Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

18.3.2024.

Primitivnost i imprimitivnost

Definicija.

Neka je $\mathfrak{X}$ koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je $\mathfrak{X}$ primitivna ako su relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Definicija.

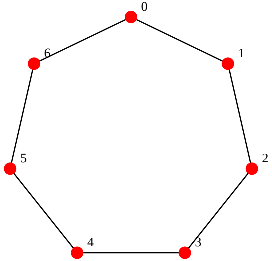
Neka je $\mathfrak{X}$ koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je $\mathfrak{X}$ primitivna ako su relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Primjer 1.4 (Poligoni)

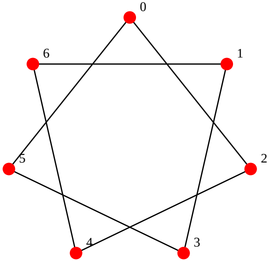
Neka je $X = \mathbb{Z}_n$ grupa cijelih brojeva modulo n. Definiramo da su x i y susjedni u G_i ako je $x - y = \pm i$, za $i = 0, 1, 2, \ldots$. Tako dobijemo asocijacijsku shemu s $d = \lfloor n/2 \rfloor$ klasa koju zovemo poligonom reda n ili n-terokutom.

Primitivnost i imprimitivnost

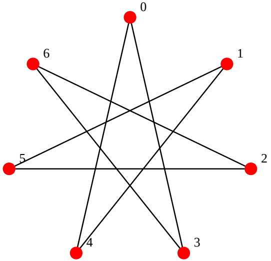
Poligon reda $n = 7$ ili sedmerokut:



G_1



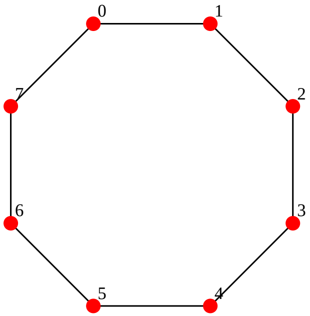
G_2



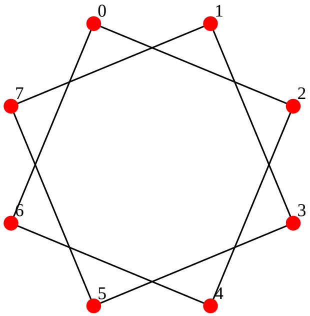
G_3

Primitivnost i imprimitivnost

Poligon reda $n = 8$ ili osmerokut:



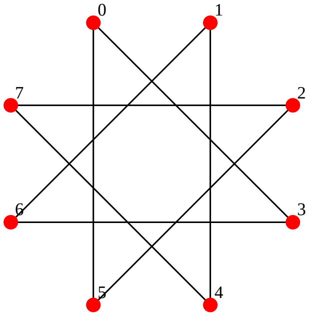
G_1



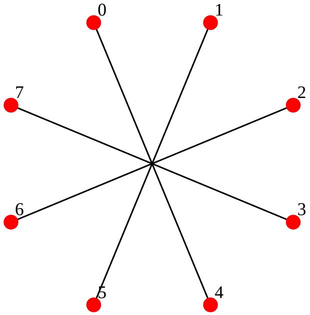
G_2

Primitivnost i imprimitivnost

Poligon reda $n = 8$ ili osmerokut:



G_3



G_4

Primitivnost i imprimitivnost

Fiksiramo indeks i te relaciju R_i označavamo $\rightarrow$

Primitivnost i imprimitivnost

Fiksiramo indeks i te relaciju R_i označavamo $\to$

$$N_i(x) = \{y \in X \mid x \to y\}$$

Primitivnost i imprimitivnost

Fiksiramo indeks i te relaciju R_i označavamo $\to$

$$N_i(x) = \{y \in X \mid x \to y\}$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid x \twoheadrightarrow y\}$$

Primitivnost i imprimitivnost

Fiksiramo indeks i te relaciju R_i označavamo $\rightarrow$

$$N_i(x) = \{y \in X \mid x \rightarrow y\}$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid x \twoheadrightarrow y\}$$

Propozicija.

Postoji skup indeksa $\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\}$ takav da za svaki vrh x vrijedi

$$N^{(i)}(x) = \bigcup_{k \in \Omega} N_k(x)$$

Primitivnost i imprimitivnost

Fiksiramo indeks i te relaciju R_i označavamo $\rightarrow$

$$N_i(x) = \{y \in X \mid x \rightarrow y\}$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid x \twoheadrightarrow y\}$$

Propozicija.

Postoji skup indeksa $\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\}$ takav da za svaki vrh x vrijedi

$$N^{(i)}(x) = \bigcup_{k \in \Omega} N_k(x)$$

Korolar.

Veličina komponente povezanosti $|N^{(i)}(x)|$ ne ovisi o izboru vrha x.

Primitivnost i imprimitivnost

Korolar.

Relacija $\twoheadrightarrow$ je relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada x podudara se s komponentom povezanosti $N^{(i)}(x)$.

Primitivnost i imprimitivnost

Korolar.

Relacija $\twoheadrightarrow$ je relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada x podudara se s komponentom povezanosti $N^{(i)}(x)$.

Teorem.

Koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, \ldots, R_d$ je imprimitivna ako i samo ako postoji skup indeksa Ω takav da je $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ i $R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k$ je relacija ekvivalencije.

Primitivnost i imprimitivnost

Korolar.

Relacija $\twoheadrightarrow$ je relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada x podudara se s komponentom povezanosti $N^{(i)}(x)$.

Teorem.

Koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, \ldots, R_d$ je imprimitivna ako i samo ako postoji skup indeksa Ω takav da je $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ i $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ je relacija ekvivalencije.

Kako (im)primitivnost prepoznajemo iz presječnih brojeva p_{ij}^k ?

Karakterizacije imprimitivnosti

Definicija.

Neka je Δ_i graf sa skupom vrhova $\{0, \ldots, d\}$. Vrhovi j, k su susjedni $(j \to k)$ ako je $p_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo *i-tim distribucijskim grafom* koherentne konfiguracije.

Karakterizacije imprimitivnosti

Definicija.

Neka je Δ_i graf sa skupom vrhova $\{0, \ldots, d\}$. Vrhovi j, k su susjedni ($j \to k$) ako je $p_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo i-tim distribucijskim grafom koherentne konfiguracije.

Definicija.

Neka je $B_i \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j, k) jednak p_{ij}^k. Matrice $B_0, \ldots, B_d$ zovemo presječnim matricama.

Karakterizacije imprimitivnosti

Definicija.

Neka je Δ_i graf sa skupom vrhova $\{0,\ldots,d\}$. Vrhovi j, k su susjedni ($j \to k$) ako je $p_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo *i-tim distribucijskim grafom* koherentne konfiguracije.

Definicija.

Neka je $B_i \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j,k) jednak p_{ij}^k. Matrice $B_0,\ldots,B_d$ zovemo *presječnim matricama*.

Matricu susjedstva od Δ_i dobivamo iz presječne matrice B_i tako da nenul elemente zamijenimo jedinicama.

Karakterizacije imprimitivnosti

Definicija.

Neka je Δ_i graf sa skupom vrhova $\{0, \ldots, d\}$. Vrhovi j, k su susjedni ($j \to k$) ako je $p_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo i-tim distribucijskim grafom koherentne konfiguracije.

