# Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

7.6.2024.

**Definicija.**

Za podskup vrhova Hammingove sheme $C \subseteq F^n$ veličine $M = |C|$ kažemo da je kod s parametrima $(n, M, d)_q$ ako je minimalna udaljenost kodnih riječi $d = \min\{\partial(x, y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\}$.

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Definicija.

Za podskup vrhova Hammingove sheme $C \subseteq F^n$ veličine $M = |C|$ kažemo da je kod s parametrima $(n, M, d)_q$ ako je minimalna udaljenost kodnih riječi $d = \min\{\partial(x, y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\}$.

## Primjer: Hammingova shema

Neka je $F$ skup od $q$ simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^n$ sadrži sve uređene $n$-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu $G_i$ ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(n, q)$ s $n$ klasa, reda $N = q^n$.

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Definicija.

Za podskup vrhova Hammingove sheme $C \subseteq F^n$ veličine $M = |C|$ kažemo da je kod s parametrima $(n, M, d)_q$ ako je minimalna udaljenost kodnih riječi $d = \min\{\partial(x, y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\}$.

## Primjer: Hammingova shema

Neka je $F$ skup od $q$ simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^n$ sadrži sve uređene $n$-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial : X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu $G_i$ ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(n, q)$ s $n$ klasa, reda $N = q^n$.

**U kojim asocijacijskim shemama imamo metriku na skupu vrhova?**

**Definicija 1.**

Neka je $G$ povezan graf dijametra $d$. Kažemo da je $G$ distancijsko regularan graf (DRG) ako broj $|N_i(x) \cap N_j(y)|$ ovisi samo o indeksima $i$, $j$ te o udaljenosti $\partial(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in X$.

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Definicija 1.

Neka je $G$ povezan graf dijametra $d$. Kažemo da je $G$ distancijsko regularan graf (DRG) ako broj $|N_i(x) \cap N_j(y)|$ ovisi samo o indeksima $i, j$ te o udaljenosti $\partial(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in X$.

## Definicija 2.

Povezan graf $G$ je distancijsko regularan ako je regularan stupnja $\Bbbk$ i za svaka dva vrha na udaljenosti $\partial(x, y) = i$ brojevi $b_i = |N_{i+1}(x) \cap N_1(y)|$ i $c_i = |N_{i-1}(x) \cap N_1(y)|$ su konstantni.

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Definicija 1.

Neka je $G$ povezan graf dijametra $d$. Kažemo da je $G$ distancijsko regularan graf (DRG) ako broj $|N_i(x) \cap N_j(y)|$ ovisi samo o indeksima $i$, $j$ te o udaljenosti $\partial(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in X$.

## Definicija 2.

Povezan graf $G$ je distancijsko regularan ako je regularan stupnja $\Bbbk$ i za svaka dva vrha na udaljenosti $\partial(x, y) = i$ brojevi $b_i = |N_{i+1}(x) \cap N_1(y)|$ i $c_i = |N_{i-1}(x) \cap N_1(y)|$ su konstantni.

## Teorem.

Neka je $G$ distancijsko regularan graf dijametra $d$. Ako za vrhove $x, y \in X$ definiramo da su $i$-asocirani kad je $\partial(x, y) = i$, dobivamo asocijacijsku shemu s $d$ klasa.

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

Prvi graf Hammingove sheme $H(n, q, 1)$ je distancijski regularan:

$$x \sim y \iff \partial(x, y) = 1, \quad \forall x, y \in F^n$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

Prvi graf Hammingove sheme $H(n, q, 1)$ je distancijsko regularan:

$$x \sim y \iff \partial(x, y) = 1, \quad \forall x, y \in F^n$$

Grafovska metrika $\partial_1$ u $H(n, q, 1)$ podudara se s Hammingovom metr. $\partial$.

Prvi graf Hammingove sheme $H(n, q, 1)$ je distancijsko regularan:

$$x \sim y \iff \partial(x, y) = 1, \quad \forall x, y \in F^n$$

Grafovska metrika $\partial_1$ u $H(n, q, 1)$ podudara se s Hammingovom metr. $\partial$.

Ako je $\partial(x, y) = k$, možemo mijenjati jednu po jednu koordinatu od $x$ u koordinatu od $y$ i napraviti niz vrhova $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ za koje je $\partial_1(x_{i-1}, x_i) = 1$. To pokazuje da je $\partial_1(x, y) \leq \partial(x, y)$.

Prvi graf Hammingove sheme $H(n,q,1)$ je distancijsko regularan:

$$x \sim y \iff \partial(x,y) = 1, \quad \forall x,y \in F^n$$

Grafovska metrika $\partial_1$ u $H(n,q,1)$ podudara se s Hammingovom metr. $\partial$.

Ako je $\partial(x,y) = k$, možemo mijenjati jednu po jednu koordinatu od $x$ u koordinatu od $y$ i napraviti niz vrhova $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ za koje je $\partial_1(x_{i-1}, x_i) = 1$. To pokazuje da je $\partial_1(x,y) \leq \partial(x,y)$.

Obrnuto, ako je najkraći takav niz duljine $k$, onda u njemu ne mijenjamo dva puta istu koordinatu (inače bismo ga mogli skratiti). Tada se $x$ i $y$ razlikuju na $k$ koordinata i vrijedi $\partial_1(x,y) = \partial(x,y)$.

Prvi graf Hammingove sheme $H(n, q, 1)$ je distancijsko regularan:

$$x \sim y \iff \partial(x, y) = 1, \quad \forall x, y \in F^n$$

Grafovska metrika $\partial_1$ u $H(n, q, 1)$ podudara se s Hammingovom metr. $\partial$.

Ako je $\partial(x, y) = k$, možemo mijenjati jednu po jednu koordinatu od $x$ u koordinatu od $y$ i napraviti niz vrhova $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ za koje je $\partial_1(x_{i-1}, x_i) = 1$. To pokazuje da je $\partial_1(x, y) \leq \partial(x, y)$.

Obrnuto, ako je najkraći takav niz duljine $k$, onda u njemu ne mijenjamo dva puta istu koordinatu (inače bismo ga mogli skratiti). Tada se $x$ i $y$ razlikuju na $k$ koordinata i vrijedi $\partial_1(x, y) = \partial(x, y)$.

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

## Primjer: Johnsonova shema

Neka su $v$ i $\Bbbk$ prirodni brojevi takvi da je $2\Bbbk \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve $\Bbbk$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu $G_i$ ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, \Bbbk)$ s $\Bbbk$ klasa, reda $n = \binom{v}{\Bbbk}$.

