Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

25.3.2024.

Seminari

Seminari

Imaju temu: Teo, Paula, Valentino, Lucija, Patrik.

Nemaju temu: Helena, Filip, Pavao, Daniel, Ana.

Seminari

Imaju temu: Teo, Paula, Valentino, Lucija, Patrik.

Nemaju temu: Helena, Filip, Pavao, Daniel, Ana.

Egzotične teme: primjene u drugim područjima – statistika, numerička matematika, fizika (npr. Spin modeli ili (t, s, m)-mreže)

Seminari

Imaju temu: Teo, Paula, Valentino, Lucija, Patrik.

Nemaju temu: Helena, Filip, Pavao, Daniel, Ana.

Egzotične teme: primjene u drugim područjima – statistika, numerička matematika, fizika (npr. Spin modeli ili (t, s, m)-mreže)

Pitome teme: nešto što sam preskočio ili ću preskočiti iz knjiga po kojima pripremam predavanja (npr. Imprimitivni distancijsko regularni grafovi)

Seminari

Imaju temu: Teo, Paula, Valentino, Lucija, Patrik.

Nemaju temu: Helena, Filip, Pavao, Daniel, Ana.

Egzotične teme: primjene u drugim područjima – statistika, numerička matematika, fizika (npr. Spin modeli ili (t, s, m)-mreže)

Pitome teme: nešto što sam preskočio ili ću preskočiti iz knjiga po kojima pripremam predavanja (npr. Imprimitivni distancijsko regularni grafovi)

Vlastite teme: npr. Teova

Nastava

1.4.2024. je Uskrsni ponedjeljak

Nastava

1.4.2024. je Uskrsni ponedjeljak

3.4.2024. (srijeda), 17-19

Nastava

1.4.2024. je Uskrsni ponedjeljak

3.4.2024. (srijeda), 17-19

7.-13.4.2024. je konferencija u Dubrovniku

Nastava

1.4.2024. je Uskrsni ponedjeljak

3.4.2024. (srijeda), 17-19

7.-13.4.2024. je konferencija u Dubrovniku

15.4.2024. (ponedjeljak) radije ne bih. Može li netko održati seminar?

Nastava

1.4.2024. je Uskrsni ponedjeljak

3.4.2024. (srijeda), 17-19

7.-13.4.2024. je konferencija u Dubrovniku

15.4.2024. (ponedjeljak) radije ne bih. Može li netko održati seminar?

17.4.2024. (srijeda), 17-19

Konferencija u Dubrovniku

Monday, April 8

8:45	Registration
9:15	Opening
9:25	Charlene Weiß *Existence of t-designs in polar spaces for all t*
9:50	Alena Ernst *Transitivity in finite general linear groups*
10:15	Lukas Klawuhn *Designs in the generalised symmetric group*
10:40	Coffee
11:15	Padraig Ó Catháin *Monomial representations and combinatorics*
11:40	Patrick Solé *Hadamard matrices and spherical designs*
12:05	Jan De Beule *Existence and non-existence of Cameron-Liebler k-sets in projective spaces*
12:30	Qing Xiang *Cameron-Liebler line classes, tight sets and strongly regular Cayley graphs*
13:00	Lunch
14:30	Invited talk Michael Kiermaier *The degree of functions in the Johnson and q-Johnson schemes*
15:30	Misha Muzychuk *Constructing linked systems of relative difference sets via Schur rings*
15:55	Edwin van Dam *Amorphic association schemes and fusing pairs*

Normalne podgrupe

Normalna podgrupa $N \trianglelefteq G$

Normalne podgrupe

Normalna podgrupa $N \trianglelefteq G$ Definicija?

Normalne podgrupe

Normalna podgrupa $N \trianglelefteq G$ Definicija?

$$N,\ x_2N,\ \ldots,\ x_rN \quad = \quad N,\ Nx_2,\ \ldots,\ Nx_r$$

Normalne podgrupe

Normalna podgrupa $N \trianglelefteq G$ Definicija?

$$N,\ x_2N,\ \ldots,\ x_rN \quad = \quad N,\ Nx_2,\ \ldots,\ Nx_r$$

Kvocijentna grupa G/N

Normalne podgrupe

Normalna podgrupa $N \trianglelefteq G$ Definicija?

$$N,\, x_2N,\, \ldots,\, x_rN \quad = \quad N,\, Nx_2,\, \ldots,\, Nx_r$$

Kvocijentna grupa G/N

Ako znamo N i G/N, je li time jednoznačno određena grupa G?

Normalne podgrupe

Normalna podgrupa $N \trianglelefteq G$ Definicija?

$$N,\ x_2N,\ \ldots,\ x_rN \quad = \quad N,\ Nx_2,\ \ldots,\ Nx_r$$

Kvocijentna grupa G/N

Ako znamo N i G/N, je li time jednoznačno određena grupa G?

Jordan-Hölderov teorem?

Normalne podgrupe

Normalna podgrupa $N \trianglelefteq G$ Definicija?

$$N,\, x_2 N,\, \ldots,\, x_r N \quad = \quad N,\, N x_2,\, \ldots,\, N x_r$$

Kvocijentna grupa G/N

Ako znamo N i G/N, je li time jednoznačno određena grupa G?

Jordan-Hölderov teorem?

$$1 = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots \triangleleft N_k = G$$

Primitivnost i imprimitivnost

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Primitivnost i imprimitivnost

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu? koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu? koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Zatvoren podskup indeksa:

$$\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\} \text{ t.d. je } R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k \text{ relacija ekvivalencije}$$

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu? koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Zatvoren podskup indeksa:

$$\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\} \text{ t.d. je } R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k \text{ relacija ekvivalencije}$$

Netrivijalan zatvoren podskup: $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$

Primitivnost i imprimitivnost

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu? koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Zatvoren podskup indeksa:

$$\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\} \text{ t.d. je } R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k \text{ relacija ekvivalencije}$$

Netrivijalan zatvoren podskup: $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$

Sustav imprimitivnosti: particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije
$\{X_1, \ldots, X_r\}$ (vlakna)

Primitivnost i imprimitivnost

Zadatak 4.3.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu? koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Zatvoren podskup indeksa:

$$\Omega \subseteq \{0, \dots, d\} \text{ t.d. je } R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k \text{ relacija ekvivalencije}$$

Netrivijalan zatvoren podskup: $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \dots, d\}$

Sustav imprimitivnosti: particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije $\{X_1, \dots, X_r\}$ (vlakna)

Veličina vlakna m, broj vlakna r, broj vrhova $n = mr$

Potkonfiguracije / podsheme

$\Omega = \{0, \ldots, s\}$, $0 < s < d$

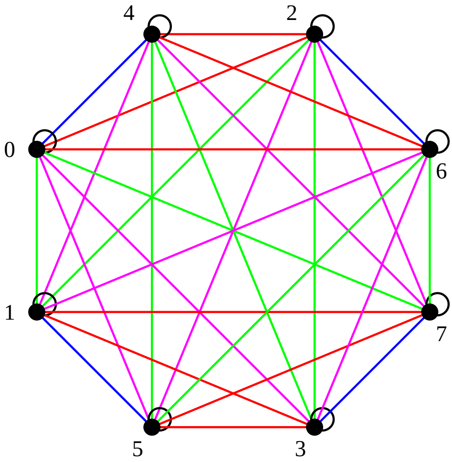
Potkonfiguracije / podsheme

$\Omega = \{0, \ldots, s\}$, $0 < s < d$

Teorem.

