Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

24.6.2024.

Polinomijalne asocijacijske sheme

Definicija.

Kažemo da su relacije $(R_0, \ldots, R_d)$ u P-polinomijalnom poretku ako vrijedi

1. $p_{ij}^k = 0$ uvijek kad je jedan od indeksa i, j, k veći od zbroja druga dva,
2. $p_{ij}^k \neq 0$ uvijek kad je jedan od indeksa i, j, k jednak zbroju druga dva.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ kažemo da je P-polinomijalna ili metrička ako postoji takav poredak relacija.

Polinomijalne asocijacijske sheme

Definicija.

Kažemo da su relacije $(R_0, \ldots, R_d)$ u P-polinomijalnom poretku ako vrijedi

1. $p_{ij}^k = 0$ uvijek kad je jedan od indeksa i, j, k veći od zbroja druga dva,
2. $p_{ij}^k \neq 0$ uvijek kad je jedan od indeksa i, j, k jednak zbroju druga dva.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ kažemo da je P-polinomijalna ili metrička ako postoji takav poredak relacija.

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ ekvivalentno je

1. relacije su u P-polinomijalnom poretku,
2. prva presječna matrica B_1 je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je f_i stupnja i te vrijedi $A_i = f_i(A)$ za $A = A_1$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je f_i stupnja i te vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$ za $\theta_j = P_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Neka je $\mathfrak{X}$ asocijacijska shema s relacijama $(R_0, \ldots, R_d)$ u P-polinomijalnom poretku. Onda je graf G s relacijom susjedstva R_1 distancijsko regularan dijametra d, a ostale relacije dobivamo kao $R_i = \{(x, y) \in X \times X \mid \partial(x, y) = i\}$ iz metrike ∂ u grafu G.

Polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema s relacijama $(R_0, \ldots, R_d)$ u P-polinomijalnom poretku. Onda je graf G s relacijom susjedstva R_1 distancijsko regularan dijametra d, a ostale relacije dobivamo kao $R_i = \{(x, y) \in X \times X \mid \partial(x, y) = i\}$ iz metrike ∂ u grafu G.

Definicija.

Kažemo da su primitivne idempotente $(E_0, \ldots, E_d)$ u Q-polinomijalnom poretku ako vrijedi

1. $q_{ij}^k = 0$ uvijek kad je jedan od indeksa i, j, k veći od zbroja druga dva,
2. $q_{ij}^k \neq 0$ uvijek kad je jedan od indeksa i, j, k jednak zbroju druga dva.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ kažemo da je Q-polinomijalna ili kometrička ako postoji takav poredak primitivnih idempotenta.

Polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathfrak{X}$ ekvivalentno je

1. primitivne idempotente su u Q-polinomijalnom poretku,
2. prva dualna presječna matrica B_1° je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je g_i stupnja i te vrijedi $A_i^* = g_i(A^*)$ za $A^* = A_1^*$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je g_i stupnja i te vrijedi $Q_i(j) = f_i(\theta_j^*)$ za $\theta_j^* = Q_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathfrak{X}$ ekvivalentno je

1. primitivne idempotente su u Q-polinomijalnom poretku,
2. prva dualna presječna matrica B_1° je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je g_i stupnja i te vrijedi $A_i^* = g_i(A^*)$ za $A^* = A_1^*$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je g_i stupnja i te vrijedi $Q_i(j) = f_i(\theta_j^*)$ za $\theta_j^* = Q_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Hammingova i Johnsonova shema su P-polinomijalne jer dolaze od distancijsko regularnih grafova.

Polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ ekvivalentno je

1. primitivne idempotente su u Q-polinomijalnom poretku,
2. prva dualna presječna matrica B_1° je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je g_i stupnja i te vrijedi $A_i^* = g_i(A^*)$ za $A^* = A_1^*$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je g_i stupnja i te vrijedi $Q_i(j) = f_i(\theta_j^*)$ za $\theta_j^* = Q_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Hammingova i Johnsonova shema su P-polinomijalne jer dolaze od distancijsko regularnih grafova.

Hammingova i Johnsonova shema su i Q-polinomijalne, ali to je teže dokazati nego P-polinomijalnost.

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

Samodualnost

$\mathfrak{X}$ = komutativna koherentna konfiguracija s Bose-Mesnerovom algebrom $\mathscr{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$

Samodualnost

$\mathcal{X}$ = komutativna koherentna konfiguracija s Bose-Mesnerovom algebrom $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$

Definicija.