Definicija.

Neka je $B_i \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j, k) jednak p_{ij}^k. Matrice $B_0, \ldots, B_d$ zovemo presječnim matricama.

Matricu susjedstva od Δ_i dobivamo iz presječne matrice B_i tako da nenul elemente zamijenimo jedinicama.

Distribucijski graf Δ_0 ima sve petlje i nema drugih vrhova.

Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija 2.24.

1. $p_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $p_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij'}$
4. $p_{ij}^k = p_{j'i'}^{k'}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^k = n_i$
6. $n_k p_{ij}^k = n_j p_{i'k}^j = n_i p_{kj'}^i$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} p_{ij}^a p_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} p_{ki}^a p_{aj}^b$

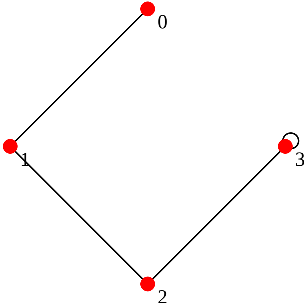
Propozicija 2.25.

1. $q_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $q_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $q_{ij}^0 = m_i \delta_{i\hat{j}}$
4. $q_{ij}^k = q_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^k = m_i$
6. $m_k q_{ij}^k = m_j q_{\hat{i}k}^j = m_i q_{k\hat{j}}^i$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} q_{ij}^a q_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} q_{ki}^a q_{aj}^b$

Distribucijski grafovi sedmerokuta

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Δ_1 :

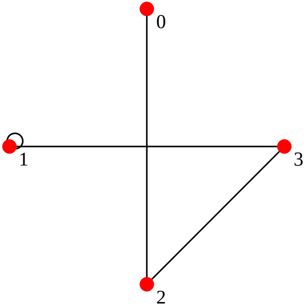


Karakterizacije imprimitivnosti

Distribucijski grafovi sedmerokuta

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

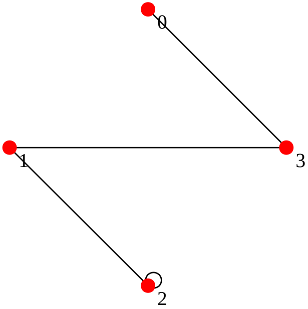
Δ_2 :



Distribucijski grafovi sedmerokuta

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δ_3 :



Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija.

Ako je koherentna konfiguracija simetrična, onda su njezini distribucijski grafovi simetrični.

Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija.

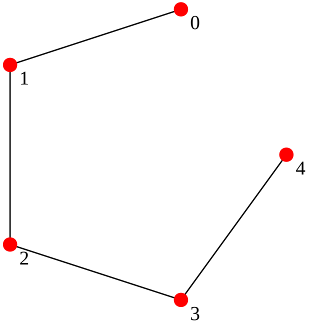
Ako je koherentna konfiguracija simetrična, onda su njezini distribucijski grafovi simetrični.

U nesimetričnom slučaju, pokazuje se da je relacija $\twoheadrightarrow$ postojanja šetnje između vrhova u Δ_i ipak simetrična, kao i za relacije koherentne konfiguracije.

Distribucijski grafovi osmerokuta

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

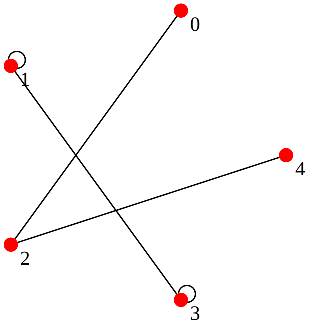
Δ_1 :



Distribucijski grafovi osmerokuta

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

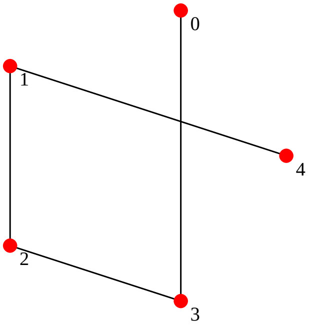
Δ_2 :



Distribucijski grafovi osmerokuta

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

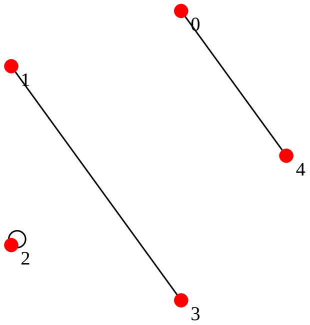
Δ_3 :



Distribucijski grafovi osmerokuta

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δ_4 :



Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija.

Distribucijski graf Δ_i je povezan ako i samo ako je relacija R_i komutativne koherentne konfiguracije povezana.

Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija.

Distribucijski graf Δ_i je povezan ako i samo ako je relacija R_i komutativne koherentne konfiguracije povezana.

Definicija.

Neka je ∇_i graf sa skupom vrhova $\{0, \ldots, d\}$. Vrhovi j, k su susjedni $(j \to k)$ ako je $q_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo *i-tim reprezentacijskim grafom* komutativne koherentne konfiguracije.

Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija.

Distribucijski graf Δ_i je povezan ako i samo ako je relacija R_i komutativne koherentne konfiguracije povezana.

Definicija.

Neka je ∇_i graf sa skupom vrhova $\{0, \ldots, d\}$. Vrhovi j, k su susjedni ($j \to k$) ako je $q_{ij}^k > 0$. Taj graf zovemo *i*-tim reprezentacijskim grafom komutativne koherentne konfiguracije.

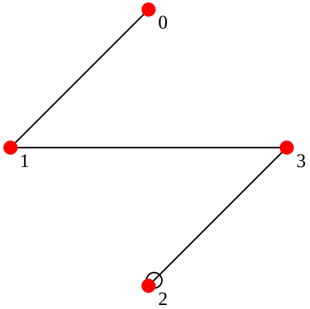
Definicija.

Neka je $B_i^\circ \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j, k) jednak q_{ij}^k. Matrice $B_0^\circ, \ldots, B_d^\circ$ zovemo dualnim presječnim matricama.

Reprezentacijski grafovi sedmerokuta

$$B_1^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

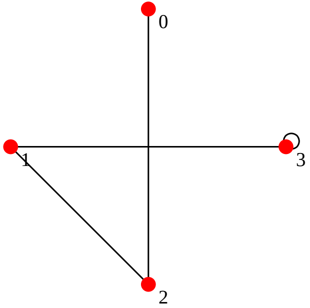
∇_1 :



Reprezentacijski grafovi sedmerokuta

$$B_2^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∇_2 :

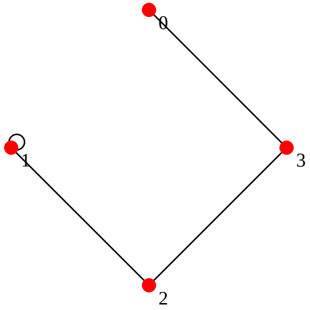


Karakterizacije imprimitivnosti

Reprezentacijski grafovi sedmerokuta

$$B_3^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

∇_3 :



Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija.

Ako je koherentna konfiguracija simetrična, onda su njezini reprezentacijski grafovi simetrični.

Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija.

Ako je koherentna konfiguracija simetrična, onda su njezini reprezentacijski grafovi simetrični.

U nesimetričnom slučaju, relacija $\twoheadrightarrow$ u grafu ∇_i ipak je simetrična. Zato se jake i slabe komponente povezanosti podudaraju i u reprezentacijskim grafovima.

Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija 2.24.

1. $p_{i0}^{k} = \delta_{ik}$
2. $p_{0j}^{k} = \delta_{jk}$
3. $p_{ij}^{0} = n_i \delta_{ij'}$
4. $p_{ij}^{k} = p_{j'i'}^{k'}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^{k} = n_i$
6. $n_k p_{ij}^{k} = n_j p_{i'k}^{j} = n_i p_{kj'}^{i}$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} p_{ij}^{a} p_{ka}^{b} = \sum_{a=0}^{d} p_{ki}^{a} p_{aj}^{b}$

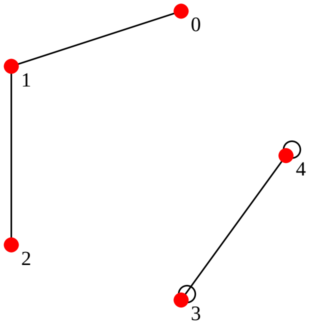
Propozicija 2.25.

1. $q_{i0}^{k} = \delta_{ik}$
2. $q_{0j}^{k} = \delta_{jk}$
3. $q_{ij}^{0} = m_i \delta_{i\hat{j}}$
4. $q_{ij}^{k} = q_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^{k} = m_i$
6. $m_k q_{ij}^{k} = m_j q_{\hat{i}k}^{j} = m_i q_{k\hat{j}}^{i}$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} q_{ij}^{a} q_{ka}^{b} = \sum_{a=0}^{d} q_{ki}^{a} q_{aj}^{b}$

Reprezentacijski grafovi osmerokuta

$$B_1^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

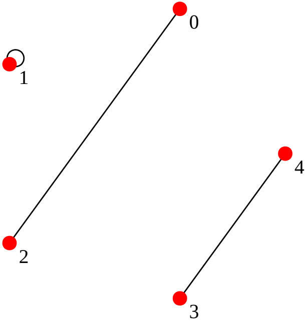
∇_1 :



Reprezentacijski grafovi osmerokuta

$$B_2^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

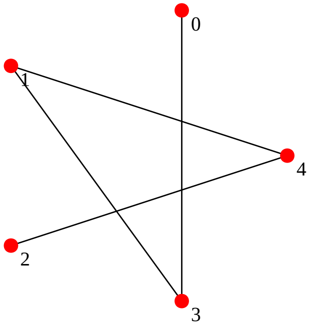
∇_2 :



Reprezentacijski grafovi osmerokuta

$$B_3^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

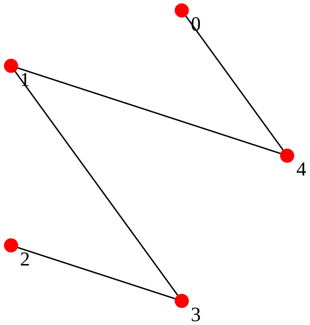
∇_3 :



Reprezentacijski grafovi osmerokuta

$$B_4^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∇_4 :



Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvena matrica $P = [P_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od A_j i B_j

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvena matrica $P = [P_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od A_j i B_j

Dualna svojstvena mat. $Q = [Q_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od B_j°

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvena matrica $P = [P_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od A_j i B_j

Dualna svojstvena mat. $Q = [Q_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od B_j°

Propozicija.

- $P_0(i) = 1$
- $Q_0(i) = 1$

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvena matrica $P = [P_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od A_j i B_j

Dualna svojstvena mat. $Q = [Q_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od B_j°

Propozicija.

- $P_0(i) = 1$
- $P_j(0) = n_j$
- $Q_0(i) = 1$
- $Q_j(0) = m_j$

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvena matrica $P = [P_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od A_j i B_j

Dualna svojstvena mat. $Q = [Q_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od B_j°

Propozicija.

- $P_0(i) = 1$
- $P_j(0) = n_j$
- $|P_j(i)| \leq n_j$

- $Q_0(i) = 1$
- $Q_j(0) = m_j$
- $|Q_j(i)| \leq m_j$

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvena matrica $P = [P_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od A_j i B_j

Dualna svojstvena mat. $Q = [Q_j(i)] \rightsquigarrow$ u j-tom stupcu je spektar od B_j°

Propozicija.

- $P_0(i) = 1$
- $P_j(0) = n_j$
- $|P_j(i)| \leq n_j$
- $Q_0(i) = 1$
- $Q_j(0) = m_j$
- $|Q_j(i)| \leq m_j$

Teorem.

Broj komponenta povezanosti distribucijskog grafa Δ_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid P_j(i) = n_j\}|$$

Broj komponenta povezanosti reprezentacijskog grafa ∇_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid Q_j(i) = m_j\}|$$

Karakterizacije imprimitivnosti

Perron-Frobeniusov teorem o svojstvenim vrijednostima matrica s nenegativnim unosima...

Karakterizacije imprimitivnosti

Perron-Frobeniusov teorem o svojstvenim vrijednostima matrica s nenegativnim unosima. . .

R. A. Horn, C. B. Johnson, *Matrix analysis. Second edition*, Cambridge University Press, 2013. $\rightsquigarrow$ 8. poglavlje

C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra. Second edition*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2023. $\rightsquigarrow$ 7. poglavlje

Karakterizacije imprimitivnosti

Perron-Frobeniusov teorem o svojstvenim vrijednostima matrica s nenegativnim unosima...

R. A. Horn, C. B. Johnson, *Matrix analysis. Second edition*, Cambridge University Press, 2013. $\rightsquigarrow$ 8. poglavlje

C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra. Second edition*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2023. $\rightsquigarrow$ 7. poglavlje

J. Bamberg, A. Hanaki, J. Lansdown, *AssociationSchemes, A GAP package for working with association schemes and homogeneous coherent configurations*, verzija 3.0.0, 2023.