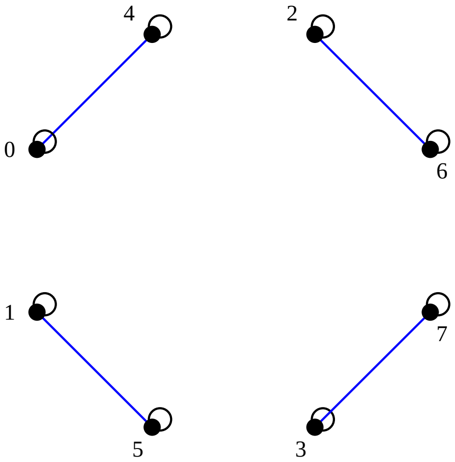
Neka je $Y \subseteq X$ jedno od vlakna imprimitivne koherentne konfiguracije. Tada je $\mathcal{Y} = (Y, \{R_i|_{Y\times Y}\}_{i=0}^{s})$ komutativna koherentna konfiguracija reda m sa s klasa. Presječni brojevi i stupnjevi od $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}$ se podudaraju: $p_{ij}^{k}(\mathcal{Y}) = p_{ij}^{k}(\mathcal{X})$ i $n_i(\mathcal{Y}) = n_i(\mathcal{X})$ za $i, j, k \in \{0, \ldots, s\}$. Ako je $\mathcal{X}$ simetrična, onda je i $\mathcal{Y}$ simetrična.

Osmerokut:



R_0, R_1, R_2, R_3, R_4

Osmerokut:



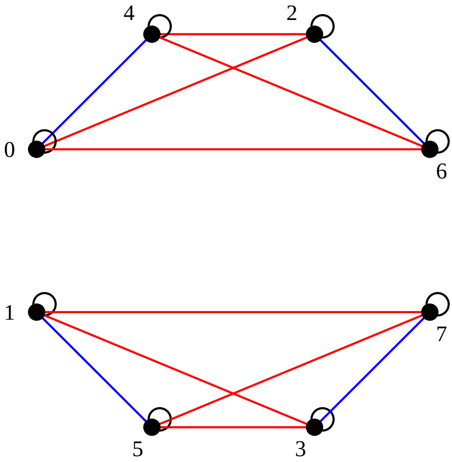
$\Omega = \{0, 4\}$

$R_\Omega = R_0 \cup R_4$

Vlakna:

$\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}$

Osmerokut:



$\Omega = \{0, 2, 4\}$

$R_\Omega = R_0 \cup R_2 \cup R_4$

Vlakna:

$\{0, 2, 4, 6\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$

Bose-Mesnerova algebra potkonfiguracije $\mathscr{Y}$?

Potkonfiguracije / podsheme

Bose-Mesnerova algebra potkonfiguracije $\mathcal{Y}$?

Lema.

Schurove idempotente $A_0, \ldots, A_s$ razapinju podalgebru $\mathcal{A}_\Omega$ algebre $\mathcal{A}$. To je potprostor vektorskog prostora zatvoren na matrično množenje, Schurovo množenje, transponiranje i kompleksno konjugiranje. Neutralni element za Schurovo množenje u $\mathcal{A}_\Omega$ je $A_\Omega = \sum_{i \in \Omega} A_i$.

Potkonfiguracije / podsheme

Bose-Mesnerova algebra potkonfiguracije $\mathscr{Y}$?

Lema.

Neka je $\mathscr{Y} = (Y, \{R_i|_{Y\times Y}\}_{i=0}^{s})$ potkonfiguracija inducirana na vlaknu imprimitivne koherentne konfiguracije $\mathscr{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^{d})$.

1. Schurove idempotente od $\mathscr{Y}$ su rekstrikcije $A_i|_{Y\times Y}$, $i = 0, \ldots, s$.
2. Bose-Mesnerova algebra od $\mathscr{Y}$ je restrikcija podalgebre $\mathscr{A}_\Omega|_{Y\times Y}$.
3. Preslikavanje $A \mapsto A|_{Y\times Y}$ je izomorfizam između podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ i $\mathscr{A}_\Omega|_{Y\times Y}$ (obzirom na matrično množenje i obzirom na Schurovo množenje).
4. Izomorfizam šalje $\frac{1}{m}A_\Omega$ u trivijalnu primitivnu idempotentu $\frac{1}{m}J$ Bose-Mesnerove algebre od $\mathscr{Y}$.

Potkonfiguracije / podsheme

Teorem.

Postoji particija $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s\}$ skupa $\{0, \ldots, d\}$ takva da su primitivne idempotente podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ sume primitivnih idempotenta od $\mathscr{A}$:

$$E_{\Lambda_i} = \sum_{\ell \in \Lambda_i} E_\ell, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Možemo pretpostaviti da je $0 \in \Lambda_0$, a tada je $E_{\Lambda_0} = \frac{1}{m} A_\Omega$.

Potkonfiguracije / podsheme

Teorem.

Postoji particija $\{\Lambda_0, \dots, \Lambda_s\}$ skupa $\{0, \dots, d\}$ takva da su primitivne idempotente podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ sume primitivnih idempotenta od $\mathscr{A}$:

$$E_{\Lambda_i} = \sum_{\ell \in \Lambda_i} E_\ell, \quad i = 0, \dots, s.$$

Možemo pretpostaviti da je $0 \in \Lambda_0$, a tada je $E_{\Lambda_0} = \frac{1}{m} A_\Omega$.

Zadatak 4.28.

Dokažite teorem! U GAP paketu *AssociationSchemes* izračunajte primitivne idempotente osmerokuta i odredite particije $\{\Lambda_0, \Lambda_1\}$ i $\{\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2\}$ od kojih dobivamo primitivne idempotente od $\mathscr{A}_\Omega$, za $\Omega = \{0, 4\}$ i $\Omega = \{0, 2, 4\}$.

Potkonfiguracije / podsheme

Teorem.

Postoji particija $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s\}$ skupa $\{0, \ldots, d\}$ takva da su primitivne idempotente podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ sume primitivnih idempotenta od $\mathscr{A}$:

$$E_{\Lambda_i} = \sum_{\ell \in \Lambda_i} E_\ell, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Možemo pretpostaviti da je $0 \in \Lambda_0$, a tada je $E_{\Lambda_0} = \frac{1}{m} A_\Omega$.

