Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

3.4.2024.

Imprimitivnost

Neka je $\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, \ldots, R_d\})$ komutativna koherentna konfiguracija.

Imprimitivnost

Neka je $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, \ldots, R_d\})$ komutativna koherentna konfiguracija.

Kažemo da je $\mathcal{X}$ imprimitivna ako:

1. bar jedna od relacija $R_1, \ldots, R_d$ je nepovezana

Imprimitivnost

Neka je $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, \ldots, R_d\})$ komutativna koherentna konfiguracija.

Kažemo da je $\mathcal{X}$ imprimitivna ako:

1. bar jedna od relacija $R_1, \ldots, R_d$ je nepovezana
2. postoji $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ t.d. je $R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k$ rel. ekvivalencije

Imprimitivnost

Neka je $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, \ldots, R_d\})$ komutativna koherentna konfiguracija.

Kažemo da je $\mathcal{X}$ imprimitivna ako:

1. bar jedna od relacija $R_1, \ldots, R_d$ je nepovezana
2. postoji $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ t.d. je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ rel. ekvivalencije
3. bar jedan od distribucijskih grafova $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ je nepovezan
4. bar jedan od reprezentacijskih grafova $\nabla_1, \ldots, \nabla_d$ je nepovezan
5. postoji $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ koji je zatvoren, tj. $\Omega^2 = \Omega$

Imprimitivnost

Neka je $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, \ldots, R_d\})$ komutativna koherentna konfiguracija.

Kažemo da je $\mathcal{X}$ imprimitivna ako:

1. bar jedna od relacija $R_1, \ldots, R_d$ je nepovezana
2. postoji $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ t.d. je $R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k$ rel. ekvivalencije
3. bar jedan od distribucijskih grafova $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ je nepovezan
4. bar jedan od reprezentacijskih grafova $\nabla_1, \ldots, \nabla_d$ je nepovezan
5. postoji $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ koji je zatvoren, tj. $\Omega^2 = \Omega$

U suprotnom kažemo da je $\mathcal{X}$ primitivna.

Imprimitivnost

Zadatak 4.2.

Dokažite da je poligon reda $n \geq 2$ (n-terokut) primitivna asocijacijska shema ako i samo ako je n prost broj.

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Imprimitivnost

Zadatak 4.2.

Dokažite da je poligon reda $n \geq 2$ (n-terokut) primitivna asocijacijska shema ako i samo ako je n prost broj.

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Tranzitivna permutacijska grupa $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ je imprimitivna ako postoji netrivijalna particija od X koju G preslikava u sebe.

Zadatak 4.10.

Neka je G tranzitivna permutacijska grupa i $\mathfrak{X}$ koherentna konfiguracija dobivena Schurovom konstrukcijom od G. Dokažite da je G imprimitivna ako i samo ako je $\mathfrak{X}$ imprimitivna.

Imprimitivne sheme s tri klase

Neka je $\mathscr{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$ imprimitivna asocijacijska shema.

Imprimitivne sheme s tri klase

Neka je $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$ imprimitivna asocijacijska shema.

Slučaj *A*

- $\Omega = \{0, 1, 2\}$
- kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo u $K_{m,\ldots,m}$
- podsheme na vlaknima imaju dvije klase i ekvivalentne su jako regularnom grafu $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegovom komplementu
- takvu shemu možemo konstruirati od bilo kojeg $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i za bilo koji broj vlakna $r \geq 2$

Imprimitivne sheme s tri klase

Neka je $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$ imprimitivna asocijacijska shema.

Slučaj A

- $\Omega = \{0, 1, 2\}$
- kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo u $K_{m,\ldots,m}$
- podsheme na vlaknima imaju dvije klase i ekvivalentne su jako regularnom grafu $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegovom komplementu
- takvu shemu možemo konstruirati od bilo kojeg $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i za bilo koji broj vlakna $r \geq 2$

Slučaj B

- $\Omega = \{0, 1\}$
- podsheme na vlaknima imaju jednu klasu i R_1 je susjedstvo u $r \cdot K_m$
- kvocijentna shema ima jednu ili dvije klase (slučajevi B_1 i B_2)

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj B_2

- $\Omega = \{0, 1\}$
- podsheme na vlaknima imaju jednu klasu i R_1 je susjedstvo u $r \cdot K_m$
- kvocijentna shema dvije klase i ekvivalentna je jako regularnom grafu $SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegovom komplementu
- takvu shemu možemo konstruirati od bilo kojeg $SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i za bilo koju veličinu vlakna $m \geq 2$

Slučaj B_2

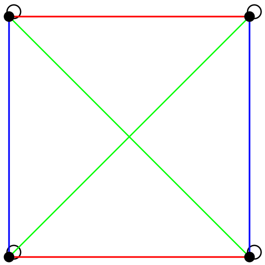
- $\Omega = \{0, 1\}$
- podsheme na vlaknima imaju jednu klasu i R_1 je susjedstvo u $r \cdot K_m$
- kvocijentna shema dvije klase i ekvivalentna je jako regularnom grafu $SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegovom komplementu
- takvu shemu možemo konstruirati od bilo kojeg $SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i za bilo koju veličinu vlakna $m \geq 2$

Slučaj B_1

- kvocijentna shema ima jednu klasu
- između svaka dva vlakna imamo bridove iz R_2 i iz R_3
- unija relacija R_2 i R_3 je susjedstvo u $K_{m,\ldots,m}$
- nemamo jednostavan recept za konstrukciju takvih shema

Primjeri shema tipa B_1

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

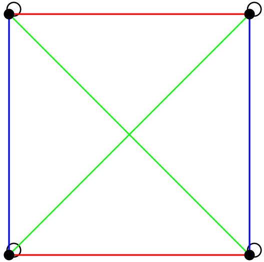
$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

Zatvoreni skupovi:

$$\Omega_1 = \{0, 1\},\ \Omega_2 = \{0, 2\},\ \Omega_3 = \{0, 3\}$$

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

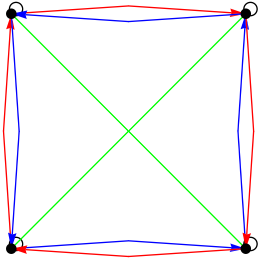
Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

