Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

22.4.2024.

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

Johnsonova shema i kombinatorni dizajni

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i $\Bbbk$ prirodni brojevi takvi da je $2\Bbbk \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve $\Bbbk$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, \Bbbk)$ s $\Bbbk$ klasa, reda $n = \binom{v}{\Bbbk}$.

Johnsonova shema i kombinatorni dizajni

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i $\mathscr{k}$ prirodni brojevi takvi da je $2\mathscr{k} \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve $\mathscr{k}$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = \mathscr{k} - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, \mathscr{k})$ s $\mathscr{k}$ klasa, reda $n = \binom{v}{\mathscr{k}}$.

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\mathscr{k}}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima t-$(v, \mathscr{k}, \lambda)$ ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Johnsonova shema i kombinatorni dizajni

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i $\Bbbk$ prirodni brojevi takvi da je $2\Bbbk \le v$. Za skup vrhova uzmimo sve $\Bbbk$-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = \Bbbk - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, \Bbbk)$ s $\Bbbk$ klasa, reda $n = \binom{v}{\Bbbk}$.

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$ kažemo da je kombinatorni dizajn s parametrima t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže.
Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Propozicija.

Ako je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima t-$(v, \Bbbk, \lambda)$, onda je i s-$(v, \Bbbk, \lambda_s)$ dizajn za $s = 0, \ldots, t$, pri čemu je $\lambda_s = \lambda \binom{v-s}{t-s} / \binom{\Bbbk-s}{t-s}$.

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{\Bbbk}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn, onda $\binom{\Bbbk-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1)$

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{\Bbbk}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn, onda $\binom{\Bbbk-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1)$

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{\mathscr{k}}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-$(v, \mathscr{k}, \lambda)$ dizajn, onda $\binom{\mathscr{k}-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 5$,

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 5,\ b = \lambda_0 = \frac{55}{3}$

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 5,\ b = \lambda_0 = \frac{55}{3}$

Ovi dizajni postoje:

2-$(7, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 3,\ b = \lambda_0 = 7$ (projektivna ravnina reda 2)

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 5,\ b = \lambda_0 = \frac{55}{3}$

Ovi dizajni postoje:

2-$(7, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 3,\ b = \lambda_0 = 7$ (projektivna ravnina reda 2)

2-$(9, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 4,\ b = \lambda_0 = 12$ (afina ravnina reda 3)

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{\Bbbk}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn, onda $\binom{\Bbbk-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 5,\ b = \lambda_0 = \frac{55}{3}$

Ovi dizajni postoje:

2-$(7, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 3,\ b = \lambda_0 = 7$ (projektivna ravnina reda 2)

2-$(9, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 4,\ b = \lambda_0 = 12$ (afina ravnina reda 3)

Pretpostavke na parametre:

$2 \leq t \leq \Bbbk$,

Ukupan broj blokova: $b = |\mathcal{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 5,\ b = \lambda_0 = \frac{55}{3}$

Ovi dizajni postoje:

2-$(7, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 3,\ b = \lambda_0 = 7$ (projektivna ravnina reda 2)

2-$(9, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 4,\ b = \lambda_0 = 12$ (afina ravnina reda 3)

Pretpostavke na parametre:

$2 \le t \le k, \quad 3 \le k < v,$

Kombinatorni dizajni

Ukupan broj blokova: $b = |\mathscr{D}| = \lambda_0 = \lambda\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$

Korolar.

Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda\binom{v-s}{t-s}$, za $s = 0, \ldots, t$.

Npr. **ne postoje** dizajni s parametrima:

2-$(8, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = \frac{7}{2}$

2-$(11, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 5,\ b = \lambda_0 = \frac{55}{3}$

Ovi dizajni postoje:

2-$(7, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 3,\ b = \lambda_0 = 7$ (projektivna ravnina reda 2)

2-$(9, 3, 1) \rightsquigarrow r = \lambda_1 = 4,\ b = \lambda_0 = 12$ (afina ravnina reda 3)

Pretpostavke na parametre:

$2 \leq t \leq k,\quad 3 \leq k < v,\quad k \leq \frac{v}{2}$

Propozicija.

Neka je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ) i neka vrijedi $t \leq v - k$. Tada je familija $\overline{\mathscr{D}} = \{V \setminus X \mid X \in \mathscr{D}\}$, dobivena komplementiranjem blokova, dizajn s parametrima t-$(v, v - k, \bar{\lambda})$ za

$$\bar{\lambda} = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-t}{k}}{\binom{v-t}{k-t}}$$

Kombinatorni dizajni

Propozicija.

Neka je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ i neka vrijedi $t \leq v - \Bbbk$. Tada je familija $\overline{\mathscr{D}} = \{V \setminus X \mid X \in \mathscr{D}\}$, dobivena komplementiranjem blokova, dizajn s parametrima t-$(v, v - \Bbbk, \bar{\lambda})$ za

$$\bar{\lambda} = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-t}{\Bbbk}}{\binom{v-t}{\Bbbk - t}}$$

Zadatak.

Neka je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima t-$(v, \Bbbk, \lambda)$, a $I, J \subseteq V$, $|I| = i$, $|J| = j$, $I \cap J = \emptyset$ disjunktni skupovi točaka takvi da je $i + j \leq t$. Dokažite da broj $\lambda_{i,j} = |\{X \in \mathscr{D} \mid I \subseteq X,\ J \cap X = \emptyset\}|$ ne ovisi o izboru skupova I, J, nego samo o njihovim kardinalnostima i, j. Dokažite formulu $\lambda_{i,j} = \lambda\binom{v-i-j}{\Bbbk - i}/\binom{v-t}{\Bbbk - t}$ te rekurziju $\lambda_{i,j+1} = \lambda_{i,j} - \lambda_{i+1,j}$.