Primitivne idempotente od $\mathscr{Y}$: $E_i(\mathscr{Y}) = (E_{\Lambda_i})|_{Y \times Y}$, $i = 0, \ldots, s$

Potkonfiguracije / podsheme

Teorem.

Postoji particija $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s\}$ skupa $\{0, \ldots, d\}$ takva da su primitivne idempotente podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ sume primitivnih idempotenta od $\mathscr{A}$:

$$E_{\Lambda_i} = \sum_{\ell \in \Lambda_i} E_\ell, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Možemo pretpostaviti da je $0 \in \Lambda_0$, a tada je $E_{\Lambda_0} = \frac{1}{m} A_\Omega$.

Primitivne idempotente od $\mathscr{Y}$: $E_i(\mathscr{Y}) = (E_{\Lambda_i})|_{Y \times Y}$, $i = 0, \ldots, s$

Kreinovi parametri od $\mathscr{Y}$: $E_{\Lambda_i} \circ E_{\Lambda_j} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{s} q_{ij}^k(\mathscr{Y}) E_{\Lambda_k}$

Potkonfiguracije / podsheme

Teorem.

Postoji particija $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s\}$ skupa $\{0, \ldots, d\}$ takva da su primitivne idempotente podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ sume primitivnih idempotenta od $\mathscr{A}$:

$$E_{\Lambda_i} = \sum_{\ell \in \Lambda_i} E_\ell, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Možemo pretpostaviti da je $0 \in \Lambda_0$, a tada je $E_{\Lambda_0} = \frac{1}{m} A_\Omega$.

Primitivne idempotente od $\mathscr{Y}$: $E_i(\mathscr{Y}) = (E_{\Lambda_i})|_{Y \times Y}$, $i = 0, \ldots, s$

Kreinovi parametri od $\mathscr{Y}$: $E_{\Lambda_i} \circ E_{\Lambda_j} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{s} q_{ij}^k(\mathscr{Y}) E_{\Lambda_k}$

$$q_{ij}^k(\mathscr{Y}) = \frac{1}{r} \sum_{a \in \Lambda_i} \sum_{b \in \Lambda_j} q_{ab}^h(\mathscr{X}), \qquad i, j, k \in \{0, \ldots, s\}$$

Potkonfiguracije / podsheme

Element $\Lambda = \Lambda_0$ je zatvoren na "Schurovo množenje" podskupova indeksa:

$$\Lambda \circ \Lambda = \Lambda$$

Element $\Lambda = \Lambda_0$ je zatvoren na "Schurovo množenje" podskupova indeksa:

$$\Lambda \circ \Lambda = \Lambda$$

Zadatak 4.22.

Operaciju množenja podskupova indeksa $\Omega, \Omega' \subseteq \{0, \ldots, d\}$ možemo definirati na dualan način s pomoću Kreinovih parametara:

$$\Omega \circ \Omega' = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid \text{ postoje } i \in \Omega,\ j \in \Omega' \text{ takvi da je } q_{ij}^k > 0\}.$$

Ispitajte svojstva te operacije!

Potkonfiguracije / podsheme

Element $\Lambda = \Lambda_0$ je zatvoren na "Schurovo množenje" podskupova indeksa:

$$\Lambda \circ \Lambda = \Lambda$$

Zadatak 4.22.

Operaciju množenja podskupova indeksa $\Omega, \Omega' \subseteq \{0, \ldots, d\}$ možemo definirati na dualan način s pomoću Kreinovih parametara:

$$\Omega \circ \Omega' = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid \text{ postoje } i \in \Omega,\ j \in \Omega' \text{ takvi da je } q_{ij}^k > 0\}.$$

Ispitajte svojstva te operacije!

$$|\Lambda| = 1 + t \quad \rightsquigarrow \quad \Lambda = \{0, \ldots, t\}$$

Kvocijentna konfiguracija / shema

Teorem.

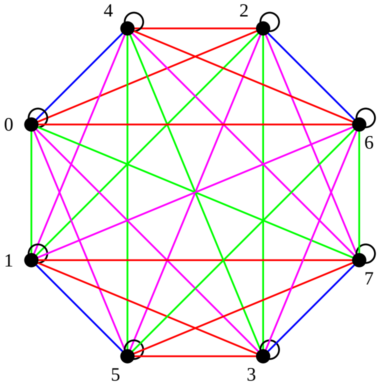
Neka je $\Omega = \{0, \ldots, s\}$ netrivijalni zatvoren skup i $\Sigma = \{X_1, \ldots, X_r\}$ odgovarajući sustav imprimitivnosti komutativne koherentne konfiguracije $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$. Definiramo relacije na Σ:

$$\tilde{R}_i = \{(X_a, X_b) \mid (\exists x \in X_a)(\exists y \in X_b)\ (x, y) \in R_i\}.$$

Tada je $\mathbb{Q} = (\Sigma, \{\tilde{R}_i\})$ komutativna koherentna konfiguracija reda r sa t klasa, pri čemu je $1 \leq t \leq d - s$. Ako je $\mathfrak{X}$ simetrična, onda je i $\mathbb{Q}$ simetrična.

Kvocijentna konfiguracija / shema

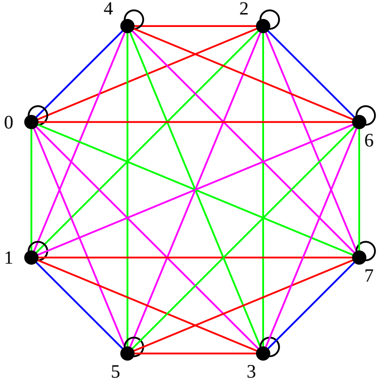
Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$ Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 4\}$

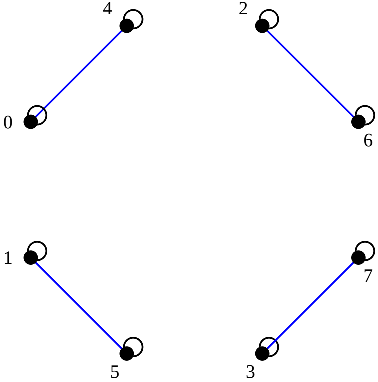


Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 4\}$

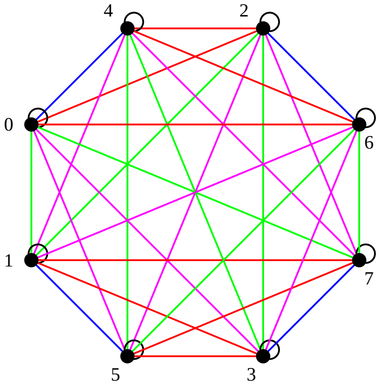


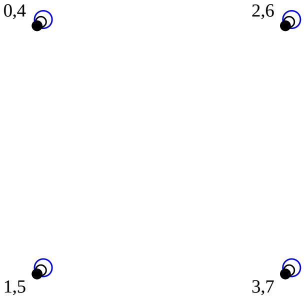


Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

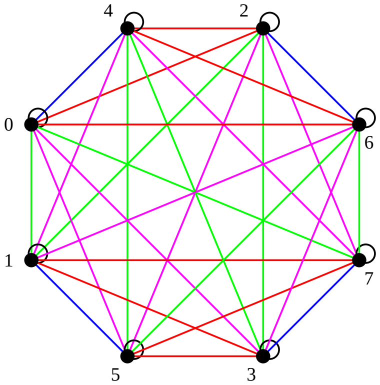
Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 4\}$