Za regularni linearni operator $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ kažemo da je dualitet ako vrijedi

1. $\Psi(AB) = \Psi(A) \circ \Psi(B)$ za sve $A, B \in \mathcal{A}$,
2. $\Psi(\Psi(A)) = nA^\tau$ za sve $A \in \mathcal{A}$, gdje je $n = |X|$ red od $\mathcal{X}$.

Ako postoji dualitet, kažemo da je $\mathcal{X}$ samodualna koherentna konfiguracija.

Samodualnost

$\mathcal{X}$ = komutativna koherentna konfiguracija s Bose-Mesnerovom algebrom $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$

Definicija.

Za regularni linearni operator $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ kažemo da je dualitet ako vrijedi

1. $\Psi(AB) = \Psi(A) \circ \Psi(B)$ za sve $A, B \in \mathcal{A}$,
2. $\Psi(\Psi(A)) = nA^{\tau}$ za sve $A \in \mathcal{A}$, gdje je $n = |X|$ red od $\mathcal{X}$.

Ako postoji dualitet, kažemo da je $\mathcal{X}$ samodualna koherentna konfiguracija.

Propozicija.

Neka je Ψ dualitet od $\mathcal{X}$. Tada vrijedi

1. $\Psi(A^{\tau}) = \Psi(A)^{\tau}$ za sve $A \in \mathcal{A}$,
2. $\Psi(A \circ B) = \frac{1}{n}\Psi(A)\Psi(B)$ za sve $A, B \in \mathcal{A}$,
3. $\Psi(I) = J$,
4. $\Psi(J) = nI$.

Samodualnost

Propozicija.

Ako postoji dualitet Ψ od $\mathfrak{X}$, možemo numerirati relacije tako da je $\Psi(E_i) = A_i$, $\forall i \in \{0, \dots, d\}$. Tada vrijedi:

1. $\Psi(A_i) = nE_i^\tau$, $\forall i \in \{0, \dots, d\}$,
2. $i' = \hat{i}$, $\forall i \in \{0, \dots, d\}$,
3. $P = \overline{Q}$,
4. $p_{ij}^k = q_{ij}^k$, $\forall i, j, k \in \{0, \dots, d\}$.

Samodualnost

Propozicija.

Ako postoji dualitet Ψ od $\mathcal{X}$, možemo numerirati relacije tako da je $\Psi(E_i) = A_i$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi:

1. $\Psi(A_i) = nE_i^T$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$,
2. $i' = \hat{i}$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$,
3. $P = \overline{Q}$,
4. $p_{ij}^k = q_{ij}^k$, $\forall i, j, k \in \{0, \ldots, d\}$.

Teorem.

Komutativna koherentna konfiguracija $\mathcal{X}$ je samodualna ako i samo ako možemo numerirati relacije tako da vrijedi $P = \overline{Q}$.

Samodualnost

Propozicija.

Ako postoji dualitet Ψ od $\mathfrak{X}$, možemo numerirati relacije tako da je $\Psi(E_i) = A_i$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi:

1. $\Psi(A_i) = nE_i^{\tau}$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$,
2. $i' = \hat{i}$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$,
3. $P = \overline{Q}$,
4. $p_{ij}^k = q_{ij}^k$, $\forall i, j, k \in \{0, \ldots, d\}$.

Teorem.

Komutativna koherentna konfiguracija $\mathfrak{X}$ je samodualna ako i samo ako možemo numerirati relacije tako da vrijedi $P = \overline{Q}$.

Primjer: klase konjugacije grupe

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Klase konjugacije komutativne grupe

U komutativnoj grupi klase konjugacije su jednočlane: $C_g = \{g\}$, $g \in G$

Klase konjugacije komutativne grupe

U komutativnoj grupi klase konjugacije su jednočlane: $C_g = \{g\}$, $g \in G$

Operaciju u G zapisujemo aditivno i neutralni element označavamo 0.

Klase konjugacije komutativne grupe

U komutativnoj grupi klase konjugacije su jednočlane: $C_g = \{g\}$, $g \in G$

Operaciju u G zapisujemo aditivno i neutralni element označavamo 0.

Primjer: klase konjugacije komutativne grupe

Neka je G komutativna grupa reda n. Za $g \in G$ definiramo relacije $R_g = \{(x, y) \in G \times G \mid x - y = g\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju $\mathfrak{X}(G)$ reda n s $d = n - 1$ klasa koja je komutativna, tanka i **samodualna**.

Klase konjugacije komutativne grupe

U komutativnoj grupi klase konjugacije su jednočlane: $C_g = \{g\}$, $g \in G$

Operaciju u G zapisujemo aditivno i neutralni element označavamo 0.