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{k}$ je potpuni k-$(v, k, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, k)$)

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{k}$ je potpuni k-$(v, k, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, k)$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{k}$ koji je t-dizajn za što veći $t < k$

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{\mathscr{k}}$ je potpuni $\mathscr{k}$-$(v, \mathscr{k}, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, \mathscr{k})$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{\mathscr{k}}$ koji je t-dizajn za što veći $t < \mathscr{k}$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{k}$ je potpuni k-$(v, k, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, k)$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{k}$ koji je t-dizajn za što veći $t < k$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjer: vinska proba, 7 vrsta vina

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{k}$ je potpuni k-$(v, k, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, k)$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{k}$ koji je t-dizajn za što veći $t < k$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjer: vinska proba, 7 vrsta vina

Potpuni dizajn: $\binom{7}{2} = 21$ kušača

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{\mathscr{k}}$ je potpuni $\mathscr{k}$-$(v, \mathscr{k}, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, \mathscr{k})$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{\mathscr{k}}$ koji je t-dizajn za što veći $t < \mathscr{k}$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjer: vinska proba, 7 vrsta vina

Potpuni dizajn: $\binom{7}{2} = 21$ kušača

Nepotpuni 2-$(7, 3, 1)$ dizajn: $b = 7$ kušača

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{k}$ je potpuni k-$(v, k, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, k)$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{k}$ koji je t-dizajn za što veći $t < k$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjer: vinska proba, 7 vrsta vina

Potpuni dizajn: $\binom{7}{2} = 21$ kušača

Nepotpuni 2-$(7, 3, 1)$ dizajn: $b = 7$ kušača

Primjer: testiranje 9 vrsta krema za sunčanje

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{k}$ je potpuni k-$(v,k,1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v,k)$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{k}$ koji je t-dizajn za što veći $t < k$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjer: vinska proba, 7 vrsta vina

Potpuni dizajn: $\binom{7}{2} = 21$ kušača

Nepotpuni 2-$(7,3,1)$ dizajn: $b = 7$ kušača

Primjer: testiranje 9 vrsta krema za sunčanje

Potpuni dizajn: $\binom{9}{2} = 36$ dobrovoljaca

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{k}$ je potpuni k-$(v, k, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, k)$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{k}$ koji je t-dizajn za što veći $t < k$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjer: vinska proba, 7 vrsta vina

Potpuni dizajn: $\binom{7}{2} = 21$ kušača

Nepotpuni 2-$(7, 3, 1)$ dizajn: $b = 7$ kušača

Primjer: testiranje 9 vrsta krema za sunčanje

Potpuni dizajn: $\binom{9}{2} = 36$ dobrovoljaca

Nepotpuni 2-$(9, 3, 1)$ dizajn: $b = 12$ dobrovoljaca

Primjene dizajna

Primjer: $\mathscr{D} = \binom{V}{\Bbbk}$ je potpuni $\Bbbk$-$(v, \Bbbk, 1)$ dizajn (svi vrhovi od $J(v, \Bbbk)$)

Nepotpuni dizajn: $\mathscr{D} \subsetneq \binom{V}{\Bbbk}$ koji je t-dizajn za što veći $t < \Bbbk$

Najveći takav t je snaga dizajna $\mathscr{D}$

Primjer: vinska proba, 7 vrsta vina

Potpuni dizajn: $\binom{7}{2} = 21$ kušača

Nepotpuni 2-$(7, 3, 1)$ dizajn: $b = 7$ kušača

Primjer: testiranje 9 vrsta krema za sunčanje

Potpuni dizajn: $\binom{9}{2} = 36$ dobrovoljaca

Nepotpuni 2-$(9, 3, 1)$ dizajn: $b = 12$ dobrovoljaca

Uvjet balansiranosti: svaki par vina / krema uspoređen je jednako mnogo puta $(\lambda = 1)$

Primjene dizajna

R. A. Fisher, *The design of experiments (9th ed.)*, Macmillan, 1971.
(prvo izdanje 1935.)

Primjene dizajna

R. A. Fisher, *The design of experiments (9th ed.)*, Macmillan, 1971.
(prvo izdanje 1935.)

Ronald Fisher

Article Talk

From Wikipedia, the free encyclopedia

Sir Ronald Aylmer Fisher FRS[5] (17 February 1890 – 29 July 1962) was a British polymath who was active as a mathematician, statistician, biologist, geneticist, and academic.[6] For his work in statistics, he has been described as "a genius who almost single-handedly created the foundations for modern statistical science"[7][8] and "the single most important figure in 20th century statistics".[9] In genetics, his work used mathematics to combine Mendelian genetics and natural selection; this contributed to the revival of Darwinism in the early 20th-century revision of the theory of evolution known as the modern synthesis, being the one to most comprehensively combine the ideas of Gregor Mendel and Charles Darwin.[10] For his contributions to biology, Richard Dawkins proclaimed Fisher as "the greatest of Darwin's successors".[11] He is considered one of the founding fathers of Neo-Darwinism.[12][13]

From 1919, he worked at the Rothamsted Experimental Station for 14 years;[14] there, he analysed its immense body of data from crop experiments since the 1840s, and developed the analysis of variance (ANOVA). He established his reputation there in the following years as a biostatistician.

Sir
Ronald Fisher
FRS

Fisher in 1913

Born	Ronald Aylmer Fisher 17 February 1890

Primjene dizajna

R. A. Fisher, *The design of experiments (9th ed.)*, Macmillan, 1971.
(prvo izdanje 1935.)

F. Yates, *Incomplete randomized blocks*, Ann. Eugen. **7(2)** (1936), 121–140. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02134.x

Primjene dizajna

R. A. Fisher, *The design of experiments (9th ed.)*, Macmillan, 1971. (prvo izdanje 1935.)

F. Yates, *Incomplete randomized blocks*, Ann. Eugen. **7(2)** (1936), 121–140. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02134.x

2-(v, k, λ) dizajn $\rightsquigarrow$ balansirani nepotpuni blokovni dizajn
(eng. balanced incomplete block design, BIBD)

Primjene dizajna

R. A. Fisher, *The design of experiments (9th ed.)*, Macmillan, 1971.
(prvo izdanje 1935.)

F. Yates, *Incomplete randomized blocks*, Ann. Eugen. **7(2)** (1936), 121–140. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02134.x