http://www.jesselansdown.com/AssociationSchemes

Karakterizacije imprimitivnosti

```
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$ ./gap.sh
 ââââââââââ  GAP 4.11.1 of 2021-03-02
 â  GAP  â   https://www.gap-system.org
 ââââââââââ   Architecture: x86_64-pc-linux-gnu-default64-kv7
 Configuration:  gmp 6.2.0, GASMAN, readline
 Loading the library and packages ...
 Packages:   AClib 1.3.2, Alnuth 3.1.2, AtlasRep 2.1.0, AutoDoc 2020.08.11,
             AutPGrp 1.10.2, Browse 1.8.11, CaratInterface 2.3.3, CRISP 1.4.5,
             Cryst 4.1.23, CrystCat 1.1.9, CTblLib 1.3.1, FactInt 1.6.3, FGA 1.4.0,
             Forms 1.2.5, GAPDoc 1.6.4, genss 1.6.6, IO 4.7.0, IRREDSOL 1.4.1,
             LAGUNA 3.9.3, orb 4.8.3, Polenta 1.3.9, Polycyclic 2.16, PrimGrp 3.4.1,
             RadiRoot 2.8, recog 1.3.2, ResClasses 4.7.2, SmallGrp 1.4.2, Sophus 1.24,
             SpinSym 1.5.2, TomLib 1.2.9, TransGrp 3.0, utils 0.69
 Try '??help' for help. See also '?copyright', '?cite' and '?authors'
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$
krcko@fano:~$ ./gap.sh
 âââââââââ  GAP 4.11.1 of 2021-03-02
 â  GAP  â   https://www.gap-system.org
 âââââââââ   Architecture: x86_64-pc-linux-gnu-default64-kv7
 Configuration:  gmp 6.2.0, GASMAN, readline
 Loading the library and packages ...
 Packages:   AClib 1.3.2, Alnuth 3.1.2, AtlasRep 2.1.0, AutoDoc 2020.08.11,
             AutPGrp 1.10.2, Browse 1.8.11, CaratInterface 2.3.3, CRISP 1.4.5,
             Cryst 4.1.23, CrystCat 1.1.9, CTblLib 1.3.1, FactInt 1.6.3, FGA 1.4.0,
             Forms 1.2.5, GAPDoc 1.6.4, genss 1.6.6, IO 4.7.0, IRREDSOL 1.4.1,
             LAGUNA 3.9.3, orb 4.8.3, Polenta 1.3.9, Polycyclic 2.16, PrimGrp 3.4.1,
             RadiRoot 2.8, recog 1.3.2, ResClasses 4.7.2, SmallGrp 1.4.2, Sophus 1.24,
             SpinSym 1.5.2, TomLib 1.2.9, TransGrp 3.0, utils 0.69
 Try '??help' for help. See also '?copyright', '?cite' and '?authors'
gap> LoadPackage("AssociationSchemes");
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
   Luke Elliott (le27@st-andrews.ac.uk),
   Max Horn (https://www.quendi.de/math),
   Christopher Jefferson (http://caj.host.cs.st-andrews.ac.uk),
   Markus Pfeiffer (https://www.morphism.de/~markusp),
   Christopher Russell (cr66@st-andrews.ac.uk),
   Finn Smith (fls3@st-andrews.ac.uk), and
   Murray Whyte (mw231@st-andrews.ac.uk).
maintained by:
   James Mitchell (https://jdbm.me) and
   Wilf A. Wilson (https://wilf.me).
Homepage: https://digraphs.github.io/Digraphs
Report issues at https://github.com/digraphs/Digraphs/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
#I  method installed for Rank matches more than one declaration
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
Loading  AssociationSchemes 3.0.0 (A GAP package for working with association schemes and
 homogeneous coherent configurations)
by John Bamberg (http://school.maths.uwa.edu.au/~bamberg/),
   Akihide Hanaki (http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/), and
   Jesse Lansdown (http://www.jesselansdown.com).
Homepage: http://www.jesselansdown.com/AssociationSchemes
Report issues at https://github.com/jesselansdown/AssociationSchemes/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
true
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - nc | 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
   Christopher Jefferson (http://caj.host.cs.st-andrews.ac.uk),
   Markus Pfeiffer (https://www.morphism.de/~markusp),
   Christopher Russell (cr66@st-andrews.ac.uk),
   Finn Smith (fls3@st-andrews.ac.uk), and
   Murray Whyte (mw231@st-andrews.ac.uk).
maintained by:
   James Mitchell (https://jdbm.me) and
   Wilf A. Wilson (https://wilf.me).
Homepage: https://digraphs.github.io/Digraphs
Report issues at https://github.com/digraphs/Digraphs/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
#I  method installed for Rank matches more than one declaration
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
Loading  AssociationSchemes 3.0.0 (A GAP package for working with association schemes and
 homogeneous coherent configurations)
by John Bamberg (http://school.maths.uwa.edu.au/~bamberg/),
   Akihide Hanaki (http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/), and
   Jesse Lansdown (http://www.jesselansdown.com).
Homepage: http://www.jesselansdown.com/AssociationSchemes
Report issues at https://github.com/jesselansdown/AssociationSchemes/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
true
gap> mat:=n->List([0..n-1],i->List([0..n-1],j->Minimum((i-j) mod n,(j-i) mod n)));
function( n ) ... end
gap> 
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n(| 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
Homepage: https://digraphs.github.io/Digraphs
Report issues at https://github.com/digraphs/Digraphs/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
#I  method installed for Rank matches more than one declaration
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
Loading  AssociationSchemes 3.0.0 (A GAP package for working with association schemes and
 homogeneous coherent configurations)
by John Bamberg (http://school.maths.uwa.edu.au/~bamberg/),
   Akihide Hanaki (http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/), and
   Jesse Lansdown (http://www.jesselansdown.com).
Homepage: http://www.jesselansdown.com/AssociationSchemes
Report issues at https://github.com/jesselansdown/AssociationSchemes/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
true
gap> mat:=n->List([0..n-1],i->List([0..n-1],j->Minimum((i-j) mod n,(j-i) mod n)));
function( n ) ... end
gap> mat(7);
[ [ 0, 1, 2, 3, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
   Jesse Lansdown (http://www.jesselansdown.com).
Homepage: http://www.jesselansdown.com/AssociationSchemes
Report issues at https://github.com/jesselansdown/AssociationSchemes/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
true
gap> mat:=n->List([0..n-1],i->List([0..n-1],j->Minimum((i-j) mod n,(j-i) mod n)));
function( n ) ... end
gap> mat(7);
[ [ 0, 1, 2, 3, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> mat(8);
[ [ 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 ],
  [ 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 88x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
Report issues at https://github.com/jesselansdown/AssociationSchemes/issues
ââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââââ
true
gap> mat:=n->List([0..n-1],i->List([0..n-1],j->Minimum((i-j) mod n,(j-i) mod n)));
function( n ) ... end
gap> mat(7);
[ [ 0, 1, 2, 3, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> mat(8);
[ [ 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 ],
  [ 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> pgon:=n->AssociationScheme(mat(n));
function( n ) ... end
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 88x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
true
gap> mat:=n->List([0..n-1],i->List([0..n-1],j->Minimum((i-j) mod n,(j-i) mod n)));
function( n ) ... end
gap> mat(7);
[ [ 0, 1, 2, 3, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> mat(8);
[ [ 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 ],
  [ 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> pgon:=n->AssociationScheme(mat(n));
function( n ) ... end
gap> p7:=pgon(7);
< 3-class association scheme of order 7 >
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 88x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
function( n ) ... end
gap> mat(7);
[ [ 0, 1, 2, 3, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> mat(8);
[ [ 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 ],
  [ 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> pgon:=n->AssociationScheme(mat(n));
function( n ) ... end
gap> p7:=pgon(7);
< 3-class association scheme of order 7 >
gap> p8:=pgon(8);
< 4-class association scheme of order 8 >
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 88x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> mat(8);
[ [ 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 ],
  [ 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> pgon:=n->AssociationScheme(mat(n));
function( n ) ... end
gap> p7:=pgon(7);
< 3-class association scheme of order 7 >
gap> p8:=pgon(8);
< 4-class association scheme of order 8 >
gap> IntersectionMatrices(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 2, 1, 0, 0 ] ] ]
gap> 
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 88x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
[ [ 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 ],
  [ 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2 ],
  [ 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3 ],
  [ 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 ],
  [ 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3 ],
  [ 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> pgon:=n->AssociationScheme(mat(n));
function( n ) ... end
gap> p7:=pgon(7);
< 3-class association scheme of order 7 >
gap> p8:=pgon(8);
< 4-class association scheme of order 8 >
gap> IntersectionMatrices(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 2, 1, 0, 0 ] ] ]
gap> KreinParameters(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 2, 1, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 1, 0 ] ] ]
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 88x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
  [ 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2 ],
  [ 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1 ],
  [ 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0 ] ]
gap> pgon:=n->AssociationScheme(mat(n));
function( n ) ... end
gap> p7:=pgon(7);
< 3-class association scheme of order 7 >
gap> p8:=pgon(8);
< 4-class association scheme of order 8 >
gap> IntersectionMatrices(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 2, 1, 0, 0 ] ] ]
gap> KreinParameters(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 2, 1, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 1, 0 ] ] ]
gap> MatrixOfEigenvalues(p7);
[ [ 1, 2, 2, 2 ],
  [ 1, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6 ],
  [ 1, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4 ],
  [ 1, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5 ] ]
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 89x25 | NUM