Primjer: klase konjugacije komutativne grupe

Neka je G komutativna grupa reda n. Za $g \in G$ definiramo relacije $R_g = \{(x, y) \in G \times G \mid x - y = g\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju $\mathfrak{X}(G)$ reda n s $d = n - 1$ klasa koja je komutativna, tanka i **samodualna**.

Primjer: Schurova konstrukcija

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ grupa permutacija na skupu X koja djeluje tranzitivno, tj. tako da vrijedi $(\forall x, y \in X)(\exists g \in G)\ x^g = y$. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju grupe G na skup svih uređenih parova $X \times X$. Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Tada te relacije čine koherentnu konfiguraciju na skupu X.

Klase konjugacije komutativne grupe

A_g = Schurova idempotenta koja odgovara relaciji R_g

Klase konjugacije komutativne grupe

A_g = Schurova idempotenta koja odgovara relaciji R_g

$$(A_g)_{x,y} = \delta_{x-y,g} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x - y = g \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Klase konjugacije komutativne grupe

A_g = Schurova idempotenta koja odgovara relaciji R_g

$$(A_g)_{x,y} = \delta_{x-y,g} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x - y = g \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$(A_g A_h)_{x,y} = \sum_{z \in G} (A_g)_{x,z} (A_h)_{z,y} = \sum_{z \in G} \delta_{x-z,g} \delta_{z-y,h}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{ako je } x - y = g + h \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \delta_{x-y,g+h} = (A_{g+h})_{x,y}$$

Klase konjugacije komutativne grupe

A_g = Schurova idempotenta koja odgovara relaciji R_g

$$(A_g)_{x,y} = \delta_{x-y,g} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x - y = g \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$(A_g A_h)_{x,y} = \sum_{z \in G} (A_g)_{x,z} (A_h)_{z,y} = \sum_{z \in G} \delta_{x-z,g} \delta_{z-y,h}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{ako je } x - y = g + h \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \delta_{x-y,g+h} = (A_{g+h})_{x,y}$$

$$A_g A_h = A_{g+h} \qquad A_g^\tau = A_{-g}$$

Klase konjugacije komutativne grupe

Primitivne idempotente: E_g, $g \in G$

Klase konjugacije komutativne grupe

Primitivne idempotente: E_g, $g \in G$

Svojstvene vrijednosti: $P = [P_x(g)]$, $\quad A_x = \sum_{g \in G} P_x(g) E_g$

Klase konjugacije komutativne grupe

Primitivne idempotente: E_g, $g \in G$

Svojstvene vrijednosti: $P = [P_x(g)]$, $\quad A_x = \sum_{g \in G} P_x(g) E_g$

$$\sum_{g \in G} P_{x+y}(g) E_g = A_{x+y} = A_x A_y = \left(\sum_{g \in G} P_x(g) E_g \right) \left(\sum_{h \in G} P_y(h) E_h \right)$$

$$= \sum_{g \in G} P_x(g) P_y(g) E_g$$

Klase konjugacije komutativne grupe

Primitivne idempotente: E_g, $g \in G$

Svojstvene vrijednosti: $P = [P_x(g)]$, $\quad A_x = \sum_{g \in G} P_x(g) E_g$

$$\sum_{g \in G} P_{x+y}(g) E_g = A_{x+y} = A_x A_y = \left(\sum_{g \in G} P_x(g) E_g \right) \left(\sum_{h \in G} P_y(h) E_h \right)$$

$$= \sum_{g \in G} P_x(g) P_y(g) E_g$$

$$P_{x+y}(g) = P_x(g) P_y(g)$$

Klase konjugacije komutativne grupe

Primitivne idempotente: E_g, $g \in G$

Svojstvene vrijednosti: $P = [P_x(g)]$, $\quad A_x = \sum_{g \in G} P_x(g) E_g$

$$\sum_{g \in G} P_{x+y}(g) E_g = A_{x+y} = A_x A_y = \left(\sum_{g \in G} P_x(g) E_g \right) \left(\sum_{h \in G} P_y(h) E_h \right)$$

$$= \sum_{g \in G} P_x(g) P_y(g) E_g$$

$$P_{x+y}(g) = P_x(g) P_y(g)$$

$\psi_g : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\psi_g(x) = P_x(g)$ je homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu polja $\mathbb{C}$

Klase konjugacije komutativne grupe

Primitivne idempotente: E_g, $g \in G$

Svojstvene vrijednosti: $P = [P_x(g)]$, $\quad A_x = \sum_{g \in G} P_x(g) E_g$

$$\sum_{g \in G} P_{x+y}(g) E_g = A_{x+y} = A_x A_y = \left(\sum_{g \in G} P_x(g) E_g \right) \left(\sum_{h \in G} P_y(h) E_h \right)$$

$$= \sum_{g \in G} P_x(g) P_y(g) E_g$$

$$P_{x+y}(g) = P_x(g) P_y(g)$$

$\psi_g : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\psi_g(x) = P_x(g)$ je homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu polja $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ karakter konačne Abelove grupe

