Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

12.2.2024.

Konferencija u Dubrovniku

Description

Combinatorial Constructions Conference (CCC) is a conference on Combinatorics supported by the Croatian Science Foundation in scope of the project IP-2020-02-9752. It is scheduled for April 7-13, 2024 with talks from Monday (April 8) to Friday (April 12). The main topics include Design Theory, Finite Geometry, Graph Theory, Coding Theory, Cryptography, Algebraic Combinatorics, Finite Fields and their Applications.

Venue

The conference will take place at the Centre for Advanced Academic Studies (CAAS) in Dubrovnik, Croatia. Dubrovnik is a beautiful medieval city included in the UNESCO World Heritage List.

Invited Speakers

- Marco Buratti, Sapienza, University of Rome, Italy
- Eimear Byrne, University College Dublin, Ireland
- Dean Crnković, University of Rijeka, Croatia
- Daniel Horsley, Monash University, Australia
- Michael Kiermaier, University of Bayreuth, Germany
- Patric Östergård, Aalto University, Finland
- Kai-Uwe Schmidt, Paderborn University, Germany

Edwin van Dam

Amorphic association schemes and fusing pairs

Association schemes are colorings of the edges of the complete graph satisfying many combinatorial regularity conditions. Extremal examples are colorings given by distance in a distance-regular graph, the so-called P-polynomial schemes. Dual to this are Q-polynomial schemes. Typical of such schemes is that they have few fusion schemes, where we speak of a fusion scheme of a scheme if joining some of the colors gives rise to another association scheme. At the other end of the spectrum are the so-called amorphic schemes. In such a scheme, any fusion of relations gives rise to a fusion scheme. . . .

Misha Muzychuk

Constructing linked systems of relative difference sets via Schur rings

Linked systems of symmetric block designs were introduced by P. Cameron in 1972 as combinatorial objects associated to inequivalent 2-transitive representations of a given group. It turned out that these objects have close connections to association schemes, coding theory, and other parts of combinatorics. D. Higman generalized Cameron's idea and introduced uniformly linked strongly regular designs in 1995. A particular case of this object named linked system of divisible symmetric block designs was studied in details by H. Kharaghani and S. Suda in 2018. ...

Članak u Electronic Journal of Combinatorics

The Electronic Journal of Combinatorics

Home / Archives / Volume 31, Issue 1 (2024) / Papers

Wreath Products and Projective System of non-Schurian Association Schemes

Makoto Matsumoto

Kento Ogawa

Abstract

A wreath product is a method to construct an association scheme from two association schemes. We determine the automorphism group of a wreath product. We show a known result that a wreath product is Schurian if and only if both components are Schurian, which yields large families of non-Schurian association schemes and non-Schurian S-rings. We also study iterated wreath products. Kernel schemes by Martin and Stinson are shown to be iterated wreath products of class-one association schemes. The iterated wreath products give examples of projective systems of non-Schurian association schemes, with an explicit description of primitive idempotents.

Jako regularni grafovi

Definicija.

Neka je G jednostavan graf koji nije potpun niti prazan. Kažemo da je G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

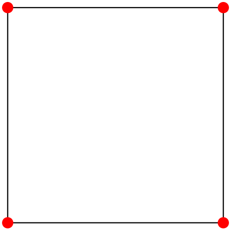
1. G je regularan stupnja k,
2. svaka dva susjedna vrha imaju λ zajedničkih susjeda,
3. svaka dva nesusjedna vrha imaju μ zajedničkih susjeda.

Jako regularni grafovi

Definicija.

Neka je G jednostavan graf koji nije potpun niti prazan. Kažemo da je G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. G je regularan stupnja k,
2. svaka dva susjedna vrha imaju λ zajedničkih susjeda,
3. svaka dva nesusjedna vrha imaju μ zajedničkih susjeda.



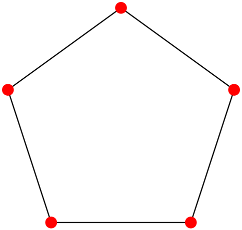
$SRG(4, 2, 0, 2)$

Jako regularni grafovi

Definicija.

Neka je G jednostavan graf koji nije potpun niti prazan. Kažemo da je G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. G je regularan stupnja k,
2. svaka dva susjedna vrha imaju λ zajedničkih susjeda,
3. svaka dva nesusjedna vrha imaju μ zajedničkih susjeda.



