Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

26.2.2024.

Apsolutna ocjena

Propozicija.

Ako postoji primitivan jako regularan graf $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ s kratnostima f i g, onda vrijedi $n \leq \frac{1}{2}f(f+3)$ i $n \leq \frac{1}{2}g(g+3)$.

Apsolutna ocjena

Propozicija.

Ako postoji primitivan jako regularan graf $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ s kratnostima f i g, onda vrijedi $n \leq \frac{1}{2}f(f+3)$ i $n \leq \frac{1}{2}g(g+3)$.

Teorem.

Neka su $m_0, \ldots, m_d$ kratnosti komutativne koherentne konfiguracije s d klasa i neka su zadani $i, j \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{q_{ij}^k \neq 0} m_k \leq \begin{cases} m_i m_j, & \text{ako je } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i (m_i + 1), & \text{ako je } i = j, \end{cases}$$

pri čemu na lijevoj strani sumiramo po svim indeksima $k \in \{0, \ldots, d\}$ za koje Kreinov parametar q_{ij}^k nije jednak nula.

Apsolutna ocjena

Propozicija.

Ako postoji primitivan jako regularan graf $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ s kratnostima f i g, onda vrijedi $n \le \frac{1}{2} f(f+3)$ i $n \le \frac{1}{2} g(g+3)$.

Teorem.

Neka su $m_0, \ldots, m_d$ kratnosti komutativne koherentne konfiguracije s d klasa i neka su zadani $i, j \in \{0, \ldots, d\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{q_{ij}^k \neq 0} m_k \le \begin{cases} m_i m_j, & \text{ako je } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i (m_i + 1), & \text{ako je } i = j, \end{cases}$$

pri čemu na lijevoj strani sumiramo po svim indeksima $k \in \{0, \ldots, d\}$ za koje Kreinov parametar q_{ij}^k nije jednak nula.

$$q_{11}^0 = \frac{f^2}{n} \left(1 + \frac{r^2}{\Bbbk^2} + \frac{(r+1)^2}{(n-1-\Bbbk)^2} \right), \quad q_{11}^2 = \frac{f^2}{n} \left(1 + \frac{r^2 s}{\Bbbk^2} - \frac{(r+1)^2 (s+1)}{(n-1-\Bbbk)^2} \right)$$

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
11	25	8	3	2	3	-2	8	16	1	5×5
12	25	12	5	6	2	-3	12	12	15	Paley(25)
13	26	10	3	4	2	-3	13	12	10	
14	27	10	1	5	1	-5	20	6	1	
15	28	9	0	4	1	-5	21	6	0	Krein, Aps.
16	28	12	6	4	4	-2	7	20	4	$T(8)$, Chang
17	29	14	6	7	$\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$		14	14	41	Paley(29)
18	33	16	7	8	$\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$		16	16	0	Tm. 3.18
19	35	16	6	8	2	-4	20	14	3854	
20	36	10	4	2	4	-2	10	25	1	6×6

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
31	49	16	3	6	2	-5	32	16	0	[11]
32	49	18	7	6	4	-3	18	30	$\geq$727	[17]
33	49	24	11	12	3	-4	24	24	$+$	Paley(49)
34	50	7	0	1	2	-3	28	21	1	
35	50	21	4	12	1	-9	42	7	0	Aps.
36	50	21	8	9	3	-4	25	24	$+$	

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
31	49	16	3	6	2	-5	32	16	0	[11]
32	49	18	7	6	4	-3	18	30	≥ 727	[17]
33	49	24	11	12	3	-4	24	24	$+$	Paley(49)
34	50	7	0	1	2	-3	28	21	1	
35	50	21	4	12	1	-9	42	7	0	Aps.
36	50	21	8	9	3	-4	25	24	$+$	

Jako regularan graf i njegov komplement čine asocijacijsku shemu, tj. simetričnu koherentnu konfiguraciju s dvije klase

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
31	49	16	3	6	2	-5	32	16	0	[11]
32	49	18	7	6	4	-3	18	30	≥ 727	[17]
33	49	24	11	12	3	-4	24	24	$+$	Paley(49)
34	50	7	0	1	2	-3	28	21	1	
35	50	21	4	12	1	-9	42	7	0	Aps.
36	50	21	8	9	3	-4	25	24	$+$	

Jako regularan graf i njegov komplement čine asocijacijsku shemu, tj. simetričnu koherentnu konfiguraciju s dvije klase

$\rightsquigarrow$ Bose-Mesnerovu algebru gledamo nad $\mathbb{R}$, a ne nad $\mathbb{C}$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, k, \lambda, \mu)$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, k, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad A_0,\ A_1,\ A_2;$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, k, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad A_0,\ A_1,\ A_2; \quad E_0,\ E_1$ i E_2