Klase konjugacije komutativne grupe

Primitivne idempotente: E_g, $g \in G$

Svojstvene vrijednosti: $P = [P_x(g)]$, $\quad A_x = \sum_{g \in G} P_x(g) E_g$

$$\sum_{g \in G} P_{x+y}(g) E_g = A_{x+y} = A_x A_y = \left(\sum_{g \in G} P_x(g) E_g \right) \left(\sum_{h \in G} P_y(h) E_h \right)$$

$$= \sum_{g \in G} P_x(g) P_y(g) E_g$$

$$P_{x+y}(g) = P_x(g) P_y(g)$$

$\psi_g : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\psi_g(x) = P_x(g)$ je homomorfizam grupe G u multiplikativnu grupu polja $\mathbb{C} \rightsquigarrow$ karakter konačne Abelove grupe

K. Conrad, *Characters of finite Abelian groups*, 2023.
`https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/charthy.pdf`

Klase konjugacije komutativne grupe

$G = \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$

Klase konjugacije komutativne grupe

$G = \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$

$x \in G \rightsquigarrow x = (x_1, \ldots, x_r)$, $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$

Klase konjugacije komutativne grupe

$G = \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$

$x \in G \rightsquigarrow x = (x_1, \ldots, x_r)$, $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$

$\omega_i \in \mathbb{C}$ primitivni k_i-ti korijen jedinice ($\omega_i^{k_i} = 1$, $\omega_i^j \neq 1$, $j = 1, \ldots, k_i - 1$)

Klase konjugacije komutativne grupe

$G = \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$

$x \in G \rightsquigarrow x = (x_1, \ldots, x_r)$, $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$

$\omega_i \in \mathbb{C}$ primitivni k_i-ti korijen jedinice ($\omega_i^{k_i} = 1$, $\omega_i^j \neq 1$, $j = 1, \ldots, k_i - 1$)

Propozicija.

Primitivne idempotente koherentne konfiguracije $\mathfrak{X}(G)$ možemo numerirati tako da su svojstvena matrica $P = [P_x(y)]$ i dualna svojstvena matrica $Q = [Q_x(y)]$ zadane s

$$P_x(y) = \omega_1^{x_1 y_1} \cdots \omega_r^{x_r y_r} \quad \text{i} \quad Q_x(y) = \omega_1^{-x_1 y_1} \cdots \omega_r^{-x_r y_r}$$

za $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $y = (y_1, \ldots, y_r) \in G$.

Klase konjugacije komutativne grupe

$G = \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$

$x \in G \rightsquigarrow x = (x_1, \ldots, x_r)$, $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$

$\omega_i \in \mathbb{C}$ primitivni k_i-ti korijen jedinice ($\omega_i^{k_i} = 1$, $\omega_i^j \neq 1$, $j = 1, \ldots, k_i - 1$)

Propozicija.

Primitivne idempotente koherentne konfiguracije $\mathcal{X}(G)$ možemo numerirati tako da su svojstvena matrica $P = [P_x(y)]$ i dualna svojstvena matrica $Q = [Q_x(y)]$ zadane s

$$P_x(y) = \omega_1^{x_1 y_1} \cdots \omega_r^{x_r y_r} \quad \text{i} \quad Q_x(y) = \omega_1^{-x_1 y_1} \cdots \omega_r^{-x_r y_r}$$

za $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $y = (y_1, \ldots, y_r) \in G$.

$\overline{\omega_i} = \omega_i^{-1}$, zbog $\omega_i \overline{\omega_i} = |\omega_i|^2 = 1$

Klase konjugacije komutativne grupe

$G = \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$

$x \in G \rightsquigarrow x = (x_1, \ldots, x_r)$, $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$

$\omega_i \in \mathbb{C}$ primitivni k_i-ti korijen jedinice ($\omega_i^{k_i} = 1$, $\omega_i^j \neq 1$, $j = 1, \ldots, k_i - 1$)

Propozicija.

Primitivne idempotente koherentne konfiguracije $\mathcal{X}(G)$ možemo numerirati tako da su svojstvena matrica $P = [P_x(y)]$ i dualna svojstvena matrica $Q = [Q_x(y)]$ zadane s

$$P_x(y) = \omega_1^{x_1 y_1} \cdots \omega_r^{x_r y_r} \quad \text{i} \quad Q_x(y) = \omega_1^{-x_1 y_1} \cdots \omega_r^{-x_r y_r}$$

za $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $y = (y_1, \ldots, y_r) \in G$.