2-(v, k, λ) dizajn $\rightsquigarrow$ balansirani nepotpuni blokovni dizajn
(eng. balanced incomplete block design, BIBD)

Blokovni dizajn $\mathrm{BIBD}(v, b, r, \cancel{k}, \lambda)$

Primjene dizajna

R. A. Fisher, *The design of experiments (9th ed.)*, Macmillan, 1971.
(prvo izdanje 1935.)

F. Yates, *Incomplete randomized blocks*, Ann. Eugen. **7(2)** (1936), 121–140. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02134.x

2-(v,k,λ) dizajn $\rightsquigarrow$ balansirani nepotpuni blokovni dizajn
(eng. balanced incomplete block design, BIBD)

Blokovni dizajn BIBD$(v,b,r,\cancel{k},\lambda)$

R. C. Bose, *On the construction of* ***balanced incomplete block designs***, Ann. Eugen. **9** (1939), 353–399.
https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1939.tb02219.x

Primjene dizajna

R. A. Fisher, *The design of experiments (9th ed.)*, Macmillan, 1971.
(prvo izdanje 1935.)

F. Yates, *Incomplete randomized blocks*, Ann. Eugen. **7(2)** (1936), 121–140. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02134.x

2-(v, k, λ) dizajn $\rightsquigarrow$ balansirani nepotpuni blokovni dizajn
(eng. balanced incomplete block design, BIBD)

Blokovni dizajn BIBD$(v, b, r, \cancel{k}, \lambda)$

R. C. Bose, *On the construction of **balanced incomplete block designs***, Ann. Eugen. **9** (1939), 353–399.
https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1939.tb02219.x

R. A. Fisher, *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks*, Ann. Eugen. **10** (1940), 52–75.
https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1940.tb02237.x

Propozicija (Fisherova nejednakost)

U svakom 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajnu vrijedi $b \geq v$.

Propozicija (Fisherova nejednakost)

U svakom 2-(v,k,λ) dizajnu vrijedi $b \geq v$.

Dizajni snage $t > 2$?

Propozicija (Fisherova nejednakost)

U svakom 2-(v, k, λ) dizajnu vrijedi $b \geq v$.

Dizajni snage $t > 2$? **MOTIVATION????**

Kombinatorni dizajni

Propozicija (Fisherova nejednakost)

U svakom 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajnu vrijedi $b \geq v$.

Dizajni snage $t > 2$? **MOTIVATION????**

E. Witt, *Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 256–264.

Über Steinersche Systeme, 265–275.

Kombinatorni dizajni

Propozicija (Fisherova nejednakost)

U svakom 2-(v, k, λ) dizajnu vrijedi $b \geq v$.

Dizajni snage $t > 2$? **MOTIVATION????**

E. Witt, *Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 256–264.

Über Steinersche Systeme, 265–275.

Émile Léonard Mathieu

Article Talk Read Edit View history Tools

From Wikipedia, the free encyclopedia

Émile Léonard Mathieu (French: [matjø]; 15 May 1835, in Metz – 19 October 1890, in Nancy) was a French mathematician.[1] He is known for his work in group theory and mathematical physics. He has given his name to the Mathieu functions, Mathieu groups and Mathieu transformation. He authored a treatise of mathematical physics in 6 volumes. Volume 1 is an exposition of the techniques to solve the differential equations of mathematical physics, and contains an account of the applications of Mathieu functions to electrostatics. Volume 2 deals with capillarity. Volumes 3 and 4 deal with electrostatics and magnetostatics. Volume 5 deals with electrodynamics, and volume 6 with elasticity. The asteroid 27947 Emilemathieu was named in his honour.

Émile Léonard Mathieu	
Born	15 May 1835 Metz, France
Died	19 October 1890 (aged 55) Nancy, France
Scientific career	
Fields	Mathematics

Ernst Witt

Article Talk

From Wikipedia, the free encyclopedia

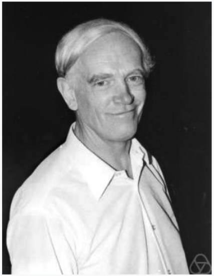
Ernst Witt (26 June 1911 – 3 July 1991) was a German mathematician, one of the leading algebraists of his time.[1]

Biography [edit]

Witt was born on the island of Alsen, then a part of the German Empire. Shortly after his birth, his parents moved the family to China to work as missionaries,[2] and he did not return to Europe until he was nine.[2]

After his schooling, Witt went to the University of Freiburg and the University of Göttingen. He joined the NSDAP (Nazi Party) and was an active party member.[3] Witt was awarded a Ph.D. at the University of Göttingen in 1934 with a thesis titled: "Riemann-Roch theorem and zeta-Function in hypercomplexes"[4] (Riemann-Rochscher Satz und Zeta-Funktion im Hyperkomplexen) that was supervised by Gustav Herglotz, with Emmy Noether suggesting the topic for the doctorate.[5] He qualified to become a lecturer and gave guest lectures in Göttingen and Hamburg.[5] He became associated with the team led by Helmut Hasse who led his habilitation. In June 1936, he gave his habilitation lecture.[4]

Ernst Witt



Ernst Witt in Nice, 1970

Born	26 June 1911 Alsen, German Empire (present-day Denmark)
Died	3 July 1991 (aged 80) Hamburg, Germany

Ernst Witt

Article Talk

From Wikipedia, the free encyclopedia

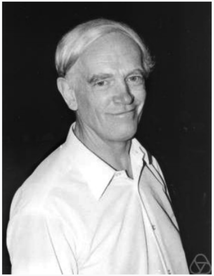
Ernst Witt (26 June 1911 – 3 July 1991) was a German mathematician, one of the leading algebraists of his time.[1]

Biography [edit]

Witt was born on the island of Alsen, then a part of the German Empire. Shortly after his birth, his parents moved the family to China to work as missionaries,[2] and he did not return to Europe until he was nine.[2]