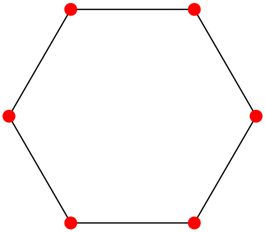
$SRG(5, 2, 0, 1)$

Jako regularni grafovi

Definicija.

Neka je G jednostavan graf koji nije potpun niti prazan. Kažemo da je G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. G je regularan stupnja k,
2. svaka dva susjedna vrha imaju λ zajedničkih susjeda,
3. svaka dva nesusjedna vrha imaju μ zajedničkih susjeda.



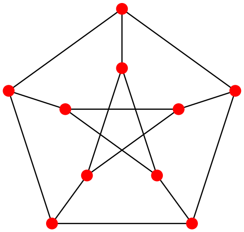
Nije SRG, ali je DRG.

Jako regularni grafovi

Definicija.

Neka je G jednostavan graf koji nije potpun niti prazan. Kažemo da je G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ ako vrijedi:

1. G je regularan stupnja k,
2. svaka dva susjedna vrha imaju λ zajedničkih susjeda,
3. svaka dva nesusjedna vrha imaju μ zajedničkih susjeda.



$SRG(10, 3, 0, 1)$

Primjeri SRG-ova

Primjer: $m \times m$ topovski graf.

Vrhovi: $\{1, \dots, m\}^2 = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, m\}\}$.

Susjedstvo: $(i, j) \sim (i', j')$ ako je $i = i'$ ili $j = j'$ (ali ne oboje).

Tako dobivamo $SRG(m^2, 2m - 2, m - 2, 2)$.

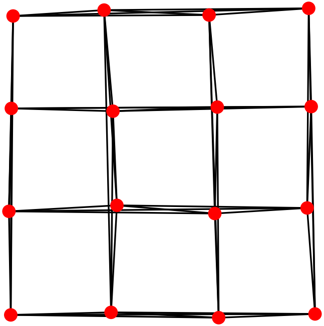
Primjeri SRG-ova

Primjer: $m \times m$ topovski graf.

Vrhovi: $\{1, \ldots, m\}^2 = \{(i,j) \mid i,j \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Susjedstvo: $(i,j) \sim (i',j')$ ako je $i = i'$ ili $j = j'$ (ali ne oboje).

Tako dobivamo $SRG(m^2, 2m-2, m-2, 2)$.



$SRG(16, 6, 2, 2)$

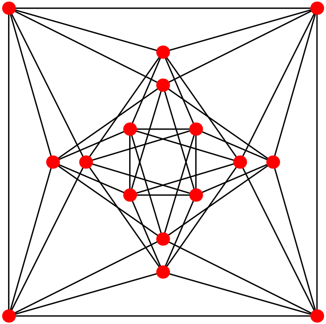
Primjeri SRG-ova

Primjer: $m \times m$ topovski graf.

Vrhovi: $\{1,\ldots,m\}^2 = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,\ldots,m\}\}$.

Susjedstvo: $(i,j) \sim (i',j')$ ako je $i = i'$ ili $j = j'$ (ali ne oboje).

Tako dobivamo $SRG(m^2, 2m-2, m-2, 2)$.

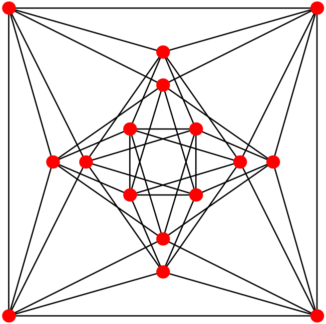


$SRG(16,6,2,2)$

Primjeri SRG-ova

Teorem (S. S. Shrikhande, 1959.)

Za $m = 2, 3$ i $m \geq 5$, svaki jako regularan graf s parametrima $SRG(m^2, 2m-2, m-2, 2)$ izomorfan je topovskom grafu.
Za $m = 4$ postoji još jedan takav graf prikazan na slici dolje.



$SRG(16, 6, 2, 2)$

Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m, 2, 1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.

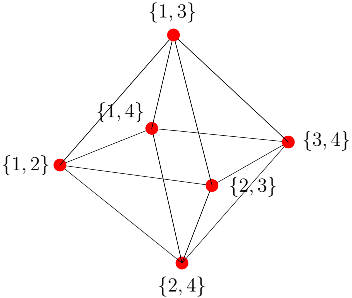
Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m,2,1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.