$\overline{\omega_i} = \omega_i^{-1}$, zbog $\omega_i \overline{\omega_i} = |\omega_i|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \overline{Q}$

Klase konjugacije komutativne grupe

$G = \mathbb{Z}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k_r}$

$x \in G \rightsquigarrow x = (x_1, \ldots, x_r)$, $x_i \in \mathbb{Z}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$

$\omega_i \in \mathbb{C}$ primitivni k_i-ti korijen jedinice ($\omega_i^{k_i} = 1$, $\omega_i^j \neq 1$, $j = 1, \ldots, k_i - 1$)

Propozicija.

Primitivne idempotente koherentne konfiguracije $\mathfrak{X}(G)$ možemo numerirati tako da su svojstvena matrica $P = [P_x(y)]$ i dualna svojstvena matrica $Q = [Q_x(y)]$ zadane s

$$P_x(y) = \omega_1^{x_1 y_1} \cdots \omega_r^{x_r y_r} \quad \text{i} \quad Q_x(y) = \omega_1^{-x_1 y_1} \cdots \omega_r^{-x_r y_r}$$

za $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $y = (y_1, \ldots, y_r) \in G$.

$\overline{\omega_i} = \omega_i^{-1}$, zbog $\omega_i \overline{\omega_i} = |\omega_i|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \overline{Q}$

$\Rightarrow \mathfrak{X}(G)$ **je samodualna**

Klase konjugacije komutativne grupe

Zadatak.

U Lucijinoj domaćoj zadaći vidjeli smo kriterij pod kojim klase konjugacije konačne grupe čine simetričnu koherentnu konfiguraciju, tj. asocijacijsku shemu. U slučaju komutativne grupe G svaki element treba biti inverzan samom sebi, odnosno G treba biti elementarno Abelova 2-grupa. Je li u tom slučaju asocijacijska shema $\mathfrak{X}(G)$ P-polinomijalna, što je zbog samodualnosti ekvivalentno s Q-polinomijalnosti?

Samodualnost Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Samodualnost Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Stupnjevi: $n_i = \binom{d}{i}(q-1)^i$

Samodualnost Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Stupnjevi: $n_i = \binom{d}{i}(q-1)^i$

Presječni brojevi: $p_{ij}^k = \sum_{\ell \geq 0} \binom{d-k}{\ell}(q-1)^\ell \binom{k}{i-\ell}\binom{i-\ell}{k-j+\ell}(q-2)^{i+j-2\ell-k}$

Samodualnost Hammingove sheme

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, \ldots, y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Stupnjevi: $n_i = \binom{d}{i}(q-1)^i$

Presječni brojevi: $p_{ij}^k = \sum\limits_{\ell \geq 0} \binom{d-k}{\ell}(q-1)^\ell \binom{k}{i-\ell}\binom{i-\ell}{k-j+\ell}(q-2)^{i+j-2\ell-k}$

$$a_i = p_{1,i}^i = (q-2)i, \quad b_i = p_{1,i+1}^i = (q-1)(d-i), \quad c_i = p_{1,i-1}^i = i$$

Samodualnost Hammingove sheme

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

Samodualnost Hammingove sheme

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

Propozicija.

Brojevi $\theta_0, \ldots, \theta_d$ su nultočke polinoma $f_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

Samodualnost Hammingove sheme

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

Propozicija.

Brojevi $\theta_0, \ldots, \theta_d$ su nultočke polinoma $f_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

$$\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$$

Samodualnost Hammingove sheme

$$\theta_j = P_1(j), \quad j = 0, \ldots, d$$

Propozicija.

Brojevi $\theta_0, \ldots, \theta_d$ su nultočke polinoma $f_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

$$\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$$

Teorem.

Svojstvene vrijednosti Hammingove sheme $H(d, q)$ su

$$\theta_j = (q-1)(d-j) - j$$

Kratnosti se podudaraju sa stupnjevima: $m_j = n_j = \binom{d}{j}(q-1)^j$

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

$K_q =$ potpuni graf s vrhovima F

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

K_q = potpuni graf s vrhovima F

Matrica susjedstva: $J - I$
(matrica tipa $q \times q$ s nulama na dijagonali i jedinicama izvan dijagonale)

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

K_q = potpuni graf s vrhovima F

Matrica susjedstva: $J - I$
(matrica tipa $q \times q$ s nulama na dijagonali i jedinicama izvan dijagonale)

Lema.

Neka je $M = (\Bbbk - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima $\Bbbk$ na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $\Bbbk - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

K_q = potpuni graf s vrhovima F

Matrica susjedstva: $J - I$
(matrica tipa $q \times q$ s nulama na dijagonali i jedinicama izvan dijagonale)

Lema.