After his schooling, Witt went to the University of Freiburg and the University of Göttingen. He joined the NSDAP (Nazi Party) and was an active party member.[3] Witt was awarded a Ph.D. at the University of Göttingen in 1934 with a thesis titled: "Riemann-Roch theorem and zeta-Function in hypercomplexes"[4] (Riemann-Rochscher Satz und Zeta-Funktion im Hyperkomplexen) that was supervised by Gustav Herglotz, with Emmy Noether suggesting the topic for the doctorate.[5] He qualified to become a lecturer and gave guest lectures in Göttingen and Hamburg.[5] He became associated with the team led by Helmut Hasse who led his habilitation. In June 1936, he gave his habilitation lecture.[4]

Ernst Witt



Ernst Witt in Nice, 1970

Born	26 June 1911 Alsen, German Empire (present-day Denmark)
Died	3 July 1991 (aged 80) Hamburg, Germany

D. R. Hughes, *On t-designs and groups*, Amer. J. Math. **87** (1965), 761–778.

Višestruko tranzitivne grupe

Za $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ kažemo da je *t-tranzitivna* ako za svake dvije uređene t-torke $(x_1, \ldots, x_t)$, $(y_1, \ldots, y_t)$ međusobno različitih elemenata iz V postoji $g \in G$ takav da je $(x_1, \ldots, x_t)^g = (x_1^g, \ldots, x_t^g) = (y_1, \ldots, y_t)$.

Višestruko tranzitivne grupe

Za $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ kažemo da je t-tranzitivna ako za svake dvije uređene t-torke $(x_1, \ldots, x_t)$, $(y_1, \ldots, y_t)$ međusobno različitih elemenata iz V postoji $g \in G$ takav da je $(x_1, \ldots, x_t)^g = (x_1^g, \ldots, x_t^g) = (y_1, \ldots, y_t)$.

Za G kažemo da je t-homogena ako za svaka dva t-člana podskupa $\{x_1, \ldots, x_t\}$, $\{y_1, \ldots, y_t\} \subseteq V$ postoji $g \in G$ takav da je $\{x_1, \ldots, x_t\}^g = \{x_1^g, \ldots, x_t^g\} = \{y_1, \ldots, y_t\}$.

Višestruko tranzitivne grupe

Za $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ kažemo da je t-tranzitivna ako za svake dvije uređene t-torke $(x_1, \ldots, x_t)$, $(y_1, \ldots, y_t)$ međusobno različitih elemenata iz V postoji $g \in G$ takav da je $(x_1, \ldots, x_t)^g = (x_1^g, \ldots, x_t^g) = (y_1, \ldots, y_t)$.

Za G kažemo da je t-homogena ako za svaka dva t-člana podskupa $\{x_1, \ldots, x_t\}$, $\{y_1, \ldots, y_t\} \subseteq V$ postoji $g \in G$ takav da je $\{x_1, \ldots, x_t\}^g = \{x_1^g, \ldots, x_t^g\} = \{y_1, \ldots, y_t\}$.

t-tranzitivnosti $\Rightarrow$ t-homogenost

Višestruko tranzitivne grupe

Za $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ kažemo da je t-tranzitivna ako za svake dvije uređene t-torke $(x_1, \ldots, x_t)$, $(y_1, \ldots, y_t)$ međusobno različitih elemenata iz V postoji $g \in G$ takav da je $(x_1, \ldots, x_t)^g = (x_1^g, \ldots, x_t^g) = (y_1, \ldots, y_t)$.

Za G kažemo da je t-homogena ako za svaka dva t-člana podskupa $\{x_1, \ldots, x_t\}$, $\{y_1, \ldots, y_t\} \subseteq V$ postoji $g \in G$ takav da je $\{x_1, \ldots, x_t\}^g = \{x_1^g, \ldots, x_t^g\} = \{y_1, \ldots, y_t\}$.

t-tranzitivnosti $\Rightarrow$ t-homogenost

Teorem (Livingstone, Wagner)

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ permutacijska grupa i neka vrijedi $5 \leq t \leq v/2$. Ako je G t-homogena, onda je i t-tranzitivna.

D. Livingstone, A. Wagner, *Transitivity of finite permutation groups on unordered sets*, Math. Z. **90** (1965), 393–403.

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

Zadatak.

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ permutacijska grupa koja je t-homogena. Ako je $X \in \binom{V}{k}$ bilo koji k-člani skup točaka, dokažite da je $\mathcal{D} = X^G$ (orbita pri djelovanju G na podskupove) dizajn s parametrima t-(v, k, λ) za $\lambda = |G|\binom{k}{t}/(|G_X|\binom{v}{t})$. Pritom je $G_X = \{g \in G \mid X^g = X\}$ stabilizator skupa X.

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

Zadatak.

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ permutacijska grupa koja je t-homogena. Ako je $X \in \binom{V}{k}$ bilo koji k-člani skup točaka, dokažite da je $\mathcal{D} = X^G$ (orbita pri djelovanju G na podskupove) dizajn s parametrima t-(v, k, λ) za $\lambda = |G|\binom{k}{t}/(|G_X|\binom{v}{t})$. Pritom je $G_X = \{g \in G \mid X^g = X\}$ stabilizator skupa X.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

4.7 The finite simple groups

The *Classification of Finite Simple Groups*, or CFSG as we shall refer to it, is one of the most remarkable theorems ever proved. First, its length: the present version runs to an estimated 15 000 pages, spread over books, journals, computer calculations and, in at least one case, unpublished manuscripts. The proof was announced in 1980, though it was known at the time that some details (such as the proof that 'groups of Ree type' are indeed Ree groups) remained to be completed. It turned out that there was a more serious lacuna, in the treatment of 'quasi-thin groups'. It is quite impossible for a layman to judge whether a complete proof of the theorem currently exists.

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

Zadatak.