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Primjer: Johnsonova shema

Neka su $v$ i $k$ prirodni brojevi takvi da je $2k \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve $k$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu $G_i$ ako je $|X \cap Y| = k - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, k)$ s $k$ klasa, reda $n = \binom{v}{k}$.

Johnsonov graf $G_1 = J(v, k, 1)$ je distancijsko regularan:

$$X \sim Y \iff |X \cap Y| = k - 1, \quad \forall X, Y \in \binom{V}{k}$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Primjer: Johnsonova shema

Neka su $v$ i $\Bbbk$ prirodni brojevi takvi da je $2\Bbbk \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve $\Bbbk$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu $G_i$ ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, \Bbbk)$ s $\Bbbk$ klasa, reda $n = \binom{v}{\Bbbk}$.

Johnsonov graf $G_1 = J(v, \Bbbk, 1)$ je distancijsko regularan:

$$X \sim Y \iff |X \cap Y| = \Bbbk - 1, \quad \forall X, Y \in \binom{V}{\Bbbk}$$

Grafovska metrika u $J(v, \Bbbk, 1)$ je $\partial_1(X, Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i vrijedi

$$\partial_1(X, Y) = i \iff |X \cap Y| = \Bbbk - i$$

## Primjer: Johnsonova shema

Neka su $v$ i $\Bbbk$ prirodni brojevi takvi da je $2\Bbbk \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve $\Bbbk$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu $G_i$ ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, \Bbbk)$ s $\Bbbk$ klasa, reda $n = \binom{v}{\Bbbk}$.

Johnsonov graf $G_1 = J(v, \Bbbk, 1)$ je distancijsko regularan:

$$X \sim Y \iff |X \cap Y| = \Bbbk - 1, \quad \forall X, Y \in \binom{V}{\Bbbk}$$

Grafovska metrika u $J(v, \Bbbk, 1)$ je $\partial_1(X, Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i vrijedi

$$\partial_1(X, Y) = i \iff |X \cap Y| = \Bbbk - i$$

Asocijacijska shema dobivena od $J(v, \Bbbk, 1)$ je Johnsonova shema.

## Zadatak.

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X, Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

**Zadatak.**

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X,Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X,Y)$?

**Zadatak.**

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X, Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X, Y)$? $k$ (za disjunktne $X$, $Y$)

**Zadatak.**

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X, Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X, Y)$? $k$ (za disjunktne $X$, $Y$)

Kolika je najveća veličina $M = |C|$ ako je $d = k$?

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Zadatak.

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X, Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X, Y)$? $k$ (za disjunktne $X$, $Y$)

Kolika je najveća veličina $M = |C|$ ako je $d = k$? $M \leq \left\lfloor \frac{v}{k} \right\rfloor$

**Zadatak.**

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X,Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X,Y)$? $\Bbbk$ (za disjunktne $X$, $Y$)

Kolika je najveća veličina $M = |C|$ ako je $d = \Bbbk$? $M \leq \left\lfloor \frac{v}{\Bbbk} \right\rfloor$

Dostiže se ako $\Bbbk | v$ i $C$ je particija od $V$.

**Zadatak.**

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X,Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X,Y)$? $k$ (za disjunktne $X$, $Y$)

Kolika je najveća veličina $M = |C|$ ako je $d = k$? $M \leq \left\lfloor \frac{v}{k} \right\rfloor$

Dostiže se ako $k | v$ i $C$ je particija od $V$.

S. M. Johnson, *A new upper bound for error-correcting codes*, IRE Trans. IT **8** (1962), 203–207.

$A(v, 2d, k)$ = najveća moguća veličina binarnog koda duljine $v$ i minimalne Hammingove udaljenosti $2d$ sa svim kodnim riječima težine $k$

**Zadatak.**

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X,Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X,Y)$? $k$ (za disjunktne $X$, $Y$)

Kolika je najveća veličina $M = |C|$ ako je $d = k$? $M \leq \lfloor \frac{v}{k} \rfloor$

Dostiže se ako $k|v$ i $C$ je particija od $V$.

S. M. Johnson, *A new upper bound for error-correcting codes*, IRE Trans. IT **8** (1962), 203–207.

$A(v, 2d, k)$ = najveća moguća veličina binarnog koda duljine $v$ i minimalne Hammingove udaljenosti $2d$ sa svim kodnim riječima težine $k$

$$\partial_1(X,Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y| = \frac{1}{2}\partial(x,y)$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

**Zadatak.**

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{k}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X,Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X,Y)$? $k$ (za disjunktne $X$, $Y$)

Kolika je najveća veličina $M = |C|$ ako je $d = k$? $M \leq \left\lfloor \frac{v}{k} \right\rfloor$

Dostiže se ako $k|v$ i $C$ je particija od $V$.

S. M. Johnson, *A new upper bound for error-correcting codes*, IRE Trans. IT **8** (1962), 203–207.

$A(v, 2d, k)$ = najveća moguća veličina binarnog koda duljine $v$ i minimalne Hammingove udaljenosti $2d$ sa svim kodnim riječima težine $k$

$$M \leq A(v, 2d, k)$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Zadatak.

Proučite podskupove Johnsonove sheme $C \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$ sa zadanom minimalnom udaljenosti $d$ obzirom na metriku $\partial_1(X,Y) = \frac{1}{2}|X \Delta Y|$ i prenesite neke rezultate o kodovima iz prethodnog poglavlja.

Kolika je najveća moguća udaljenost $\partial_1(X,Y)$? $\Bbbk$ (za disjunktne $X$, $Y$)

Kolika je najveća veličina $M = |C|$ ako je $d = \Bbbk$? $M \le \left\lfloor \frac{v}{\Bbbk} \right\rfloor$

Dostiže se ako $\Bbbk | v$ i $C$ je particija od $V$.