Neka je $M = (\Bbbk - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima $\Bbbk$ na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $\Bbbk - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

$J - I$ ima svojstvenu vrijednost $q - 1$ kratnosti 1 (svojstveni vektor je $\mathbf{1}$) i svojstvenu vrijednost -1 kratnosti $q - 1$

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

K_q = potpuni graf s vrhovima F

Matrica susjedstva: $J - I$
(matrica tipa $q \times q$ s nulama na dijagonali i jedinicama izvan dijagonale)

Lema.

Neka je $M = (k - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima k na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $k + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $k - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

$J - I$ ima svojstvenu vrijednost $q - 1$ kratnosti 1 (svojstveni vektor je $\mathbf{1}$) i svojstvenu vrijednost -1 kratnosti $q - 1$

$W = \mathbb{R}^q$

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

K_q = potpuni graf s vrhovima F

Matrica susjedstva: $J - I$
(matrica tipa $q \times q$ s nulama na dijagonali i jedinicama izvan dijagonale)

Lema.

Neka je $M = (\Bbbk - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima $\Bbbk$ na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $\Bbbk - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

$J - I$ ima svojstvenu vrijednost $q - 1$ kratnosti 1 (svojstveni vektor je $\mathbf{1}$) i svojstvenu vrijednost -1 kratnosti $q - 1$

$W = \mathbb{R}^q$ Svojstveni potprostori: $W_0 = \langle \mathbf{1} \rangle$, $W_1 = \langle \mathbf{1} \rangle^\perp$

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

K_q = potpuni graf s vrhovima F

Matrica susjedstva: $J - I$
(matrica tipa $q \times q$ s nulama na dijagonali i jedinicama izvan dijagonale)

Lema.

Neka je $M = (\Bbbk - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima $\Bbbk$ na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $\Bbbk - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

$J - I$ ima svojstvenu vrijednost $q - 1$ kratnosti 1 (svojstveni vektor je $\mathbf{1}$) i svojstvenu vrijednost -1 kratnosti $q - 1$

$W = \mathbb{R}^q$ Svojstveni potprostori: $W_0 = \langle \mathbf{1} \rangle$, $W_1 = \langle \mathbf{1} \rangle^\perp$

$V = \mathbb{R}^n$, $n = q^d$

Samodualnost Hammingove sheme

Vrhovi Hammingove sheme: $X = F^d$, $|F| = q$

K_q = potpuni graf s vrhovima F

Matrica susjedstva: $J - I$
(matrica tipa $q \times q$ s nulama na dijagonali i jedinicama izvan dijagonale)

Lema.

Neka je $M = (\Bbbk - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima $\Bbbk$ na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $\Bbbk - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

$J - I$ ima svojstvenu vrijednost $q - 1$ kratnosti 1 (svojstveni vektor je $\mathbf{1}$) i svojstvenu vrijednost -1 kratnosti $q - 1$

$W = \mathbb{R}^q$ Svojstveni potprostori: $W_0 = \langle \mathbf{1} \rangle$, $W_1 = \langle \mathbf{1} \rangle^\perp$

$V = \mathbb{R}^n$, $n = q^d$ $V = W \times \cdots \times W$

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

Primjer: $q = 3,\ F = \{0, 1, 2\},\ d = 2$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \end{array} \\
\begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
+
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \end{array} \\
\begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$(J - I) \otimes I \qquad + \qquad I \otimes (J - I).$$

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

$$\begin{aligned} V &= (W_0 \oplus W_1) \times (W_0 \oplus W_1) \times \cdots \times (W_0 \oplus W_1) \\ &= \sum U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d \end{aligned}$$

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

$$\begin{aligned} V &= (W_0 \oplus W_1) \times (W_0 \oplus W_1) \times \cdots \times (W_0 \oplus W_1) \\ &= \sum U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d \end{aligned}$$

Na vektor iz $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ matrica A djeluje kao jedinična matrica pomnožena s $(q-1)(d-j) - j$, ako je j broj indeksa i za koje je $U_i = W_1$

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

$$\begin{aligned} V &= (W_0 \oplus W_1) \times (W_0 \oplus W_1) \times \cdots \times (W_0 \oplus W_1) \\ &= \sum U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d \end{aligned}$$

Na vektor iz $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ matrica A djeluje kao jedinična matrica pomnožena s $(q-1)(d-j)-j$, ako je j broj indeksa i za koje je $U_i = W_1$

$$\Rightarrow \quad \theta_j = (q-1)(d-j)-j$$

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

$$\begin{aligned} V &= (W_0 \oplus W_1) \times (W_0 \oplus W_1) \times \cdots \times (W_0 \oplus W_1) \\ &= \sum U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d \end{aligned}$$