$SRG(6,4,2,4)$

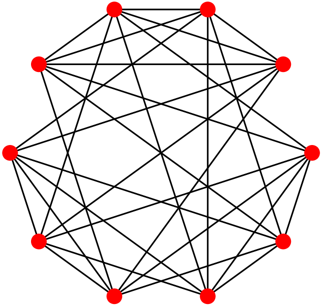
Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m,2,1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.



$SRG(10,6,3,4)$

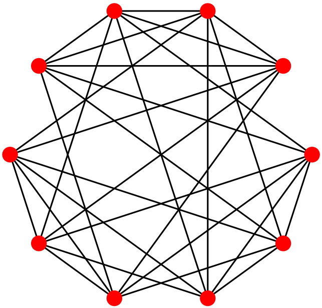
Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m,2,1)$.

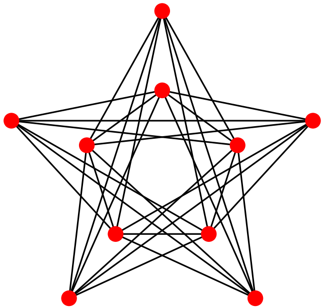
Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.



$SRG(10,6,3,4)$



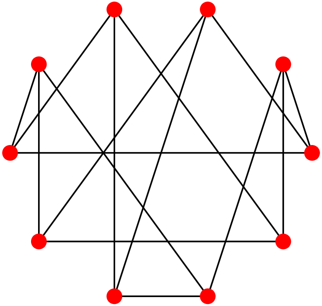
Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m,2,1)$.

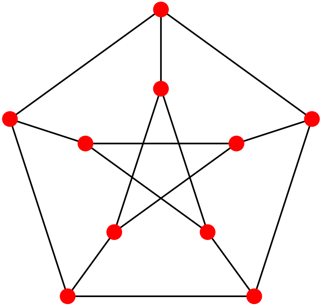
Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.



$SRG(10,3,0,1)$



Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m, 2, 1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.

Propozicija.

Ako je G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, onda je njegov komplement G^c jako regularan s parametrima

$$SRG(n,\ n-1-k,\ n-2k+\mu-2,\ n-2k+\lambda).$$

Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m,2,1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.

Propozicija.

Ako je G jako regularan s parametrima $SRG(n,k,\lambda,\mu)$, onda je njegov komplement G^c jako regularan s parametrima

$$SRG(n,\ n-1-k,\ n-2k+\mu-2,\ n-2k+\lambda).$$

Trokutni graf $T(m)$ je linijski graf potpunog grafa: $L(K_m)$

Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m,2,1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.

Propozicija.

Ako je G jako regularan s parametrima $SRG(n,k,\lambda,\mu)$, onda je njegov komplement G^c jako regularan s parametrima

$$SRG(n,\ n-1-k,\ n-2k+\mu-2,\ n-2k+\lambda).$$

Trokutni graf $T(m)$ je linijski graf potpunog grafa: $L(K_m)$

Topovski $m \times m$ graf je linijski graf potpunog bipartitnog grafa: $L(K_{m,m})$

Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m, 2, 1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i, j\} \mid i, j \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i, j\} \sim \{i', j'\}$ ako je $|\{i, j\} \cap \{i', j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.

Teorem (L. C. Chang, 1959., 1960.)

Za $m \neq 8$, svaki jako regularan graf s parametrima $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$ izomorfan je trokutnom grafu $T(m)$.
Za $m = 8$ postoje još tri takva grafa.

Primjeri SRG-ova

Primjer: trokutni graf $T(m)$ ili Johnsonov graf $J(m,2,1)$.

Vrhovi: $\binom{\{1,\ldots,m\}}{2} = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\ldots,m\},\ i \neq j\}$.

Susjedstvo: $\{i,j\} \sim \{i',j'\}$ ako je $|\{i,j\} \cap \{i',j'\}| = 1$.

Tako dobivamo $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$.

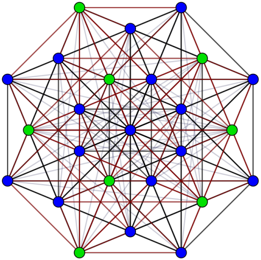
Teorem (L. C. Chang, 1959., 1960.)

Za $m \neq 8$, svaki jako regularan graf s parametrima $SRG(\binom{m}{2}, 2(m-2), m-2, 4)$ izomorfan je trokutnom grafu $T(m)$.
Za $m = 8$ postoje još tri takva grafa.