S. M. Johnson, *A new upper bound for error-correcting codes*, IRE Trans. IT **8** (1962), 203–207.

## Lema.

$$M \le \left\lfloor \frac{v}{\Bbbk} \left\lfloor \frac{v-1}{\Bbbk-1} \left\lfloor \cdots \left\lfloor \frac{n-\Bbbk+d}{d} \right\rfloor \cdots \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor$$

### Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako postoji $(n, M, d)_q$ kod $C$ i ako je $e = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$M \leq \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{e} \binom{n}{i}(q-1)^i}$$

**Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)**

Ako postoji $(v, M, d)_{\Bbbk}$ kod $C$ u $J(v, \Bbbk)$ i ako je $e = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$M \leq \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{e} \binom{n}{i}(q-1)^i}$$

**Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)**

Ako postoji $(v, M, d)_{k}$ kod $C$ u $J(v, k)$ i ako je $e = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$M \leq \frac{\binom{v}{k}}{\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i}(q-1)^i}$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako postoji $(v, M, d)_{\Bbbk}$ kod $C$ u $J(v, \Bbbk)$ i ako je $e = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$M \leq \frac{\binom{v}{\Bbbk}}{\sum\limits_{i=0}^{e} \binom{\Bbbk}{i}\binom{v-\Bbbk}{i}}$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako postoji $(v, M, d)_{\Bbbk}$ kod $C$ u $J(v, \Bbbk)$ i ako je $e = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$M \leq \frac{\binom{v}{\Bbbk}}{\sum\limits_{i=0}^{e} \binom{\Bbbk}{i}\binom{v-\Bbbk}{i}}$$

Natalia Silberstein, *Properties of codes in the Johnson scheme*, magistarski rad, Technion, Haifa, 2007. https://arxiv.org/pdf/1004.4882

**Definicija.**

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima $t$-$(v, k, \lambda)$ ako za svaki $t$-člani podskup od $V$ postoji točno $\lambda$ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od $V$ zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

**Definicija.**

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima $t$-$(v, \Bbbk, \lambda)$ ako za svaki $t$-člani podskup od $V$ postoji točno $\lambda$ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od $V$ zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

**Definicija.**

Za konačan skup točaka $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ iz sfere $\Omega = S^{m-1}$ kažemo da je sferni $t$-dizajn ako za svaki polinom $f \in \mathrm{Pol}(m, t)$ vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

**Definicija.**

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima $t$-$(v, k, \lambda)$ ako za svaki $t$-člani podskup od $V$ postoji točno $\lambda$ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od $V$ zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

**Propozicija.**

Familija $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$ je $t$-$(v, k, \lambda)$ dizajn ako i samo ako za svaku funkciju $f \in \mathrm{Pol}(\Omega, t)$ vrijedi

$$\frac{1}{b} \sum_{X \in \mathscr{D}} f(X) = \frac{1}{\binom{v}{k}} \sum_{X \in \Omega} f(X)$$

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

## Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima $t$-$(v, k, \lambda)$ ako za svaki $t$-člani podskup od $V$ postoji točno $\lambda$ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od $V$ zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Dizajni u Q-polinomijalnim asocijacijskim shemama...

# Kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama

**Definicija.**

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima $t$-$(v, \Bbbk, \lambda)$ ako za svaki $t$-člani podskup od $V$ postoji točno $\lambda$ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od $V$ zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Dizajni u Q-polinomijalnim asocijacijskim shemama...

Kodovi u P-polinomijalnim asocijacijskim shemama, tj. shemama dobivenim od distancijsko regularnih grafova...

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathcal{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathfrak{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathcal{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$ $\quad$ $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathfrak{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$ $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathfrak{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$ $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

$A_0, \ldots, A_d$ = Schurove idempotente

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathcal{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$ $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

$A_0, \ldots, A_d$ = Schurove idempotente

$E_0, \ldots, E_d$ = primitivne idempotente

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathcal{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$   $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

$A_0, \ldots, A_d$ = Schurove idempotente

$E_0, \ldots, E_d$ = primitivne idempotente

$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle$ Bose-Mesnerova algebra

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathcal{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$ $\quad$ $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

$A_0, \ldots, A_d$ = Schurove idempotente

$E_0, \ldots, E_d$ = primitivne idempotente

$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle$ Bose-Mesnerova algebra

Nad poljem $\mathbb{R}$! (zbog simetričnosti)

**Oznake:**

$\mathcal{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$  $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

$A_0, \ldots, A_d$ = Schurove idempotente

$E_0, \ldots, E_d$ = primitivne idempotente

$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle$ Bose-Mesnerova algebra

Nad poljem $\mathbb{R}$! (zbog simetričnosti)

$p_{ij}^k$ = presječni brojevi,  $q_{ij}^k$ = Kreinovi parametri

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathfrak{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$ $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

$A_0, \ldots, A_d$ = Schurove idempotente

$E_0, \ldots, E_d$ = primitivne idempotente

$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle$ Bose-Mesnerova algebra

Nad poljem $\mathbb{R}$! (zbog simetričnosti)

$p_{ij}^k$ = presječni brojevi, $q_{ij}^k$ = Kreinovi parametri

$P_i(j)$ = svojstvene vrijednosti

$Q_i(j)$ = dualne svojstvene vrijednosti

# P-polinomijalnost

**Oznake:**

$\mathcal{X}$ = asocijska shema (sim. koherentna konfiguracija) reda $n$ sa $d$ klasa

$\cancel{J(v,k)}$ $J(v,d)$ $\quad$ $\cancel{H(n,q)}$ $H(d,q)$

$X$ = skup vrhova

$A_0, \ldots, A_d$ = Schurove idempotente

$E_0, \ldots, E_d$ = primitivne idempotente

$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle = \langle E_0, \ldots, E_d \rangle$ Bose-Mesnerova algebra
Nad poljem $\mathbb{R}$! (zbog simetričnosti)

$p_{ij}^k$ = presječni brojevi, $\quad q_{ij}^k$ = Kreinovi parametri

$P_i(j)$ = svojstvene vrijednosti
$Q_i(j)$ = dualne svojstvene vrijednosti $\quad \in \mathbb{R}$

# P-polinomijalnost

Je li bitan redoslijed grafova...

## Definicija.

Asocijacijska shema s $d$ klasa sastoji se od grafova $G_0, \ldots, G_d$ sa zajedničkim $n$-članim skupom vrhova $X$ takvih da vrijedi:

1. $G_0$ je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova,
2. $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa $K_n$,
3. za svaki brid $\{x, y\}$ u $G_k$, broj vrhova $z$ takvih da je $\{x, z\}$ brid u $G_i$, a $\{z, y\}$ brid u $G_j$ ovisi samo o indeksima $i$, $j$, $k$. Označavamo ga $p_{ij}^k$ i zovemo *presječnim brojem* sheme.

# P-polinomijalnost

Je li bitan redoslijed grafova, relacija...