Na vektor iz $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ matrica A djeluje kao jedinična matrica pomnožena s $(q-1)(d-j)-j$, ako je j broj indeksa i za koje je $U_i = W_1$

$$\Rightarrow \quad \theta_j = (q-1)(d-j)-j$$

Odgovarajući svojstveni potprostor je ortogonalna suma potprostora $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ s fiksnim brojem j faktora $U_i = W_1$

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

$$V = (W_0 \oplus W_1) \times (W_0 \oplus W_1) \times \cdots \times (W_0 \oplus W_1)$$
$$= \sum U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$$

Na vektor iz $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ matrica A djeluje kao jedinična matrica pomnožena s $(q-1)(d-j)-j$, ako je j broj indeksa i za koje je $U_i = W_1$

$$\Rightarrow \quad \theta_j = (q-1)(d-j)-j$$

Odgovarajući svojstveni potprostor je ortogonalna suma potprostora $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ s fiksnim brojem j faktora $U_i = W_1$

Suma sadrži $\binom{d}{j}$ pribrojnika dimenzije $(q-1)^j$, pa je kratnost $m_j = \binom{d}{j}(q-1)^j$.

Samodualnost Hammingove sheme

$$A = A_1 = \sum_{i=1}^{d} I \otimes \cdots I \otimes (J - I) \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

$$\begin{aligned} V &= (W_0 \oplus W_1) \times (W_0 \oplus W_1) \times \cdots \times (W_0 \oplus W_1) \\ &= \sum U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d \end{aligned}$$

Na vektor iz $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ matrica A djeluje kao jedinična matrica pomnožena s $(q-1)(d-j) - j$, ako je j broj indeksa i za koje je $U_i = W_1$

$$\Rightarrow \quad \theta_j = (q-1)(d-j) - j$$

Odgovarajući svojstveni potprostor je ortogonalna suma potprostora $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_d$ s fiksnim brojem j faktora $U_i = W_1$

Suma sadrži $\binom{d}{j}$ pribrojnika dimenzije $(q-1)^j$, pa je kratnost $m_j = \binom{d}{j}(q-1)^j$. Primitivna idempotenta E_j je matrica ortogonalne projekcija na svojstveni potprostor dimenzije m_j.

Samodualnost Hammingove sheme

Lema.

Vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$, za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Samodualnost Hammingove sheme

Lema.

Vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$, za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Za Hammingovu shemu $H(d, q)$:

$$a_i = (q-2)i, \quad b_i = (q-1)(d-i), \quad c_i = i$$

Samodualnost Hammingove sheme

Lema.

Vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$, za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Za Hammingovu shemu $H(d, q)$:

$$a_i = (q-2)i, \quad b_i = (q-1)(d-i), \quad c_i = i$$

Propozicija.

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\theta_j P_i(j) = b_{i-1} P_{i-1}(j) + a_i P_i(j) + c_{i+1} P_{i+1}(j)$$

gdje uzimamo $P_{-1}(j) = P_{d+1}(j) = 0$.

Kravčukovi polinomi

Kravčukov polinom:

$$K_i(x) = \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^\ell (q-1)^{i-\ell} \binom{d-x}{i-\ell} \binom{x}{\ell}$$

Kravčukovi polinomi

Kravčukov polinom:

$$K_i(x) = \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^\ell (q-1)^{i-\ell} \binom{d-x}{i-\ell} \binom{x}{\ell}$$

$$\begin{aligned}
K_0(x) =& 1 \\
K_1(x) =& d(q-1) - qx \\
K_2(x) =& \tbinom{d}{2}(q-1)^2 - \left(\tfrac{1}{2} + d(q-1) + \tfrac{2d-1}{2}(q-1)^2\right) x + \tfrac{1}{2} q^2 x^2 \\
K_3(x) =& \tbinom{d}{3}(q-1)^3 - \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{d}{2}(q-1) + \tfrac{d(d-1)}{2}(q-1)^2 + \tfrac{3d^2-6d+2}{6}(q-1)^3\right) x \\
& + \tfrac{1}{2} q^2 \left(1 + (d-1)(q-1)\right) x^2 - \tfrac{1}{6} q^3 x^3
\end{aligned}$$