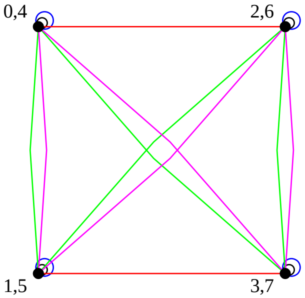




Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$ Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 4\}$

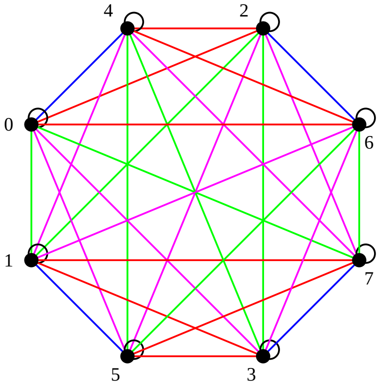


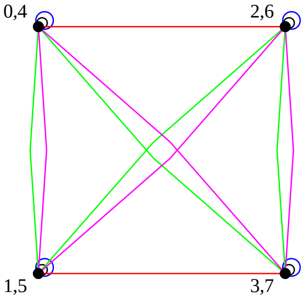


Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 4\}$



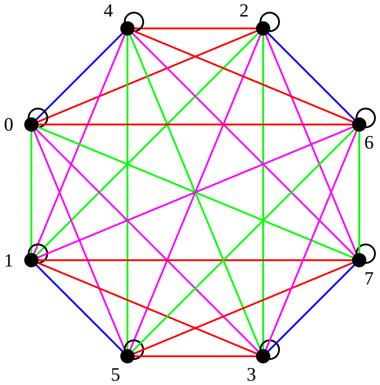


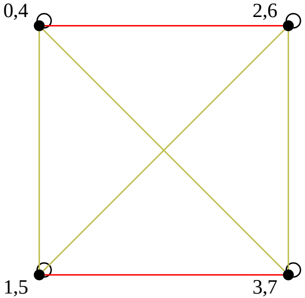
$\Omega = \Omega_0 = \{0, 4\}, \ \Omega_1 = \{2\}, \ \Omega_2 = \{1, 3\}$

Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 4\}$

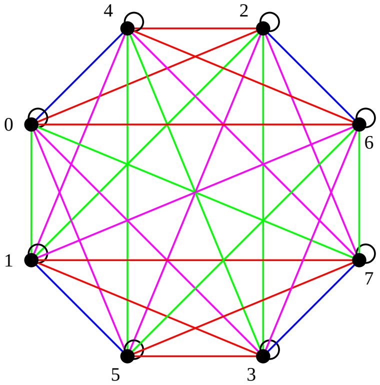




$\Omega = \Omega_0 = \{0, 4\}$, $\Omega_1 = \{2\}$, $\Omega_2 = \{1, 3\}$

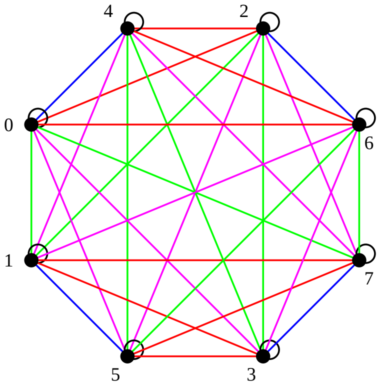
Kvocijentna konfiguracija / shema

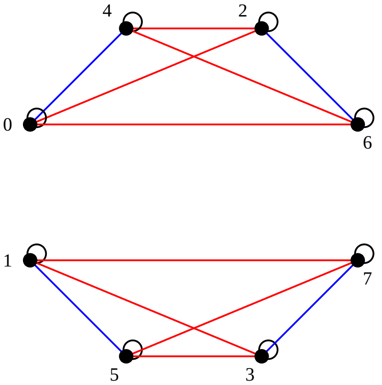
Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$ Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 2, 4\}$



Kvocijentna konfiguracija / shemaa

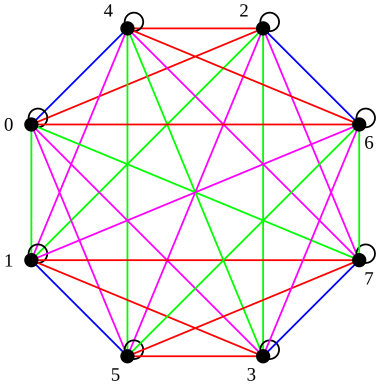
Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$ Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 2, 4\}$





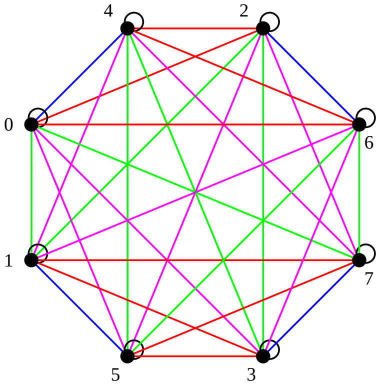
Kvocijentna konfiguracija / shema

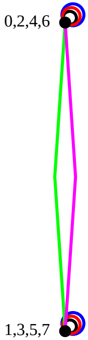
Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$ Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 2, 4\}$



Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$ Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 2, 4\}$

