Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

29.4.2024.

Kombinatorni dizajni

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i k prirodni brojevi takvi da je $2k \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve k-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = k - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, k)$ s k klasa, reda $n = \binom{v}{k}$.

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima t-(v, k, λ) ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže.
Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Kombinatorni dizajni

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i $\Bbbk$ prirodni brojevi takvi da je $2\Bbbk \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve $\Bbbk$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, \Bbbk)$ s $\Bbbk$ klasa, reda $n = \binom{v}{\Bbbk}$.

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže.
Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Snaga dizajna $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{\Bbbk}$ je najveći t za koji je on t-dizajn.

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

> *"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ . . ."*

Definicija.

Za konačan skup točaka $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ iz sfere $\Omega = S^{m-1}$ kažemo da je sferni t-dizajn ako za svaki polinom $f \in \mathrm{Pol}(m, t)$ vrijedi

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) \mathrm{d}x$$

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

> *"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space* $\binom{V}{k}\ldots$*"*

Stupanj sfernog dizajna je broj d različitih kutova ili udaljenosti između vektora tog dizajna.

Stupanj kombinatornog dizajna je broj d različitih veličina presjeka blokova tog dizajna. Veličine presjeka blokova su presječni brojevi.

Asocijacijske sheme od dizajna

P. J. Cameron, *Near-regularity conditions for designs*, Geometriae Dedicata **2** (1973), 213–223.

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Teorem (Cameron, Delsarte)

Neka je $\mathscr{D}$ kombinatorni t-(v, k, λ) dizajn stupnja d s presječnim brojevima $x_1 > \ldots > x_d \geq 0$. Stavimo $x_0 = k$ i za blokove $X, Y \in \mathscr{D}$ definiramo da su i-asocirani ako je $|X \cap Y| = x_i$. Ako vrijedi $t \geq 2d - 2$, onda na taj način dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa, podshemu Johnsonove sheme $J(v, k)$.

Za dizajn kojem blokovi čine asocijacijsku shemu kažemo da je shematski.

Inkluzijske matrice

Inkluzijska matrica $W_{t\Bbbk}$ je tipa $\binom{v}{t} \times \binom{v}{\Bbbk}$. Za $T \in \binom{V}{t}$ i $K \in \binom{V}{\Bbbk}$ matrica na mjestu (T, K) ima 1 ako je $T \subseteq K$, a inače ima 0.

Inkluzijske matrice

Inkluzijska matrica $W_{t\Bbbk}$ je tipa $\binom{v}{t} \times \binom{v}{\Bbbk}$. Za $T \in \binom{V}{t}$ i $K \in \binom{V}{\Bbbk}$ matrica na mjestu (T, K) ima 1 ako je $T \subseteq K$, a inače ima 0.

R. M. Wilson, *Incidence matrices of t-designs*, Linear Algebra Appl. **46** (1982), 73–82.

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

Inkluzijske matrice

Inkluzijska matrica $W_{t\Bbbk}$ je tipa $\binom{v}{t} \times \binom{v}{\Bbbk}$. Za $T \in \binom{V}{t}$ i $K \in \binom{V}{\Bbbk}$ matrica na mjestu (T, K) ima 1 ako je $T \subseteq K$, a inače ima 0.

R. M. Wilson, *Incidence matrices of t-designs*, Linear Algebra Appl. **46** (1982), 73–82.

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

Skup vrhova Johnsonove sheme: $\Omega = \binom{V}{\Bbbk}$

Dizajn $\mathscr{D} \subseteq \Omega$ identificiramo s indikatorskom funkcijom $f : \Omega \to \{0, 1\}$, $f(X) = 1$ ako je $X \in \mathscr{D}$, a $f(X) = 0$ inače.

Inkluzijske matrice

Inkluzijska matrica $W_{t\Bbbk}$ je tipa $\binom{v}{t} \times \binom{v}{\Bbbk}$. Za $T \in \binom{V}{t}$ i $K \in \binom{V}{\Bbbk}$ matrica na mjestu (T, K) ima 1 ako je $T \subseteq K$, a inače ima 0.

R. M. Wilson, *Incidence matrices of t-designs*, Linear Algebra Appl. **46** (1982), 73–82.

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

Skup vrhova Johnsonove sheme: $\Omega = \binom{V}{\Bbbk}$

Dizajn $\mathscr{D} \subseteq \Omega$ identificiramo s indikatorskom funkcijom $f : \Omega \to \{0, 1\}$, $f(X) = 1$ ako je $X \in \mathscr{D}$, a $f(X) = 0$ inače.

Propozicija.

Indikatorska funkcija $f : \Omega \to \{0, 1\}$ predstavlja t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn ako i samo ako vrijedi $W_{t\Bbbk} \cdot f = \lambda \mathbb{1}$. Ovdje je $\mathbb{1}$ vektor visine $\binom{v}{t}$ popunjen jedinicama.

Inkluzijske matrice

Propozicija.

Za $i \leq j \leq k$ vrijedi $W_{ij} \cdot W_{jk} = \binom{k-i}{j-i} W_{ik}$.

Inkluzijske matrice

Propozicija.

Za $i \leq j \leq \Bbbk$ vrijedi $W_{ij} \cdot W_{j\Bbbk} = \binom{\Bbbk - i}{j - i} W_{i\Bbbk}$.

Propozicija.

Vrijedi $W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^{\tau} = \sum_{k=0}^{t} \binom{v-i-j}{v-\Bbbk-k} W_{ki}^{\tau} \cdot W_{kj}$.

Inkluzijske matrice

Propozicija.

Za $i \leq j \leq \Bbbk$ vrijedi $W_{ij} \cdot W_{j\Bbbk} = \binom{\Bbbk - i}{j - i} W_{i\Bbbk}$.

Propozicija.

Vrijedi $W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^{\tau} = \sum_{k=0}^{t} \binom{v-i-j}{v-\Bbbk-k} W_{ki}^{\tau} \cdot W_{kj}$.