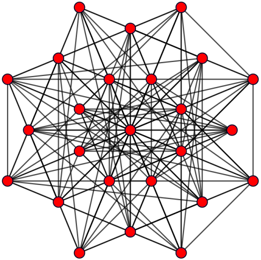
L. C. Chang, *The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association schemes*, Sci. Record (N.S.) **3** (1959), 604–613.

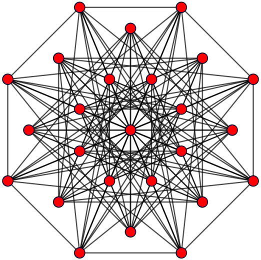
L. C. Chang, *Association schemes of partially balanced designs with parameters $v=28$, $n_1=12$, $n_2=15$ and $p^2_{11}=4$*, Sci. Record (N.S.) **4** (1960), 12–18.

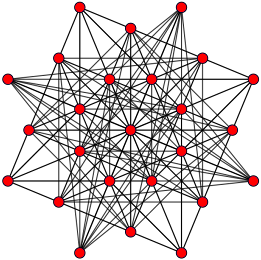
Primjeri SRG-ova



$SRG(28, 12, 6, 4)$







Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.

Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.

Zadatak 3.4.

Dokažite da Paleyeva konstrukcija zaista daje jako regularne grafove.

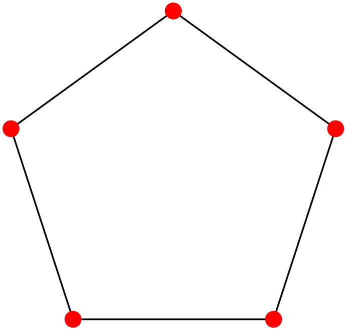
Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.



$SRG(5, 2, 0, 1)$

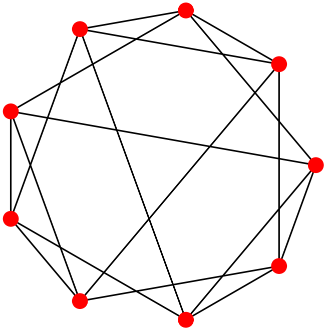
Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.



$SRG(9, 4, 1, 2)$

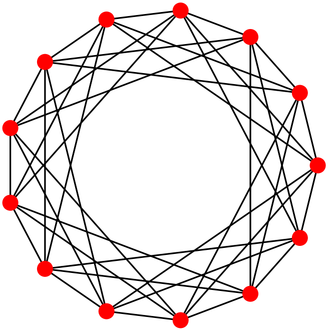
Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.



$SRG(13, 6, 2, 3)$

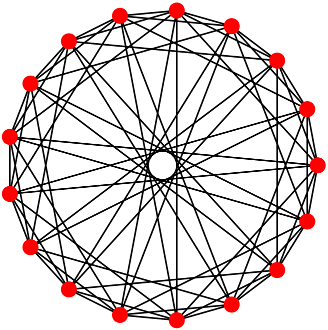
Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.



$SRG(17, 8, 3, 4)$

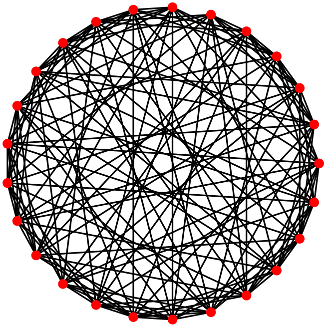
Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.



$SRG(25, 12, 5, 6)$

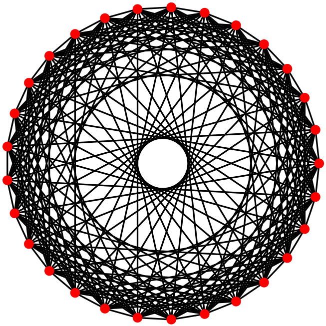
Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.



$SRG(29, 14, 6, 7)$

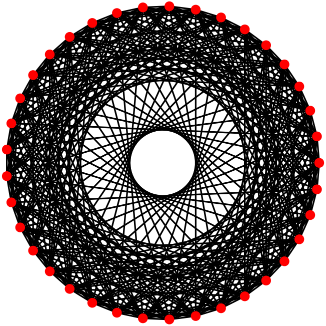
Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.



$SRG(37, 18, 8, 9)$

Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.