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ permutacijska grupa koja je t-homogena. Ako je $X \in \binom{V}{\mathscr{k}}$ bilo koji $\mathscr{k}$-člani skup točaka, dokažite da je $\mathscr{D} = X^G$ (orbita pri djelovanju G na podskupove) dizajn s parametrima t-$(v, \mathscr{k}, \lambda)$ za $\lambda = |G|\binom{\mathscr{k}}{t} / (|G_X|\binom{v}{t})$. Pritom je $G_X = \{g \in G \mid X^g = X\}$ stabilizator skupa X.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

4.8 Application: Multiply-transitive groups

One of the major goals of permutation group theory since its origin has been the determination of the multiply-transitive groups or, at the very least, an absolute bound on the degree of transitivity of finite permutation groups other than symmetric and alternating groups. This goal was beyond reach until CFSG was proved, at which moment it was realised, since it follows from CFSG and previously known results.

Zadatak.

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ permutacijska grupa koja je t-homogena. Ako je $X \in \binom{V}{\Bbbk}$ bilo koji $\Bbbk$-člani skup točaka, dokažite da je $\mathscr{D} = X^G$ (orbita pri djelovanju G na podskupove) dizajn s parametrima t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ za $\lambda = |G|\binom{\Bbbk}{t} / (|G_X|\binom{v}{t})$. Pritom je $G_X = \{g \in G \mid X^g = X\}$ stabilizator skupa X.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Theorem 4.11 [CFSG] *The finite 2-transitive groups are explicitly known. In particular, the only finite 6-transitive groups are symmetric and alternating groups; and the only finite 4-transitive groups are symmetric and alternating groups and the* Mathieu groups M_{11}, M_{12}, M_{23} *and* M_{24}.

The list of 2-transitive groups appears Tables 7.3 and 7.4.

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275. $M_{12} \rightsquigarrow 5\text{-}(12, 6, 1)$, $M_{24} \rightsquigarrow 5\text{-}(24, 8, 1)$

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275. $M_{12} \rightsquigarrow 5\text{-}(12,6,1)$, $M_{24} \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

Postoje li nepotpuni dizajni snage $t > 5$?

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275. $M_{12} \rightsquigarrow 5\text{-}(12, 6, 1)$, $M_{24} \rightsquigarrow 5\text{-}(24, 8, 1)$

Postoje li nepotpuni dizajni snage $t > 5$?

S. S. Magliveras, D. W. Leavitt, *Simple* $6\text{-}(33, 8, 36)$ *designs from* $P\Gamma L_2(32)$, u: *Computational group theory* (ur. M. D. Atkinson), Academic Press, Inc., 1984., str. 337–352.

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275. $M_{12} \rightsquigarrow 5\text{-}(12,6,1)$, $M_{24} \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

Postoje li nepotpuni dizajni snage $t > 5$?

S. S. Magliveras, D. W. Leavitt, *Simple* $6\text{-}(33,8,36)$ *designs from* $P\Gamma L_2(32)$, u: *Computational group theory* (ur. M. D. Atkinson), Academic Press, Inc., 1984., str. 337–352.

L. Teirlinck, *Nontrivial t-designs without repeated blocks exist for all t*, Discrete Math. **65** (1987), no. 3, 301–311.

Teorem.

Ako za t i v vrijedi $v > t+1 > 0$ i $v \equiv t \pmod{(t+1)!^{2t+1}}$, onda postoji $t\text{-}(v, t+1, (t+1)!^{2t+1})$ dizajn.

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275. $M_{12} \rightsquigarrow 5\text{-}(12,6,1)$, $M_{24} \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

Postoje li nepotpuni dizajni snage $t > 5$?

S. S. Magliveras, D. W. Leavitt, *Simple* $6\text{-}(33,8,36)$ *designs from* $P\Gamma L_2(32)$, u: *Computational group theory* (ur. M. D. Atkinson), Academic Press, Inc., 1984., str. 337–352.

L. Teirlinck, *Nontrivial t-designs without repeated blocks exist for all* t, Discrete Math. **65** (1987), no. 3, 301–311.

Teorem.

Ako za t i v vrijedi $v > t+1 > 0$ i $v \equiv t \pmod{(t+1)!^{2t+1}}$, onda postoji $t\text{-}(v, t+1, (t+1)!^{2t+1})$ dizajn.

$t = 7 \rightsquigarrow v = t + (t+1)!^{2t+1} = 7 + 8!^{15} \approx 1.2 \cdot 10^{69}$

Višestruko tranzitivne grupe i dizajni

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275. $M_{12} \rightsquigarrow 5\text{-}(12,6,1)$, $M_{24} \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

Postoje li nepotpuni dizajni snage $t > 5$?

S. S. Magliveras, D. W. Leavitt, *Simple* $6\text{-}(33,8,36)$ *designs from* $P\Gamma L_2(32)$, u: *Computational group theory* (ur. M. D. Atkinson), Academic Press, Inc., 1984., str. 337–352.

L. Teirlinck, *Nontrivial t-designs without repeated blocks exist for all t*, Discrete Math. **65** (1987), no. 3, 301–311.

Teorem.

Ako za t i v vrijedi $v > t+1 > 0$ i $v \equiv t \pmod{(t+1)!^{2t+1}}$, onda postoji $t\text{-}(v, t+1, (t+1)!^{2t+1})$ dizajn.

Postoje li dizajni "velike" snage t s malim brojem točaka v?

Dizajni s velikim t

A. Betten, A. Kerber, R. Laue, A. Wassermann, *Es gibt 7-Designs mit kleinen Parametern!*, Bayreuth. Math. Schr. **49** (1995), 213.

A. Betten, R. Laue, A. Wassermann, *Simple* 6- *and* 7-*designs on* 19 *to* 33 *points*, Congr. Numer. **123** (1997), 149–160.

A. Betten, A. Kerber, R. Laue, A. Wassermann, *Simple* 8-*designs with small parameters*, Des. Codes Cryptogr. **15** (1998), no. 1, 5–27.

R. Laue, *Constructing objects up to isomorphism, simple* 9-*designs with small parameters*, u: *Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999)* (ur. A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann), Springer-Verlag, 2001., str. 232–260.

Dizajni s velikim t

A. Betten, A. Kerber, R. Laue, A. Wassermann, *Es gibt 7-Designs mit kleinen Parametern!*, Bayreuth. Math. Schr. **49** (1995), 213.

A. Betten, R. Laue, A. Wassermann, *Simple* 6- *and* 7-*designs on* 19 *to* 33 *points*, Congr. Numer. **123** (1997), 149–160.