$A_0, \ldots, A_{\Bbbk}$ = Schurove idempotente Johnsonove sheme $J(v, \Bbbk)$

A_i na mjestu $(X, Y) \in \Omega \times \Omega$ ima 1 ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$, a inače 0

Inkluzijske matrice

Propozicija.

Za $i \leq j \leq \Bbbk$ vrijedi $W_{ij} \cdot W_{j\Bbbk} = \binom{\Bbbk - i}{j - i} W_{i\Bbbk}$.

Propozicija.

Vrijedi $W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^{\tau} = \sum_{k=0}^{t} \binom{v-i-j}{v-\Bbbk-k} W_{ki}^{\tau} \cdot W_{kj}$.

$A_0, \ldots, A_\Bbbk$ = Schurove idempotente Johnsonove sheme $J(v, \Bbbk)$

A_i na mjestu $(X, Y) \in \Omega \times \Omega$ ima 1 ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$, a inače 0

$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_\Bbbk \rangle$ je Bose-Mesnerova algebra od $J(v, \Bbbk)$

Inkluzijske matrice

Propozicija.

Za $i \leq j \leq \Bbbk$ vrijedi $W_{ij} \cdot W_{j\Bbbk} = \binom{\Bbbk - i}{j - i} W_{i\Bbbk}$.

Propozicija.

Vrijedi $W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^{\tau} = \sum_{k=0}^{t} \binom{v-i-j}{v-\Bbbk-k} W_{ki}^{\tau} \cdot W_{kj}$.

$A_0, \ldots, A_\Bbbk$ = Schurove idempotente Johnsonove sheme $J(v, \Bbbk)$

A_i na mjestu $(X, Y) \in \Omega \times \Omega$ ima 1 ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$, a inače 0

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_\Bbbk \rangle$ je Bose-Mesnerova algebra od $J(v, \Bbbk)$

$C_i = W_{i\Bbbk}^{\tau} \cdot W_{i\Bbbk}$, $i = 0, \ldots, \Bbbk$.

Inkluzijske matrice

Propozicija.

Za $i \leq j \leq \Bbbk$ vrijedi $W_{ij} \cdot W_{j\Bbbk} = \binom{\Bbbk - i}{j - i} W_{i\Bbbk}$.

Propozicija.

Vrijedi $W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^{\tau} = \sum_{k=0}^{t} \binom{v - i - j}{v - \Bbbk - k} W_{ki}^{\tau} \cdot W_{kj}$.

$A_0, \ldots, A_\Bbbk$ = Schurove idempotente Johnsonove sheme $J(v, \Bbbk)$

A_i na mjestu $(X, Y) \in \Omega \times \Omega$ ima 1 ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$, a inače 0

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_\Bbbk \rangle$ je Bose-Mesnerova algebra od $J(v, \Bbbk)$

$C_i = W_{i\Bbbk}^{\tau} \cdot W_{i\Bbbk}$, $i = 0, \ldots, \Bbbk$. Matrica C_i na mjestu (X, Y) ima broj podskupova $I \in \binom{V}{i}$ sadržanih u X i Y.

Inkluzijske matrice

Propozicija.

Za $i \leq j \leq \Bbbk$ vrijedi $W_{ij} \cdot W_{j\Bbbk} = \binom{\Bbbk - i}{j - i} W_{i\Bbbk}$.

Propozicija.

Vrijedi $W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^{\tau} = \sum_{k=0}^{t} \binom{v - i - j}{v - \Bbbk - k} W_{ki}^{\tau} \cdot W_{kj}$.

$A_0, \ldots, A_\Bbbk$ = Schurove idempotente Johnsonove sheme $J(v, \Bbbk)$

A_i na mjestu $(X, Y) \in \Omega \times \Omega$ ima 1 ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$, a inače 0

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_\Bbbk \rangle$ je Bose-Mesnerova algebra od $J(v, \Bbbk)$

$C_i = W_{i\Bbbk}^{\tau} \cdot W_{i\Bbbk}$, $i = 0, \ldots, \Bbbk$. Matrica C_i na mjestu (X, Y) ima broj podskupova $I \in \binom{V}{i}$ sadržanih u X i Y. Ako je $|X \cap Y| = j$, to je $\binom{j}{i}$.

Inkluzijske matrice

$$C_i = \sum_{j \geq i} \binom{j}{i} A_{\mathscr{k}-j}, \qquad i = 0, \ldots, \mathscr{k}$$

Inkluzijske matrice

$$C_i = \sum_{j \geq i} \binom{j}{i} A_{\Bbbk - j}, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

$$A_{\Bbbk - i} = \sum_{j \geq i} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} C_j, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

Inkluzijske matrice

$$C_i = \sum_{j \geq i} \binom{j}{i} A_{\Bbbk - j}, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

$$A_{\Bbbk - i} = \sum_{j \geq i} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} C_j, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

Dakle, $\mathscr{A} = \langle C_0, \ldots, C_{\Bbbk} \rangle$

Inkluzijske matrice

$$C_i = \sum_{j \geq i} \binom{j}{i} A_{\Bbbk - j}, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

$$A_{\Bbbk - i} = \sum_{j \geq i} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} C_j, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

Dakle, $\mathscr{A} = \langle C_0, \ldots, C_{\Bbbk} \rangle$

Propozicija.

Vrijedi $\quad C_i C_j = \displaystyle\sum_{k \leq i,j} \binom{v-i-j}{v-\Bbbk-k} \binom{\Bbbk-k}{i-k} \binom{\Bbbk-k}{j-k} C_k$

Inkluzijske matrice

$$C_i = \sum_{j\geq i} \binom{j}{i} A_{\Bbbk - j}, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

$$A_{\Bbbk - i} = \sum_{j\geq i} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} C_j, \qquad i = 0, \ldots, \Bbbk$$

Dakle, $\mathscr{A} = \langle C_0, \ldots, C_{\Bbbk} \rangle$

Propozicija.