```
gap> p7:=pgon(7);
< 3-class association scheme of order 7 >
gap> p8:=pgon(8);
< 4-class association scheme of order 8 >
gap> IntersectionMatrices(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 2, 1, 0, 0 ] ] ]
gap> KreinParameters(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 2, 1, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 1, 0 ] ] ]
gap> MatrixOfEigenvalues(p7);
[ [ 1, 2, 2, 2 ],
  [ 1, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6 ],
  [ 1, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4 ],
  [ 1, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5 ] ]
gap> MatrixOfDualEigenvalues(p7);
[ [ 1, 2, 2, 2 ],
  [ 1, E(7)^2+E(7)^5, E(7)+E(7)^6, E(7)^3+E(7)^4 ],
  [ 1, E(7)^3+E(7)^4, E(7)^2+E(7)^5, E(7)+E(7)^6 ],
  [ 1, E(7)+E(7)^6, E(7)^3+E(7)^4, E(7)^2+E(7)^5 ] ]
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
< 4-class association scheme of order 8 >
gap> IntersectionMatrices(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 2, 1, 0, 0 ] ] ]
gap> KreinParameters(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 2, 1, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 1, 0 ] ] ]
gap> MatrixOfEigenvalues(p7);
[ [ 1, 2, 2, 2 ],
  [ 1, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6 ],
  [ 1, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4 ],
  [ 1, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5 ] ]
gap> MatrixOfDualEigenvalues(p7);
[ [ 1, 2, 2, 2 ],
  [ 1, E(7)^2+E(7)^5, E(7)+E(7)^6, E(7)^3+E(7)^4 ],
  [ 1, E(7)^3+E(7)^4, E(7)^2+E(7)^5, E(7)+E(7)^6 ],
  [ 1, E(7)+E(7)^6, E(7)^3+E(7)^4, E(7)^2+E(7)^5 ] ]
gap> MatrixOfEigenvalues(p8);
[ [ 1, 2, 2, 2, 1 ], [ 1, 0, -2, 0, 1 ], [ 1, -2, 2, -2, 1 ],
  [ 1, E(8)-E(8)^3, 0, -E(8)+E(8)^3, -1 ], [ 1, -E(8)+E(8)^3, 0, E(8)-E(8)^3, -1 ] ]
gap> 
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n(| 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

```
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 2, 1, 0, 0 ] ] ]
gap> KreinParameters(p7);
[ [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 1, 0, 0 ], [ 2, 0, 0, 1 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ] ],
  [ [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1, 1 ], [ 2, 1, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ] ],
  [ [ 0, 0, 0, 1 ], [ 0, 1, 1, 0 ], [ 0, 1, 0, 1 ], [ 2, 0, 1, 0 ] ] ]
gap> MatrixOfEigenvalues(p7);
[ [ 1, 2, 2, 2 ],
  [ 1, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6 ],
  [ 1, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5, E(7)^3+E(7)^4 ],
  [ 1, E(7)^3+E(7)^4, E(7)+E(7)^6, E(7)^2+E(7)^5 ] ]
gap> MatrixOfDualEigenvalues(p7);
[ [ 1, 2, 2, 2 ],
  [ 1, E(7)^2+E(7)^5, E(7)+E(7)^6, E(7)^3+E(7)^4 ],
  [ 1, E(7)^3+E(7)^4, E(7)^2+E(7)^5, E(7)+E(7)^6 ],
  [ 1, E(7)+E(7)^6, E(7)^3+E(7)^4, E(7)^2+E(7)^5 ] ]
gap> MatrixOfEigenvalues(p8);
[ [ 1, 2, 2, 2, 1 ], [ 1, 0, -2, 0, 1 ], [ 1, -2, 2, -2, 1 ],
  [ 1, E(8)-E(8)^3, 0, -E(8)+E(8)^3, -1 ], [ 1, -E(8)+E(8)^3, 0, E(8)-E(8)^3, -1 ] ]
gap> MatrixOfDualEigenvalues(p8);
[ [ 1, 2, 1, 2, 2 ], [ 1, 0, -1, E(8)-E(8)^3, -E(8)+E(8)^3 ], [ 1, -2, 1, 0, 0 ],
  [ 1, 0, -1, -E(8)+E(8)^3, E(8)-E(8)^3 ], [ 1, 2, 1, -2, -2 ] ]
gap>
```

Connected to lnr.math.hr | SSH2 - aes128-cbc - hmac-md5 - n | 89x25 | NUM

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvene vrijednosti sedmerokuta $\quad e_7 = e^{2\pi i/7} = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i\sin(\frac{2\pi}{7})$

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvene vrijednosti sedmerokuta $\quad e_7 = e^{2\pi i/7} = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i\sin(\frac{2\pi}{7})$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & e_7^2 + e_7^5 & e_7^3 + e_7^4 & e_7 + e_7^6 \\ 1 & e_7 + e_7^6 & e_7^2 + e_7^5 & e_7^3 + e_7^4 \\ 1 & e_7^3 + e_7^4 & e_7 + e_7^6 & e_7^2 + e_7^5 \end{bmatrix}$$

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvene vrijednosti sedmerokuta $e_7 = e^{2\pi i/7} = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i\sin(\frac{2\pi}{7})$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & e_7^2 + e_7^5 & e_7^3 + e_7^4 & e_7 + e_7^6 \\ 1 & e_7 + e_7^6 & e_7^2 + e_7^5 & e_7^3 + e_7^4 \\ 1 & e_7^3 + e_7^4 & e_7 + e_7^6 & e_7^2 + e_7^5 \end{bmatrix}$$

$$P \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -0.445042 & -1.80194 & 1.24698 \\ 1 & 1.24698 & -0.445042 & -1.80194 \\ 1 & -1.80194 & 1.24698 & -0.445042 \end{bmatrix}$$

Dualne svojstvene vrijednosti sedmerokuta

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & e_7^2 + e_7^5 & e_7 + e_7^6 & e_7^3 + e_7^4 \\ 1 & e_7^3 + e_7^4 & e_7^2 + e_7^5 & e_7 + e_7^6 \\ 1 & e_7 + e_7^6 & e_7^3 + e_7^4 & e_7^2 + e_7^5 \end{bmatrix}$$

Dualne svojstvene vrijednosti sedmerokuta

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & e_7^2 + e_7^5 & e_7 + e_7^6 & e_7^3 + e_7^4 \\ 1 & e_7^3 + e_7^4 & e_7^2 + e_7^5 & e_7 + e_7^6 \\ 1 & e_7 + e_7^6 & e_7^3 + e_7^4 & e_7^2 + e_7^5 \end{bmatrix}$$

$$Q \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -0.445042 & 1.24698 & -1.80194 \\ 1 & -1.80194 & -0.445042 & 1.24698 \\ 1 & 1.24698 & -1.80194 & -0.445042 \end{bmatrix}$$

Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvene vrijednosti osmerokuta $e_8 = e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Karakterizacije imprimitivnosti

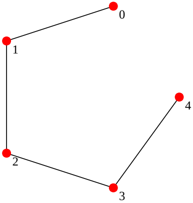
Svojstvene vrijednosti osmerokuta $e_8 = e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

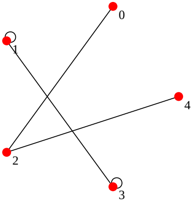
Karakterizacije imprimitivnosti

Svojstvene vrijednosti osmerokuta $\quad e_8 = e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

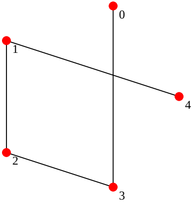
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$



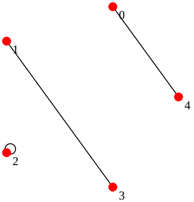
Δ_1



Δ_2



Δ_3



Δ_4

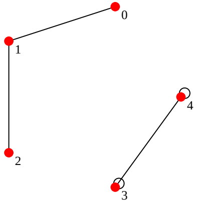
Dualne svojstvene vrijednosti osmerokuta

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

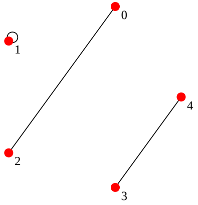
Karakterizacije imprimitivnosti

Dualne svojstvene vrijednosti osmerokuta

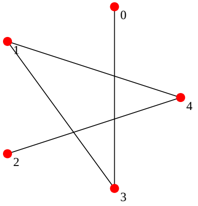
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$



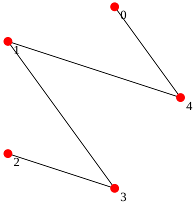
∇_1



∇_2



∇_3



∇_4

Karakterizacije imprimitivnosti

Teorem.

Broj komponenta povezanosti distribucijskog grafa Δ_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid P_j(i) = n_j\}|$$

Broj komponenta povezanosti reprezentacijskog grafa ∇_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid Q_j(i) = m_j\}|$$

Karakterizacije imprimitivnosti

Teorem.

Broj komponenta povezanosti distribucijskog grafa Δ_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid P_j(i) = n_j\}|$$

Broj komponenta povezanosti reprezentacijskog grafa ∇_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid Q_j(i) = m_j\}|$$

$$\frac{Q_j(i)}{m_j} = \frac{\overline{P_i(j)}}{n_i}$$

Karakterizacije imprimitivnosti

Teorem.

Broj komponenta povezanosti distribucijskog grafa Δ_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid P_j(i) = n_j\}|$$

Broj komponenta povezanosti reprezentacijskog grafa ∇_j je

$$|\{i \in \{0, \ldots, d\} \mid Q_j(i) = m_j\}|$$

$$\frac{Q_j(i)}{m_j} = \frac{\overline{P_i(j)}}{n_i}$$

Korolar.

Ekvivalentno je:

(a) bar jedan od distribucijskih grafova $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ je nepovezan,

(b) bar jedan od reprezentacijskih grafova $\nabla_1, \ldots, \nabla_d$ je nepovezan.

Karakterizacije imprimitivnosti

Definicija.

Množenja podskupova indeksa $\Omega, \Omega' \subseteq \{0, \ldots, d\}$:

$$\Omega\Omega' = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid \text{ postoje } i \in \Omega,\ j \in \Omega' \text{ takvi da je } p_{ij}^k > 0\}$$

Karakterizacije imprimitivnosti

Definicija.

Množenja podskupova indeksa $\Omega, \Omega' \subseteq \{0, \ldots, d\}$:

$$\Omega\Omega' = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid \text{ postoje } i \in \Omega,\ j \in \Omega' \text{ takvi da je } p_{ij}^k > 0\}$$

Propozicija.

Operacija množenja podskupova indeksa ima svojstva:

1. podskup $\{0\}$ je neutralni element
2. asocijativnost: $(\Omega\Omega')\Omega'' = \Omega(\Omega'\Omega'')$
3. komutativnost: $\Omega\Omega' = \Omega'\Omega$ (za komutativne koherentne konf.)

Karakterizacije imprimitivnosti

Propozicija 2.24.

1. $p_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $p_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij'}$
4. $p_{ij}^k = p_{j'i'}^{k'}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^k = n_i$
6. $n_k p_{ij}^k = n_j p_{i'k}^j = n_i p_{kj'}^i$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} p_{ij}^a p_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} p_{ki}^a p_{aj}^b$

Propozicija 2.25.

1. $q_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $q_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $q_{ij}^0 = m_i \delta_{i\hat{j}}$
4. $q_{ij}^k = q_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^k = m_i$
6. $m_k q_{ij}^k = m_j q_{\hat{i}k}^j = m_i q_{k\hat{j}}^i$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} q_{ij}^a q_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} q_{ki}^a q_{aj}^b$

Karakterizacije imprimitivnosti

$$R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k \qquad A_\Omega = \sum_{k \in \Omega} A_k$$

Karakterizacije imprimitivnosti

$$R_\Omega = \bigcup_{k\in\Omega} R_k \qquad A_\Omega = \sum_{k\in\Omega} A_k$$

Lema.

$$\Omega\Omega' = \{k \in \{0,\ldots,d\} \mid (A_\Omega A_{\Omega'}) \circ A_k \neq 0\}$$

Karakterizacije imprimitivnosti

$$R_\Omega = \bigcup_{k\in\Omega} R_k \qquad A_\Omega = \sum_{k\in\Omega} A_k$$

Lema.

$$\Omega\Omega' = \{k \in \{0,\ldots,d\} \mid (A_\Omega A_{\Omega'}) \circ A_k \neq 0\}$$

$$(\Omega\Omega')\Omega'' = \Omega(\Omega'\Omega'') = \{k \in \{0,\ldots,d\} \mid (A_\Omega A_{\Omega'} A_{\Omega''}) \circ A_k \neq 0\}$$

Karakterizacije imprimitivnosti

$$R_\Omega = \bigcup_{k\in\Omega} R_k \qquad A_\Omega = \sum_{k\in\Omega} A_k$$

Lema.

$$\Omega\Omega' = \{k \in \{0,\ldots,d\} \mid (A_\Omega A_{\Omega'}) \circ A_k \neq 0\}$$

$$(\Omega\Omega')\Omega'' = \Omega(\Omega'\Omega'') = \{k \in \{0,\ldots,d\} \mid (A_\Omega A_{\Omega'} A_{\Omega''}) \circ A_k \neq 0\}$$

Definicija.

Za podskup indeksa Ω kažemo da je zatvoren ako vrijedi $\Omega^2 = \Omega$.

Karakterizacije imprimitivnosti

$$R_\Omega = \bigcup_{k\in\Omega} R_k \qquad A_\Omega = \sum_{k\in\Omega} A_k$$

Lema.

$$\Omega\Omega' = \{k \in \{0,\ldots,d\} \mid (A_\Omega A_{\Omega'}) \circ A_k \neq 0\}$$

$$(\Omega\Omega')\Omega'' = \Omega(\Omega'\Omega'') = \{k \in \{0,\ldots,d\} \mid (A_\Omega A_{\Omega'} A_{\Omega''}) \circ A_k \neq 0\}$$

Definicija.