Zatvoreni skupovi:

$$\Omega_1 = \{0, 1\},\ \Omega_2 = \{0, 2\},\ \Omega_3 = \{0, 3\}$$



R_0, R_1, R_2, R_3 **Nesimetrična!**

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_2 = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_4 \cong G_2$

Zatvoreni skupovi: $\Omega_2 = \{0, 2\}$

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$J(v, 3)$ je imprimitivna tipa B_1 za $v = 6$, a primitivna za $v > 6$

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$J(v, 3)$ je imprimitivna tipa B_1 za $v = 6$, a primitivna za $v > 6$

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $\partial(x, y)$ je broj različitih koordinata. Neka su riječi $x, y \in X$ u relaciji R_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$J(v, 3)$ je imprimitivna tipa B_1 za $v = 6$, a primitivna za $v > 6$

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $\partial(x, y)$ je broj različitih koordinata. Neka su riječi $x, y \in X$ u relaciji R_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

$H(3, q)$ je imprimitivna tipa B_1 za $q = 2$, a primitivna za $q > 2$

Primjeri shema tipa B_1

Zadatak 4.32.

Proučite sustave imprimitivnosti od $J(6,3)$ i $H(3,2)$ i uvjerite se da su to sheme tipa B_1. Dokažite da su $J(v,3)$, $v>6$ i $H(3,q)$, $q>2$ primitivne.

Zadatak 4.33.

Ispitajte (im)primitivnost Grassmannove sheme i sheme bilinearnih formi u slučajevima kad imaju tri klase.

Primjeri shema tipa B_1

Zadatak 4.32.

Proučite sustave imprimitivnosti od $J(6,3)$ i $H(3,2)$ i uvjerite se da su to sheme tipa B_1. Dokažite da su $J(v,3)$, $v > 6$ i $H(3,q)$, $q > 2$ primitivne.

Zadatak 4.33.

Ispitajte (im)primitivnost Grassmannove sheme i sheme bilinearnih formi u slučajevima kad imaju tri klase.

Zadatak 1.35.

Neka je $\mathscr{D}$ simetrični $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn. Definiramo bipartitan graf G kojem su vrhovi točke i blokovi od $\mathscr{D}$, a susjedni su ako točka pripada bloku. Dokažite da je G distancijsko regularan graf dijametra $d = 3$, odredite mu presječni niz $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$ i presječne brojeve p_{ij}^k odgovarajuće asocijacijske sheme. Dolazi li svaka (metrička) asocijacijska shema s tim presječnim brojevima od simetričnog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna?

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\mathscr{k}}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima $(v, \mathscr{k}, \lambda)$ ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$

$$\lambda(v-1) = k(k-1) \iff (k-\lambda)(v-1) = k(v-k)$$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$

$$\lambda(v-1) = k(k-1) \quad \Longleftrightarrow \quad (k-\lambda)(v-1) = k(v-k)$$

R. Mathon, A. Rosa, 2-(v, k, λ) *designs of small order*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 25–58.

$\rightsquigarrow$ **199** dopustivih trojki (v, k, λ) parametara simetričnih dizajna

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima $(v, \Bbbk, \lambda)$ ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$

$$\lambda(v-1) = \Bbbk(\Bbbk - 1) \quad \Longleftrightarrow \quad (\Bbbk - \lambda)(v-1) = \Bbbk(v - \Bbbk)$$

R. Mathon, A. Rosa, 2-(v, k, λ) *designs of small order*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 25–58.

$\rightsquigarrow$ **199** dopustivih trojki $(v, \Bbbk, \lambda)$ parametara simetričnih dizajna

Neka je A incidencijska matrica simetričnog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna $\mathscr{D}$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$

$$\lambda(v-1) = k(k-1) \quad \Longleftrightarrow \quad (k-\lambda)(v-1) = k(v-k)$$

R. Mathon, A. Rosa, 2-(v, k, λ) *designs of small order*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 25–58.

$\rightsquigarrow$ **199** dopustivih trojki (v, k, λ) parametara simetričnih dizajna

Neka je A incidencijska matrica simetričnog (v, k, λ) dizajna $\mathscr{D}$

$$AJ = JA = kJ$$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$

$$\lambda(v-1) = k(k-1) \quad \Longleftrightarrow \quad (k-\lambda)(v-1) = k(v-k)$$

R. Mathon, A. Rosa, 2-(v, k, λ) *designs of small order*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 25–58.

$\rightsquigarrow$ **199** dopustivih trojki (v, k, λ) parametara simetričnih dizajna

Neka je A incidencijska matrica simetričnog (v, k, λ) dizajna $\mathscr{D}$

$$AJ = JA = kJ$$

$$AA^t = A^tA = (k-\lambda)I + \lambda J$$

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna

Simetrični dizajni

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna

Schurove idempotente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}, \;\; A_2 = \begin{bmatrix} J-I & 0 \\ 0 & J-I \end{bmatrix}, \;\; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & J-A \\ J-A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Simetrični dizajni

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna

Schurove idempotente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}, \;\; A_2 = \begin{bmatrix} J-I & 0 \\ 0 & J-I \end{bmatrix}, \;\; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & J-A \\ J-A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Ima tri klase, imprimitivna je tipa B_1

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna

Schurove idempotente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} J-I & 0 \\ 0 & J-I \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & J-A \\ J-A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Ima tri klase, imprimitivna je tipa B_1

Patrik je izračunao presječne brojeve. **Svojstvene vrijednosti?**

Simetrični dizajni

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna

Schurove idempotente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} J-I & 0 \\ 0 & J-I \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & J-A \\ J-A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Ima tri klase, imprimitivna je tipa B_1

Patrik je izračunao presječne brojeve. **Svojstvene vrijednosti?**

Lema.

Neka je $M = (k - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima k na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $k + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $k - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

Simetrični dizajni

Propozicija.

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna ima svojstvenu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & v-1 & v-k \\ 1 & -k & v-1 & k-v \\ 1 & \sqrt{k-\lambda} & -1 & -\sqrt{k-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{k-\lambda} & -1 & \sqrt{k-\lambda} \end{bmatrix}$$

Simetrični dizajni

Propozicija.