Kravčukovi polinomi

Kravčukov polinom:

$$K_i(x) = \sum_{\ell=0}^{i} (-1)^\ell (q-1)^{i-\ell} \binom{d-x}{i-\ell} \binom{x}{\ell}$$

$$\begin{aligned}
K_0(x) =& 1 \\
K_1(x) =& d(q-1) - qx \\
K_2(x) =& \tbinom{d}{2}(q-1)^2 - \left(\tfrac{1}{2} + d(q-1) + \tfrac{2d-1}{2}(q-1)^2\right) x + \tfrac{1}{2} q^2 x^2 \\
K_3(x) =& \tbinom{d}{3}(q-1)^3 - \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{d}{2}(q-1) + \tfrac{d(d-1)}{2}(q-1)^2 + \tfrac{3d^2-6d+2}{6}(q-1)^3\right) x \\
& + \tfrac{1}{2} q^2 \left(1 + (d-1)(q-1)\right) x^2 - \tfrac{1}{6} q^3 x^3
\end{aligned}$$

Propozicija.

$$(1-z)^x (1+(q-1)z)^{d-x} = \sum_{i \geq 0} K_i(x) z^i$$

Kravčukovi polinomi

Propozicija.

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\theta_j K_i(j) = b_{i-1} K_{i-1}(j) + a_i K_i(j) + c_{i+1} K_{i+1}(j)$$

gdje uzimamo $K_{-1}(j) = K_{d+1}(j) = 0$.

Kravčukovi polinomi

Propozicija.

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\theta_j K_i(j) = b_{i-1} K_{i-1}(j) + a_i K_i(j) + c_{i+1} K_{i+1}(j)$$

gdje uzimamo $K_{-1}(j) = K_{d+1}(j) = 0$.

Korolar.

Vrijedi $P_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Kravčukovi polinomi

Propozicija.

Za $0 \le i, j \le d$ vrijedi

$$\theta_j K_i(j) = b_{i-1} K_{i-1}(j) + a_i K_i(j) + c_{i+1} K_{i+1}(j)$$

gdje uzimamo $K_{-1}(j) = K_{d+1}(j) = 0$.

Korolar.

Vrijedi $P_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

J. H. van Lint, *Introduction to coding theory. Third edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Kravčukovi polinomi

Propozicija.

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\theta_j K_i(j) = b_{i-1} K_{i-1}(j) + a_i K_i(j) + c_{i+1} K_{i+1}(j)$$

gdje uzimamo $K_{-1}(j) = K_{d+1}(j) = 0$.

Korolar.

Vrijedi $P_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

J. H. van Lint, *Introduction to coding theory. Third edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Relacija ortogonalnosti:

$$\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (q-1)^k \; K_i(k) \; K_j(k) = q^d \binom{d}{i} (q-1)^i \delta_{ij}$$

Samodualnost Hammingove sheme

Lema (relacija simetričnosti)

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\binom{d}{j}(q-1)^j \; K_i(j) = \binom{d}{i}(q-1)^i \; K_j(i)$$

Samodualnost Hammingove sheme

Lema (relacija simetričnosti)

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\binom{d}{j}(q-1)^j \; K_i(j) = \binom{d}{i}(q-1)^i \; K_j(i)$$

Teorem.

$$\frac{Q_j(i)}{m_j} = \frac{\overline{P_i(j)}}{n_i}$$

Samodualnost Hammingove sheme

Lema (relacija simetričnosti)

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\binom{d}{j}(q-1)^j \; K_i(j) = \binom{d}{i}(q-1)^i \; K_j(i)$$

Teorem.

$$\frac{Q_j(i)}{m_j} = \frac{\overline{P_i(j)}}{n_i}$$

Propozicija.

Vrijedi $Q_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Samodualnost Hammingove sheme

Lema (relacija simetričnosti)

Za $0 \leq i, j \leq d$ vrijedi

$$\binom{d}{j} (q-1)^j \; K_i(j) = \binom{d}{i} (q-1)^i \; K_j(i)$$

Teorem.

$$\frac{Q_j(i)}{m_j} = \frac{\overline{P_i(j)}}{n_i}$$

Propozicija.

Vrijedi $Q_i(j) = K_i(j)$ za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Korolar.

Hammingova shema $H(d, q)$ je samodualna i Q-polinomijalna.

Johnsonova shema?

Zadatak.

Pokažite da Johnsonova shema $J(v, d)$ nije samodualna.

Johnsonova shema?

Zadatak.

Pokažite da Johnsonova shema $J(v, d)$ nije samodualna.

Iduće predavanje: **petak, 28.6.2024. u 13 sati**

Johnsonova shema?

Zadatak.

Pokažite da Johnsonova shema $J(v, d)$ nije samodualna.

Iduće predavanje: **petak, 28.6.2024. u 13 sati**

Seminar: **ponedjeljak, 1.7.2024. u 18 sati**

Filip Martinović

q-analogoni dizajna i jako regularnih grafova