## Definicija.

Koherentna konfiguracija reda $n$ s $d$ klasa sastoji se od $n$-članog skupa vrhova $X$ i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala",
2. $\{R_0, \ldots, R_d\}$ čine particiju od $X \times X$,
3. za svaki indeks $i$ postoji indeks $i'$ takav da je $R_i^t = R_{i'}$,
4. za svaki izbor indeksa $i, j, k$ postoji *presječni broj* $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\ (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve parove $(x,y) \in R_k$.

# P-polinomijalnost

Je li bitan redoslijed grafova, relacija, odnosno Schurovih idempotenta?

## Definicija.

Koherentna konfiguracija reda $n$ s $d$ klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve $i$, $j$.

# P-polinomijalnost

Je li bitan redoslijed grafova, relacija, odnosno Schurovih idempotenta?

**Definicija.**

Koherentna konfiguracija reda $n$ s $d$ klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve $i$, $j$.

Ako promijenimo redoslijed, promijenit će se presječni brojevi!

# P-polinomijalnost

Je li bitan redoslijed grafova, relacija, odnosno Schurovih idempotenta?

## Definicija.

Koherentna konfiguracija reda $n$ s $d$ klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve $i$, $j$.

Ako promijenimo redoslijed, promijenit će se presječni brojevi!

U asocijacijskoj shemi koja dolazi od distancijsko regularnog grafa imamo prirodan redoslijed relacija: $R_i = \{(x, y) \mid \partial(x, y) = i\}$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathcal{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x, y) = k$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x,y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x,z) = i\}$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathcal{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x, y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x, z) = i\}$

Ako je $p_{ij}^k > 0$, onda postoji vrh $z$ takav da je $\partial(x, z) = i$ i $\partial(z, y) = j$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathcal{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x, y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x, z) = i\}$

Ako je $p_{ij}^k > 0$, onda postoji vrh $z$ takav da je $\partial(x, z) = i$ i $\partial(z, y) = j$

Nejednakost trokuta: $\quad \partial(x, y) \leq \partial(x, z) + \partial(z, y)$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x,y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x,z) = i\}$

Ako je $p_{ij}^k > 0$, onda postoji vrh $z$ takav da je $\partial(x,z) = i$ i $\partial(z,y) = j$

Nejednakost trokuta: $\qquad k \leq i + j$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x, y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x, z) = i\}$

Ako je $p_{ij}^k > 0$, onda postoji vrh $z$ takav da je $\partial(x, z) = i$ i $\partial(z, y) = j$

Nejednakost trokuta: $\quad k \leq i + j$

$$k > i + j \;\Rightarrow\; p_{ij}^k = 0$$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathscr{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x,y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x,z) = i\}$

Ako je $p_{ij}^k > 0$, onda postoji vrh $z$ takav da je $\partial(x,z) = i$ i $\partial(z,y) = j$

Nejednakost trokuta: $\quad k \le i + j$

$$k > i + j \;\Rightarrow\; p_{ij}^k = 0$$

$$i > j + k \;\Rightarrow\; p_{ij}^k = 0$$

$$j > i + k \;\Rightarrow\; p_{ij}^k = 0$$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x,y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x,z) = i\}$

Ako je $k = i + j \dots$

$\partial(x,y) = k$ znači da postoji put $x = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k = y$ duljine $k$ i to je najkraći mogući put od $x$ do $y$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x, y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x, z) = i\}$

Ako je $k = i + j \ldots$

$\partial(x, y) = k$ znači da postoji put $x = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k = y$ duljine $k$ i to je najkraći mogući put od $x$ do $y$

Uzmemo $z = x_i$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x,y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x,z) = i\}$

Ako je $k = i + j \dots$

$\partial(x,y) = k$ znači da postoji put $x = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k = y$ duljine $k$ i to je najkraći mogući put od $x$ do $y$

Uzmemo $z = x_i \;\; \Rightarrow \;\; \partial(x,z) = i,\, \partial(z,y) = k - i = j$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x, y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x, z) = i\}$

Ako je $k = i + j \ldots$

$\partial(x, y) = k$ znači da postoji put $x = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k = y$ duljine $k$ i to je najkraći mogući put od $x$ do $y$

Uzmemo $z = x_i \;\;\Rightarrow\;\; \partial(x, z) = i,\, \partial(z, y) = k - i = j \;\;\Rightarrow\;\; p_{ij}^k \neq 0$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x,y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x,z) = i\}$

Ako je $k = i + j \dots$

$\partial(x,y) = k$ znači da postoji put $x = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k = y$ duljine $k$ i to je najkraći mogući put od $x$ do $y$

Uzmemo $z = x_i \;\Rightarrow\; \partial(x,z) = i,\, \partial(z,y) = k - i = j \;\Rightarrow\; p_{ij}^k \neq 0$

$$k = i + j \;\Rightarrow\; p_{ij}^k \neq 0$$

# P-polinomijalnost

Ako $\mathfrak{X}$ dolazi od distancijsko regularnog grafa...

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_j(y)|$ za bilo koji par vrhova na udaljenosti $\partial(x,y) = k$

$N_i(x) = \{z \in X \mid \partial(x,z) = i\}$

Ako je $k = i + j \ldots$

$\partial(x,y) = k$ znači da postoji put $x = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_k = y$ duljine $k$ i to je najkraći mogući put od $x$ do $y$

Uzmemo $z = x_i \;\Rightarrow\; \partial(x,z) = i,\, \partial(z,y) = k - i = j \;\Rightarrow\; p_{ij}^k \neq 0$

$$k = i + j \;\Rightarrow\; p_{ij}^k \neq 0$$

$$i = j + k \;\Rightarrow\; p_{ij}^k \neq 0$$

$$j = i + k \;\Rightarrow\; p_{ij}^k \neq 0$$

# P-polinomijalnost

**Definicija.**

Kažemo da su relacije $(R_0, \ldots, R_d)$ u P-polinomijalnom poretku ako vrijedi

1. $p_{ij}^k = 0$ uvijek kad je jedan od indeksa $i$, $j$, $k$ veći od zbroja druga dva,
2. $p_{ij}^k \neq 0$ uvijek kad je jedan od indeksa $i$, $j$, $k$ jednak zbroju druga dva.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ kažemo da je P-polinomijalna ili metrička ako postoji takav poredak relacija.