A. Betten, A. Kerber, R. Laue, A. Wassermann, *Simple* 8-*designs with small parameters*, Des. Codes Cryptogr. **15** (1998), no. 1, 5–27.

R. Laue, *Constructing objects up to isomorphism, simple* 9-*designs with small parameters*, u: *Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999)* (ur. A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann), Springer-Verlag, 2001., str. 232–260.

Postoje li Steinerovi dizajni ($\lambda = 1$) s $t > 5$?

A. Betten, A. Kerber, R. Laue, A. Wassermann, *Es gibt 7-Designs mit kleinen Parametern!*, Bayreuth. Math. Schr. **49** (1995), 213.

A. Betten, R. Laue, A. Wassermann, *Simple* 6- *and* 7-*designs on* 19 *to* 33 *points*, Congr. Numer. **123** (1997), 149–160.

A. Betten, A. Kerber, R. Laue, A. Wassermann, *Simple* 8-*designs with small parameters*, Des. Codes Cryptogr. **15** (1998), no. 1, 5–27.

R. Laue, *Constructing objects up to isomorphism, simple* 9-*designs with small parameters*, u: *Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999)* (ur. A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann), Springer-Verlag, 2001., str. 232–260.

Postoje li Steinerovi dizajni ($\lambda = 1$) s $t > 5$?

P. Keevash, *The existence of designs*, 2014. (nova verzija 2019.)
https://arxiv.org/abs/1401.3665

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

> *"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space* $\binom{V}{k}$ *..."*

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

> *"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ ..."*

Definicija.

Za konačan skup točaka $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ iz sfere $\Omega = S^{m-1}$ kažemo da je sferni t-dizajn ako za svaki polinom $f \in \mathrm{Pol}(m,t)$ vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x$$

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata **6** (1977), no. 3, 363–388.

Teorem.

Neka je $X \subset S^{m-1}$ sferni dizajn veličine n i snage $t \geq 4$, za $m \geq 3$.

Ako je $t = 2d$ paran, onda vrijedi

$$n \geq \binom{m+d-1}{d} + \binom{m+d-2}{d-1}$$

Ako je $t = 2d+1$ neparan, onda vrijedi

$$n \geq 2\binom{m+d-1}{d}$$

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

D. Ray-Chaudhuri, R. Wilson, *Generalisation of Fisher's inequality to t-designs*, Notices Amer. Math. Soc. **18** (1971), 805.

Teorem (Ray-Chaudhuri – Wilsonova nejednakost)

Neka je $\mathscr{D}$ kombinatorni t-$(v, \mathscr{k}, \lambda)$ dizajn s $b = |\mathscr{D}|$ blokova.

Ako je $t = 2d$ paran i vrijedi $v \geq \mathscr{k} + d$, onda je

$$b \geq \binom{v}{d}$$

Ako je $t = 2d + 1$ neparan i vrijedi $v - 1 \geq \mathscr{k} + d$, onda je

$$b \geq 2\binom{v-1}{d}$$

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

D. Ray-Chaudhuri, R. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

Teorem (Ray-Chaudhuri – Wilsonova nejednakost)

Neka je $\mathscr{D}$ kombinatorni t-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn s $b = |\mathscr{D}|$ blokova.

Ako je $t = 2d$ paran i vrijedi $v \geq \Bbbk + d$, onda je

$$b \geq \binom{v}{d}$$

Ako je $t = 2d + 1$ neparan i vrijedi $v - 1 \geq \Bbbk + d$, onda je

$$b \geq 2\binom{v-1}{d}$$

Stupanj kombinatornog dizajna

Stupanj sfernog dizajna je broj različitih kutova ili udaljenosti između vektora tog dizajna.

Stupanj kombinatornog dizajna

Stupanj sfernog dizajna je broj različitih kutova ili udaljenosti između vektora tog dizajna.

Stupanj kombinatornog dizajna je broj različitih veličina presjeka blokova tog dizajna.

Stupanj kombinatornog dizajna

Stupanj sfernog dizajna je broj različitih kutova ili udaljenosti između vektora tog dizajna.

Stupanj kombinatornog dizajna je broj različitih veličina presjeka blokova tog dizajna.

Veličine presjeka blokova su presječni brojevi dizajna.

Stupanj kombinatornog dizajna

Stupanj sfernog dizajna je broj različitih kutova ili udaljenosti između vektora tog dizajna.

Stupanj kombinatornog dizajna je broj različitih veličina presjeka blokova tog dizajna.

Veličine presjeka blokova su presječni brojevi dizajna.

Primjer (Mali Wittov dizajn)

Konstruirajmo 5-$(12, 6, 1)$ dizajn u sustavu za računalnu algebru GAP. Odredimo mu presječne brojeve i stupanj.

Primjer (Veliki Wittov dizajn)

Konstruirajmo 5-$(24, 8, 1)$ dizajn i odredimo mu presječne brojeve i stupanj.

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata **6** (1977), no. 3, 363–388.

Teorem (Apsolutna ocjena)

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq S^{m-1}$ sferni dizajn veličine n i stupnja d. Tada je

$$n \leq \binom{m+d-1}{d} + \binom{m+d-2}{d-1}$$

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata **6** (1977), no. 3, 363–388.

Teorem (Apsolutna ocjena)

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq S^{m-1}$ sferni dizajn veličine n i stupnja d. Tada je

$$n \le \binom{m+d-1}{d} + \binom{m+d-2}{d-1}$$

D. Ray-Chaudhuri, R. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

Teorem.

Neka je $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$ kombinatorni dizajn stupnja d s b blokova. Tada je

$$b \le \binom{v}{d}$$

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

Sferni dizajn i kombinatorni dizajn snage $t = 2d$ je stupnja barem d. Ako dostiže ocjenu na veličinu $n = \binom{m+d-1}{d} + \binom{m+d-2}{d-1}$, odnosno $b = \binom{v}{d}$, kažemo da je napet (eng. tight). U tom slučaju je stupnja točno d.

