ldots + m_e$$

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Teorem.

Neka je $\mathscr{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y t-dizajn u $\mathscr{X}$ i $e = \lfloor t/2 \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \geq m_0 + \ldots + m_e$$

Teorem (Ray-Chaudhuri – Wilsonova nejednakost)

Neka je $\mathscr{D}$ kombinatorni t-(v, d, λ) dizajn s $b = |\mathscr{D}|$ blokova.

Ako je $e = \lfloor t/2 \rfloor$ i vrijedi $v \geq d + e$, onda vrijedi

$$b \geq \binom{v}{e}$$

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Teorem.

Neka je $\mathcal{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y t-dizajn u $\mathcal{X}$ i $e = \lfloor t/2 \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \geq m_0 + \ldots + m_e$$

Teorem (Ray-Chaudhuri – Wilsonova nejednakost)

Neka je $\mathcal{D}$ kombinatorni t-(v, d, λ) dizajn s $b = |\mathcal{D}|$ blokova.

Ako je $e = \lfloor t/2 \rfloor$ i vrijedi $v \geq d + e$, onda vrijedi

$$b \geq \binom{v}{e}$$

Propozicija (Fisherova nejednakost)

U svakom 2-(v, d, λ) dizajnu vrijedi $b \geq v$.

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Stupanj od Y definiramo kao

$$s = |\{i \in \{1, \ldots, d\} \mid a_i \neq 0\}|$$

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Stupanj od Y definiramo kao

$$s = |\{i \in \{1, \ldots, d\} \mid a_i \neq 0\}|$$

Teorem.

Neka je $\mathcal{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y podskup stupnja s od $\mathcal{X}$, onda vrijedi

$$|Y| \leq m_0 + \ldots + m_s$$

Dizajni u Q-polinomijalnim shemama

Stupanj od Y definiramo kao

$$s = |\{i \in \{1, \ldots, d\} \mid a_i \neq 0\}|$$

Teorem.

Neka je $\mathscr{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y podskup stupnja s od $\mathscr{X}$, onda vrijedi

$$|Y| \leq m_0 + \ldots + m_s$$

Teorem.

Neka je $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{d}$ kombinatorni dizajn stupnja s. Onda vrijedi

$$|\mathscr{D}| \leq \binom{v}{s}$$

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

> *In general, we can give no clear "combinatorial" interpretation for the concept of T-design. However, (...) T-designs in the Hamming and Johnson schemes are among the most classical combinatorial configurations. This motivates the present general definition, the "conjecture" being that T-designs will often have interesting properties.*

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

> *In general, we can give no clear "combinatorial" interpretation for the concept of T-design. However, (...) T-designs in the Hamming and Johnson schemes are among the most classical combinatorial configurations. This motivates the present general definition, the "conjecture" being that T-designs will often have interesting properties.*

Primjer: Grassmannova shema

Vrhove čine svi d-dimenzionalni potprostori v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}_q$. Vrhovi X i Y su i-asocirani ako je $\dim(X \cap Y) = d - i$. Tako dobijemo *Grassmannovu shemu* $J_q(v, d)$ reda $n = \begin{bmatrix} v \\ d \end{bmatrix}_q$ s d klasa.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Podskup riječi $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi:

- Za svaki t-člani podskup koordinata $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$, restrikcija riječi iz Y na koordinate iz T je multiskup koji sadrži svaku riječ iz F^t točno λ puta.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Podskup riječi $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi:

- Za svaki t-člani podskup koordinata $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$, restrikcija riječi iz Y na koordinate iz T je multiskup koji sadrži svaku riječ iz F^t točno λ puta.

Takve familije ili tablice riječi poznate su kao "orthogonal arrays", a parametre im zapisujemo $OA_\lambda(t, d, q)$.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Podskup riječi $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi:

- Za svaki t-člani podskup koordinata $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$, restrikcija riječi iz Y na koordinate iz T je multiskup koji sadrži svaku riječ iz F^t točno λ puta.

C. R. Rao, *Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays*, Suppl. J. Roy. Statist. Soc. **9** (1947), 128–139.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Podskup riječi $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi:

- Za svaki t-člani podskup koordinata $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$, restrikcija riječi iz Y na koordinate iz T je multiskup koji sadrži svaku riječ iz F^t točno λ puta.