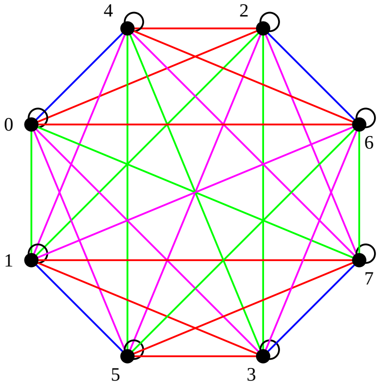


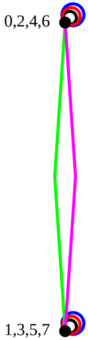


Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 2, 4\}$



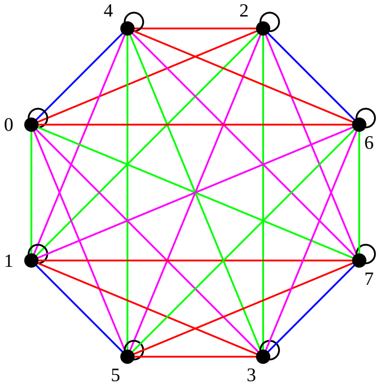


$\Omega = \Omega_0 = \{0, 2, 4\}$, $\Omega_1 = \{1, 3\}$

Kvocijentna konfiguracija / shema

Osmerokut: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

Zatvoren skup: $\Omega = \{0, 2, 4\}$



$\Omega = \Omega_0 = \{0, 2, 4\}$, $\Omega_1 = \{1, 3\}$

Imprimitivne sheme s dvije klase

Asoc. shema s dvije klase $\iff$ jako regularan graf i njegov komplement

Imprimitivne sheme s dvije klase

Asoc. shema s dvije klase $\iff$ jako regularan graf i njegov komplement

$SRG(n, k, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = k$

primitivan ako je $0 < \mu < k$

Imprimitivne sheme s dvije klase

Asoc. shema s dvije klase $\iff$ jako regularan graf i njegov komplement

$SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = \Bbbk$

primitivan ako je $0 < \mu < \Bbbk$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $r \cdot K_m$.

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = \Bbbk$ ako i samo ako je oblika $K_{m,\ldots,m}$.

Imprimitivne sheme s dvije klase

Asoc. shema s dvije klase $\iff$ jako regularan graf i njegov komplement

$SRG(n, k, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = k$

primitivan ako je $0 < \mu < k$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $r \cdot K_m$.

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = k$ ako i samo ako je oblika $K_{m,\ldots,m}$.

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2\})$

Imprimitivne sheme s dvije klase

Asoc. shema s dvije klase $\Longleftrightarrow$ jako regularan graf i njegov komplement

$SRG(n, k, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = k$

primitivan ako je $0 < \mu < k$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $r \cdot K_m$.

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = k$ ako i samo ako je oblika $K_{m,\ldots,m}$.

$\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2\})$

Jedini mogući netrivijalan zatvoren skup: $\Omega = \{0, 1\}$

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Mogućnosti za zatvorene skupove: *A*. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *B*. $\Omega = \{0, 1\}$

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Mogućnosti za zatvorene skupove: *A*. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *B*. $\Omega = \{0, 1\}$

Slučaj *A*

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo od $K_{m,\ldots,m}$

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Mogućnosti za zatvorene skupove: *A*. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *B*. $\Omega = \{0, 1\}$

Slučaj *A*

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo od $K_{m,\ldots,m}$
- Podsheme na vlaknima imaju dvije klase, restrikcije od R_1 i R_2

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Mogućnosti za zatvorene skupove: *A*. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *B*. $\Omega = \{0, 1\}$

Slučaj *A*

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo od $K_{m,\ldots,m}$
- Podsheme na vlaknima imaju dvije klase, restrikcije od R_1 i R_2
- Ekvivalentne su jako regularnom grafu i njegovom komplementu

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Mogućnosti za zatvorene skupove: *A*. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *B*. $\Omega = \{0, 1\}$

Slučaj *A*

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo od $K_{m,\ldots,m}$
- Podsheme na vlaknima imaju dvije klase, restrikcije od R_1 i R_2
- Ekvivalentne su jako regularnom grafu i njegovom komplementu
- Imaju iste parametre $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$, ali ne moraju biti izomorfne

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Mogućnosti za zatvorene skupove: *A*. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *B*. $\Omega = \{0, 1\}$

Slučaj *A*

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo od $K_{m,\ldots,m}$
- Podsheme na vlaknima imaju dvije klase, restrikcije od R_1 i R_2
- Ekvivalentne su jako regularnom grafu i njegovom komplementu
- Imaju iste parametre $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$, ali ne moraju biti izomorfne
- Ako postoji $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$, možemo konstruirati takvu shemu s bilo kojim brojem vlakna $r \geq 2$

Imprimitivne sheme s tri klase

$\mathfrak{X} = (X, \{R_0, R_1, R_2, R_3\})$

Mogućnosti za zatvorene skupove: *A*. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *B*. $\Omega = \{0, 1\}$

Slučaj *A*

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i R_3 je susjedstvo od $K_{m,\ldots,m}$
- Podsheme na vlaknima imaju dvije klase, restrikcije od R_1 i R_2
- Ekvivalentne su jako regularnom grafu i njegovom komplementu
- Imaju iste parametre $SRG(m, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, ali ne moraju biti izomorfne
- Ako postoji $SRG(m, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, možemo konstruirati takvu shemu s bilo kojim brojem vlakna $r \geq 2$
- Ako postoji više neizomorfnih $SRG(m, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, možemo konstruirati puno različitih ("kombinatorno neizomorfnih") asocijacijskih shema, ali sve imaju istu Bose-Mesnerovu algebru

Imprimitivne sheme s tri klase

$$SRG(m, \mathscr{k}, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \mathscr{k} & m-1-\mathscr{k} \\ 1 & \mathscr{r} & -\mathscr{r}-1 \\ 1 & \mathscr{s} & -\mathscr{s}-1 \end{bmatrix}$$

Imprimitivne sheme s tri klase

$$SRG(m, k, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1 & k & m-1-k \\ 1 & r & -r-1 \\ 1 & s & -s-1 \end{bmatrix}$$

$$r,\ s = \frac{\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}}{2}$$

Imprimitivne sheme s tri klase

$$SRG(m,\mathcal{k},\lambda,\mu) \quad \rightsquigarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \mathcal{k} & m-1-\mathcal{k} \\ 1 & \mathcal{r} & -\mathcal{r}-1 \\ 1 & \mathcal{s} & -\mathcal{s}-1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{r},\ \mathcal{s} = \frac{\lambda-\mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(\mathcal{k}-\mu)}}{2}$$

Propozicija.

Neka je asocijacijska shema s tri klase imprimitivna tipa A. Ako je dobivena od r disjunktnih grafova $SRG(m,\mathcal{k},\lambda,\mu)$, onda je njezina svojstvena matrica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \mathcal{k} & m-1-\mathcal{k} & (r-1)m \\ 1 & \mathcal{k} & m-1-\mathcal{k} & -m \\ 1 & \mathcal{r} & -\mathcal{r}-1 & 0 \\ 1 & \mathcal{s} & -\mathcal{s}-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Imprimitivne sheme s tri klase

Kroneckerov produkt: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$

Imprimitivne sheme s tri klase

Kroneckerov produkt: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$

Matrice susjedstva $SRG(m, k, \lambda, \mu)$ i njegova komplementa: A, $\bar{A}$

Imprimitivne sheme s tri klase

Kroneckerov produkt: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$

Matrice susjedstva $SRG(m, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$ i njegova komplementa: A, $\bar{A}$

Schurove idempotente: $A_1 = I_r \otimes A$, $A_2 = I_r \otimes \bar{A}$, $A_3 = (J_r - I_r) \otimes J_m$

 Imprimitivne sheme s tri klase

Kroneckerov produkt: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$

Matrice susjedstva $SRG(m, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegova komplementa: A, $\bar{A}$

Schurove idempotente: $A_1 = I_r \otimes A$, $A_2 = I_r \otimes \bar{A}$, $A_3 = (J_r - I_r) \otimes J_m$

Propozicija.

Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostima $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a $B \in M_m(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostime $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$. Tada $A \otimes B$ ima svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i \mu_j \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$.

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj *B*, $\Omega = \{0, 1\}$

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj *B*, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj B, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$
- Relacija R_1 je susjedstvo u disjunktnoj uniji $r \cdot K_m$

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj B, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$
- Relacija R_1 je susjedstvo u disjunktnoj uniji $r \cdot K_m$
- Odgovarajuća Schurova idempotenta je $A_1 = I_r \otimes J_m - I_{rm}$

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj B, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$
- Relacija R_1 je susjedstvo u disjunktnoj uniji $r \cdot K_m$
- Odgovarajuća Schurova idempotenta je $A_1 = I_r \otimes J_m - I_{rm}$
- Kvocijentna shema ima $t = 1$ ili $t = 2$ relacija

Slučaj B, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$
- Relacija R_1 je susjedstvo u disjunktnoj uniji $r \cdot K_m$
- Odgovarajuća Schurova idempotenta je $A_1 = I_r \otimes J_m - I_{rm}$
- Kvocijentna shema ima $t = 1$ ili $t = 2$ relacija $\rightsquigarrow$ slučajevi B_1 i B_2

Slučaj B, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$
- Relacija R_1 je susjedstvo u disjunktnoj uniji $r \cdot K_m$
- Odgovarajuća Schurova idempotenta je $A_1 = I_r \otimes J_m - I_{rm}$
- Kvocijentna shema ima $t = 1$ ili $t = 2$ relacija $\rightsquigarrow$ slučajevi B_1 i B_2

Slučaj B_2

- Kvocijentna shema $\rightsquigarrow SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegov komplement

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj B, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$
- Relacija R_1 je susjedstvo u disjunktnoj uniji $r \cdot K_m$
- Odgovarajuća Schurova idempotenta je $A_1 = I_r \otimes J_m - I_{rm}$
- Kvocijentna shema ima $t = 1$ ili $t = 2$ relacija $\rightsquigarrow$ slučajevi B_1 i B_2

Slučaj B_2

- Kvocijentna shema $\rightsquigarrow SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegov komplement
- Ako su im matrice susjedstva A i $\bar{A}$, Schurove idempotente su

$$A_2 = A \otimes J_m \quad \text{i} \quad A_3 = \bar{A} \otimes J_m$$

Imprimitivne sheme s tri klase

Slučaj B, $\Omega = \{0, 1\}$

- Inducirane sheme na vlaknima imaju jednu klasu $\rightsquigarrow K_m$
- Relacija R_1 je susjedstvo u disjunktnoj uniji $r \cdot K_m$
- Odgovarajuća Schurova idempotenta je $A_1 = I_r \otimes J_m - I_{rm}$
- Kvocijentna shema ima $t = 1$ ili $t = 2$ relacija $\rightsquigarrow$ slučajevi B_1 i B_2

Slučaj B_2

- Kvocijentna shema $\rightsquigarrow SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$ i njegov komplement
- Ako su im matrice susjedstva A i $\bar{A}$, Schurove idempotente su

$$A_2 = A \otimes J_m \quad \text{i} \quad A_3 = \bar{A} \otimes J_m$$

- Shemu možemo napraviti od svakog $SRG(r, \Bbbk, \lambda, \mu)$, za svaki $m \geq 2$

Imprimitivne sheme s tri klase

Propozicija.

Neka je asocijacijska shema s tri klase imprimitivna tipa B_2. Ako ima vlakna veličine m i kvocijentni graf je $SRG(r, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, onda je njezina svojstvena matrica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & m\mathscr{k} & m(r-1-\mathscr{k}) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{r} & m(-\mathscr{r}-1) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{s} & m(-\mathscr{s}-1) \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imprimitivne sheme s tri klase

Propozicija.

Neka je asocijacijska shema s tri klase imprimitivna tipa B_2. Ako ima vlakna veličine m i kvocijentni graf je $SRG(r, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, onda je njezina svojstvena matrica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & m\mathscr{k} & m(r-1-\mathscr{k}) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{r} & m(-\mathscr{r}-1) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{s} & m(-\mathscr{s}-1) \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Slučaj B_1

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i izomorfna je sa K_r

Imprimitivne sheme s tri klase

Propozicija.

Neka je asocijacijska shema s tri klase imprimitivna tipa B_2. Ako ima vlakna veličine m i kvocijentni graf je $SRG(r, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, onda je njezina svojstvena matrica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & m\mathscr{k} & m(r-1-\mathscr{k}) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{r} & m(-\mathscr{r}-1) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{s} & m(-\mathscr{s}-1) \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Slučaj B_1

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i izomorfna je sa K_r
- Relacije R_2 i R_3 u uniji daju susjedstvo u $K_{m,\ldots,m}$

Imprimitivne sheme s tri klase

Propozicija.

Neka je asocijacijska shema s tri klase imprimitivna tipa B_2. Ako ima vlakna veličine m i kvocijentni graf je $SRG(r, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, onda je njezina svojstvena matrica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & m\mathscr{k} & m(r-1-\mathscr{k}) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{r} & m(-\mathscr{r}-1) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{s} & m(-\mathscr{s}-1) \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Slučaj B_1

- Kvocijentna shema ima jednu klasu i izomorfna je sa K_r
- Relacije R_2 i R_3 u uniji daju susjedstvo u $K_{m,\ldots,m}$
- Između svaka dva vlakna imamo bridove iz R_2 i iz R_3

Imprimitivne sheme s tri klase

Propozicija.