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, k, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad A_0,\ A_1,\ A_2;\ \ E_0,\ E_1$ i E_2

$$A = k E_0 + rE_1 + sE_2$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu) \;\; \rightsquigarrow \quad A_0,\ A_1,\ A_2; \;\; E_0,\ E_1$ i E_2

$$A = \Bbbk E_0 + rE_1 + sE_2$$

$$V_0 = \operatorname{Im} E_0 = [\mathbf{1}], \quad V_1 = \operatorname{Im} E_1, \quad V_2 = \operatorname{Im} E_2$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, k, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad A_0,\ A_1,\ A_2;\ \ E_0,\ E_1$ i E_2

$$A = k E_0 + rE_1 + sE_2$$

$$V_0 = \operatorname{Im} E_0 = [\mathbf{1}], \quad V_1 = \operatorname{Im} E_1, \quad V_2 = \operatorname{Im} E_2$$

$$\dim V_0 = 1, \quad \dim V_1 = f, \quad \dim V_2 = g$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, k, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad A_0,\ A_1,\ A_2;\ \ E_0,\ E_1$ i E_2

$$A = k E_0 + rE_1 + sE_2$$

$$V_0 = \operatorname{Im} E_0 = [\mathbf{1}], \quad V_1 = \operatorname{Im} E_1, \quad V_2 = \operatorname{Im} E_2$$

$$\dim V_0 = 1, \quad \dim V_1 = f, \quad \dim V_2 = g$$

Vrhovi grafa $\rightsquigarrow$ kanonska baza $e_1, \ldots, e_n$ od $\mathbb{R}^n$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$SRG(n, k, \lambda, \mu) \quad \rightsquigarrow \quad A_0,\ A_1,\ A_2;\ \ E_0,\ E_1$ i E_2

$$A = k E_0 + r E_1 + s E_2$$

$$V_0 = \operatorname{Im} E_0 = [\mathbf{1}], \quad V_1 = \operatorname{Im} E_1, \quad V_2 = \operatorname{Im} E_2$$

$$\dim V_0 = 1, \quad \dim V_1 = f, \quad \dim V_2 = g$$

Vrhovi grafa $\rightsquigarrow$ kanonska baza $e_1, \ldots, e_n$ od $\mathbb{R}^n$

$$e_i^t A e_j = \begin{cases} 1, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ 0, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

Projiciramo vektore kanonske baze na svojstveni potprostor V_1:

$$x_i = E_1 e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

Projiciramo vektore kanonske baze na svojstveni potprostor V_1:

$$x_i = E_1 e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Ako je SRG primitivan, vektori $x_1, \ldots, x_n$ su međusobno različiti.

Asocijacijske sheme s dvije klase

Projiciramo vektore kanonske baze na svojstveni potprostor V_1:

$$x_i = E_1 e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Ako je SRG primitivan, vektori $x_1, \ldots, x_n$ su međusobno različiti.

$$\langle x_i, x_j \rangle = x_i^t x_j = (E_1 e_i)^t (E_1 e_j) = e_i^t E_1^t E_1 e_j = e_i^t E_1 e_j$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

Projiciramo vektore kanonske baze na svojstveni potprostor V_1:

$$x_i = E_1 e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Ako je SRG primitivan, vektori $x_1, \ldots, x_n$ su međusobno različiti.

$$\langle x_i, x_j \rangle = x_i^t x_j = (E_1 e_i)^t (E_1 e_j) = e_i^t E_1^t E_1 e_j = e_i^t E_1 e_j$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{n} \Big(Q_1(0) A_0 + Q_1(1) A_1 + Q_1(2) A_2 \Big) \\ &= \frac{1}{n} \Big((Q_1(0) - Q_1(2)) I + Q_1(2) J + (Q_1(1) - Q_1(2)) A \Big) \end{aligned}$$

Projiciramo vektore kanonske baze na svojstveni potprostor V_1:

$$x_i = E_1 e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Ako je SRG primitivan, vektori $x_1, \ldots, x_n$ su međusobno različiti.

$$\langle x_i, x_j \rangle = x_i^t x_j = (E_1 e_i)^t (E_1 e_j) = e_i^t E_1^t E_1 e_j = e_i^t E_1 e_j$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{n} \Big(Q_1(0) A_0 + Q_1(1) A_1 + Q_1(2) A_2 \Big) \\ &= \frac{1}{n} \Big((Q_1(0) - Q_1(2)) I + Q_1(2) J + (Q_1(1) - Q_1(2)) A \Big) \end{aligned}$$

$$e_i^t I e_j = e_i^t e_j = \delta_{ij}, \quad e_i^t J e_j = e_i^t \mathbf{1} = 1$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} \alpha, & \text{ako je } i = j \\ \beta, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \gamma, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} \alpha, & \text{ako je } i = j \\ \beta, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \gamma, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \\ Q_0(1) & Q_1(1) & Q_2(1) \\ Q_0(2) & Q_1(2) & Q_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\Bbbk-(n-1)s}{r-s} & \frac{\Bbbk+(n-1)r}{r-s} \\ 1 & \frac{n-\Bbbk+s}{r-s} & \frac{\Bbbk-n-r}{r-s} \\ 1 & \frac{s-\Bbbk}{r-s} & \frac{\Bbbk-r}{r-s} \end{bmatrix}$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} \alpha, & \text{ako je } i = j \\ \beta, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \gamma, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \\ Q_0(1) & Q_1(1) & Q_2(1) \\ Q_0(2) & Q_1(2) & Q_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\Bbbk-(n-1)s}{r-s} & \frac{\Bbbk+(n-1)r}{r-s} \\ 1 & \frac{n-\Bbbk+s}{r-s} & \frac{\Bbbk-n-r}{r-s} \\ 1 & \frac{s-\Bbbk}{r-s} & \frac{\Bbbk-r}{r-s} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{n}, \qquad \beta = \frac{n-\Bbbk+s}{n(r-s)}, \qquad \gamma = \frac{s-\Bbbk}{n(r-s)}$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} \alpha, & \text{ako je } i = j \\ \beta, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \gamma, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_0(0) & Q_1(0) & Q_2(0) \\ Q_0(1) & Q_1(1) & Q_2(1) \\ Q_0(2) & Q_1(2) & Q_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-k-(n-1)s}{r-s} & \frac{k+(n-1)r}{r-s} \\ 1 & \frac{n-k+s}{r-s} & \frac{k-n-r}{r-s} \\ 1 & \frac{s-k}{r-s} & \frac{k-r}{r-s} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{n}, \qquad \beta = \frac{n-k+s}{n(r-s)}, \qquad \gamma = \frac{s-k}{n(r-s)}$$