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna ima svojstvenu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & v-1 & v-k \\ 1 & -k & v-1 & k-v \\ 1 & \sqrt{k-\lambda} & -1 & -\sqrt{k-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{k-\lambda} & -1 & \sqrt{k-\lambda} \end{bmatrix}$$

Beskonačna familija shema tipa B_1, ali uvijek imaju $r = 2$ vlakna!

Simetrični dizajni

Propozicija.

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna ima svojstvenu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & v-1 & v-k \\ 1 & -k & v-1 & k-v \\ 1 & \sqrt{k-\lambda} & -1 & -\sqrt{k-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{k-\lambda} & -1 & \sqrt{k-\lambda} \end{bmatrix}$$

Beskonačna familija shema tipa B_1, ali uvijek imaju $r = 2$ vlakna!

Generalizacija na veći broj vlakna?

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Definicija.

Sustav spojenih simetričnih dizajna $SSSD(v, k, \lambda; r)$ (eng. linked system of symmetric designs, $LSSD$) je graf sa skupom vrhova $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ (disjunktna unija). Skupove X_i zovemo vlaknima i svaki ima v vrhova, pa je ukupan broj vrhova $n = r\,v$. Bridovi zadovoljavaju:

1. svaki brid ima krajeve u različitim vlaknima
2. za sve $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$, inducirani podgraf na $X_i \cup X_j$ je incidencijski graf nekog (v, k, λ) dizajna
3. postoje konstante μ i ν takve da za različite $i, j, k \in \{1, \ldots, r\}$ i za svaki izbor vrhova $x \in X_i$, $y \in X_j$, broj zajedničkih susjeda od x i y u vlaknu X_k je μ ako su x i y susjedni, a ν ako nisu susjedni

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Definicija.

Sustav spojenih simetričnih dizajna $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$ (eng. linked system of symmetric designs, $LSSD$) je graf sa skupom vrhova $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ (disjunktna unija). Skupove X_i zovemo vlaknima i svaki ima v vrhova, pa je ukupan broj vrhova $n = r\,v$. Bridovi zadovoljavaju:

1. svaki brid ima krajeve u različitim vlaknima
2. za sve $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$, inducirani podgraf na $X_i \cup X_j$ je incidencijski graf nekog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna
3. postoje konstante μ i ν takve da za različite $i, j, k \in \{1, \ldots, r\}$ i za svaki izbor vrhova $x \in X_i$, $y \in X_j$, broj zajedničkih susjeda od x i y u vlaknu X_k je μ ako su x i y susjedni, a ν ako nisu susjedni

$SSSD(v, \Bbbk, \lambda; 2)$ ekvivalentan je sim. $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajnu (dokazao Patrik)

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Definicija.

Sustav spojenih simetričnih dizajna $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$ (eng. linked system of symmetric designs, $LSSD$) je graf sa skupom vrhova $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ (disjunktna unija). Skupove X_i zovemo vlaknima i svaki ima v vrhova, pa je ukupan broj vrhova $n = r\,v$. Bridovi zadovoljavaju:

1. svaki brid ima krajeve u različitim vlaknima
2. za sve $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$, inducirani podgraf na $X_i \cup X_j$ je incidencijski graf nekog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna
3. postoje konstante μ i ν takve da za različite $i, j, k \in \{1, \ldots, r\}$ i za svaki izbor vrhova $x \in X_i$, $y \in X_j$, broj zajedničkih susjeda od x i y u vlaknu X_k je μ ako su x i y susjedni, a ν ako nisu susjedni

$SSSD(v, \Bbbk, \lambda; 2)$ ekvivalentan je sim. $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajnu (dokazao Patrik)

Zanima nas slučaj $r \geq 3$!

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Lema.

Multipartitni komplement grafa $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$ je graf $SSSD(v, v - \Bbbk, v - 2\Bbbk + \lambda; r)$. Pritom su konstante iz trećeg uvjeta definicije $\bar{\mu} = v - 2\Bbbk + \nu$ i $\bar{\nu} = v - 2\Bbbk + \mu$.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Lema.

Multipartitni komplement grafa $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$ je graf $SSSD(v, v-\Bbbk, v-2\Bbbk+\lambda; r)$. Pritom su konstante iz trećeg uvjeta definicije $\bar{\mu} = v - 2\Bbbk + \nu$ i $\bar{\nu} = v - 2\Bbbk + \mu$.

Teorem.

Neka postoji $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; 3)$. Tada vrijedi:

1. red simetričnog dizajna $\Bbbk - \lambda$ je kvadrat prirodnog broja
2. $\nu = \frac{\Bbbk(\Bbbk \pm \sqrt{\Bbbk-\lambda})}{v}$ i $\mu = \nu \mp \sqrt{\Bbbk - \lambda}$
3. $M(v, k) > 1$ i $M(v, \sqrt{\Bbbk - \lambda}) > 1$ (M je najveći zajednički djelitelj)
4. v dijeli točno jedan od brojeva $\Bbbk(\Bbbk + \sqrt{\Bbbk - \lambda})$, $\Bbbk(\Bbbk - \sqrt{\Bbbk - \lambda})$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Lema.

Multipartitni komplement grafa $SSSD(v, k, \lambda; r)$ je graf $SSSD(v, v - k, v - 2k + \lambda; r)$. Pritom su konstante iz trećeg uvjeta definicije $\bar{\mu} = v - 2k + \nu$ i $\bar{\nu} = v - 2k + \mu$.

Teorem.

Neka postoji $SSSD(v, k, \lambda; 3)$. Tada vrijedi:

1. red simetričnog dizajna $k - \lambda$ je kvadrat prirodnog broja
2. $\nu = \frac{k(k \pm \sqrt{k-\lambda})}{v}$ i $\mu = \nu \mp \sqrt{k - \lambda}$
3. $M(v, k) > 1$ i $M(v, \sqrt{k - \lambda}) > 1$ (M je najveći zajednički djelitelj)
4. v dijeli točno jedan od brojeva $k(k + \sqrt{k - \lambda})$, $k(k - \sqrt{k - \lambda})$

Parametri (v, k, λ) jednoznačno određuju μ i ν!

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Lema.