Vrijedi $C_i C_j = \sum_{k\leq i,j} \binom{v-i-j}{v-\Bbbk-k} \binom{\Bbbk - k}{i-k} \binom{\Bbbk - k}{j-k} C_k$

$C_i C_j = C_j C_i \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; J(v, \Bbbk)$ je asocijacijska shema

Inkluzijske matrice i funkcije

$\mathscr{D} \subseteq \Omega$ kombinatorni dizajn s $b = |\mathscr{D}|$ blokova

$W_i(\mathscr{D})$ = podmatrica od $W_{i\Bbbk}$ koja se sastoji od stupaca iz $\mathscr{D}$

(to je 0-1 matrica tipa $\binom{v}{i} \times b$)

Inkluzijske matrice i funkcije

$\mathscr{D} \subseteq \Omega$ kombinatorni dizajn s $b = |\mathscr{D}|$ blokova

$W_i(\mathscr{D})$ = podmatrica od $W_{i\Bbbk}$ koja se sastoji od stupaca iz $\mathscr{D}$

(to je 0-1 matrica tipa $\binom{v}{i} \times b$)

Propozicija.

Ako je $\mathscr{D}$ t-dizajn i vrijedi $i + j \leq t$, onda je

$$\frac{1}{b} W_i(\mathscr{D}) \cdot W_j(\mathscr{D})^\tau = \frac{1}{\binom{v}{\Bbbk}} W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^\tau$$

Inkluzijske matrice i funkcije

$\mathscr{D} \subseteq \Omega$ kombinatorni dizajn s $b = |\mathscr{D}|$ blokova

$W_i(\mathscr{D})$ = podmatrica od $W_{i\Bbbk}$ koja se sastoji od stupaca iz $\mathscr{D}$

(to je 0-1 matrica tipa $\binom{v}{i} \times b$)

Propozicija.

Ako je $\mathscr{D}$ t-dizajn i vrijedi $i + j \leq t$, onda je

$$\frac{1}{b} W_i(\mathscr{D}) \cdot W_j(\mathscr{D})^\tau = \frac{1}{\binom{v}{\Bbbk}} W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^\tau$$

$\mathbb{R}^\Omega = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}, \quad T \subseteq V$

Inkluzijske matrice i funkcije

$\mathscr{D} \subseteq \Omega$ kombinatorni dizajn s $b = |\mathscr{D}|$ blokova

$W_i(\mathscr{D})$ = podmatrica od $W_{i\Bbbk}$ koja se sastoji od stupaca iz $\mathscr{D}$

(to je 0-1 matrica tipa $\binom{v}{i} \times b$)

Propozicija.

Ako je $\mathscr{D}$ t-dizajn i vrijedi $i + j \leq t$, onda je

$$\frac{1}{b}\, W_i(\mathscr{D}) \cdot W_j(\mathscr{D})^\tau = \frac{1}{\binom{v}{\Bbbk}}\, W_{i\Bbbk} \cdot W_{j\Bbbk}^\tau$$

$\mathbb{R}^\Omega = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}, \quad T \subseteq V$

Inkluzijska funkcija je $f_T : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_T(X) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } T \subseteq X \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Polinomi

Funkcije f_T, $T \in \binom{V}{t}$ su reci matrice $W_{t\Bbbk}$

Polinomi

Funkcije f_T, $T \in \binom{V}{t}$ su reci matrice $W_{t\Bbbk}$

$\mathrm{Pol}(\Omega, t) =$ potprostor od $\mathbb{R}^\Omega$ razapet funkcijama f_S, $S \subseteq V$, $|S| \leq t$

Polinomi

Funkcije f_T, $T \in \binom{V}{t}$ su reci matrice $W_{t\Bbbk}$

$\text{Pol}(\Omega, t)$ = potprostor od $\mathbb{R}^\Omega$ razapet funkcijama f_S, $S \subseteq V$, $|S| \leq t$

$f_S f_T = f_{S \cup T}$

Polinomi

Funkcije f_T, $T \in \binom{V}{t}$ su reci matrice $W_{t\Bbbk}$

$\mathrm{Pol}(\Omega, t) =$ potprostor od $\mathbb{R}^\Omega$ razapet funkcijama f_S, $S \subseteq V$, $|S| \leq t$

$f_S f_T = f_{S \cup T} \quad \Rightarrow \quad f_S$ je produkt $s = |S|$ funkcija oblika $f_{\{x\}}$, $x \in V$

Polinomi

Funkcije f_T, $T \in \binom{V}{t}$ su reci matrice $W_{t\Bbbk}$

$\mathrm{Pol}(\Omega, t) =$ potprostor od $\mathbb{R}^\Omega$ razapet funkcijama f_S, $S \subseteq V$, $|S| \le t$

$f_S f_T = f_{S \cup T} \quad \Rightarrow \quad f_S$ je produkt $s = |S|$ funkcija oblika $f_{\{x\}}$, $x \in V$

$\mathrm{Pol}(\Omega, t)$ je prostor polinoma stupnja najviše t u varijablama $f_{\{x\}}$, $x \in V$

Polinomi

Funkcije f_T, $T \in \binom{V}{t}$ su reci matrice $W_{t\Bbbk}$

Pol(Ω, t) = potprostor od $\mathbb{R}^\Omega$ razapet funkcijama f_S, $S \subseteq V$, $|S| \leq t$

$f_S f_T = f_{S\cup T} \quad \Rightarrow \quad f_S$ je produkt $s = |S|$ funkcija oblika $f_{\{x\}}$, $x \in V$

Pol(Ω, t) je prostor polinoma stupnja najviše t u varijablama $f_{\{x\}}$, $x \in V$

Propozicija.