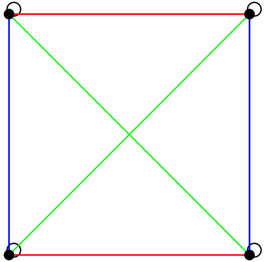
Neka je asocijacijska shema s tri klase imprimitivna tipa B_2. Ako ima vlakna veličine m i kvocijentni graf je $SRG(r, \mathscr{k}, \lambda, \mu)$, onda je njezina svojstvena matrica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & m\mathscr{k} & m(r-1-\mathscr{k}) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{r} & m(-\mathscr{r}-1) \\ 1 & m-1 & m\mathscr{s} & m(-\mathscr{s}-1) \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Slučaj B_1

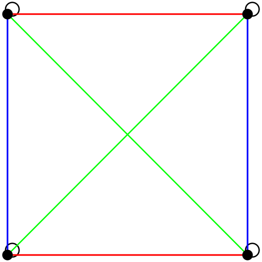
- Kvocijentna shema ima jednu klasu i izomorfna je sa K_r
- Relacije R_2 i R_3 u uniji daju susjedstvo u $K_{m,\ldots,m}$
- Između svaka dva vlakna imamo bridove iz R_2 i iz R_3
- Nemamo jednostavan recept za konstrukciju, kao za tip A i tip B_2

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

Primjeri shema tipa B_1

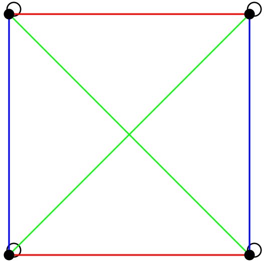


R_0, R_1, R_2, R_3

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Primjeri shema tipa B_1



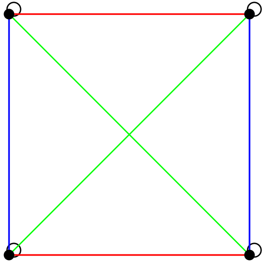
R_0, R_1, R_2, R_3

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

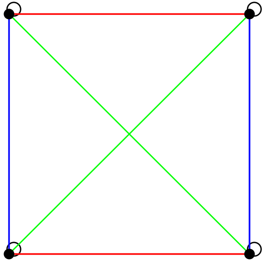
$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

Zatvoreni skupovi:

$$\Omega_1 = \{0, 1\},\ \Omega_2 = \{0, 2\},\ \Omega_3 = \{0, 3\}$$

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

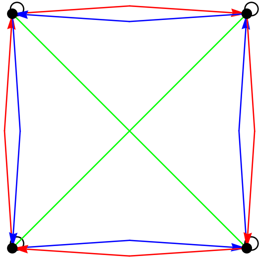
Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

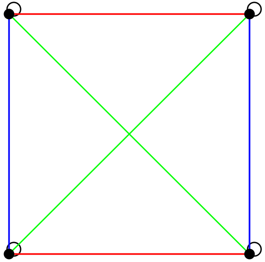
Zatvoreni skupovi:

$$\Omega_1 = \{0, 1\},\ \Omega_2 = \{0, 2\},\ \Omega_3 = \{0, 3\}$$



R_0, R_1, R_2, R_3 **Nesimetrična!**

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

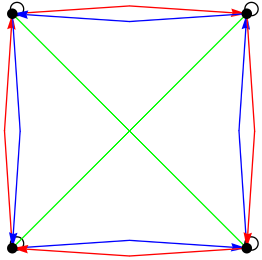
Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

Zatvoreni skupovi:

$$\Omega_1 = \{0, 1\},\ \Omega_2 = \{0, 2\},\ \Omega_3 = \{0, 3\}$$

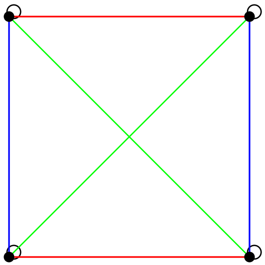


R_0, R_1, R_2, R_3 **Nesimetrična!**

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_2 = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

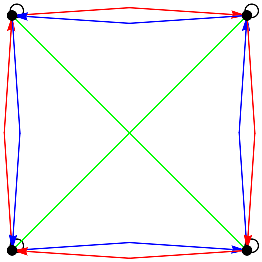
Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

Zatvoreni skupovi:

$$\Omega_1 = \{0, 1\},\ \Omega_2 = \{0, 2\},\ \Omega_3 = \{0, 3\}$$



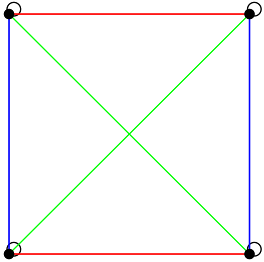
R_0, R_1, R_2, R_3 **Nesimetrična!**

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_2 = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_4 \cong G_2$

Primjeri shema tipa B_1



R_0, R_1, R_2, R_3

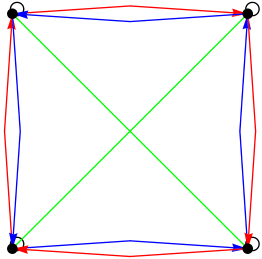
Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_1$

Zatvoreni skupovi:

$$\Omega_1 = \{0, 1\},\ \Omega_2 = \{0, 2\},\ \Omega_3 = \{0, 3\}$$



R_0, R_1, R_2, R_3 **Nesimetrična!**

Nastaje Schurovom konstrukcijom od

$$G_2 = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$

Klase konjugacije od $\mathbb{Z}_4 \cong G_2$

Zatvoreni skupovi: $\Omega_2 = \{0, 2\}$

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$J(v, 3)$ je imprimitivna tipa B_1 za $v = 6$, a primitivna za $v > 6$

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$J(v, 3)$ je imprimitivna tipa B_1 za $v = 6$, a primitivna za $v > 6$

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $\partial(x, y)$ je broj različitih koordinata. Neka su riječi $x, y \in X$ u relaciji R_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Primjeri shema tipa B_1

Primjer: Johnsonova shema

Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su u relaciji R_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$.

$J(v, 3)$ je imprimitivna tipa B_1 za $v = 6$, a primitivna za $v > 6$

Primjer: Hammingova shema

Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $\partial(x, y)$ je broj različitih koordinata. Neka su riječi $x, y \in X$ u relaciji R_i ako su na udaljenosti $\partial(x, y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

$H(3, q)$ je imprimitivna tipa B_1 za $q = 2$, a primitivna za $q > 2$

Primjeri shema tipa B_1

Zadatak 4.32.

Proučite sustave imprimitivnosti od $J(6,3)$ i $H(3,2)$ i uvjerite se da su to sheme tipa B_1. Dokažite da su $J(v,3)$, $v > 6$ i $H(3,q)$, $q > 2$ primitivne.

Zadatak 4.33.

Ispitajte (im)primitivnost Grassmannove sheme i sheme bilinearnih formi u slučajevima kad imaju tri klase.

Primjeri shema tipa B_1

Zadatak 4.32.

Proučite sustave imprimitivnosti od $J(6,3)$ i $H(3,2)$ i uvjerite se da su to sheme tipa B_1. Dokažite da su $J(v,3)$, $v > 6$ i $H(3,q)$, $q > 2$ primitivne.

Zadatak 4.33.

Ispitajte (im)primitivnost Grassmannove sheme i sheme bilinearnih formi u slučajevima kad imaju tri klase.

Zadatak 1.35.