# P-polinomijalnost

## Lema 1.

Neka su relacije u P-polinomijalnom poretku. Onda je prva presječna matrica oblika

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_0 & c_1 & & & & \\ b_0 & a_1 & c_2 & & & \\ & b_1 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & c_d \\ & & & & b_{d-1} & a_d \end{bmatrix}$$

Pritom su $a_i = p^i_{1,i}$, $b_i = p^i_{1,i+1}$, $c_i = p^i_{1,i-1}$ i brojevi $b_0, \dots, b_{d-1}$ i $c_1, \dots, c_d$ su različiti od nule.

# P-polinomijalnost

## Lema 1.

Neka su relacije u P-polinomijalnom poretku. Onda je prva presječna matrica oblika

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_0 & c_1 & & & & \\ b_0 & a_1 & c_2 & & & \\ & b_1 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & c_d \\ & & & & b_{d-1} & a_d \end{bmatrix}$$

Pritom su $a_i = p^i_{1,i}$, $b_i = p^i_{1,i+1}$, $c_i = p^i_{1,i-1}$ i brojevi $b_0, \ldots, b_{d-1}$ i $c_1, \ldots, c_d$ su različiti od nule.

Matrica $B = [b_{ij}]$ je tridijagonalna ako za sve $|i - j| > 0$ vrijedi $b_{ij} = 0$.

# P-polinomijalnost

## Lema 1.

Neka su relacije u P-polinomijalnom poretku. Onda je prva presječna matrica oblika

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_0 & c_1 & & & & \\ b_0 & a_1 & c_2 & & & \\ & b_1 & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & c_d \\ & & & & b_{d-1} & a_d \end{bmatrix}$$

Pritom su $a_i = p^i_{1,i}$, $b_i = p^i_{1,i+1}$, $c_i = p^i_{1,i-1}$ i brojevi $b_0, \ldots, b_{d-1}$ i $c_1, \ldots, c_d$ su različiti od nule.

Matrica $B = [b_{ij}]$ je tridijagonalna ako za sve $|i - j| > 0$ vrijedi $b_{ij} = 0$. Ako su uz to brojevi na "sporednim dijagonalama" $b_{i-1,i} \neq 0$, $b_{i,i-1} \neq 0$ različiti od nule, kažemo da je ireducibilno tridijagonalna.

# P-polinomijalnost

**Korolar.**

Ako su relacije u P-polinomijalnom poretku i ako je $A = A_1$, onda vrijedi

$$AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, d-1$$

$$AA_d = b_{d-1}A_{d-1} + a_dA_d$$

# P-polinomijalnost

**Korolar.**

Ako su relacije u P-polinomijalnom poretku i ako je $A = A_1$, onda vrijedi

$$AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, d-1$$

$$AA_d = b_{d-1}A_{d-1} + a_dA_d$$

**Zadatak.**

Ako su relacije u P-polinomijalnom poretku, pokažite da su stupnjevi sheme

$$n_i = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i}$$

**Korolar.**

Ako su relacije u P-polinomijalnom poretku i ako je $A = A_1$, onda vrijedi

$$AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1}, \quad i = 1, \dots, d-1$$

$$AA_d = b_{d-1}A_{d-1} + a_dA_d$$

Definiramo polinome $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, ...

$$xf_i(x) = b_{i-1}f_{i-1}(x) + a_if_i(x) + c_{i+1}f_{i+1}(x)$$

# P-polinomijalnost

**Korolar.**

Ako su relacije u P-polinomijalnom poretku i ako je $A = A_1$, onda vrijedi

$$AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, d-1$$

$$AA_d = b_{d-1}A_{d-1} + a_dA_d$$

Definiramo polinome $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, ...

$$f_{i+1}(x) = \frac{1}{c_{i+1}}\Big[(x - a_i)f_i(x) - b_{i-1}f_{i-1}(x)\Big]$$

# P-polinomijalnost

**Korolar.**

Ako su relacije u P-polinomijalnom poretku i ako je $A = A_1$, onda vrijedi

$$AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_i A_i + c_{i+1}A_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, d-1$$

$$AA_d = b_{d-1}A_{d-1} + a_d A_d$$

Definiramo polinome $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, ...

$$f_{i+1}(x) = \frac{1}{c_{i+1}} \left[ (x - a_i) f_i(x) - b_{i-1} f_{i-1}(x) \right]$$

**Lema 2.**

Polinom $f_i(x)$ je stupnja $i$, a vodeći koeficijent mu je $\frac{1}{c_1 \cdots c_i}$, za $i = 0, \ldots, d+1$. Vrijedi $A_i = f_i(A)$ za $i = 0, \ldots, d$ te $f_{d+1}(A) = 0$.

# P-polinomijalnost

**Propozicija.**

Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ generirana je matricom $A$. Normirani polinom $(c_1 \cdots c_d) f_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A$.

# P-polinomijalnost

## Propozicija.

Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ generirana je matricom $A$. Normirani polinom $(c_1 \cdots c_d) f_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A$.

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_i(j) E_j, \quad i = 0, \ldots, d$$

# P-polinomijalnost

## Propozicija.

Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ generirana je matricom $A$. Normirani polinom $(c_1 \cdots c_d) f_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A$.

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_i(j) E_j, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A = A_1$ s $\theta_j = P_1(j)$

# P-polinomijalnost

**Propozicija.**

Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ generirana je matricom $A$. Normirani polinom $(c_1 \cdots c_d) f_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A$.

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_i(j) E_j, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A = A_1$ s $\theta_j = P_1(j)$

**Propozicija.**

Brojevi $\theta_0, \ldots, \theta_d$ su nultočke polinoma $f_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

# P-polinomijalnost

**Propozicija.**

Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ generirana je matricom $A$. Normirani polinom $(c_1 \cdots c_d) f_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A$.

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_i(j) E_j, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A = A_1$ s $\theta_j = P_1(j)$

**Propozicija.**

Brojevi $\theta_0, \ldots, \theta_d$ su nultočke polinoma $f_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

**Lema 3.**

Vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$, za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

# P-polinomijalnost

## Propozicija.

Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ generirana je matricom $A$. Normirani polinom $(c_1 \cdots c_d) f_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A$.

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_i(j) E_j, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A = A_1$ s $\theta_j = P_1(j)$

## Propozicija.

Brojevi $\theta_0, \ldots, \theta_d$ su nultočke polinoma $f_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

## Lema 3.

Vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$, za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Leme **karakteriziraju** P-polinomijalnost!