$$\overline{x}_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} x_i = \sqrt{n}\, x_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \rightsquigarrow$ jedinični vektori u svojstvenom potprostoru $V_1 \equiv \mathbb{R}^f$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \rightsquigarrow$ jedinični vektori u svojstvenom potprostoru $V_1 \equiv \mathbb{R}^f$

$$\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle = \begin{cases} \frac{n-\Bbbk+s}{r-s}, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \frac{s-\Bbbk}{r-s}, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \rightsquigarrow$ jedinični vektori u svojstvenom potprostoru $V_1 \equiv \mathbb{R}^f$

$$\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle = \begin{cases} \frac{n-\Bbbk+s}{r-s}, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \frac{s-\Bbbk}{r-s}, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

Konačne podskupove jedinične sfere u euklidskom prostoru nazivamo sfernim kodovima.

Asocijacijske sheme s dvije klase

$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \rightsquigarrow$ jedinični vektori u svojstvenom potprostoru $V_1 \equiv \mathbb{R}^f$

$$\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle = \begin{cases} \frac{n-\Bbbk+s}{r-s}, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \frac{s-\Bbbk}{r-s}, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

Konačne podskupove jedinične sfere u euklidskom prostoru nazivamo sfernim kodovima.

$$\|x\| = \|y\| = 1 \;\Rightarrow\; \langle x, y \rangle = \cos \measuredangle(x, y), \quad \|x - y\|^2 = 2 - 2\langle x, y \rangle$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \rightsquigarrow$ jedinični vektori u svojstvenom potprostoru $V_1 \equiv \mathbb{R}^f$

$$\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle = \begin{cases} \frac{n-\Bbbk+s}{r-s}, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \frac{s-\Bbbk}{r-s}, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

Konačne podskupove jedinične sfere u euklidskom prostoru nazivamo sfernim kodovima.

$$\|x\| = \|y\| = 1 \;\Rightarrow\; \langle x, y \rangle = \cos \measuredangle(x, y), \quad \|x - y\|^2 = 2 - 2\langle x, y \rangle$$

Stupanj sfernog koda je broj različitih kutova ili udaljenosti među vektorima.

Asocijacijske sheme s dvije klase

$\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \rightsquigarrow$ jedinični vektori u svojstvenom potprostoru $V_1 \equiv \mathbb{R}^f$

$$\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j \rangle = \begin{cases} \frac{n-\Bbbk+s}{r-s}, & \text{ako su } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh susjedni} \\ \frac{s-\Bbbk}{r-s}, & \text{ako } i\text{-ti i } j\text{-ti vrh nisu susjedni} \end{cases}$$

Konačne podskupove jedinične sfere u euklidskom prostoru nazivamo sfernim kodovima.

$$\|x\| = \|y\| = 1 \;\Rightarrow\; \langle x, y \rangle = \cos \measuredangle(x, y), \quad \|x - y\|^2 = 2 - 2\langle x, y \rangle$$

Stupanj sfernog koda je broj različitih kutova ili udaljenosti među vektorima.

Vektore $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ zovemo euklidskom reprezentacijom jako regularnog grafa. To je sferni kod veličine n i stupnja dva u $\mathbb{R}^f$ ili $\mathbb{R}^g$.

Apsolutna ocjena

P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata **6** (1977), no. 3, 363–388.

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sferni kod veličine n i stupnja d u $\mathbb{R}^f$. Tada je

$$n \leq \binom{f+d-1}{d} + \binom{f+d-2}{d-1}$$

Apsolutna ocjena

P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata **6** (1977), no. 3, 363–388.

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sferni kod veličine n i stupnja d u $\mathbb{R}^f$. Tada je

$$n \leq \binom{f+d-1}{d} + \binom{f+d-2}{d-1}$$

Korolar.

Ako postoji primitivan jako regularan graf $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ s kratnostima f i g, onda vrijedi $n \leq \frac{1}{2} f(f+3)$ i $n \leq \frac{1}{2} g(g+3)$.

Sferni polinomi

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^m$ je $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$.

Sferni polinomi

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^m$ je $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$.

Polinomi u m varijabli $f, g \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ su ekvivalentni ako je $f(x) = g(x)$, $\forall x \in S^{m-1}$.