Neka je $\mathscr{D}$ simetrični $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn. Definiramo bipartitan graf G kojem su vrhovi točke i blokovi od $\mathscr{D}$, a susjedni su ako točka pripada bloku. Dokažite da je G distancijsko regularan graf dijametra $d = 3$, odredite mu presječni niz $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$ i presječne brojeve p_{ij}^k odgovarajuće asocijacijske sheme. Dolazi li svaka (metrička) asocijacijska shema s tim presječnim brojevima od simetričnog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna?

Primjeri shema tipa B_1

Neka je A incidencijska matrica $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna $\mathscr{D}$

Primjeri shema tipa B_1

Neka je A incidencijska matrica (v, k, λ) dizajna $\mathscr{D}$

$$AA^t = A^t A = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Primjeri shema tipa B_1

Neka je A incidencijska matrica (v, k, λ) dizajna $\mathscr{D}$

$$AA^t = A^t A = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Schurove idempotente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} J - I & 0 \\ 0 & J - I \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & J - A \\ J - A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Primjeri shema tipa B_1

Neka je A incidencijska matrica $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna $\mathscr{D}$

$$AA^t = A^t A = (\Bbbk - \lambda)I + \lambda J$$

Schurove idempotente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} J-I & 0 \\ 0 & J-I \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & J-A \\ J-A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Lema.

Neka je $M = (\Bbbk - \lambda)I + \lambda J$ kvadratna matrica reda v s elementima $\Bbbk$ na dijagonali i λ izvan dijagonale. Matrica M ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk + (v-1)\lambda$ kratnosti 1 i $\Bbbk - \lambda$ kratnosti $v - 1$.

Primjeri shema tipa B_1

Propozicija.

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna ima svojstvenu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & v-1 & v-k \\ 1 & -k & v-1 & k-v \\ 1 & \sqrt{k-\lambda} & -1 & -\sqrt{k-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{k-\lambda} & -1 & \sqrt{k-\lambda} \end{bmatrix}$$

Primjeri shema tipa B_1

Propozicija.

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna ima svojstvenu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \Bbbk & v-1 & v-\Bbbk \\ 1 & -\Bbbk & v-1 & \Bbbk - v \\ 1 & \sqrt{\Bbbk - \lambda} & -1 & -\sqrt{\Bbbk-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{\Bbbk-\lambda} & -1 & \sqrt{\Bbbk-\lambda} \end{bmatrix}$$

Beskonačna familija shema tipa B_1, ali uvijek imaju $r = 2$ vlakna!

Primjeri shema tipa B_1

Propozicija.

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna ima svojstvenu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & v-1 & v-k \\ 1 & -k & v-1 & k-v \\ 1 & \sqrt{k-\lambda} & -1 & -\sqrt{k-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{k-\lambda} & -1 & \sqrt{k-\lambda} \end{bmatrix}$$

Beskonačna familija shema tipa B_1, ali uvijek imaju $r = 2$ vlakna!

Konstrukcija za tip A: $SRG(m, k, \lambda, \mu)$, proizvoljan broj vlakna r

Primjeri shema tipa B_1

Propozicija.

Asocijacijska shema dobivena od simetričnog (v, k, λ) dizajna ima svojstvenu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & v-1 & v-k \\ 1 & -k & v-1 & k-v \\ 1 & \sqrt{k-\lambda} & -1 & -\sqrt{k-\lambda} \\ 1 & -\sqrt{k-\lambda} & -1 & \sqrt{k-\lambda} \end{bmatrix}$$

Beskonačna familija shema tipa B_1, ali uvijek imaju $r = 2$ vlakna!

Konstrukcija za tip A: $SRG(m, k, \lambda, \mu)$, proizvoljan broj vlakna r

Konstrukcija za tip B_2: $SRG(r, k, \lambda, \mu)$, proizvoljna veličnina vlakna m

Primjeri shema tipa B_1

Definicija.

Sustav spojenih simetričnih dizajna $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$ (eng. linked system of symmetric designs, $LSSD$) je graf sa skupom vrhova $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ (disjunktna unija). Skupove X_i zovemo vlaknima i svaki ima v vrhova, pa je ukupan broj vrhova $n = r\,v$. Bridovi zadovoljavaju:

1. svaki brid ima krajeve u različitim vlaknima;
2. za sve $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$, inducirani podgraf na $X_i \cup X_j$ je incidencijski graf nekog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna;
3. postoje konstante μ i ν takve da za sve različite $i, j, k \in \{1, \ldots, r\}$ i za svaki izbor vrhova $x \in X_i$, $y \in X_j$, broj zajedničkih susjeda od x i y u vlaknu X_k je μ ako su x i y susjedni, a ν ako nisu susjedni.

Primjeri shema tipa B_1

Definicija.

Sustav spojenih simetričnih dizajna $SSSD(v, \Bbbk, \lambda; r)$ (eng. linked system of symmetric designs, $LSSD$) je graf sa skupom vrhova $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ (disjunktna unija). Skupove X_i zovemo vlaknima i svaki ima v vrhova, pa je ukupan broj vrhova $n = r\,v$. Bridovi zadovoljavaju:

1. svaki brid ima krajeve u različitim vlaknima;
2. za sve $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$, inducirani podgraf na $X_i \cup X_j$ je incidencijski graf nekog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna;
3. postoje konstante μ i ν takve da za sve različite $i, j, k \in \{1, \ldots, r\}$ i za svaki izbor vrhova $x \in X_i$, $y \in X_j$, broj zajedničkih susjeda od x i y u vlaknu X_k je μ ako su x i y susjedni, a ν ako nisu susjedni.

$SSSD(v, \Bbbk, \lambda; 2)$ ekvivalentan je sim. $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajnu (dokazao Patrik!)

Primjeri shema tipa B_1

Definicija.

Sustav spojenih simetričnih dizajna $SSSD(v, k, \lambda; r)$ (eng. linked system of symmetric designs, $LSSD$) je graf sa skupom vrhova $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ (disjunktna unija). Skupove X_i zovemo vlaknima i svaki ima v vrhova, pa je ukupan broj vrhova $n = r\,v$. Bridovi zadovoljavaju:

1. svaki brid ima krajeve u različitim vlaknima;
2. za sve $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$, inducirani podgraf na $X_i \cup X_j$ je incidencijski graf nekog (v, k, λ) dizajna;
3. postoje konstante μ i ν takve da za sve različite $i, j, k \in \{1, \ldots, r\}$ i za svaki izbor vrhova $x \in X_i$, $y \in X_j$, broj zajedničkih susjeda od x i y u vlaknu X_k je μ ako su x i y susjedni, a ν ako nisu susjedni.

$SSSD(v, k, \lambda; 2)$ ekvivalentan je sim. (v, k, λ) dizajnu (dokazao Patrik!)

Možemo li konstruirati $SSSD(v, k, \lambda; r)$ za $r > 2$?