Familija $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$ je t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn ako i samo ako za svaku funkciju $f \in$ Pol(Ω, t) vrijedi

$$\frac{1}{b} \sum_{X \in \mathscr{D}} f(X) = \frac{1}{\binom{v}{\Bbbk}} \sum_{X \in \Omega} f(X)$$

Polinomi

Funkcije f_T, $T \in \binom{V}{t}$ su reci matrice $W_{t\Bbbk}$

Pol(Ω, t) = potprostor od $\mathbb{R}^\Omega$ razapet funkcijama f_S, $S \subseteq V$, $|S| \leq t$

$f_S f_T = f_{S \cup T} \quad \Rightarrow \quad f_S$ je produkt $s = |S|$ funkcija oblika $f_{\{x\}}$, $x \in V$

Pol(Ω, t) je prostor polinoma stupnja najviše t u varijablama $f_{\{x\}}$, $x \in V$

Definicija.

Za konačan skup točaka $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ iz sfere $\Omega = S^{m-1}$ kažemo da je sferni t-dizajn ako za svaki polinom $f \in \mathrm{Pol}(m, t)$ vrijedi

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega f(x) \mathrm{d}x$$

Dokaz Cameron-Delsarteova teorema

Lema.

Determinanta

$$\begin{vmatrix} \binom{x_0}{0} & \binom{x_1}{0} & \cdots & \binom{x_d}{0} \\ \binom{x_0}{1} & \binom{x_1}{1} & \cdots & \binom{x_d}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{x_0}{d} & \binom{x_1}{d} & \cdots & \binom{x_d}{d} \end{vmatrix}$$

jednaka je 0 ako i samo ako je $x_i = x_j$ za neke $i \neq j$.

Dokaz Cameron-Delsarteova teorema

Teorem (Cameron, Delsarte)

Neka je $\mathscr{D}$ kombinatorni t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn stupnja d s presječnim brojevima $x_1 > \ldots > x_d \geq 0$. Stavimo $x_0 = \Bbbk$ i za blokove $X, Y \in \mathscr{D}$ definiramo da su i-asocirani ako je $|X \cap Y| = x_i$. Ako vrijedi $t \geq 2d - 2$, onda na taj način dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa, podshemu Johnsonove sheme $J(v, \Bbbk)$.

Dokaz. . .

Shematski dizajni

$d = 1 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 0.$

Shematski dizajni

$d = 1 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 0$. Za sim. dizajne ne dobivamo dodatne uvjete.

Shematski dizajni

$d = 1 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 0$. Za sim. dizajne ne dobivamo dodatne uvjete.

$d = 2 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 2$. Kvazisimetrični 2-dizajni su shematski.

Shematski dizajni

$d = 1 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 0.$ Za sim. dizajne ne dobivamo dodatne uvjete.

$d = 2 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 2.$ Kvazisimetrični 2-dizajni su shematski.

Blokovni graf kvazisimetričnog dizajna: vrhovi su blokovi, a susjedni su ako se sijeku u y točaka ($x < y$ su presječni brojevi).

Shematski dizajni

$d = 1 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 0.$ Za sim. dizajne ne dobivamo dodatne uvjete.

$d = 2 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 2.$ Kvazisimetrični 2-dizajni su shematski.

Blokovni graf kvazisimetričnog dizajna: vrhovi su blokovi, a susjedni su ako se sijeku u y točaka ($x < y$ su presječni brojevi).

S. S. Shrikhande, Bhagwandas, *Duals of incomplete block designs*, J. Indian Statist. Assoc. **3** (1965), 30–37.

J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Strongly regular graphs derived from combinatorial designs*, Canadian J. Math. **22** (1970), 597–614.

Shematski dizajni

$d = 1 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 0$. Za sim. dizajne ne dobivamo dodatne uvjete.

$d = 2 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 2$. Kvazisimetrični 2-dizajni su shematski.

Blokovni graf kvazisimetričnog dizajna: vrhovi su blokovi, a susjedni su ako se sijeku u y točaka ($x < y$ su presječni brojevi).

S. S. Shrikhande, Bhagwandas, *Duals of incomplete block designs*, J. Indian Statist. Assoc. **3** (1965), 30–37.

J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Strongly regular graphs derived from combinatorial designs*, Canadian J. Math. **22** (1970), 597–614.

V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2017. https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/kvazisim.pdf

Shematski dizajni

Teorem 2.3.

Blokovni graf kvazisimetričnog dizajna je $SRG(b, a, c, d)$ za

$$a = \frac{\Bbbk(r-1) - x(b-1)}{y-x}$$

$$c = \frac{x^2(b-2) + 2xy - 2\Bbbk((r-1)x + y) + y(r-\lambda) + \Bbbk^2\lambda}{(x-y)^2}$$

$$d = \frac{x^2 b - rx(2\Bbbk - 1) + (\Bbbk^2 - x)\lambda}{(x-y)^2}$$

Shematski dizajni

Teorem 2.16.

Blokovni graf kvazisimetričnog dizajna je $SRG(b, a, c, d)$ za

$$a = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}$$

$$c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$$

$$d = a + \theta_1\theta_2$$

Pritom je $\{a, \theta_1, \theta_2\}$ spektar blokovnog grafa i vrijedi

$$\theta_1 = \frac{r - \lambda - k + x}{y-x}, \qquad \theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$$