Sferni polinomi

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^m$ je $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$.

Polinomi u m varijabli $f, g \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ su ekvivalentni ako je $f(x) = g(x)$, $\forall x \in S^{m-1}$. Klase ekvivalencije zovemo sfernim polinomima.

Sferni polinomi

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^m$ je $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$.

Polinomi u m varijabli $f, g \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ su ekvivalentni ako je $f(x) = g(x)$, $\forall x \in S^{m-1}$. Klase ekvivalencije zovemo sfernim polinomima.

$$z^u = z_1^{u_1} \cdots z_m^{u_m}$$

Sferni polinomi

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^m$ je $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$.

Polinomi u m varijabli $f, g \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ su ekvivalentni ako je $f(x) = g(x)$, $\forall x \in S^{m-1}$. Klase ekvivalencije zovemo sfernim polinomima.

$$z^u = z_1^{u_1} \cdots z_m^{u_m}$$

$$\deg z^u = u_1 + \ldots + u_m$$

Sferni polinomi

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^m$ je $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$.

Polinomi u m varijabli $f, g \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ su ekvivalentni ako je $f(x) = g(x)$, $\forall x \in S^{m-1}$. Klase ekvivalencije zovemo sfernim polinomima.

$$z^u = z_1^{u_1} \cdots z_m^{u_m}$$

$$\deg z^u = u_1 + \ldots + u_m$$

$$\left.\begin{aligned} f(z_1, \ldots, z_m) = &\quad 1 \\ g(z_1, \ldots, z_m) = &\quad z_1^2 + \ldots + z_m^2 = \|z\|^2 \end{aligned}\right\} \text{ekvivalentni!}$$

Sferni polinomi

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^m$ je $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$.

Polinomi u m varijabli $f, g \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ su ekvivalentni ako je $f(x) = g(x)$, $\forall x \in S^{m-1}$. Klase ekvivalencije zovemo sfernim polinomima.

$$z^u = z_1^{u_1} \cdots z_m^{u_m}$$

$$\deg z^u = u_1 + \ldots + u_m$$

$$\left.\begin{aligned} f(z_1, \ldots, z_m) &= \ 1 \\ g(z_1, \ldots, z_m) &= \ z_1^2 + \ldots + z_m^2 = \|z\|^2 \end{aligned}\right\} \text{ ekvivalentni!}$$

Stupanj sfernog polinoma je najmanji stupanj polinoma iz $\mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]$ u toj klase ekvivalencije.

Sferni polinomi

$\mathrm{Pol}(m,d) =$ vektorski prostor svih sfernih polinoma u m varijabli stupnja najviše d

Sferni polinomi

$\mathrm{Pol}(m, d) =$ vektorski prostor svih sfernih polinoma u m varijabli stupnja najviše d

$\mathrm{Hom}(m, i) =$ prostor svih homogenih sfernih polinoma, koji se mogu prikazati kao linearna kombinacija monoma istog stupnja i

Sferni polinomi

$\mathrm{Pol}(m,d) =$ vektorski prostor svih sfernih polinoma u m varijabli stupnja najviše d

$\mathrm{Hom}(m,i) =$ prostor svih homogenih sfernih polinoma, koji se mogu prikazati kao linearna kombinacija monoma istog stupnja i

$$i \le d \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hom}(m,i) \le \mathrm{Pol}(m,d)$$

Sferni polinomi

$\mathrm{Pol}(m, d) =$ vektorski prostor svih sfernih polinoma u m varijabli stupnja najviše d

$\mathrm{Hom}(m, i) =$ prostor svih homogenih sfernih polinoma, koji se mogu prikazati kao linearna kombinacija monoma istog stupnja i

$$i \leq d \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hom}(m, i) \leq \mathrm{Pol}(m, d)$$

$$\mathrm{Hom}(m, i-2) \leq \mathrm{Hom}(m, i)$$

Sferni polinomi

$\mathrm{Pol}(m,d) =$ vektorski prostor svih sfernih polinoma u m varijabli stupnja najviše d

$\mathrm{Hom}(m,i) =$ prostor svih homogenih sfernih polinoma, koji se mogu prikazati kao linearna kombinacija monoma istog stupnja i

$$i \le d \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hom}(m,i) \le \mathrm{Pol}(m,d)$$

$$\mathrm{Hom}(m,i-2) \le \mathrm{Hom}(m,i)$$

Lema.

$$\mathrm{Pol}(m,d) = \mathrm{Hom}(m,d) \oplus \mathrm{Hom}(m,d-1)$$

Sferni polinomi

$\mathrm{Pol}(m, d) =$ vektorski prostor svih sfernih polinoma u m varijabli stupnja najviše d

$\mathrm{Hom}(m, i) =$ prostor svih homogenih sfernih polinoma, koji se mogu prikazati kao linearna kombinacija monoma istog stupnja i

$$i \leq d \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Hom}(m, i) \leq \mathrm{Pol}(m, d)$$

$$\mathrm{Hom}(m, i-2) \leq \mathrm{Hom}(m, i)$$

Lema.

$$\mathrm{Pol}(m, d) = \mathrm{Hom}(m, d) \oplus \mathrm{Hom}(m, d-1)$$

Lema.

$$\dim \mathrm{Pol}(m, d) = \binom{m+d-1}{d} + \binom{m+d-2}{d-1}$$

Apsolutna ocjena

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sferni kod veličine n i stupnja d u $\mathbb{R}^f$. Tada je

$$n \leq \binom{f+d-1}{d} + \binom{f+d-2}{d-1}$$

Apsolutna ocjena

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sferni kod veličine n i stupnja d u $\mathbb{R}^f$. Tada je

$$n \leq \binom{f+d-1}{d} + \binom{f+d-2}{d-1}$$

Sferni kod X je antipodalan ako za svaki $x \in X$ vrijedi $-x \in X$.