Analogije između kombinatornih dizajna i sfernih dizajna

Sferni dizajn i kombinatorni dizajn snage $t = 2d$ je stupnja barem d. Ako dostiže ocjenu na veličinu $n = \binom{m+d-1}{d} + \binom{m+d-2}{d-1}$, odnosno $b = \binom{v}{d}$, kažemo da je napet (eng. tight). U tom slučaju je stupnja točno d.

D. Ray-Chaudhuri, R. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

Teorem.

Ako postoji napeti $2d$-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn, onda ima točno d različitih presječnih brojeva. Presječni brojevi su pozitivni i nultočke su sljedećeg polinoma stupnja d:

$$\Psi_d(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} \frac{\binom{v-d}{i}\binom{\Bbbk-i}{d-i}\binom{\Bbbk-1-i}{d-i}}{\binom{d}{i}} \binom{x}{i}$$

Napeti dizajni

$t = 2$, $d = 1 \rightsquigarrow$ simetrični dizajni, $b = \binom{v}{1} = v$

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

Napeti dizajni

$t = 2,\ d = 1 \rightsquigarrow$ simetrični dizajni, $b = \binom{v}{1} = v$

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

$t = 4,\ d = 2 \rightsquigarrow$ kvazisimetrični dizajni, $b = \binom{v}{2}$, presječni brojevi $x < y$

Teorem (Noboru Ito, H. Enomoto, R. Noda, A. Bremner, 1975.-79.)

Postoji samo jedan takav dizajn s parametrima 4-$(23, 7, 1)$ i presječnim brojevima $x = 1$, $y = 3$

Napeti dizajni

$t = 2,\ d = 1 \rightsquigarrow$ simetrični dizajni, $b = \binom{v}{1} = v$

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka 2-$(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

$t = 4,\ d = 2 \rightsquigarrow$ kvazisimetrični dizajni, $b = \binom{v}{2}$, presječni brojevi $x < y$

Teorem (Noboru Ito, H. Enomoto, R. Noda, A. Bremner, 1975.-79.)

Postoji samo jedan takav dizajn s parametrima 4-$(23, 7, 1)$ i presječnim brojevima $x = 1,\ y = 3$

E. Bannai, E. Bannai, **Tatsuro** Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021. Teorem 3.32, str. 136-142.

Napeti dizajni

$t = 6$, $d = 3 \rightsquigarrow$ **ne postoje**

Cheryl Peterson, *On tight* 6*-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.
(doktorandica od Noboru Itoa)

Napeti dizajni

$t = 6$, $d = 3 \rightsquigarrow$ **ne postoje**

Cheryl Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435. (doktorandica od Noboru Itoa)

$t = 2d$, $d \geq 4 \rightsquigarrow$ najviše konačno mnogo

Eiichi Bannai, *On tight designs*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), no. 112, 433–448.

Napeti dizajni

$t = 6$, $d = 3 \rightsquigarrow$ **ne postoje**

Cheryl Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435. (doktorandica od Noboru Itoa)

$t = 2d$, $d \geq 4 \rightsquigarrow$ najviše konačno mnogo

Eiichi Bannai, *On tight designs*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), no. 112, 433–448.

Kvazisimetrični dizajni

M. S. Shrikhande, S. S. Sane, *Quasi-symmetric designs*, Cambridge University Press, 1991.

V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2017.
https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/kvazisim.pdf

Kvazisimetrični dizajni

Dva presječna broja: $x < y$

Kvazisimetrični dizajni

Dva presječna broja: $x < y \quad \Rightarrow \quad t \leq 4$

Kvazisimetrični dizajni

Dva presječna broja: $x < y \quad \Rightarrow \quad t \leq 4$

$t = 4 \quad \rightsquigarrow \quad$ 4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$

Kvazisimetrični dizajni

Dva presječna broja: $x < y \quad \Rightarrow \quad t \leq 4$

$t = 4 \quad \rightsquigarrow \quad 4\text{-}(23, 7, 1),\ x = 1,\ y = 3$

$t = 3,\ x = 0$:

Teorem (P. Cameron, 1973.)

Parametri takvog dizajna su:

- $3\text{-}(4n, 2n, n-1),\ x = 0,\ y = n$ (Hadamardovi dizajni)
- $3\text{-}(n(n^2 + 3n + 1), n(n+1), n-1),\ x = 0,\ y = n$
- $3\text{-}(496, 40, 3),\ x = 0,\ y = 4$

Kvazisimetrični dizajni

Dva presječna broja: $x < y \quad \Rightarrow \quad t \leq 4$

$t = 4 \quad \rightsquigarrow \quad 4\text{-}(23, 7, 1),\ x = 1,\ y = 3$

$t = 3,\ x = 0$:

Teorem (P. Cameron, 1973.)

Parametri takvog dizajna su:

- $3\text{-}(4n, 2n, n-1),\ x = 0,\ y = n$ (Hadamardovi dizajni)
- $3\text{-}(n(n^2 + 3n + 1), n(n + 1), n - 1),\ x = 0,\ y = n$
- $3\text{-}(496, 40, 3),\ x = 0,\ y = 4$

$t = 3,\ x > 0 \quad \rightsquigarrow$ **Hipoteza** (Mohan Shrikhande): samo $3\text{-}(23, 7, 5)$ i $3\text{-}(22, 7, 4)$ uz $x = 1,\ y = 3$

Kvazisimetrični dizajni

Dva presječna broja: $x < y \quad \Rightarrow \quad t \leq 4$

$t = 4 \quad \rightsquigarrow \quad 4\text{-}(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$

$t = 3$, $x = 0$:

Teorem (P. Cameron, 1973.)

Parametri takvog dizajna su:

- $3\text{-}(4n, 2n, n-1)$, $x = 0$, $y = n$ (Hadamardovi dizajni)
- $3\text{-}(n(n^2 + 3n + 1), n(n+1), n-1)$, $x = 0$, $y = n$
- $3\text{-}(496, 40, 3)$, $x = 0$, $y = 4$

$t = 3$, $x > 0 \quad \rightsquigarrow$ **Hipoteza** (Mohan Shrikhande): samo $3\text{-}(23, 7, 5)$ i $3\text{-}(22, 7, 4)$ uz $x = 1$, $y = 3$

$t = 2 \quad \rightsquigarrow$ beskonačno mnogo primjera, nema klasifikacije parametara

Kvazisimetrični 2-dizajni

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 2019.