Multipartitni komplement grafa $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$ je graf $SSSD(v, v-\Bbbk, v-2\Bbbk+\lambda; r)$. Pritom su konstante iz trećeg uvjeta definicije $\bar{\mu} = v - 2\Bbbk + \nu$ i $\bar{\nu} = v - 2\Bbbk + \mu$.

Teorem.

Neka postoji $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; 3)$. Tada vrijedi:

1. red simetričnog dizajna $\Bbbk - \lambda$ je kvadrat prirodnog broja
2. $\nu = \frac{\Bbbk(\Bbbk \pm \sqrt{\Bbbk - \lambda})}{v}$ i $\mu = \nu \mp \sqrt{\Bbbk - \lambda}$
3. $M(v, k) > 1$ i $M(v, \sqrt{\Bbbk - \lambda}) > 1$ (M je najveći zajednički djelitelj)
4. v dijeli točno jedan od brojeva $\Bbbk(\Bbbk + \sqrt{\Bbbk - \lambda})$, $\Bbbk(\Bbbk - \sqrt{\Bbbk - \lambda})$

Parametri $(v, \Bbbk, \lambda)$ **jednoznačno određuju** μ **i** ν **!**

$\mu > \nu \rightsquigarrow$ SSSD je μ-naglašen; $\mu < \nu \rightsquigarrow$ SSSD je ν-naglašen

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

$(v, \Bbbk, \lambda)$	μ	ν	$(v, \bar{\Bbbk}, \bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$
$(16, 6, 2)$	1	3	$(16, 10, 6)$	7	5
$(36, 15, 6)$	8	5	$(36, 21, 12)$	11	14
$(45, 12, 3)$	1	4	$(45, 33, 24)$	25	22
$(64, 28, 12)$	10	14	$(64, 36, 20)$	22	18
$(96, 20, 4)$	1	5	$(96, 76, 60)$	61	57
$(175, 30, 5)$	1	6	$(175, 145, 120)$	121	116

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

(v,k,λ)	μ	ν	$(v,\bar{k},\bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$
$(16,6,2)$	1	3	$(16,10,6)$	7	5
$(36,15,6)$	8	5	$(36,21,12)$	11	14
$(45,12,3)$	1	4	$(45,33,24)$	25	22
$(64,28,12)$	10	14	$(64,36,20)$	22	18
$(96,20,4)$	1	5	$(96,76,60)$	61	57
$(175,30,5)$	1	6	$(175,145,120)$	121	116

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

(v, k, λ)	μ	ν	$(v, \bar{k}, \bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	
$(16, 6, 2)$	1	3	$(16, 10, 6)$	7	5	optimistični
$(36, 15, 6)$	8	5	$(36, 21, 12)$	11	14	pesimistični
$(45, 12, 3)$	1	4	$(45, 33, 24)$	25	22	optimistični
$(64, 28, 12)$	10	14	$(64, 36, 20)$	22	18	optimistični
$(96, 20, 4)$	1	5	$(96, 76, 60)$	61	57	optimistični
$(175, 30, 5)$	1	6	$(175, 145, 120)$	121	116	optimistični

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Teorem.

Neka postoji sustav spojenih simetričnih dizajna s r vlakna veličine v. Tada postoji asocijacijska shema s tri klase koja je imprimitivna tipa B_1 i netrivijalne relacije su joj:

- R_1 je susjedstvo u μ-naglašenom $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$
- R_2 je susjedstvo u disjunktnoj uniji potpunih grafova na vlaknima
- R_3 je susjedstvo u ν-naglašenom $SSSD(v, v - \Bbbk, v - 2\Bbbk + \lambda; r)$

Grafovi od kojih su dobivene relacije R_1 i R_3 su multipartitni komplementi.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Teorem.

Neka postoji sustav spojenih simetričnih dizajna s r vlakna veličine v. Tada postoji asocijacijska shema s tri klase koja je imprimitivna tipa B_1 i netrivijalne relacije su joj:

- R_1 je susjedstvo u μ-naglašenom $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$
- R_2 je susjedstvo u disjunktnoj uniji potpunih grafova na vlaknima
- R_3 je susjedstvo u ν-naglašenom $SSSD(v, v - \Bbbk, v - 2\Bbbk + \lambda; r)$

Grafovi od kojih su dobivene relacije R_1 i R_3 su multipartitni komplementi.

Presječne matrice:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Teorem.

Neka postoji sustav spojenih simetričnih dizajna s r vlakna veličine v. Tada postoji asocijacijska shema s tri klase koja je imprimitivna tipa B_1 i netrivijalne relacije su joj:

- R_1 je susjedstvo u μ-naglašenom $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$
- R_2 je susjedstvo u disjunktnoj uniji potpunih grafova na vlaknima
- R_3 je susjedstvo u ν-naglašenom $SSSD(v, v - \Bbbk, v - 2\Bbbk + \lambda; r)$

Grafovi od kojih su dobivene relacije R_1 i R_3 su multipartitni komplementi.

Presječne matrice:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & (r-1)\Bbbk & 0 & 0 \\ 1 & (r-2)\mu & \Bbbk - 1 & (r-2)(\Bbbk - \mu) \\ 0 & (r-1)\lambda & 0 & (r-1)(\Bbbk - \lambda) \\ 0 & (r-2)\nu & \Bbbk & (r-2)(\Bbbk - \nu) \end{bmatrix}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Teorem.

Neka postoji sustav spojenih simetričnih dizajna s r vlakna veličine v. Tada postoji asocijacijska shema s tri klase koja je imprimitivna tipa B_1 i netrivijalne relacije su joj:

- R_1 je susjedstvo u μ-naglašenom $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$
- R_2 je susjedstvo u disjunktnoj uniji potpunih grafova na vlaknima
- R_3 je susjedstvo u ν-naglašenom $SSSD(v, v - \Bbbk, v - 2\Bbbk + \lambda; r)$

Grafovi od kojih su dobivene relacije R_1 i R_3 su multipartitni komplementi.

Presječne matrice:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v-1 & 0 \\ 0 & \Bbbk - 1 & 0 & v - \Bbbk \\ 1 & 0 & v-2 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 & v - \Bbbk - 1 \end{bmatrix}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Teorem.