Za podskup indeksa Ω kažemo da je zatvoren ako vrijedi $\Omega^2 = \Omega$.

Teorem.

Neprazan podskup indeksa $\Omega \subseteq \{0,\ldots,d\}$ je zatvoren ako i samo ako je R_Ω relacija ekvivalencije.

Domaća zadaća

Zadatak 4.20.

Tanki radikal (eng. thin radical) koherentne konfiguracije je skup svih indeksa za koje su stupnjevi jednaki jedan:

$$\Omega_1 = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid n_k = 1\}$$

Dokažite da je Ω_1 zatvoren i da množenje elemenata iz Ω_1 čini grupu. Produkt indeksa i, j je produkt jednočlanih podskupova $\{i\}\{j\}$.

Domaća zadaća

Zadatak 4.20.

Tanki radikal (eng. thin radical) koherentne konfiguracije je skup svih indeksa za koje su stupnjevi jednaki jedan:

$$\Omega_1 = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid n_k = 1\}$$

Dokažite da je Ω_1 zatvoren i da množenje elemenata iz Ω_1 čini grupu. Produkt indeksa i, j je produkt jednočlanih podskupova $\{i\}\{j\}$.

Zadatak 4.21.

Operaciju množenja podskupova indeksa $\Omega, \Omega' \subseteq \{0, \ldots, d\}$ možemo definirati na dualan način pomoću Kreinovih parametara:

$$\Omega \circ \Omega' = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid \text{ postoje } i \in \Omega,\ j \in \Omega' \text{ takvi da je } q_{ij}^k > 0\}$$

Ispitajte svojstva te operacije!

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ komutativna koherentna konfiguracija

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^{d})$ komutativna koherentna konfiguracija

$\rightsquigarrow$ **imprimitivna**

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^{d})$ komutativna koherentna konfiguracija

$\rightsquigarrow$ **imprimitivna**

$\rightsquigarrow$ postoji zatvoreni skup indeksa $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ takav da je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ relacija ekvivalencije

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ komutativna koherentna konfiguracija

$\rightsquigarrow$ **imprimitivna**

$\rightsquigarrow$ postoji zatvoreni skup indeksa $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ takav da je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ relacija ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ neka je $\{X_1, \ldots, X_r\}$ particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^{d})$ komutativna koherentna konfiguracija

$\rightsquigarrow$ **imprimitivna**

$\rightsquigarrow$ postoji zatvoreni skup indeksa $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ takav da je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ relacija ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ neka je $\{X_1, \ldots, X_r\}$ particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ sustav imprimitivnosti od $\mathfrak{X}$; klase ekvivalencije su vlakna (fibers)

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ komutativna koherentna konfiguracija

$\rightsquigarrow$ **imprimitivna**

$\rightsquigarrow$ postoji zatvoreni skup indeksa $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ takav da je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ relacija ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ neka je $\{X_1, \ldots, X_r\}$ particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ sustav imprimitivnosti od $\mathcal{X}$; klase ekvivalencije su vlakna (fibers)

$\rightsquigarrow$ veličina vlakna $m := |X_i| = \sum\limits_{k \in \Omega} n_k$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^{d})$ komutativna koherentna konfiguracija

$\rightsquigarrow$ **imprimitivna**

$\rightsquigarrow$ postoji zatvoreni skup indeksa $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ takav da je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ relacija ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ neka je $\{X_1, \ldots, X_r\}$ particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ sustav imprimitivnosti od $\mathfrak{X}$; klase ekvivalencije su vlakna (fibers)

$\rightsquigarrow$ veličina vlakna $m := |X_i| = \sum\limits_{k \in \Omega} n_k$

$\rightsquigarrow$ ukupan broj vrhova je $n = |X| = \sum\limits_{i=1}^{r} |X_i| = r \cdot m$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ komutativna koherentna konfiguracija

$\rightsquigarrow$ **imprimitivna**

$\rightsquigarrow$ postoji zatvoreni skup indeksa $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ takav da je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ relacija ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ neka je $\{X_1, \ldots, X_r\}$ particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije

$\rightsquigarrow$ sustav imprimitivnosti od $\mathfrak{X}$; klase ekvivalencije su vlakna (fibers)

$\rightsquigarrow$ veličina vlakna $m := |X_i| = \sum\limits_{k \in \Omega} n_k$

$\rightsquigarrow$ ukupan broj vrhova je $n = |X| = \sum\limits_{i=1}^{r} |X_i| = r \cdot m$

$\rightsquigarrow$ vidjet ćemo da $\mathfrak{X}$ inducira potkonfiguraciju reda m na svakom vlaknu i kvocijentnu konfiguraciju reda r između vlakna

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Lema.

1. Ako su $i, j \in \Omega$ i $p_{ij}^k > 0$, onda je $k \in \Omega$
2. Ako je $i \in \Omega$, onda je $i' \in \Omega$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Lema.

1. Ako su $i, j \in \Omega$ i $p_{ij}^k > 0$, onda je $k \in \Omega$
2. Ako je $i \in \Omega$, onda je $i' \in \Omega$

Ako je $|\Omega| = s + 1$, možemo permutirati relacije $R_0, \ldots, R_d$ tako da bude $\Omega = \{0, \ldots, s\}$.

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Lema.

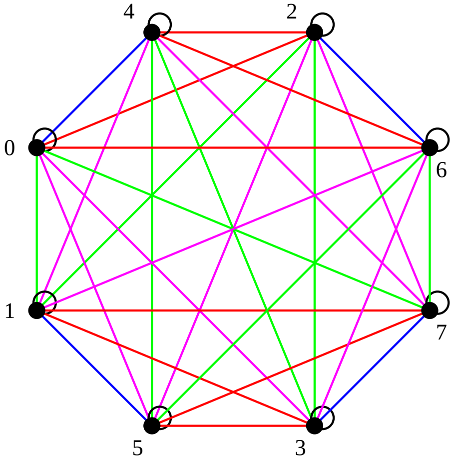
1. Ako su $i, j \in \Omega$ i $p_{ij}^k > 0$, onda je $k \in \Omega$
2. Ako je $i \in \Omega$, onda je $i' \in \Omega$

Ako je $|\Omega| = s + 1$, možemo permutirati relacije $R_0, \ldots, R_d$ tako da bude $\Omega = \{0, \ldots, s\}$.

Teorem.

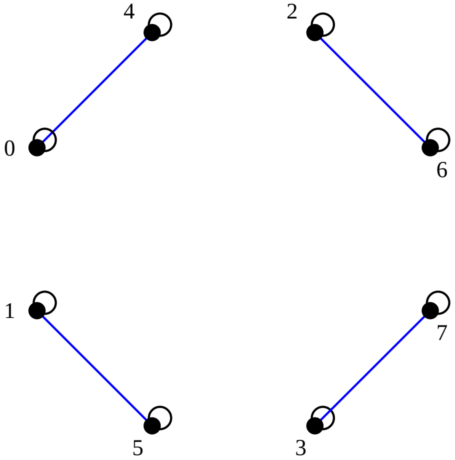
Neka je $Y \subseteq X$ jedno od vlakna imprimitivne koherentne konfiguracije. Tada je $\mathcal{Y} = (Y, \{R_i|_{Y\times Y}\}_{i=0}^s)$ komutativna koherentna konfiguracija reda m sa s klasa. Presječni brojevi i stupnjevi od $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}$ se podudaraju: $p_{ij}^k(\mathcal{Y}) = p_{ij}^k(\mathcal{X})$ i $n_i(\mathcal{Y}) = n_i(\mathcal{X})$ za $i, j, k \in \{0, \ldots, s\}$.