Shematski dizajni

Br.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	Nqsd	Nsrg	Ref.	Napomene
1	19	7	7	1	3	21	57	42	31	30	0	0	[103]	Teorem 3.35
2	19	9	16	3	5	36	76	45	28	24	0	0	[33]	
3	20	8	14	2	4	38	95	54	33	27	0	0	[36]	
4	20	10	18	4	6	38	76	35	18	14	0	0	[36]	
5	21	6	4	0	2	16	56	45	36	36	1	1	[131]	$\mathrm{res}(\mathrm{der}^2\,\mathcal{W})$
6	21	7	12	1	3	40	120	77	52	44	1	1	[131]	$\mathrm{res}^2(\mathrm{der}\,\mathcal{W})$
7	21	8	14	2	4	40	105	52	29	22	0	?	[33]	Teorem 3.35
8	21	9	12	3	5	30	70	27	12	9	0	$\geq$1	[33]	Teorem 3.35
9	22	6	5	0	2	21	77	60	47	45	1	1	[145]	$\mathrm{der}^2\,\mathcal{W}$
10	22	7	16	1	3	56	176	105	68	54	1	1	[131]	$\mathrm{res}(\mathrm{der}\,\mathcal{W})$
11	22	8	12	2	4	36	99	42	21	15	0	?	[33]	
12	23	7	21	1	3	77	253	140	87	65	1	$\geq$1	[145]	$\mathrm{der}\,\mathcal{W}$
13	24	8	7	2	4	23	69	20	7	5	0	?	[31]	
14	28	7	16	1	3	72	288	105	52	30	0	?	[131]	Teorem 2.26(ii)
15	28	12	11	4	6	27	63	32	16	16	$\geq$58891	$\geq$1	[89]	QSDP
16	29	7	12	1	3	56	232	77	36	20	0	?	[131]	Teorem 2.26(ii)
17	31	7	7	1	3	35	155	42	17	9	5	$\geq$1	[132]	$PG_2(4,2)$
18	33	9	6	1	3	24	88	60	41	40	0	?	[33]	
19	33	15	35	6	9	80	176	45	18	9	?	$\geq$1		
20	35	7	3	1	3	17	85	14	3	2	0	?	[33]	Teorem 3.35

Tablica 1: Dopustivi parametri kvazisimetričnih dizajna.

Shematski dizajni

$d = 3 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 4$

4-dizajni s tri presječna broja $x < y < z$ su shematski

Shematski dizajni

$d = 3 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 4$

4-dizajni s tri presječna broja $x < y < z$ su shematski

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic* 4-*designs*, Discrete Math. **346** (2023), no. 7, članak 113385, 7 str.

Shematski dizajni

$d = 3 \rightsquigarrow t \geq 2d - 2 = 4$

4-dizajni s tri presječna broja $x < y < z$ su shematski

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, Discrete Math. **346** (2023), no. 7, članak 113385, 7 str.

Svojstvene vrijednosti $P = [P_j(i)]_{i,j=0}^{3}$ možemo izraziti pomoću

$$\theta_j(i) = \lambda \binom{v-i-j}{\Bbbk - j} \binom{\Bbbk - i}{j - i} \bigg/ \binom{v-4}{\Bbbk - 4}$$

Shematski dizajni

$$
\begin{aligned}
P_0(i) &= 1 \\
P_1(i) &= \frac{yz\theta_0(i) + (1-y-z)\theta_1(i) + 2\theta_2(i) - (y-\Bbbk)(z-\Bbbk)}{(y-x)(z-x)} \\
P_2(i) &= \frac{xz\theta_0(i) + (1-x-z)\theta_1(i) + 2\theta_2(i) - (x-\Bbbk)(z-\Bbbk)}{(x-y)(z-y)} \\
P_3(i) &= \frac{xy\theta_0(i) + (1-x-y)\theta_1(i) + 2\theta_2(i) - (x-\Bbbk)(y-\Bbbk)}{(x-z)(y-z)}
\end{aligned}
$$

Rbr	v	k	λ	x	y	z	Egzistencija
1	11	5	1	1	2	3	$\exists$
2	23	8	4	0	2	4	$\exists$
3	23	11	48	3	5	7	$\exists$
4	24	8	5	0	2	4	$\exists$
5	47	11	8	1	3	5	$\exists$
6	71	35	264	14	17	20	?
7	199	99	2328	44	49	54	?
8	391	195	9264	90	97	104	?
9	647	323	25680	152	161	170	?
10	659	329	390874	153	164	175	?
11	967	483	57720	230	241	252	?

Tablica 4: Dopustivi parametru shematskih 4-dizajna za $v \leq 1000$.

Shematski dizajni

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

Shematski dizajni

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

$$
\begin{aligned}
v &= 8n^2 - 1 \\
k &= 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1) \\
\lambda &= 4n^4 - 7n^2 + 3 = (n-1)(n+1)(4n^2-3) \\
x &= 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1) \\
y &= 2n^2 - 1 \\
z &= 2n^2 + n - 1 = (n+1)(2n-1)
\end{aligned}
$$

$n \in \mathbb{N}$ neparan

Shematski dizajni

Primjer 1. 4-$(11, 5, 1)$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Derivirani dizajn malog Wittovog dizajna 5-$(12, 6, 1)$

Shematski dizajni

Primjer 1. 4-$(11, 5, 1)$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Derivirani dizajn malog Wittovog dizajna 5-$(12, 6, 1)$

Definicija.

Neka je $\mathscr{D}$ t-(v, k, λ) dizajn i $T \in V$ njegova točka.

Derivirani dizajn je $\operatorname{der}_T \mathscr{D} = (\, V \setminus \{T\}, \{B \setminus \{T\} \mid B \in \mathscr{D}, T \in B\}\,)$

Rezidualni dizajn je $\operatorname{res}_T \mathscr{D} = (\, V \setminus \{T\}, \{B \mid B \in \mathscr{D}, T \notin B\}\,)$

Primjer 1. 4-$(11,5,1)$, $x=1$, $y=2$, $z=3$

Derivirani dizajn malog Wittovog dizajna 5-$(12,6,1)$

Definicija.

Neka je $\mathscr{D}$ t-(v,k,λ) dizajn i $T\in V$ njegova točka.

Derivirani dizajn je $\mathrm{der}_T\,\mathscr{D} = (\,V\setminus\{T\},\, \{B\setminus\{T\}\mid B\in\mathscr{D},\, T\in B\}\,)$

Rezidualni dizajn je $\mathrm{res}_T\,\mathscr{D} = (\,V\setminus\{T\},\, \{B\mid B\in\mathscr{D},\, T\notin B\}\,)$

Propozicija.