Neka postoji sustav spojenih simetričnih dizajna s r vlakna veličine v. Tada postoji asocijacijska shema s tri klase koja je imprimitivna tipa B_1 i netrivijalne relacije su joj:

- R_1 je susjedstvo u μ-naglašenom $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$
- R_2 je susjedstvo u disjunktnoj uniji potpunih grafova na vlaknima
- R_3 je susjedstvo u ν-naglašenom $SSSD(v, v - \Bbbk, v - 2\Bbbk + \lambda; r)$

Grafovi od kojih su dobivene relacije R_1 i R_3 su multipartitni komplementi.

Presječne matrice:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (r-1)(v-\Bbbk) \\ 0 & (r-2)(\Bbbk-\mu) & v-\Bbbk & (r-2)(v-2\Bbbk+\mu) \\ 0 & (r-1)(\Bbbk-\lambda) & 0 & (r-1)(v-2\Bbbk+\lambda) \\ 1 & (r-2)(\Bbbk-\nu) & v-\Bbbk-1 & (r-2)(v-2\Bbbk+\nu) \end{bmatrix}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Propozicija.

Ako su relacije numerirane kao u teoremu, tako da je R_1 relacija susjedstva μ-naglašenog $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, onda asocijacijska shema ima svojstvene matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (r-1)\Bbbk & v-1 & (r-1)(v-\Bbbk) \\ 1 & -\Bbbk & v-1 & \Bbbk - v \\ 1 & (r-1)\sqrt{\Bbbk-\lambda} & -1 & (1-r)\sqrt{\Bbbk-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{\Bbbk-\lambda} & -1 & \sqrt{\Bbbk-\lambda} \end{bmatrix}$$

Propozicija.

Ako su relacije numerirane kao u teoremu, tako da je R_1 relacija susjedstva μ-naglašenog $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; 2)$, onda asocijacijska shema ima svojstvene matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \Bbbk & v-1 & v-\Bbbk \\ 1 & -\Bbbk & v-1 & \Bbbk - v \\ 1 & \sqrt{\Bbbk-\lambda} & -1 & -\sqrt{\Bbbk-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{\Bbbk-\lambda} & -1 & \sqrt{\Bbbk-\lambda} \end{bmatrix}$$

Propozicija.

Ako su relacije numerirane kao u teoremu, tako da je R_1 relacija susjedstva μ-naglašenog $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, onda asocijacijska shema ima svojstvene matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & (r-1)\Bbbk & v-1 & (r-1)(v-\Bbbk) \\ 1 & -\Bbbk & v-1 & \Bbbk - v \\ 1 & (r-1)\sqrt{\Bbbk-\lambda} & -1 & (1-r)\sqrt{\Bbbk-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{\Bbbk-\lambda} & -1 & \sqrt{\Bbbk-\lambda} \end{bmatrix}$$

Propozicija.

Ako su relacije numerirane kao u teoremu, tako da je R_1 relacija susjedstva μ-naglašenog $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, onda asocijacijska shema ima svojstvene matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & r-1 & v-1 & (r-1)(v-1) \\ 1 & -1 & \frac{v-\Bbbk}{\sqrt{\Bbbk-\lambda}} & \frac{\Bbbk-v}{\sqrt{\Bbbk-\lambda}} \\ 1 & r-1 & -1 & 1-r \\ 1 & -1 & \frac{-\Bbbk}{\sqrt{\Bbbk-\lambda}} & \frac{\Bbbk}{\sqrt{\Bbbk-\lambda}} \end{bmatrix}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Za $r > 2$ SSSD **nije** distancijsko regularan! Dijametar od G_1 i G_3 je 2, a ne 3 kao za $r = 2$.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Za $r > 2$ SSSD **nije** distancijsko regularan! Dijametar od G_1 i G_3 je 2, a ne 3 kao za $r = 2$.

Zadatak.

Može li $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, $r > 2$ biti jako regularan? S kojim parametrima?

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Za $r > 2$ SSSD **nije** distancijsko regularan! Dijametar od G_1 i G_3 je 2, a ne 3 kao za $r = 2$.

Zadatak.

Može li $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, $r > 2$ biti jako regularan? S kojim parametrima?

$$(r-1)\lambda = (r-2)\nu$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Za $r > 2$ SSSD **nije** distancijsko regularan! Dijametar od G_1 i G_3 je 2, a ne 3 kao za $r = 2$.

Zadatak.

Može li $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, $r > 2$ biti jako regularan? S kojim parametrima?

$$(r-1)\lambda = (r-2)\nu$$

$$SRG(rv, (r-1)\Bbbk, (r-2)\mu, (r-2)\nu)$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Za $r > 2$ SSSD **nije** distancijsko regularan! Dijametar od G_1 i G_3 je 2, a ne 3 kao za $r = 2$.

Zadatak.

Može li $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, $r > 2$ biti jako regularan? S kojim parametrima?

$$(r-1)\lambda = (r-2)\nu$$

$$SRG(rv, (r-1)\Bbbk, (r-2)\mu, (r-2)\nu)$$

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Za $r > 2$ SSSD **nije** distancijsko regularan! Dijametar od G_1 i G_3 je 2, a ne 3 kao za $r = 2$.

Zadatak.

Može li $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, $r > 2$ biti jako regularan? S kojim parametrima?

$$(r-1)\lambda = (r-2)\nu$$

$$SRG(rv, (r-1)\Bbbk, (r-2)\mu, (r-2)\nu)$$

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Može li broj vlakna r biti po volji velik?

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Za $r > 2$ SSSD **nije** distancijsko regularan! Dijametar od G_1 i G_3 je 2, a ne 3 kao za $r = 2$.

Zadatak.

Može li $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, $r > 2$ biti jako regularan? S kojim parametrima?

$$(r-1)\lambda = (r-2)\nu$$

$$SRG(rv, (r-1)\Bbbk, (r-2)\mu, (r-2)\nu)$$

P. J. Cameron, *On groups with several doubly-transitive permutation representations*, Math. Z. **128** (1972), 1–14.

Može li broj vlakna r biti po volji velik?

R. Noda, *On homogeneous systems of linked symmetric designs*, Math. Z. **138** (1974), 15–20.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Teorem (Nodina nejednakost).