Sustavi imprimitivnosti osmerokuta



R_0, R_1, R_2, R_3, R_4

Sustavi imprimitivnosti osmerokuta



$\Omega = \{0, 4\}$

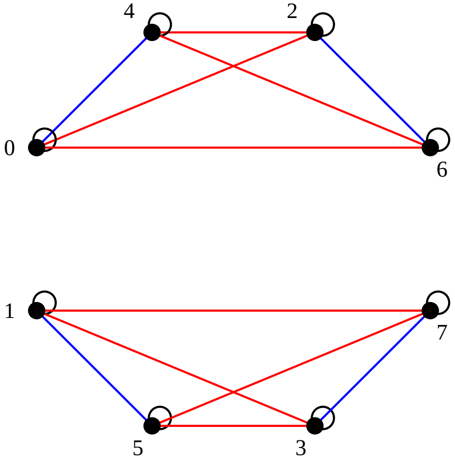
$R_\Omega = R_0 \cup R_4$

Vlakna:

$\{0, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 7\}$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Sustavi imprimitivnosti osmerokuta



$$\Omega = \{0, 2, 4\}$$

$$R_\Omega = R_0 \cup R_2 \cup R_4$$

Vlakna:

$\{0, 2, 4, 6\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Teorem.

Neka je $Y \subseteq X$ jedno od vlakna imprimitivne koherentne konfiguracije. Tada je $\mathcal{Y} = (Y, \{R_i|_{Y\times Y}\}_{i=0}^{s})$ komutativna koherentna konfiguracija reda m sa s klasa. Presječni brojevi i stupnjevi od $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}$ se podudaraju: $p_{ij}^k(\mathcal{Y}) = p_{ij}^k(\mathcal{X})$ i $n_i(\mathcal{Y}) = n_i(\mathcal{X})$ za $i, j, k \in \{0, \ldots, s\}$.

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Teorem.

Neka je $Y \subseteq X$ jedno od vlakna imprimitivne koherentne konfiguracije. Tada je $\mathcal{Y} = (Y, \{R_i|_{Y\times Y}\}_{i=0}^s)$ komutativna koherentna konfiguracija reda m sa s klasa. Presječni brojevi i stupnjevi od $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}$ se podudaraju: $p_{ij}^k(\mathcal{Y}) = p_{ij}^k(\mathcal{X})$ i $n_i(\mathcal{Y}) = n_i(\mathcal{X})$ za $i, j, k \in \{0, \ldots, s\}$.

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa vrhova X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala"
2. $\{R_0, \ldots, R_d\}$ čine particiju od $X \times X$
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^t = R_{i'}$
4. za svaki izbor indeksa i, j, k postoji presječni broj $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\ (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve parove $(x,y) \in R_k$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Bose-Mesnerova algebra od $\mathscr{X}$: $\quad \mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Bose-Mesnerova algebra od $\mathscr{X}$: $\quad \mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle$

Bose-Mesnerova algebra potkonfiguracije $\mathscr{Y}$?

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Bose-Mesnerova algebra od $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle$

Bose-Mesnerova algebra potkonfiguracije $\mathcal{Y}$?

Lema.

Schurove idempotente $A_0, \ldots, A_s$ razapinju podalgebru $\mathcal{A}_\Omega$ algebre $\mathcal{A}$. To je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{A}$ zatvoren na matrično množenje, Schurovo množenje, transponiranje i kompleksno konjugiranje. Neutralni element za Schurovo množenje u $\mathcal{A}_\Omega$ je $A_\Omega = \sum_{i \in \Omega} A_i$.

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Bose-Mesnerova algebra od $\mathscr{X}$: $\quad \mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle$

Bose-Mesnerova algebra potkonfiguracije $\mathscr{Y}$?

Lema.

Schurove idempotente $A_0, \ldots, A_s$ razapinju podalgebru $\mathscr{A}_\Omega$ algebre $\mathscr{A}$. To je potprostor vektorskog prostora $\mathscr{A}$ zatvoren na matrično množenje, Schurovo množenje, transponiranje i kompleksno konjugiranje. Neutralni element za Schurovo množenje u $\mathscr{A}_\Omega$ je $A_\Omega = \sum_{i \in \Omega} A_i$.

Ako indeksiramo matrice tako da vrhovi iz vlakna $X_1, \ldots, X_r$ budu uzastopni, onda su matrice iz podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ blok dijagonalne s r blokova veličine $m \times m$ na dijagonali.

Redoslijed vrhova osmerokuta: 0, 4, 2, 6, 7, 3, 5, 1

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Redoslijed vrhova osmerokuta: 0, 4, 2, 6, 7, 3, 5, 1

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Redoslijed vrhova osmerokuta: 0, 4, 2, 6, 7, 3, 5, 1

$$A_{\{0,4\}} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \quad A_{\{0,2,4\}} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Lema.

Neka je $\mathcal{Y} = (Y, \{R_i|_{Y\times Y}\}_{i=0}^s)$ potkonfiguracija inducirana na vlaknu imprimitivne koherentne konfiguracije $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$.

1. Schurove idempotente od $\mathcal{Y}$ su rekstrikcije $A_i|_{Y\times Y}$, $i = 0, \ldots, s$.
2. Bose-Mesnerova algebra od $\mathcal{Y}$ je restrikcija podalgebre $\mathcal{A}_\Omega|_{Y\times Y}$.
3. Preslikavanje $A \mapsto A|_{Y\times Y}$ je izomorfizam između podalgebre $\mathcal{A}_\Omega$ i $\mathcal{A}_\Omega|_{Y\times Y}$ (obzirom na matrično množenje i obzirom na Schurovo množenje).
4. Izomorfizam šalje $\frac{1}{m}A_\Omega$ u trivijalnu primitivnu idempotentu $\frac{1}{m}J$ Bose-Mesnerove algebre od $\mathcal{Y}$.

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Podalgebra $\mathscr{A}_\Omega \leq \mathscr{A}$ je zatvorena na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}_\Omega$ međusobno komutiraju.

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Podalgebra $\mathscr{A}_\Omega \leq \mathscr{A}$ je zatvorena na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}_\Omega$ međusobno komutiraju.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice, tj. vrijedi $E_i^* = E_i$ za $i = 0, \ldots, d$.

Potkonfiguracije i kvocijentne konfiguracije

Podalgebra $\mathscr{A}_\Omega \leq \mathscr{A}$ je zatvorena na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}_\Omega$ međusobno komutiraju.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice, tj. vrijedi $E_i^* = E_i$ za $i = 0, \ldots, d$.

Lema.

Postoji particija $\{\Lambda_0, \ldots, \Lambda_s\}$ skupa $\{0, \ldots, d\}$ takva da su primitivne idempotente podalgebre $\mathscr{A}_\Omega$ sume primitivnih idempotenta od $\mathscr{A}$:

$$E_{\Lambda_i} = \sum_{j \in \Lambda_i} E_j, \quad i = 0, \ldots, s.$$

Možemo pretpostaviti da je $0 \in \Lambda_0$, a tada je $E_{\Lambda_0} = \frac{1}{m} A_\Omega$.