# P-polinomijalnost

**Teorem.**

Za asocijacijsku shemu $\mathfrak{X}$ ekvivalentno je

1. relacije su u P-polinomijalnom poretku,
2. prva presječna matrica $B_1$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i = f_i(A)$ za $A = A_1$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$ za $\theta_j = P_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

# P-polinomijalnost

**Teorem.**

Za asocijacijsku shemu $\mathfrak{X}$ ekvivalentno je

1. relacije su u P-polinomijalnom poretku,
2. prva presječna matrica $B_1$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i = f_i(A)$ za $A = A_1$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$ za $\theta_j = P_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Asocijacijske sheme koje dolaze od DRG-ova su P-polinomijalne.

# P-polinomijalnost

**Teorem.**

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ ekvivalentno je

1. relacije su u P-polinomijalnom poretku,
2. prva presječna matrica $B_1$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i = f_i(A)$ za $A = A_1$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$ za $\theta_j = P_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Asocijacijske sheme koje dolaze od DRG-ova su P-polinomijalne. **Zašto?**

# P-polinomijalnost

**Teorem.**

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ ekvivalentno je

1. relacije su u P-polinomijalnom poretku,
2. prva presječna matrica $B_1$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i = f_i(A)$ za $A = A_1$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$ za $\theta_j = P_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Asocijacijske sheme koje dolaze od DRG-ova su P-polinomijalne. **Obrat?**

# P-polinomijalnost

**Teorem.**

Za asocijacijsku shemu $\mathfrak{X}$ ekvivalentno je

1. relacije su u P-polinomijalnom poretku,
2. prva presječna matrica $B_1$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i = f_i(A)$ za $A = A_1$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f_i$ stupnja $i$ te vrijedi $P_i(j) = f_i(\theta_j)$ za $\theta_j = P_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Asocijacijske sheme koje dolaze od DRG-ova su P-polinomijalne. **Obrat?**

**Teorem.**

Neka je $\mathfrak{X}$ asocijacijska shema s relacijama $(R_0, \ldots, R_d)$ u P-polinomijalnom poretku. Onda je graf $G$ s relacijom susjedstva $R_1$ distancijsko regularan dijametra $d$, a ostale relacije dobivamo kao
$R_i = \{(x, y) \in X \times X \mid \partial(x, y) = i\}$ iz metrike $\partial$ u grafu $G$.

# P-polinomijalnost

Hammingova i Johnsonova shema su P-polinomijalne!

# P-polinomijalnost

Hammingova i Johnsonova shema su P-polinomijalne!

**Zadatak.**

Pokažite da u $H(d,q)$ vrijedi $a_i = (q-2)i$, $b_i = (q-1)(d-1)$, $c_i = i$ za $i = 0, \ldots, d$.

**Zadatak.**

Pokažite da u $J(v,d)$ vrijedi $a_i = i(v-2i)$, $b_i = (d-i)(v-d-i)$, $c_i = i^2$ za $i = 0, \ldots, d$.

# P-polinomijalnost

Hammingova i Johnsonova shema su P-polinomijalne!

**Zadatak.**

Pokažite da u $H(d,q)$ vrijedi $a_i = (q-2)i$, $b_i = (q-1)(d-1)$, $c_i = i$ za $i = 0, \dots, d$.

**Zadatak.**

Pokažite da u $J(v,d)$ vrijedi $a_i = i(v-2i)$, $b_i = (d-i)(v-d-i)$, $c_i = i^2$ za $i = 0, \dots, d$.

Kreinovi parametri:

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$$

# P-polinomijalnost

Hammingova i Johnsonova shema su P-polinomijalne!

**Zadatak.**

Pokažite da u $H(d,q)$ vrijedi $a_i = (q-2)i$, $b_i = (q-1)(d-1)$, $c_i = i$ za $i = 0, \ldots, d$.

**Zadatak.**

Pokažite da u $J(v,d)$ vrijedi $a_i = i(v-2i)$, $b_i = (d-i)(v-d-i)$, $c_i = i^2$ za $i = 0, \ldots, d$.

Kreinovi parametri:

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$$

**Ovise o poretku primitivnih idempotenta!**

# Q-polinomijalnost

**Definicija.**

Kažemo da su primitivne idempotente $(E_0, \ldots, E_d)$ u Q-polinomijalnom poretku ako vrijedi

1. $q_{ij}^k = 0$ uvijek kad je jedan od indeksa $i$, $j$, $k$ veći od zbroja druga dva,
2. $q_{ij}^k \neq 0$ uvijek kad je jedan od indeksa $i$, $j$, $k$ jednak zbroju druga dva.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ kažemo da je Q-polinomijalna ili kometrička ako postoji takav poredak primitivnih idempotenta.

# Q-polinomijalnost

## Lema $1^*$.

Neka su primitivne idempotente u Q-polinomijalnom poretku. Onda je prva dualna presječna matrica sheme $\mathcal{X}$ ireducibilno tridijagonalna:

$$B_1^\circ = \begin{bmatrix} a_0^* & c_1^* & & & & \\ b_0^* & a_1^* & c_2^* & & & \\ & b_1^* & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & c_d^* \\ & & & & b_{d-1}^* & a_d^* \end{bmatrix}$$

Pritom su $a_i^* = q_{1,i}^i$, $b_i^* = q_{1,i+1}^i$, $c_i^* = q_{1,i-1}^i$ i brojevi $b_0^*, \ldots, b_{d-1}^*$ i $c_1^*, \ldots, c_d^*$ su različiti od nule.

# Q-polinomijalnost

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ 😳

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ 😳

Fiksiramo vrh $x_0 \in X$ i identificiramo skup vrhova $X = \{1, \ldots, n\}$ s kanonskom bazom od $\mathbb{C}^n$ (ili $\mathbb{R}^n$):

$$x = i \quad \leftrightarrow \quad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

# Q-polinomijalnost

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ 😳

Fiksiramo vrh $x_0 \in X$ i identificiramo skup vrhova $X = \{1, \ldots, n\}$ s kanonskom bazom od $\mathbb{C}^n$ (ili $\mathbb{R}^n$):

$$x = i \quad \leftrightarrow \quad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

Neka je $V_i^*$ potprostor od $\mathbb{C}^n$ razapet sa $N_i(x_0) = \{x \in X \mid (x_0, x) \in R_i\}$

# Q-polinomijalnost

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ 😳

Fiksiramo vrh $x_0 \in X$ i identificiramo skup vrhova $X = \{1, \ldots, n\}$ s kanonskom bazom od $\mathbb{C}^n$ (ili $\mathbb{R}^n$):

$$x = i \quad \leftrightarrow \quad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