Ako postoji $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$, onda je

$$(r-1)\left[(\Bbbk-2)\lambda\binom{\Bbbk}{3} - (v-2)\left[(v-\Bbbk)\binom{\nu}{3} + \Bbbk\binom{\mu}{3}\right]\right] \leq$$

$$\leq (v-2)\left[(v-1)\binom{\lambda}{3} + \binom{\Bbbk}{3} - \left[(v-k)\binom{\nu}{3} + \Bbbk\binom{\mu}{3}\right]\right]$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako $(X_1, X_2 \cup \cdots \cup X_r)$ čini 3-dizajn.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

(v, k, λ)	μ	ν	$(v, \bar{k}, \bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	
$(16, 6, 2)$	1	3	$(16, 10, 6)$	7	5	optimistični
$(36, 15, 6)$	8	5	$(36, 21, 12)$	11	14	pesimistični
$(45, 12, 3)$	1	4	$(45, 33, 24)$	25	22	optimistični
$(64, 28, 12)$	10	14	$(64, 36, 20)$	22	18	optimistični
$(96, 20, 4)$	1	5	$(96, 76, 60)$	61	57	optimistični
$(175, 30, 5)$	1	6	$(175, 145, 120)$	121	116	optimistični

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

(v, k, λ)	μ	ν	$(v, \bar{k}, \bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	Noda:
$(16, 6, 2)$	1	3	$(16, 10, 6)$	7	5	$r \leq 8$
$(36, 15, 6)$	8	5	$(36, 21, 12)$	11	14	$r \geq -16$
$(45, 12, 3)$	1	4	$(45, 33, 24)$	25	22	$r \leq 50/7$
$(64, 28, 12)$	10	14	$(64, 36, 20)$	22	18	$r \leq 32$
$(96, 20, 4)$	1	5	$(96, 76, 60)$	61	57	$r \leq 54/7$
$(175, 30, 5)$	1	6	$(175, 145, 120)$	121	116	$r \leq 196/23$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

R. Mathon, *The systems of linked* $2\text{-}(16,6,2)$ *designs*, Ars Combin. **11** (1981), 131–148.

Nodina nejednakost je ekvivalentna Kreinovom uvjetu $q_{22}^2 \geq 0$.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

R. Mathon, *The systems of linked* 2-$(16,6,2)$ *designs*, Ars Combin. **11** (1981), 131–148.

Nodina nejednakost je ekvivalentna Kreinovom uvjetu $q_{22}^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
q_{22}^2 &= \frac{m_2^2}{n}\left[\frac{1}{n_0^2}P_0(2)^3 + \frac{1}{n_1^2}P_1(2)^3 + \frac{1}{n_2^2}P_2(2)^3 + \frac{1}{n_3^2}P_3(2)^3\right] \\
&= \frac{(v-1)^2}{rv}\left[1 + \frac{(r-1)^{\cancel{3}}(\sqrt{\cancel{k}-\lambda})^3}{\cancel{(r-1)^2}\,\cancel{k}^2} - \frac{1}{(v-1)^2} - \frac{(r-1)^{\cancel{3}}(\sqrt{\cancel{k}-\lambda})^3}{\cancel{(r-1)^2}(v-\cancel{k})^2}\right] \\
&= \frac{(v-1)^2}{rv}\left[(r-1)(\sqrt{\cancel{k}-\lambda})^3\left(\frac{1}{\cancel{k}^2} - \frac{1}{(v-\cancel{k})^2}\right) + 1 - \frac{1}{(v-1)^2}\right] \\
&= \frac{(v-1)^2}{r\cancel{v}}\left[(r-1)(\sqrt{\cancel{k}-\lambda})^3\,\frac{\cancel{v}(v-2\cancel{k})}{\cancel{k}^2(v-\cancel{k})^2} + \frac{\cancel{v}(v-2)}{(v-1)^2}\right].
\end{aligned}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Iskoristimo uvjet $\Bbbk(v-\Bbbk)=(\Bbbk-\lambda)(v-1)$:

$$q_{22}^2 = \frac{\cancel{(v-1)^2}}{r}\left[(r-1)(\sqrt{\Bbbk-\lambda})^3\,\frac{v-2\Bbbk}{(\Bbbk-\lambda)^2\cancel{(v-1)^2}}+\frac{v-2}{\cancel{(v-1)^2}}\right]$$
$$= \frac{1}{r}\left[(r-1)\frac{v-2\Bbbk}{\sqrt{\Bbbk-\lambda}}+v-2\right]\geq 0.$$

Iskoristimo uvjet $\Bbbk(v-\Bbbk)=(\Bbbk-\lambda)(v-1)$:

$$q_{22}^2 = \frac{\cancel{(v-1)^2}}{r}\left[(r-1)(\sqrt{\Bbbk-\lambda})^3\,\frac{v-2\Bbbk}{(\Bbbk-\lambda)^2\cancel{(v-1)^2}}+\frac{v-2}{\cancel{(v-1)^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[(r-1)\frac{v-2\Bbbk}{\sqrt{\Bbbk-\lambda}}+v-2\right]\geq 0.$$

$$(r-1)(2\Bbbk-v)\leq (v-2)\sqrt{\Bbbk-\lambda}$$

Iskoristimo uvjet $\Bbbk(v-\Bbbk)=(\Bbbk-\lambda)(v-1)$:

$$q_{22}^2 = \frac{\cancel{(v-1)^2}}{r}\left[(r-1)(\sqrt{\Bbbk-\lambda})^3\,\frac{v-2\Bbbk}{(\Bbbk-\lambda)^2\cancel{(v-1)^2}}+\frac{v-2}{\cancel{(v-1)^2}}\right]$$
$$= \frac{1}{r}\left[(r-1)\frac{v-2\Bbbk}{\sqrt{\Bbbk-\lambda}}+v-2\right]\geq 0.$$

$$(r-1)(2\Bbbk-v)\leq (v-2)\sqrt{\Bbbk-\lambda}$$

Za optimistične SSSD-ove je $2\Bbbk-v>0$:

$$r\leq \frac{(v-2)\sqrt{\Bbbk-\lambda}}{2\Bbbk-v}+1$$

Dr. Z's Opinions

Opinion 5: The perils of 'Algebraic' Combinatorics:
Let's Not Get Too Gentrified.