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
1	19	7	7	1	3	21	57	42	31	30	≥ 1	0	0	[17, 74]
2	19	9	16	3	5	36	76	45	28	24	$\geq 10^{16}$	0	0	[17]
3	20	8	14	2	4	38	95	54	33	27	≥ 1	0	0	[20]
4	20	10	18	4	6	38	76	35	18	14	$\geq 10^{16}$	0	0	[20]
5	21	6	4	0	2	16	56	45	36	36	≥ 1	1	1	[91]
6	21	7	12	1	3	40	120	77	52	44	$\geq 10^{18}$	1	1	[91]
7	21	8	14	2	4	40	105	52	29	22	≥ 1	0	?	[17]
8	21	9	12	3	5	30	70	27	12	9	$\geq 10^4$	0	≥ 1	[17]
9	22	6	5	0	2	21	77	60	47	45	≥ 3	1	1	[96]
10	22	7	16	1	3	56	176	105	68	54	≥ 8	1	1	[91]
11	22	8	12	2	4	36	99	42	21	15	≥ 1	0	?	[17]
12	23	7	21	1	3	77	253	140	87	65	≥ 15	1	≥ 1	[96]
13	24	8	7	2	4	23	69	20	7	5	≥ 1	0	?	[16]
14	28	7	16	1	3	72	288	105	52	30	≥ 1	0	?	[19, 91]
15	28	12	11	4	6	27	63	32	16	16	$\geq 58\,891$	$\geq 58\,891$	≥ 1	[64]
16	29	7	12	1	3	56	232	77	36	20	$\geq 1\,518$	0	?	[19, 91]
17	31	7	7	1	3	35	155	42	17	9	≥ 5	5	≥ 1	[90]
18	33	9	6	1	3	24	88	60	41	40	≥ 3376	0	?	[17]
19	33	15	35	6	9	80	176	45	18	9	?	?	≥ 1	
20	35	7	3	1	3	17	85	14	3	2	≥ 2	0	?	[17]
21	35	14	13	5	8	34	85	14	3	2	≥ 1	?	?	
22	36	16	12	6	8	28	63	30	13	15	$\geq 522\,079$	$\geq 522\,079$	≥ 1	[64]

Kvazisimetrični 2-dizajni

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, 2022.

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
19	7	7	1	3	57	42	31	30	4	−3	=	[732]
19	9	16	3	5	76	45	28	24	7	−3	=	[89]
20	8	14	2	4	95	54	33	27	9	−3	=	[21]
20	10	18	4	6	76	35	18	14	7	−3	=	[20]
21	6	4	0	2	56	45	36	36	3	−3	!	Ex. D
21	7	12	1	3	120	77	52	44	11	−3	!	Ex. D
21	8	14	2	4	105	52	29	22	10	−3	–	[165]
21	9	12	3	5	70	27	12	9	6	−3	–	[165]
22	6	5	0	2	77	60	47	45	5	−3	!	Ex. D
22	7	16	1	3	176	105	68	54	17	−3	!	Ex. D
22	8	12	2	4	99	42	21	15	9	−3	–	[165]
23	7	21	1	3	253	140	87	65	25	−3	!	Ex. D
24	8	7	2	4	69	20	7	5	5	−3	–	[121]
28	7	16	1	3	288	105	52	30	25	−3	–	[702]
28	12	11	4	6	63	32	16	16	4	−4	+	Ex. F
29	7	12	1	3	232	77	36	20	19	−3	–	[166]
31	7	7	1	3	155	42	17	9	11	−3	5	Ex. E, [703]
33	9	6	1	3	88	60	41	40	5	−4	–	[165]
33	15	35	6	9	176	45	18	9	12	−3	?	
35	7	3	1	3	85	14	3	2	4	−3	–	[165]
35	14	13	5	8	85	14	3	2	4	−3	?	
36	16	12	6	8	63	30	13	15	3	−5	+	Ex. F
37	9	8	1	3	148	84	50	44	10	−4	–	[415]
39	12	22	3	6	247	54	21	9	15	−3	?	
41	9	9	1	3	205	96	50	40	14	−4	?	
41	17	34	5	8	205	136	93	84	13	−4	–	[166]

continued...

Asocijacijske sheme od dizajna

P. J. Cameron, *Near-regularity conditions for designs*, Geometriae Dedicata **2** (1973), 213–223.

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Teorem (Cameron, Delsarte)

Neka je $\mathscr{D}$ kombinatorni t-$(v, \mathscr{k}, \lambda)$ dizajn stupnja d s presječnim brojevima $x_1 > \ldots > x_d \geq 0$. Stavimo $x_0 = \mathscr{k}$ i za blokove $X, Y \in \mathscr{D}$ definiramo da su i-asocirani ako je $|X \cap Y| = x_i$. Ako vrijedi $t \geq 2d - 2$, onda na taj način dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa (podshemu Johnsonove sheme $J(v, \mathscr{k})$).

Asocijacijske sheme od dizajna

P. J. Cameron, *Near-regularity conditions for designs*, Geometriae Dedicata **2** (1973), 213–223.

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Teorem (Cameron, Delsarte)

Neka je $\mathscr{D}$ kombinatorni t-$(v, \mathscr{k}, \lambda)$ dizajn stupnja d s presječnim brojevima $x_1 > \ldots > x_d \geq 0$. Stavimo $x_0 = \mathscr{k}$ i za blokove $X, Y \in \mathscr{D}$ definiramo da su i-asocirani ako je $|X \cap Y| = x_i$. Ako vrijedi $t \geq 2d - 2$, onda na taj način dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa (podshemu Johnsonove sheme $J(v, \mathscr{k})$).

Za dizajn kojem blokovi čine asocijacijsku shemu kažemo da je shematski.