Apsolutna ocjena

Teorem (Apsolutna ocjena).

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sferni kod veličine n i stupnja d u $\mathbb{R}^f$. Tada je

$$n \leq \binom{f+d-1}{d} + \binom{f+d-2}{d-1}$$

Sferni kod X je antipodalan ako za svaki $x \in X$ vrijedi $-x \in X$.

Teorem.

Neka je X antipodalni sferni kod veličine n i stupnja d u $\mathbb{R}^f$. Tada je

$$n \leq 2\binom{f+d-2}{d-1}$$

Sferni kodovi i dizajni

Minimalna udaljenost sfernog koda:

$$\rho(X) = \min\{\|x - y\|^2 \mid x, y \in X, x \neq y\}$$

Sferni kodovi i dizajni

Minimalna udaljenost sfernog koda:

$$\rho(X) = \min\{\|x - y\|^2 \mid x, y \in X, x \neq y\}$$

T. Ericson, V. Zinoviev, *Codes on Euclidean spheres*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.

v	k	a	c	n	ρ	M	*Reference*
10	3	0	1	4	5/3	10	*Petersen*
16	5	0	2	5	8/5	16	*Clebsh*
27	10	1	5	6	3/2	27	*Schläfli*
56	10	0	2	20	28/15	56	*Gewirtz*
120	42	8	18	20	12/7	120	D^{pq}
50	7	0	1	21	40/21	50	*Hoffman–Singleton*
77	16	0	4	21	11/6	77	D_p
112	30	2	10	21	16/9	112	*1 subconst. McL*
162	56	10	24	21	12/7	162	*2 subconst. McL*
176	70	18	34	21	176/105	176	D^p
100	22	0	6	22	20/11	100	*Higman–Sims*
253	112	36	60	22	23/14	253	D
275	112	30	56	22	5/3	275	*McLaughlin*

Sferni kodovi i dizajni

P. J. Cameron, *Strongly regular graphs*, u *Topics in algebraic graph theory* (ed. L. W. Beineke, R. J. Wilson), Cambridge University Press, 2004.

Sferni kodovi i dizajni

P. J. Cameron, *Strongly regular graphs*, u *Topics in algebraic graph theory* (ed. L. W. Beineke, R. J. Wilson), Cambridge University Press, 2004.

Neka je $t \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da je graf t-izoregularan ili da ima svojstvo $C(t)$ ako za svaka dva podskupa vrhova S_1 i S_2 veličine najviše t, takva da su inducirani podgrafovi na S_1 i S_2 izomorfni, broj vrhova susjednih svim vrhovima iz S_1 je jednak broju vrhova susjednih svim vrhovima iz S_2.

Sferni kodovi i dizajni

P. J. Cameron, *Strongly regular graphs*, u *Topics in algebraic graph theory* (ed. L. W. Beineke, R. J. Wilson), Cambridge University Press, 2004.

Neka je $t \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da je graf t-izoregularan ili da ima svojstvo $C(t)$ ako za svaka dva podskupa vrhova S_1 i S_2 veličine najviše t, takva da su inducirani podgrafovi na S_1 i S_2 izomorfni, broj vrhova susjednih svim vrhovima iz S_1 je jednak broju vrhova susjednih svim vrhovima iz S_2.

Teorem.

Graf koji zadovoljava uvjet $C(5)$ ujedno zadovoljava $C(t)$ za sve $t \in \mathbb{N}_0$. Jedini takvi grafovi su disjunktne unije potpunih grafova $w \cdot K_m$, ciklus C_5 te 3×3 topovski graf i njihovi komplementi.

P. J. Cameron, 6-*transitive graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **28** (1980), no. 2, 168–179.

Sferni kodovi i dizajni

$C(4) \rightsquigarrow$ Schläfijev graf $SRG(27, 10, 1, 5)$

McLaughlinov graf $SRG(275, 112, 30, 56)$

Sferni kodovi i dizajni

$C(4) \rightsquigarrow$ Schläfijev graf $SRG(27, 10, 1, 5)$

McLaughlinov graf $SRG(275, 112, 30, 56)$

$C(3) \rightsquigarrow$ beskonačno mnogo primjera

Sferni kodovi i dizajni

$C(4) \rightsquigarrow$ Schläfijev graf $SRG(27, 10, 1, 5)$

McLaughlinov graf $SRG(275, 112, 30, 56)$

$C(3) \rightsquigarrow$ beskonačno mnogo primjera

P. J. Cameron, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, *Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents*, J. Algebra **55** (1978), no. 2, 257–280.