$\mathrm{der}_T\,\mathscr{D}$ je $(t-1)$-$(v-1,k-1,\lambda)$ dizajn

$\mathrm{res}_T\,\mathscr{D}$ je $(t-1)$-$(v-1,k,\lambda_{t-1}-\lambda)$ dizajn

Primjer 1. 4-$(11,5,1)$, $x=1$, $y=2$, $z=3$

Derivirani dizajn malog Wittovog dizajna 5-$(12,6,1)$

Shematski dizajni

Primjer 1. 4-$(11,5,1)$, $x=1$, $y=2$, $z=3$

Derivirani dizajn malog Wittovog dizajna 5-$(12,6,1)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b=66$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 15 & 20 & 30 \\ 1 & -7 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Shematski dizajni

Primjer 1. 4-$(11, 5, 1)$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Derivirani dizajn malog Wittovog dizajna 5-$(12, 6, 1)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 66$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 20 & 30 \\ 1 & -7 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, verzija 4.12.2, 2022. `https://www.gap-system.org`

L. H. Soicher, *DESIGN, The Design Package for GAP*, verzija 1.7, 2019. `https://gap-packages.github.io/design`

J. Bamberg, A. Hanaki, J. Lansdown, *AssociationSchemes, A GAP package for working with association schemes and homogeneous coherent configurations*, verzija 3.0.0, 2023. `http://www.jesselansdown.com/AssociationSchemes`

V. Krčadinac, *PAG, Prescribed Automorphism Groups*, verzija 0.2.2, 2023. `https://vkrcadinac.github.io/PAG`

Shematski dizajni

```
gap> LoadPackage("PAG");;
gap> m12:=MathieuGroup(12);;
gap> diz1:=KramerMesnerSearch(5,12,6,1,m12)[1];;
gap> diz4:=DerivedBlockDesign(diz1,1);;
gap> AllTDesignLambdas(diz4);
[ 66, 30, 12, 4, 1 ]
gap> IntersectionNumbers(diz4);
[ 1, 2, 3 ]
gap> shema4:=BlockScheme(diz4);
< 3-class association scheme of order 66 >
gap> IsPrimitive(shema4);
true
gap> MatrixOfEigenvalues(shema4);
[ [ 1, 15, 20, 30 ],
  [ 1, -7, -2, 8 ],
  [ 1, -3, 8, -6 ],
  [ 1, 2, -2, -1 ] ]
```

Shematski dizajni

Primjer 2. 4-$(23, 8, 4)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$

Rezidualni dizajn velikog Wittovog dizajna 5-$(24, 8, 1)$

Shematski dizajni

Primjer 2. $4\text{-}(23, 8, 4)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$

Rezidualni dizajn velikog Wittovog dizajna $5\text{-}(24, 8, 1)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 506$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 280 & 210 \\ 1 & -8 & -42 & 49 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Shematski dizajni

Primjer 2. $4\text{-}(23,8,4)$, $x=0$, $y=2$, $z=4$

Rezidualni dizajn velikog Wittovog dizajna $5\text{-}(24,8,1)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b=506$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 15 & 280 & 210 \\ 1 & -8 & -42 & 49 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

```
gap> m24:=MathieuGroup(24);;
gap> diz3:=KramerMesnerSearch(5,24,8,1,m24)[1];;
gap> diz5:=ResidualBlockDesign(diz3,1);;
gap> AllTDesignLambdas(diz5);
[ 506, 176, 56, 16, 4 ]
gap> shema5:=BlockScheme(diz5);
< 3-class association scheme of order 506 >
gap> IsPrimitive(shema5);
true
```

Shematski dizajni

Primjer 3. 4-$(23, 11, 48)$, $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$

Dizajn dobijemo od 4-tranzitivne Mathieuove grupe M_{23}

Shematski dizajni

Primjer 3. 4-$(23, 11, 48)$, $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$

Dizajn dobijemo od 4-tranzitivne Mathieuove grupe M_{23}

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 1288$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 165 & 792 & 330 \\ 1 & -65 & -36 & 100 \\ 1 & 19 & -36 & 16 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Primjer 3. $4\text{-}(23, 11, 48)$, $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$

Dizajn dobijemo od 4-tranzitivne Mathieuove grupe M_{23}

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 1288$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 165 & 792 & 330 \\ 1 & -65 & -36 & 100 \\ 1 & 19 & -36 & 16 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

```
gap> m23:=MathieuGroup(22);;
gap> diz6:=KramerMesnerSearch(4,23,11,48,m23)[1];;
gap> AllTDesignLambdas(diz6);
[ 1288, 616, 280, 120, 48 ]
gap> IntersectionNumbers(diz6);
[ 3, 5, 7 ]
gap> shema6:=BlockScheme(diz6);
< 3-class association scheme of order 1288 >
gap> IsPrimitive(shema6);
true
```

Shematski dizajni

Primjer 4. 4-$(24, 8, 5)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$

To je veliki Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$

Shematski dizajni

Primjer 4. 4-$(24, 8, 5)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$

To je veliki Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 759$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 448 & 280 \\ 1 & -15 & -56 & 70 \\ 1 & 7 & -12 & 4 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Shematski dizajni

Primjer 4. 4-$(24, 8, 5)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$

To je veliki Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 759$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 448 & 280 \\ 1 & -15 & -56 & 70 \\ 1 & 7 & -12 & 4 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Primjer 5. 4-$(47, 11, 8)$, $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$

Dizajn je povezan s kodom kvadratnih ostataka $QR(47, 2)$

Shematski dizajni

Primjer 4. 4-$(24, 8, 5)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$

To je veliki Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 759$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 448 & 280 \\ 1 & -15 & -56 & 70 \\ 1 & 7 & -12 & 4 \\ 1 & -3 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Primjer 5. 4-$(47, 11, 8)$, $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$

Dizajn je povezan s kodom kvadratnih ostataka $QR(47, 2)$

Asocijacijska shema je primitivna, reda $b = 4324$ s tri klase i svojstvenim vrijednostima

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1386 & 2475 & 462 \\ 1 & -259 & 125 & 133 \\ 1 & 29 & -55 & 25 \\ 1 & -6 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

Shematski dizajni

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$ ne moraju biti shematski.