Neka je $V_i^*$ potprostor od $\mathbb{C}^n$ razapet sa $N_i(x_0) = \{x \in X \mid (x_0, x) \in R_i\}$

$$\dim V_i^* = n_i, \qquad \mathbb{C}^n = V_0^* \oplus V_1^* \oplus \cdots \oplus V_d^*$$

# Q-polinomijalnost

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ 😳

Fiksiramo vrh $x_0 \in X$ i identificiramo skup vrhova $X = \{1, \ldots, n\}$ s kanonskom bazom od $\mathbb{C}^n$ (ili $\mathbb{R}^n$):

$$x = i \quad \leftrightarrow \quad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

Neka je $V_i^*$ potprostor od $\mathbb{C}^n$ razapet sa $N_i(x_0) = \{x \in X \mid (x_0, x) \in R_i\}$

$$\dim V_i^* = n_i, \qquad \mathbb{C}^n = V_0^* \oplus V_1^* \oplus \cdots \oplus V_d^*$$

Neka je $E_i^*$ matrica ortogonalne projekcije $\mathbb{C}^n$ na $V_i^*$:

$$(E_i^*)_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = y \text{ i } (x_0, x) \in R_i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

# Q-polinomijalnost

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ 😳

Fiksiramo vrh $x_0 \in X$ i identificiramo skup vrhova $X = \{1, \ldots, n\}$ s kanonskom bazom od $\mathbb{C}^n$ (ili $\mathbb{R}^n$):

$$x = i \quad \leftrightarrow \quad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

Neka je $V_i^*$ potprostor od $\mathbb{C}^n$ razapet sa $N_i(x_0) = \{x \in X \mid (x_0, x) \in R_i\}$

$$\dim V_i^* = n_i, \qquad \mathbb{C}^n = V_0^* \oplus V_1^* \oplus \cdots \oplus V_d^*$$

Neka je $E_i^*$ matrica ortogonalne projekcije $\mathbb{C}^n$ na $V_i^*$:

$$(E_i^*)_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = y \text{ i } (x_0, x) \in R_i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$E_0^* + \ldots + E_d^* = I, \qquad E_i^* E_j^* = \delta_{ij} E_i^*$$

# Q-polinomijalnost

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

# Q-polinomijalnost

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

$$A_i^* A_j^* = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k A_k^*, \quad i, j = 0, \ldots, d$$

# Q-polinomijalnost

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

$$A_i^* A_j^* = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k A_k^*, \quad i, j = 0, \ldots, d$$

Potprostor $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*(x_0) = \langle A_0^*, \ldots, A_d^* \rangle$ je podalgebra od $M_n(\mathbb{C})$, takozvana dualna Bose-Mesnerova algebra obzirom na vrh $x_0$.

# Q-polinomijalnost

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

$$A_i^* A_j^* = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k A_k^*, \quad i, j = 0, \ldots, d$$

Potprostor $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*(x_0) = \langle A_0^*, \ldots, A_d^* \rangle$ je podalgebra od $M_n(\mathbb{C})$, takozvana dualna Bose-Mesnerova algebra obzirom na vrh $x_0$.

Izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \circ)$ s operacijom Schurovog množenja matrica.

# Q-polinomijalnost

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

$$A_i^* A_j^* = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k A_k^*, \quad i, j = 0, \ldots, d$$

Potprostor $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*(x_0) = \langle A_0^*, \ldots, A_d^* \rangle$ je podalgebra od $M_n(\mathbb{C})$, takozvana dualna Bose-Mesnerova algebra obzirom na vrh $x_0$.

Izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \circ)$ s operacijom Schurovog množenja matrica.

## Korolar.

Ako su primitivne idempotente u Q-polinomijalnom poretku i $A^* = A_1^*$,

$$A^* A_i^* = b_{i-1}^* A_{i-1}^* + a_i^* A_i^* + c_{i+1}^* A_{i+1}^*, \quad i = 1, \ldots, d-1$$

$$A^* A_d^* = b_{d-1}^* A_{d-1}^* + a_d^* A_d^*$$

# Q-polinomijalnost

## Zadatak.

Ako su primitivne idempotente u Q-polinomijalnom poretku, pokažite da su kratnosti sheme

$$m_i = \frac{b_0^* b_1^* \cdots b_{i-1}^*}{c_1^* c_2^* \cdots c_i^*}$$

# Q-polinomijalnost

## Zadatak.

Ako su primitivne idempotente u Q-polinomijalnom poretku, pokažite da su kratnosti sheme

$$m_i = \frac{b_0^* b_1^* \cdots b_{i-1}^*}{c_1^* c_2^* \cdots c_i^*}$$

Definiramo polinome $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, ...

$$x g_i(x) = b_{i-1}^* g_{i-1}(x) + a_i^* g_i(x) + c_{i+1}^* g_{i+1}(x)$$

# Q-polinomijalnost

## Zadatak.

Ako su primitivne idempotente u Q-polinomijalnom poretku, pokažite da su kratnosti sheme

$$m_i = \frac{b_0^* b_1^* \cdots b_{i-1}^*}{c_1^* c_2^* \cdots c_i^*}$$

Definiramo polinome $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, ...

$$g_{i+1}(x) = \frac{1}{c_{i+1}^*}\left[(x - a_i^*)g_i(x) - b_{i-1}^* g_{i-1}(x)\right]$$

# Q-polinomijalnost

## Zadatak.

Ako su primitivne idempotente u Q-polinomijalnom poretku, pokažite da su kratnosti sheme

$$m_i = \frac{b_0^* b_1^* \cdots b_{i-1}^*}{c_1^* c_2^* \cdots c_i^*}$$

Definiramo polinome $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, ...

$$g_{i+1}(x) = \frac{1}{c_{i+1}^*} \Big[ (x - a_i^*) g_i(x) - b_{i-1}^* g_{i-1}(x) \Big]$$

## Lema 2*.

Polinom $g_i(x)$ je stupnja $i$, a vodeći koeficijent mu je $\frac{1}{c_1^* \cdots c_i^*}$, za $i = 0, \ldots, d+1$. Vrijedi $A_i^* = g_i(A^*)$ za $i = 0, \ldots, d$ te $g_{d+1}(A^*) = 0$.

# Q-polinomijalnost

## Propozicija.

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathcal{A}^*$ generirana je matricom $A^*$. Normirani polinom $(c_1^* \cdots c_d^*)g_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A^*$.

# Q-polinomijalnost

## Propozicija.

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ generirana je matricom $A^*$. Normirani polinom $(c_1^* \cdots c_d^*) g_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A^*$.