- Pseudo latinski kvadrati $PL_d(m)$, $1 \le d \le m$:

$$SRG(m^2, d(m-1), d^2 - 3d + m, d(d-1))$$

- Negativni latinski kvadrati $NL_d(m)$, $m \le d^2 + 3d$:

$$SRG(m^2, d(m+1), d^2 + 3d - m, d(d+1))$$

- Grafovi Smithinog tipa, $-s \ge r(r+2)$:

$$SRG\left(\frac{2(r-s)^2((2r+1)(r-s)-3r(r+1))}{(r-s)^2-r^2(r+1)^2}, \frac{-s((2r+1)(r-s)-r(r+1))}{(r-s)+r(r+1)}, \frac{-r(s+1)((r-s)-r(r+3))}{(r-s)+r(r+1)}, \frac{-(r+1)s((r-s)-r(r+1))}{(r-s)+r(r+1)}\right)$$

Parametri grafova sa svojstvom $C(2)$

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
1	5	2	0	1	$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$		2	2	1	Paley(5)
2	9	4	1	2	1	-2	4	4	1	Paley(9)
3	10	3	0	1	1	-2	5	4	1	Petersen$=T(5)^c$
4	13	6	2	3	$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$		6	6	1	Paley(13)
5	15	6	1	3	1	-3	9	5	1	$T(6)^c$
6	16	5	0	2	1	-3	10	5	1	
7	16	6	2	2	2	-2	6	9	2	4×4, Shrikhande
8	17	8	3	4	$\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$		8	8	1	Paley(17)
9	21	10	3	6	1	-4	14	6	1	$T(7)^c$
10	21	10	4	5	$\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$		10	10	0	Tm. 3.18

Parametri grafova sa svojstvom $C(2)$

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
11	25	8	3	2	3	-2	8	16	1	5×5
12	25	12	5	6	2	-3	12	12	15	Paley(25)
13	26	10	3	4	2	-3	13	12	10	
14	27	10	1	5	1	-5	20	6	1	
15	28	9	0	4	1	-5	21	6	0	(31), Prop. 3.21
16	28	12	6	4	4	-2	7	20	4	$T(8)$, Chang
17	29	14	6	7	$\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$		14	14	41	Paley(29)
18	33	16	7	8	$\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$		16	16	0	Tm. 3.18
19	35	16	6	8	2	-4	20	14	3854	
20	36	10	4	2	4	-2	10	25	1	6×6

Parametri grafova sa svojstvom $C(2)$

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
21	36	14	4	6	2	-4	21	14	180	
22	36	14	7	4	5	-2	8	27	1	$T(9)$
23	36	15	6	6	3	-3	15	20	32548	
24	37	18	8	9	$\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$		18	18	$\geq$6802	Paley(37)
25	40	12	2	4	2	-4	24	15	28	
26	41	20	9	10	$\frac{-1\pm\sqrt{41}}{2}$		20	20	$\geq$18439	Paley(41)
27	45	12	3	3	3	-3	20	24	78	
28	45	16	8	4	6	-2	9	35	1	$T(10)$
29	45	22	10	11	$\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{2}$		22	22	$+$	[47]
30	49	12	5	2	5	-2	12	36	1	7×7

Sferni kodovi i dizajni

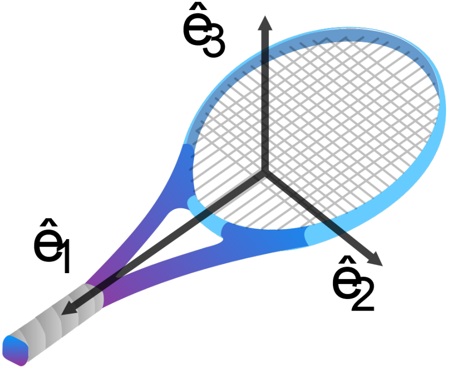
Za skup vektora $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ iz sfere $\Omega = S^{m-1}$ kažemo da je sferni t-dizajn ako za svaki polinom $f \in \mathrm{Pol}(m, t)$ vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x$$

Sferni kodovi i dizajni

Za skup vektora $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ iz sfere $\Omega = S^{m-1}$ kažemo da je sferni t-dizajn ako za svaki polinom $f \in \mathrm{Pol}(m,t)$ vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)}\int_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x$$



Sferni kodovi i dizajni

Za skup vektora $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ iz sfere $\Omega = S^{m-1}$ kažemo da je sferni t-dizajn ako za svaki polinom $f \in \mathrm{Pol}(m, t)$ vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Veritasium: *The Bizarre Behavior of Rotating Bodies*

https://www.youtube.com/watch?v=1VPfZ_XzisU

Sferni kodovi i dizajni

Teorem.

Neka je G primitivan jako regularan graf i X njegova euklidska reprezentacija u jednom od netrivijalnih svojstvenih potprostora V_1 ili V_2.

- X je uvijek sferni 2-dizajn.
- X je sferni 3-dizajn ako i samo ako G dostiže odgovarajući Kreinov uvjet: $q_{11}^1 = 0$ ako smo projicirali na V_1, a $q_{22}^2 = 0$ ako smo projicirali na V_2. U tom slučaju G zadovoljava uvjet $C(3)$.
- X je sferni 4-dizajn ako i samo ako G dostiže odgovarajuću apsolutnu ocjenu: $n = \frac{1}{2}f(f+3)$ za V_1, a $n = \frac{1}{2}g(g+3)$ za V_2. U tom slučaju G zadovoljava uvjet $C(4)$.
- X nikad nije sferni 5-dizajn.