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane, J. Stufken, *Orthogonal arrays. Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Produkt asocijacijskih shema:

$\mathscr{X}$ shema reda n sa Schurovim idempotentama $A_0, \ldots, A_d$

$\mathscr{Y}$ shema reda m sa Schurovim idempotentama $B_0, \ldots, B_e$

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Produkt asocijacijskih shema:

$\mathcal{X}$ shema reda n sa Schurovim idempotentama $A_0, \ldots, A_d$

$\mathcal{Y}$ shema reda m sa Schurovim idempotentama $B_0, \ldots, B_e$

Produkt $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ je shema reda mn sa Schurovim idempotentama

$$\{A_i \otimes B_j \mid i = 0, \ldots, d,\ j = 0, \ldots, e\}$$

Produkt asocijacijskih shema:

$\mathcal{X}$ shema reda n sa Schurovim idempotentama $A_0, \ldots, A_d$

$\mathcal{Y}$ shema reda m sa Schurovim idempotentama $B_0, \ldots, B_e$

Produkt $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ je shema reda mn sa Schurovim idempotentama

$$\{A_i \otimes B_j \mid i = 0, \ldots, d,\ j = 0, \ldots, e\}$$

$\mathcal{X}$ ima d klasa, $\mathcal{Y}$ ima e klasa, a broj klasa od $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ je

$$(d+1)(e+1) - 1 = de + d + e$$

Produkt asocijacijskih shema:

$\mathcal{X}$ shema reda n sa Schurovim idempotentama $A_0, \dots, A_d$

$\mathcal{Y}$ shema reda m sa Schurovim idempotentama $B_0, \dots, B_e$

Produkt $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ je shema reda mn sa Schurovim idempotentama

$$\{A_i \otimes B_j \mid i = 0, \dots, d,\ j = 0, \dots, e\}$$

$\mathcal{X}$ ima d klasa, $\mathcal{Y}$ ima e klasa, a broj klasa od $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ je

$$(d+1)(e+1) - 1 = de + d + e$$

W. J. Martin, *Designs in product association schemes*, Des. Codes Cryptogr. **16** (1999), no. 3, 271–289.

W. J. Martin, *Mixed block designs*, J. Combin. Des. **6** (1998), no. 2, 151–163.

Što su t-dizajni u produktu dviju Johnsonovih shema?

$$J(v_1, d_1) \otimes J(v_2, d_2)$$

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Što su t-dizajni u produktu dviju Johnsonovih shema?

$$J(v_1, d_1) \otimes J(v_2, d_2)$$

Neka su V_1 i V_2 skupovi, $|V_i| = v_i$ i $1 \leq d_i < v_i$ za $i = 1, 2$. Parove (S_1, S_2) podskupova $S_i \subseteq V_i$ zovemo domine. Kažemo da (S_1, S_2) dominira (T_1, T_2) ako vrijedi $T_1 \subseteq S_1$ i $T_2 \subseteq S_2$.

Što su t-dizajni u produktu dviju Johnsonovih shema?

$$J(v_1, d_1) \otimes J(v_2, d_2)$$

Neka su V_1 i V_2 skupovi, $|V_i| = v_i$ i $1 \leq d_i < v_i$ za $i = 1, 2$. Parove (S_1, S_2) podskupova $S_i \subseteq V_i$ zovemo domine. Kažemo da (S_1, S_2) dominira (T_1, T_2) ako vrijedi $T_1 \subseteq S_1$ i $T_2 \subseteq S_2$.

Familija domina $\mathscr{D} \subseteq \binom{V_1}{d_1} \times \binom{V_2}{d_2}$ je miješani dizajn s parametrima t-$(v_1, d_1, v_2, d_2, \Lambda)$, za $\Lambda = \{\lambda_{(t_1,t_2)} \mid 0 \leq t_i \leq d_i, t_1 + t_2 \leq t\}$, ako je svaki par (T_1, T_2) s $T_i \subseteq V_i$, $|T_i| = t_i \leq d_i$, $t_1 + t_2 \leq t$ dominiran s točno $\lambda_{(t_1,t_2)}$ domina iz $\mathscr{D}$.