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A^* = A_1^*$ s $\theta_j^* = Q_1(j)$

# Q-polinomijalnost

**Propozicija.**

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ generirana je matricom $A^*$. Normirani polinom $(c_1^* \cdots c_d^*) g_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A^*$.

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A^* = A_1^*$ s $\theta_j^* = Q_1(j)$

**Propozicija.**

Brojevi $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$ su nultočke polinoma $g_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

# Q-polinomijalnost

**Propozicija.**

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}^*$ generirana je matricom $A^*$. Normirani polinom $(c_1^* \cdots c_d^*) g_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A^*$.

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A^* = A_1^*$ s $\theta_j^* = Q_1(j)$

**Propozicija.**

Brojevi $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$ su nultočke polinoma $g_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

**Lema 3*.**

Vrijedi $Q_i(j) = g_i(\theta_j^*)$, za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

# Q-polinomijalnost

**Propozicija.**

Dualna Bose-Mesnerova algebra $\mathcal{A}^*$ generirana je matricom $A^*$. Normirani polinom $(c_1^* \cdots c_d^*) g_{d+1}(x)$ je minimalni polinom matrice $A^*$.

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*, \quad i = 0, \ldots, d$$

Označimo svojstvene vrijednosti od $A^* = A_1^*$ s $\theta_j^* = Q_1(j)$

**Propozicija.**

Brojevi $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$ su nultočke polinoma $g_{d+1}(x)$ i međusobno su različiti.

**Lema 3*.**

Vrijedi $Q_i(j) = g_i(\theta_j^*)$, za sve $i, j = 0, \ldots, d$.

Leme **karakteriziraju** Q-polinomijalnost!

# Q-polinomijalnost

**Teorem.**

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ ekvivalentno je

1. primitivne idempotente su u Q-polinomijalnom poretku,
2. prva dualna presječna matrica $B_1^\circ$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $g_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i^* = g_i(A^*)$ za $A^* = A_1^*$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $g_i$ stupnja $i$ te vrijedi $Q_i(j) = f_i(\theta_j^*)$ za $\theta_j^* = Q_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

# Q-polinomijalnost

## Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{X}$ ekvivalentno je

1. primitivne idempotente su u Q-polinomijalnom poretku,
2. prva dualna presječna matrica $B_1^\circ$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $g_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i^* = g_i(A^*)$ za $A^* = A_1^*$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $g_i$ stupnja $i$ te vrijedi $Q_i(j) = f_i(\theta_j^*)$ za $\theta_j^* = Q_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Kombinatornu karakterizaciju Q-polinomijalnih shema nemamo 😟

# Q-polinomijalnost

**Teorem.**

Za asocijacijsku shemu $\mathscr{X}$ ekvivalentno je

1. primitivne idempotente su u Q-polinomijalnom poretku,
2. prva dualna presječna matrica $B_1^\circ$ je ireducibilno tridijagonalna,
3. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $g_i$ stupnja $i$ te vrijedi $A_i^* = g_i(A^*)$ za $A^* = A_1^*$, $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje polinomi $g_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $g_i$ stupnja $i$ te vrijedi $Q_i(j) = f_i(\theta_j^*)$ za $\theta_j^* = Q_1(j)$, $i, j = 0, \ldots, d$.

Kombinatornu karakterizaciju Q-polinomijalnih shema nemamo 😟

Hammingova shema i Johnsonova shema su Q-polinomijalne, ali to je teže dokazati nego P-polinomijalnost.

# P- i Q-polinomijalnost

**Zadatak.**

Može li asocijacijska shema imati više P-polinomijalnih poredaka relacija, odnosno Q-polinomijalnih poredaka primitivnih idempotenta?

# P- i Q-polinomijalnost

## Zadatak.

Može li asocijacijska shema imati više P-polinomijalnih poredaka relacija, odnosno Q-polinomijalnih poredaka primitivnih idempotenta?

```
gap> mat:=n->List([0..n-1],i->List([0..n-1],
  j->Minimum((i-j) mod n,(j-i) mod n)));;
gap> pgon:=n->AssociationScheme(mat(n));;
gap> p9:=pgon(9);
< 4-class association scheme of order 9 >
gap> AllPPolynomialOrderings(p9);
[ [ 0, 1, 2, 3, 4 ], [ 0, 2, 4, 3, 1 ], [ 0, 4, 1, 3, 2 ] ]
gap> AllQPolynomialOrderings(p9);
[ [ 0, 2, 3, 1, 4 ], [ 0, 3, 4, 1, 2 ], [ 0, 4, 2, 1, 3 ] ]
```

# P- i Q-polinomijalnost

**Zadatak.**

Može li asocijacijska shema imati više P-polinomijalnih poredaka relacija, odnosno Q-polinomijalnih poredaka primitivnih idempotenta?


E. Bannai, E. Bannai, *How many P-polynomial structures can an association scheme have?*, European J. Combin. **1** (1980), no. 4, 289–298.

A. E. Brouwer, *A remark on association schemes with two P-polynomial structures*, European J. Combin. **10** (1989), no. 6, 523–526.

H. Suzuki, *Association schemes with multiple Q-polynomial structures*, J. Algebraic Combin. **7** (1998), no. 2, 181–196.

# Idući termin

**Ponedjeljak, 17.6.2024. u 18 sati:**

Daniel Šanko

Međusobno nepristrane Hadamardove matrice i asocijacijske sheme

# Idući termin

**Ponedjeljak, 17.6.2024. u 18 sati:**

Daniel Šanko

Međusobno nepristrane Hadamardove matrice i asocijacijske sheme

$$SSSD(144, 78, 42; 6)$$

# Idući termin

**Ponedjeljak, 17.6.2024. u 18 sati:**

Daniel Šanko

Međusobno nepristrane Hadamardove matrice i asocijacijske sheme

$$SSSD(144, 78, 42; 6)$$

H. Kharaghani, S. Sasani, S. Suda, *Mutually unbiased Bush-type Hadamard matrices and association schemes*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 3, P3.10, 11 pp.

# Idući termin

**Ponedjeljak, 17.6.2024. u 18 sati:**

Daniel Šanko

Međusobno nepristrane Hadamardove matrice i asocijacijske sheme

$$SSSD(144, 78, 42; 6)$$

H. Kharaghani, S. Sasani, S. Suda, *Mutually unbiased Bush-type Hadamard matrices and association schemes*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 3, P3.10, 11 pp.

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.