Najveći t za koji je X sferni t-dizajn nazivamo snagom od X.

Sferni kodovi i dizajni

Najveći t za koji je X sferni t-dizajn nazivamo snagom od X.

Teorem.

Neka je $X \subset S^{m-1}$ podskup veličine n i snage $t \geq 4$, za $m \geq 3$.

Ako je $t = 2e$ paran, onda vrijedi

$$n \geq \binom{m+e-1}{e} + \binom{m+e-2}{e-1}.$$

Ako je $t = 2e+1$ neparan, onda vrijedi

$$n \geq 2\binom{m+e-1}{e}.$$

Domaća zadaća

Zadatak 3.33.

Neka je G graf maksimalnog stupnja $\Bbbk$ i dijametra d. Dokažite da broj vrhova n takvog grafa zadovoljava

$$n \leq 1 + \Bbbk \sum_{i=0}^{d-1} (\Bbbk - 1)^i.$$

Grafove koji dostižu jednakost zovemo Mooreovim grafovima. Klasificirajte Mooreove grafove dijametra $d = 2$.

Primitivnost i imprimitivnost

Jako regularan graf $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = \Bbbk$, a primitivan ako je $0 < \mu < \Bbbk$.

Primitivnost i imprimitivnost

Jako regularan graf $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = \Bbbk$, a primitivan ako je $0 < \mu < \Bbbk$.

Propozicija.

Jako regularan graf je povezan ako i samo ako vrijedi $\mu > 0$.

Primitivnost i imprimitivnost

Jako regularan graf $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = k$, a primitivan ako je $0 < \mu < k$.

Propozicija.

Jako regularan graf je povezan ako i samo ako vrijedi $\mu > 0$.

Definicija.

Neka je zadana koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je primitivna ako su sve relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Primitivnost i imprimitivnost

Jako regularan graf $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ je imprimitivan ako je $\mu = 0$ ili $\mu = k$, a primitivan ako je $0 < \mu < k$.

Propozicija.

Jako regularan graf je povezan ako i samo ako vrijedi $\mu > 0$.

Definicija.

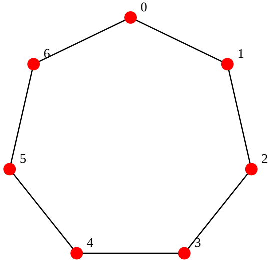
Neka je zadana koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je primitivna ako su sve relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Primjer 1.4 (Poligoni)

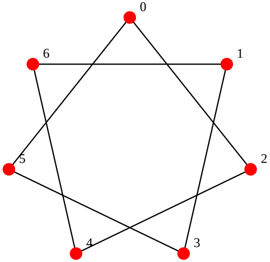
Neka je $X = \mathbb{Z}_n$ grupa cijelih brojeva modulo n. Definiramo da su x i y susjedni u G_i ako je $x - y = \pm i$, za $i = 0, 1, 2, \ldots$. Tako dobijemo asocijacijsku shemu s $d = \lfloor n/2 \rfloor$ klasa koju zovemo poligonom reda n ili n-terokutom.

Primitivnost i imprimitivnost

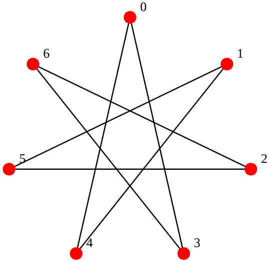
Poligon reda $n = 7$ ili sedmerokut:



G_1

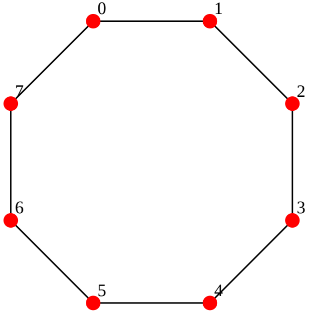


G_2

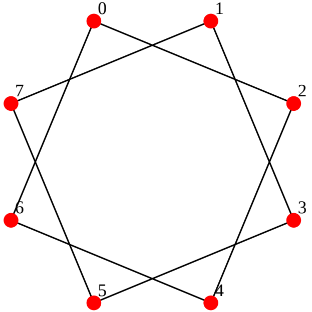


G_3

Poligon reda $n = 8$ ili osmerokut:

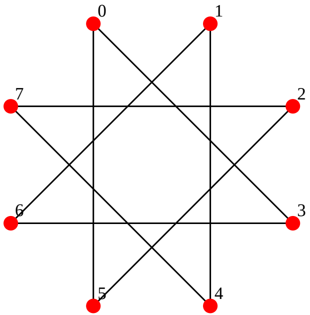


G_1

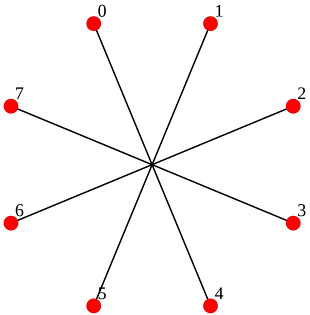


G_2

Poligon reda $n = 8$ ili osmerokut:



G_3



G_4

Primitivnost i imprimitivnost

Zadatak.