Many of the successes of 'fancy' mathematics are due to socio-logical and linguistic reasons. They are really high-school-algebra arguments in disguise. Once you strip the fancy verbiage off, what remains is a bare (and much prettier, in my eyes) argument in high-school mathematics...

Doron Zeilberger (Aug. 11, 1995)

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka su $m_0, \ldots, m_d$ kratnosti komutativne koherentne konfiguracije s d klasa i neka su zadani $i, j \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{q_{ij}^k \neq 0} m_k \leq \begin{cases} m_i m_j, & \text{ako je } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i (m_i + 1), & \text{ako je } i = j, \end{cases}$$

pri čemu na lijevoj strani sumiramo po svim indeksima $k \in \{0, \ldots, d\}$ za koje Kreinov parametar q_{ij}^k nije jednak nula.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka su $m_0, \ldots, m_d$ kratnosti komutativne koherentne konfiguracije s d klasa i neka su zadani $i, j \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{q_{ij}^k \neq 0} m_k \leq \begin{cases} m_i m_j, & \text{ako je } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i (m_i + 1), & \text{ako je } i = j, \end{cases}$$

pri čemu na lijevoj strani sumiramo po svim indeksima $k \in \{0, \ldots, d\}$ za koje Kreinov parametar q_{ij}^k nije jednak nula.

$$i = j = 1, \quad q_{22}^0 = v - 1 > 0, \quad q_{22}^1 = 0, \quad q_{22}^3 > 0$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka su $m_0, \ldots, m_d$ kratnosti komutativne koherentne konfiguracije s d klasa i neka su zadani $i, j \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{q_{ij}^k \neq 0} m_k \leq \begin{cases} m_i m_j, & \text{ako je } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i(m_i+1), & \text{ako je } i = j, \end{cases}$$

pri čemu na lijevoj strani sumiramo po svim indeksima $k \in \{0, \ldots, d\}$ za koje Kreinov parametar q_{ij}^k nije jednak nula.

$$i = j = 1, \quad q_{22}^0 = v - 1 > 0, \quad q_{22}^1 = 0, \quad q_{22}^3 > 0$$

$$q_{22}^2 > 0 \;\rightsquigarrow\; m_0 + m_2 + m_3 \leq \tfrac{1}{2} m_2(m_2+1) \;\rightsquigarrow\; r \leq \tfrac{v-1}{2}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147.

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka su $m_0, \ldots, m_d$ kratnosti komutativne koherentne konfiguracije s d klasa i neka su zadani $i, j \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{q_{ij}^k \neq 0} m_k \leq \begin{cases} m_i m_j, & \text{ako je } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i(m_i + 1), & \text{ako je } i = j, \end{cases}$$

pri čemu na lijevoj strani sumiramo po svim indeksima $k \in \{0, \ldots, d\}$ za koje Kreinov parametar q_{ij}^k nije jednak nula.

$$i = j = 1, \quad q_{22}^0 = v - 1 > 0, \quad q_{22}^1 = 0, \quad q_{22}^3 > 0$$

$$q_{22}^2 > 0 \ \rightsquigarrow\ m_0 + m_2 + m_3 \leq \tfrac{1}{2} m_2(m_2 + 1) \ \rightsquigarrow\ r \leq \tfrac{v-1}{2}$$

$$q_{22}^2 = 0 \ \rightsquigarrow\ m_0 + m_3 \leq \tfrac{1}{2} m_2(m_2 + 1) \ \rightsquigarrow\ r \leq \tfrac{v+1}{2}$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

(v, k, λ)	μ	ν	$(v, \bar{k}, \bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	Noda:
$(16, 6, 2)$	1	3	$(16, 10, 6)$	7	5	$r \leq 8$
$(36, 15, 6)$	8	5	$(36, 21, 12)$	11	14	$r \geq -16$
$(45, 12, 3)$	1	4	$(45, 33, 24)$	25	22	$r \leq 50/7$
$(64, 28, 12)$	10	14	$(64, 36, 20)$	22	18	$r \leq 32$
$(96, 20, 4)$	1	5	$(96, 76, 60)$	61	57	$r \leq 54/7$
$(175, 30, 5)$	1	6	$(175, 145, 120)$	121	116	$r \leq 196/23$

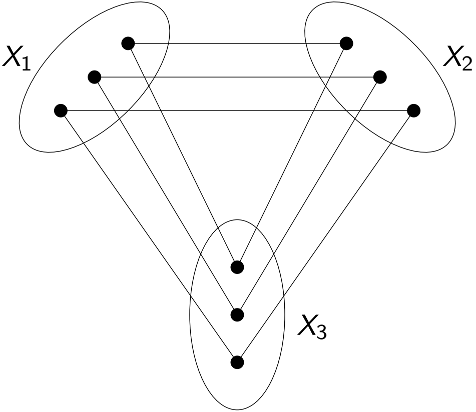
Sustavi spojenih simetričnih dizajna

(v, k, λ)	μ	ν	$(v, \bar{k}, \bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	Apsolutna:
$(16, 6, 2)$	1	3	$(16, 10, 6)$	7	5	$r \leq 8$
$(36, 15, 6)$	8	5	$(36, 21, 12)$	11	14	$r \leq \mathbf{17}$
$(45, 12, 3)$	1	4	$(45, 33, 24)$	25	22	$r \leq 50/7$
$(64, 28, 12)$	10	14	$(64, 36, 20)$	22	18	$r \leq 32$
$(96, 20, 4)$	1	5	$(96, 76, 60)$	61	57	$r \leq 54/7$
$(175, 30, 5)$	1	6	$(175, 145, 120)$	121	116	$r \leq 196/23$

Egzistencija SSSD-ova?

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Egzistencija SSSD-ova?



Trivijalni $SSSD(v, 1, 0; r)$, $\mu = 1$, $\nu = 0$, pesimistični

Egzistencija SSSD-ova?

Optimistični: "klasična serija"

J.-M. Goethals, *Nonlinear codes defined by quadratic forms over $GF(2)$*, Information and Control **31** (1976), no. 1, 43–74.

P. J. Cameron, J. J. Seidel, *Quadratic forms over $GF(2)$*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **76** Indag. Math. **35** (1973), 1–8.