Shematski dizajni

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$ ne moraju biti shematski.

Poznato je beskonačno mnogo takvih dizajna, a neki od njih ipak su shematski!

Shematski dizajni

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$ ne moraju biti shematski.

Poznato je beskonačno mnogo takvih dizajna, a neki od njih ipak su shematski! Dakle, uvjet $t \geq 2d - 2$ iz Cameron-Delsarteova teorema nije nužan da bi dizajn bio shematski.

Shematski dizajni

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$ ne moraju biti shematski.

Poznato je beskonačno mnogo takvih dizajna, a neki od njih ipak su shematski! Dakle, uvjet $t \geq 2d - 2$ iz Cameron-Delsarteova teorema nije nužan da bi dizajn bio shematski.

Jedna serija shematskih 3-dizajna stupnja $d = 3$ dobiva se od klasičnih SSSD$(v, \Bbbk, \lambda; r)$ koji dostižu Nodinu nejednakost.

Shematski dizajni

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$ ne moraju biti shematski.

Poznato je beskonačno mnogo takvih dizajna, a neki od njih ipak su shematski! Dakle, uvjet $t \geq 2d - 2$ iz Cameron-Delsarteova teorema nije nužan da bi dizajn bio shematski.

Jedna serija shematskih 3-dizajna stupnja $d = 3$ dobiva se od klasičnih SSSD$(v, \Bbbk, \lambda; r)$ koji dostižu Nodinu nejednakost.

J.-M. Goethals, *Nonlinear codes defined by quadratic forms over GF(2)*, Information and Control **31** (1976), no. 1, 43–74.

P. J. Cameron, J. J. Seidel, *Quadratic forms over GF(2)*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **76** Indag. Math. **35** (1973), 1–8.

$$(v, \Bbbk, \lambda) = (2^{2m},\ 2^{m-1}(2^m + 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} + 1))$$

$$n = \Bbbk - \lambda = 2^{2(m-1)},\ \ \mu = 2^{m-2}(2^m + 3),\ \ \nu = 2^{m-2}(2^m + 1)$$

Shematski dizajni

Binarni linearni Reed-Mullerov kod $RM(m,2) \quad \rightsquigarrow \quad r = 2^m$ vlakna

Nelinearni Kerdockov kod $\quad \rightsquigarrow \quad r = 2^{2m-1}$ vlakna

Shematski dizajni

Binarni linearni Reed-Mullerov kod $RM(m, 2) \quad \rightsquigarrow \quad r = 2^m$ vlakna

Nelinearni Kerdockov kod $\quad \rightsquigarrow \quad r = 2^{2m-1}$ vlakna

Teorem (Nodina nejednakost)

Ako postoji $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, onda je

$$(r-1)\left[(\Bbbk-2)\lambda\binom{\Bbbk}{3} - (v-2)\left[(v-\Bbbk)\binom{\nu}{3} + \Bbbk\binom{\mu}{3}\right]\right] \leq$$

$$\leq (v-2)\left[(v-1)\binom{\lambda}{3} + \binom{\Bbbk}{3} - \left[(v-k)\binom{\nu}{3} + \Bbbk\binom{\mu}{3}\right]\right]$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako $(X_1, X_2 \cup \cdots \cup X_r)$ čini 3-dizajn.

Shematski dizajni

Binarni linearni Reed-Mullerov kod $RM(m,2)$ $\rightsquigarrow$ $r = 2^m$ vlakna

Nelinearni Kerdockov kod $\rightsquigarrow$ $r = 2^{2m-1}$ vlakna

Teorem (Nodina nejednakost)

Ako postoji $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, onda je

$$(r-1)\left[(\Bbbk-2)\lambda\binom{\Bbbk}{3} - (v-2)\left[(v-\Bbbk)\binom{\nu}{3} + \Bbbk\binom{\mu}{3}\right]\right] \leq$$

$$\leq (v-2)\left[(v-1)\binom{\lambda}{3} + \binom{\Bbbk}{3} - \left[(v-k)\binom{\nu}{3} + \Bbbk\binom{\mu}{3}\right]\right]$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako $(X_1, X_2 \cup \cdots \cup X_r)$ čini 3-dizajn.

Odgovarajuće sheme s tri klase su **imprimitivne**!

Shematski dizajni

Druga serija shematskih 3-dizajna stupnja $d = 3$ su inverzijske ravnine parnog reda, tj. 3-$(n^2 + 1, n + 1, 1)$ dizajni za parne n.

Shematski dizajni

Druga serija shematskih 3-dizajna stupnja $d = 3$ su inverzijske ravnine parnog reda, tj. 3-$(n^2+1, n+1, 1)$ dizajni za parne n.

Zadatak.

Dokažite da su dizajni 3-$(n^2+1, n+1, 1)$ za parne n shematski i ispitajte (im)primitivnost odgovarajućih asocijacijskih shema.

Ispitajte (im)primitivnost asocijacijskih shema dobivenih od 4-dizajna stupnja $d = 3$.

Shematski dizajni

Rbr	v	k	λ	x	y	z	Egzistencija
1	11	5	1	1	2	3	$\exists$
2	23	8	4	0	2	4	$\exists$
3	23	11	48	3	5	7	$\exists$
4	24	8	5	0	2	4	$\exists$
5	47	11	8	1	3	5	$\exists$
6	71	35	264	14	17	20	?
7	199	99	2328	44	49	54	?
8	391	195	9264	90	97	104	?
9	647	323	25680	152	161	170	?
10	659	329	390874	153	164	175	?
11	967	483	57720	230	241	252	?