Dokažite da je poligon reda $n \geq 2$ primitivan ako i samo ako je n prost.

Primitivnost i imprimitivnost

Zadatak.

Dokažite da je poligon reda $n \geq 2$ primitivan ako i samo ako je n prost.

Primjer 1.42 (Klase konjugacije grupe)

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo komutativnu koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa.

Primitivnost i imprimitivnost

Zadatak.

Dokažite da je poligon reda $n \geq 2$ primitivan ako i samo ako je n prost.

Primjer 1.42 (Klase konjugacije grupe)

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo komutativnu koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa.

Zadatak.

Dokažite da klase konjugacije grupe G čine primitivnu koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Primitivnost i imprimitivnost

Neka je R_i jedna od relacija koherentne konfiguracije, a A_i odgovarajuća Schurova idempotenta.

Primitivnost i imprimitivnost

Neka je R_i jedna od relacija koherentne konfiguracije, a A_i odgovarajuća Schurova idempotenta.

$$N_i(x) = \{y \in X \mid x \to y\}$$

Primitivnost i imprimitivnost

Neka je R_i jedna od relacija koherentne konfiguracije, a A_i odgovarajuća Schurova idempotenta.

$$N_i(x) = \{y \in X \mid x \to y\}$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid x \twoheadrightarrow y\}$$

Primitivnost i imprimitivnost

Neka je R_i jedna od relacija koherentne konfiguracije, a A_i odgovarajuća Schurova idempotenta.

$$N_i(x) = \{y \in X \mid x \to y\}$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid x \twoheadrightarrow y\}$$

Lema.

Element na mjestu (x, y) potencije A_i^ℓ jednak je broju šetnji duljine ℓ od vrha x do vrha y.

Primitivnost i imprimitivnost

Propozicija.

Postoji skup indeksa $\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\}$ takav da za svaki vrh x vrijedi

$$N^{(i)}(x) = \bigcup_{k \in \Omega} N_k(x)$$

Primitivnost i imprimitivnost

Propozicija.

Postoji skup indeksa $\Omega \subseteq \{0, \dots, d\}$ takav da za svaki vrh x vrijedi

$$N^{(i)}(x) = \bigcup_{k \in \Omega} N_k(x)$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)\, [A_i^{\ell}]_{x,y} > 0\}$$

Primitivnost i imprimitivnost

Propozicija.

Postoji skup indeksa $\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\}$ takav da za svaki vrh x vrijedi

$$N^{(i)}(x) = \bigcup_{k \in \Omega} N_k(x)$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)\, [A_i^\ell]_{x,y} > 0\}$$

$$A_i^\ell = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k^\ell A_k$$

Primitivnost i imprimitivnost

Propozicija.

Postoji skup indeksa $\Omega \subseteq \{0, \ldots, d\}$ takav da za svaki vrh x vrijedi

$$N^{(i)}(x) = \bigcup_{k \in \Omega} N_k(x)$$

$$N^{(i)}(x) = \{y \in X \mid (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)\, [A_i^\ell]_{x,y} > 0\}$$

$$A_i^\ell = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k^\ell A_k$$

$$\Omega = \{k \in \{0, \ldots, d\} \mid (\exists \ell \in \mathbb{N}_0)\, \alpha_k^\ell > 0\}$$

Primitivnost i imprimitivnost

Korolar.

Veličina komponente povezanosti $|N^{(i)}(x)|$ ne ovisi o izboru vrha x.

Primitivnost i imprimitivnost

Korolar.

Veličina komponente povezanosti $|N^{(i)}(x)|$ ne ovisi o izboru vrha x.

Korolar.

Relacija $\twoheadrightarrow$ je relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada x podudara se s komponentom povezanosti $N^{(i)}(x)$.

Primitivnost i imprimitivnost

Korolar.

Veličina komponente povezanosti $|N^{(i)}(x)|$ ne ovisi o izboru vrha x.

Korolar.

Relacija $\twoheadrightarrow$ je relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada x podudara se s komponentom povezanosti $N^{(i)}(x)$.

Korolar.

Ako je $k \in \Omega$, onda je $k' \in \Omega$. Pritom je k' indeks za koji vrijedi $A_k^t = A_{k'}$.

Primitivnost i imprimitivnost

Korolar.

Veličina komponente povezanosti $|N^{(i)}(x)|$ ne ovisi o izboru vrha x.

Korolar.

Relacija $\twoheadrightarrow$ je relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada x podudara se s komponentom povezanosti $N^{(i)}(x)$.

Korolar.

Ako je $k \in \Omega$, onda je $k' \in \Omega$. Pritom je k' indeks za koji vrijedi $A_k^t = A_{k'}$.

Teorem.

Koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, \ldots, R_d$ je imprimitivna ako i samo ako postoji skup indeksa Ω takav da je $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ i pritom je $R_\Omega = \bigcup\limits_{k \in \Omega} R_k$ relacija ekvivalencije.