Egzistencija SSSD-ova?

Optimistični: “klasična serija”

J.-M. Goethals, *Nonlinear codes defined by quadratic forms over $GF(2)$*, Information and Control **31** (1976), no. 1, 43–74.

P. J. Cameron, J. J. Seidel, *Quadratic forms over $GF(2)$*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **76** Indag. Math. **35** (1973), 1–8.

$$(v, \Bbbk, \lambda) = (2^{2m},\ 2^{m-1}(2^m+1),\ 2^{m-1}(2^{m-1}+1))$$

$$\Bbbk - \lambda = 2^{2(m-1)},\ \ \mu = 2^{m-2}(2^m+3),\ \ \nu = 2^{m-2}(2^m+1)$$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Egzistencija SSSD-ova?

Optimistični: "klasična serija"

J.-M. Goethals, *Nonlinear codes defined by quadratic forms over $GF(2)$*, Information and Control **31** (1976), no. 1, 43–74.

P. J. Cameron, J. J. Seidel, *Quadratic forms over $GF(2)$*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **76** Indag. Math. **35** (1973), 1–8.

$$(v, \Bbbk, \lambda) = (2^{2m},\ 2^{m-1}(2^m+1),\ 2^{m-1}(2^{m-1}+1))$$

$$\Bbbk - \lambda = 2^{2(m-1)},\ \ \mu = 2^{m-2}(2^m+3),\ \ \nu = 2^{m-2}(2^m+1)$$

Binarni linearni Reed-Mullerov kod $RM(m,2)$ $\rightsquigarrow$ $r = 2^m$

Nelinearni Kerdockov kod $\rightsquigarrow$ $r = 2^{2m-1}$

Egzistencija SSSD-ova?

Optimistični: "klasična serija"

J.-M. Goethals, *Nonlinear codes defined by quadratic forms over GF*(2), Information and Control **31** (1976), no. 1, 43–74.

P. J. Cameron, J. J. Seidel, *Quadratic forms over GF*(2), Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **76** Indag. Math. **35** (1973), 1–8.

$$(v, \Bbbk, \lambda) = (2^{2m},\ 2^{m-1}(2^m + 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} + 1))$$

$$\Bbbk - \lambda = 2^{2(m-1)},\ \ \mu = 2^{m-2}(2^m + 3),\ \ \nu = 2^{m-2}(2^m + 1)$$

Binarni linearni Reed-Mullerov kod $RM(m, 2) \ \rightsquigarrow \ r = 2^m$

Nelinearni Kerdockov kod $\rightsquigarrow \ r = 2^{2m-1}$ **Dostiže Nodinu ocjenu!**

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

(v, k, λ)	μ	ν	$(v, \bar{k}, \bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	
$(16, 6, 2)$	1	3	$(16, 10, 6)$	7	5	$r \leq 8$
$(36, 15, 6)$	8	5	$(36, 21, 12)$	11	14	$r \leq 17$
$(45, 12, 3)$	1	4	$(45, 33, 24)$	25	22	$r \leq 50/7$
$(64, 28, 12)$	10	14	$(64, 36, 20)$	22	18	$r \leq 32$
$(96, 20, 4)$	1	5	$(96, 76, 60)$	61	57	$r \leq 54/7$
$(175, 30, 5)$	1	6	$(175, 145, 120)$	121	116	$r \leq 196/23$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

$(v,\Bbbk,\lambda)$	μ	ν	$(v,\bar{\Bbbk},\bar{\lambda})$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	
$\mathbf{(16,6,2)}$	**1**	**3**	$\mathbf{(16,10,6)}$	**7**	**5**	$r=\mathbf{8}$
$(36,15,6)$	8	5	$(36,21,12)$	11	14	$r\le 17$
$(45,12,3)$	1	4	$(45,33,24)$	25	22	$r\le 50/7$
$\mathbf{(64,28,12)}$	**10**	**14**	$\mathbf{(64,36,20)}$	**22**	**18**	$r=\mathbf{32}$
$(96,20,4)$	1	5	$(96,76,60)$	61	57	$r\le 54/7$
$(175,30,5)$	1	6	$(175,145,120)$	121	116	$r\le 196/23$

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

J. A. Davis, W. J. Martin, J. B. Polhill, *Linking systems in nonelementary abelian groups*, J. Combin. Theory Ser. A **123** (2014), 92–103.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

J. A. Davis, W. J. Martin, J. B. Polhill, *Linking systems in nonelementary abelian groups*, J. Combin. Theory Ser. A **123** (2014), 92–103.

J. Jedwab, S. Li, S. Simon, *Linking systems of difference sets*, J. Combin. Des. **27** (2019), no. 3, 161–187.

Sustavi spojenih simetričnih dizajna

J. A. Davis, W. J. Martin, J. B. Polhill, *Linking systems in nonelementary abelian groups*, J. Combin. Theory Ser. A **123** (2014), 92–103.

J. Jedwab, S. Li, S. Simon, *Linking systems of difference sets*, J. Combin. Des. **27** (2019), no. 3, 161–187.

B. G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebr. Comb. **2** (2019), no. 1, 119–147. $\rightsquigarrow$ *regular unbiased Hadamard matrices*

Monday, April 8

8:45	REGISTRATION
9:15	Opening
9:25	Charlene Weiß *Existence of t-designs in polar spaces for all t*
9:50	Alena Ernst *Transitivity in finite general linear groups*
10:15	Lukas Klawuhn *Designs in the generalised symmetric group*
10:40	COFFEE
11:15	Padraig Ó Catháin *Monomial representations and combinatorics*
11:40	Patrick Solé *Hadamard matrices and spherical designs*
12:05	Jan De Beule *Existence and non-existence of Cameron-Liebler k-sets in projective spaces*
12:30	Qing Xiang *Cameron-Liebler line classes, tight sets and strongly regular Cayley graphs*
13:00	LUNCH
14:30	INVITED TALK Michael Kiermaier *The degree of functions in the Johnson and q-Johnson schemes*
15:30	Misha Muzychuk *Constructing linked systems of relative difference sets via Schur rings*
15:55	Edwin van Dam *Amorphic association schemes and fusing pairs*