Tablica 4: Dopustivi parametru shematskih 4-dizajna za $v \leq 1000$.

Shematski dizajni

Definicija.

Neka je $\mathfrak{X}$ koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je $\mathfrak{X}$ primitivna ako su relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Shematski dizajni

Definicija.

Neka je $\mathfrak{X}$ koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je $\mathfrak{X}$ primitivna ako su relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Definicija.

Neka je Δ_i graf sa skupom vrhova $\{0, \ldots, d\}$. Vrhovi j, k su susjedni ($j \to k$) ako je $p_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo *i-tim distribucijskim grafom* koherentne konfiguracije.

Shematski dizajni

Definicija.

Neka je $\mathfrak{X}$ koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je $\mathfrak{X}$ primitivna ako su relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Definicija.

Neka je Δ_i graf sa skupom vrhova $\{0, \ldots, d\}$. Vrhovi j, k su susjedni ($j \to k$) ako je $p_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo i-tim distribucijskim grafom koherentne konfiguracije.

Propozicija.

Distribucijski graf Δ_i je povezan ako i samo ako je relacija R_i komutativne koherentne konfiguracije povezana.

Shematski dizajni

Teorem.

Broj komponenta povezanosti distribucijskog grafa Δ_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid P_j(i) = n_j\}|$$

Shematski dizajni

Teorem.

Broj komponenta povezanosti distribucijskog grafa Δ_j je

$$|\{i \in \{0,\ldots,d\} \mid P_j(i) = n_j\}|$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4n(2n-1)(2n^2-1) & 2(4n^2-1)^2 & 4n(2n+1)(2n^2-1) \\ 1 & (1-4n)(2n^2-1) & 1-4n^2 & (4n+1)(2n^2-1) \\ 1 & (n+1)(2n-1) & 1-4n^2 & (n-1)(2n+1) \\ 1 & n(1-2n) & 4n^2-1 & -n(2n+1) \end{bmatrix}$$

Dizajni nad konačnim poljima

Primjer: Grassmannova shema

Vrhove čine svi $\Bbbk$-dimenzionalni potprostori v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}_q$. Vrhovi X i Y su i-asocirani ako je $\dim(X \cap Y) = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Grassmannovu shemu $J_q(v, \Bbbk)$ reda $n = \begin{bmatrix} v \\ \Bbbk \end{bmatrix}_q$ s $\Bbbk$ klasa.

Dizajni nad konačnim poljima

Primjer: Grassmannova shema

Vrhove čine svi $\Bbbk$-dimenzionalni potprostori v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}_q$. Vrhovi X i Y su i-asocirani ako je $\dim(X \cap Y) = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Grassmannovu shemu $J_q(v, \Bbbk)$ reda $n = {v \brack \Bbbk}_q$ s $\Bbbk$ klasa.

Dizajni u $J_q(v, \Bbbk)$?

Dizajni nad konačnim poljima

Primjer: Grassmannova shema

Vrhove čine svi k-dimenzionalni potprostori v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}_q$. Vrhovi X i Y su i-asocirani ako je $\dim(X \cap Y) = k - i$. Tako dobijemo Grassmannovu shemu $J_q(v, k)$ reda $n = \begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix}_q$ s k klasa.

Dizajni u $J_q(v, k)$?

M. Braun, M. Kiermaier, A. Wassermann, *q-analogs of designs: subspace designs*, u *Network coding and subspace designs* (ur. M. Greferath, M. O. Pavčević, N. Silberstein, M. Á. Vázquez-Castro), Springer, 2018., str. 171–211.

Dizajni nad konačnim poljima

Primjer: Grassmannova shema

Vrhove čine svi $\mathcal{k}$-dimenzionalni potprostori v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}_q$. Vrhovi X i Y su i-asocirani ako je $\dim(X \cap Y) = \mathcal{k} - i$. Tako dobijemo Grassmannovu shemu $J_q(v, \mathcal{k})$ reda $n = \begin{bmatrix} v \\ \mathcal{k} \end{bmatrix}_q$ s $\mathcal{k}$ klasa.

Dizajni u $J_q(v, \mathcal{k})$?

M. Braun, M. Kiermaier, A. Wassermann, *q-analogs of designs: subspace designs*, u *Network coding and subspace designs* (ur. M. Greferath, M. O. Pavčević, N. Silberstein, M. Á. Vázquez-Castro), Springer, 2018., str. 171–211.

Dizajni u općenitim asocijacijskim shemama?

Dizajni u asocijacijskim shemama

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.
(mentor: J. M. Goethals)

Dizajni u asocijacijskim shemama

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.
(mentor: J. M. Goethals)

> *If it isn't in Delsarte's thesis, it's in Haemers' thesis.*
>
> —*Andries Brouwer*

Dizajni u asocijacijskim shemama

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.
(mentor: J. M. Goethals)

> *If it isn't in Delsarte's thesis, it's in Haemers' thesis.*
>
> *—Andries Brouwer*

W. H. Haemers, *Eigenvalue techniques in design and graph theory*, Eindhoven University of Technology, 1979.
(mentori: J. J. Seidel, J. H. van Lint)

Dizajni u asocijacijskim shemama

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.
(mentor: J. M. Goethals)

> *If it isn't in Delsarte's thesis, it's in Haemers' thesis.*
>
> —*Andries Brouwer*

W. H. Haemers, *Eigenvalue techniques in design and graph theory*, Eindhoven University of Technology, 1979.
(mentori: J. J. Seidel, J. H. van Lint)

E. R. van Dam, *Graphs with few eigenvalues – an interplay between combinatorics and algebra*, Tilburg University, 1996.
(mentori: W. H. Haemers, S. H. Tijs)