D. Stanton, *t-designs in classical association schemes*, Graphs Combin. **2** (1986), no. 3, 283–286.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

D. Stanton, *t-designs in classical association schemes*, Graphs Combin. **2** (1986), no. 3, 283–286.

Primjer: klase konjugacije konačne grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

D. Stanton, *t-designs in classical association schemes*, Graphs Combin. **2** (1986), no. 3, 283–286.

Primjer: klase konjugacije konačne grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Što su odgovarajući t-dizajni za simetričnu grupu $G = S_n$?

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

D. Stanton, *t-designs in classical association schemes*, Graphs Combin. **2** (1986), no. 3, 283–286.

Primjer: klase konjugacije konačne grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Što su odgovarajući t-dizajni za simetričnu grupu $G = S_n$?

Neka je $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Youngova tablica je uređena particija $P = (P_1, \ldots, P_k)$ od Ω takva da je $|P_1| \geq \cdots \geq |P_k|$. Oblik od P je particija $\lambda = (|P_1|, \ldots, |P_k|)$ prirodnog broja n.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

D. Stanton, *t-designs in classical association schemes*, Graphs Combin. **2** (1986), no. 3, 283–286.

Primjer: klase konjugacije konačne grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Što su odgovarajući t-dizajni za simetričnu grupu $G = S_n$?

Neka je $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Youngova tablica je uređena particija $P = (P_1, \ldots, P_k)$ od Ω takva da je $|P_1| \geq \cdots \geq |P_k|$. Oblik od P je particija $\lambda = (|P_1|, \ldots, |P_k|)$ prirodnog broja n.

Za podgrupu $G \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivna ako za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji $g \in G$ takav da je $gP = Q$.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Za podskup $D \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivan ako postoji broj r takav da za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji točno r permutacija $g \in D$ za koje je $gP = Q$.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Za podskup $D \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivan ako postoji broj r takav da za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji točno r permutacija $g \in D$ za koje je $gP = Q$.

Uobičajena t-tranzitivnost ekvivalentna je s λ-tranzitivnosti za particiju $\lambda = (n - t, 1, \ldots, 1)$, a t-homogenost za particiju $\lambda = (n - t, t)$.

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Za podskup $D \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivan ako postoji broj r takav da za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji točno r permutacija $g \in D$ za koje je $gP = Q$.

Uobičajena t-tranzitivnost ekvivalentna je s λ-tranzitivnosti za particiju $\lambda = (n - t, 1, \ldots, 1)$, a t-homogenost za particiju $\lambda = (n - t, t)$.

Pokazuje se da su λ-tranzitivni skupovi permutacija ekvivalentni s T-dizajnima u koherentnoj konfiguraciji klasa konjugacije od S_n, za $T = \{\mu \mid \mu \succeq \lambda\}$. U ovoj koherentnoj konfiguraciji glavne idempotente nisu indeksirane prirodnim brojevima, nego particijama prirodnih brojeva uređenim s $\succeq$ kao u Youngovoj rešetki (inkluzijom odgovarajućih Ferrersovih dijagrama).

Kombinatorne interpretacije t-dizajna

Za podskup $D \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivan ako postoji broj r takav da za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji točno r permutacija $g \in D$ za koje je $gP = Q$.

Uobičajena t-tranzitivnost ekvivalentna je s λ-tranzitivnosti za particiju $\lambda = (n-t, 1, \ldots, 1)$, a t-homogenost za particiju $\lambda = (n-t, t)$.

Pokazuje se da su λ-tranzitivni skupovi permutacija ekvivalentni s T-dizajnima u koherentnoj konfiguraciji klasa konjugacije od S_n, za $T = \{\mu \mid \mu \succeq \lambda\}$. U ovoj koherentnoj konfiguraciji glavne idempotente nisu indeksirane prirodnim brojevima, nego particijama prirodnih brojeva uređenim s $\succeq$ kao u Youngovoj rešetki (inkluzijom odgovarajućih Ferrersovih dijagrama).

W. J. Martin, B. E. Sagan, *A new notion of transitivity for groups and sets of permutations*, J. London Math. Soc. (2) **73** (2006), no. 1, 1–13.