Parametri	Br. grafova	Parametri	Br. grafova
$SRG(5,2,0,1)$	1	$SRG(25,12,5,6)$	15
$SRG(9,4,1,2)$	1	$SRG(29,14,6,7)$	41
$SRG(13,6,2,3)$	1	$SRG(37,18,8,9)$	≥ 6802
$SRG(17,8,3,4)$	1	$SRG(41,20,9,10)$	≥ 18439

Primjeri SRG-ova

Primjer: Paleyev graf

Vrhovi: elementi konačnog polja $\mathbb{F}_q$ za $q \equiv 1 \pmod 4$.

Susjedstvo: $x \sim y$ ako je $x - y$ kvadrat u $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Tako dobivamo $SRG(q, \frac{1}{2}(q-1), \frac{1}{4}(q-5), \frac{1}{4}(q-1))$.

D. Crnković, M. Maksimović, *Strongly regular graphs with parameters* $(37, 18, 8, 9)$ *having nontrivial automorphisms*, Art Discrete Appl. Math. **3** (2020), no. 2, Paper No. 2.10.

M. Maksimović, S. Rukavina, *New regular two-graphs on* 38 *and* 42 *vertices*, Math. Commun. **27** (2022), no. 2, 151–161.

Primjeri SRG-ova

Strongly regular graphs stand on the cusp between the random and the highly structured. For example, there is (up to isomorphism) a unique srg$(36, 10, 4, 2)$; but a computation by McKay and Spence [20] showed that the number of srg$(36, 15, 6, 6)$s is 32548. The pattern continues: there is a unique srg$(m^2, 2(m-1), m-2, 2)$, but more than exponentially many srg$(m^2, 3(m-1), m, 6)$s, as we will see.

This suggests that no general asymptotic results are possible, and that, depending on the parameters, strongly regular graphs can behave in either a highly structured or an apparently random manner.

P. J. Cameron, *Random strongly regular graphs?*, Discrete Math. **273** (2003), no. 1-3, 103–114.

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Komplement tog grafa je potpuni multipartitini graf $K_{m,\dots,m}$

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Komplement tog grafa je potpuni multipartitini graf $K_{m,\dots,m}$

$$SRG(dm, (d-1)m, (d-2)m, (d-1)m)$$

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Komplement tog grafa je potpuni multipartitini graf $K_{m,\ldots,m}$

$$SRG(dm, (d-1)m, (d-2)m, (d-1)m)$$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $d \cdot K_m$.

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Komplement tog grafa je potpuni multipartitini graf $K_{m,\ldots,m}$

$$SRG(dm, (d-1)m, (d-2)m, (d-1)m)$$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $d \cdot K_m$.

Propozicija.

Jako regularan graf je povezan ako i samo ako vrijedi $\mu > 0$.

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Komplement tog grafa je potpuni multipartitini graf $K_{m,\ldots,m}$

$$SRG(dm, (d-1)m, (d-2)m, (d-1)m)$$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $d \cdot K_m$.

Propozicija.

Jako regularan graf je povezan ako i samo ako vrijedi $\mu > 0$.

Propozicija.

Jako regularan graf zadovoljava $\mu = \Bbbk$ ako i samo ako je oblika $K_{m,\ldots,m}$.

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Komplement tog grafa je potpuni multipartitini graf $K_{m,\ldots,m}$

$$SRG(dm, (d-1)m, (d-2)m, (d-1)m)$$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $d \cdot K_m$.

Propozicija.

Jako regularan graf je povezan ako i samo ako vrijedi $\mu > 0$.

Propozicija.

Jako regularan graf zadovoljava $\mu = \Bbbk$ ako i samo ako je oblika $K_{m,\ldots,m}$.

$\mu = 0$ ili $\mu = \Bbbk \rightsquigarrow$ imprimitivni jako regularni grafovi

Imprimitivni SRG-ovi

Primjer nepovezanog jako regularnog grafa: $d \cdot K_m$

$$SRG(dm, m-1, m-2, 0)$$

Komplement tog grafa je potpuni multipartitini graf $K_{m,\ldots,m}$

$$SRG(dm, (d-1)m, (d-2)m, (d-1)m)$$

Propozicija.

Jako regularan graf ima parametar $\mu = 0$ ako i samo ako je oblika $d \cdot K_m$.

Propozicija.

Jako regularan graf je povezan ako i samo ako vrijedi $\mu > 0$.

Propozicija.

Jako regularan graf zadovoljava $\mu = \Bbbk$ ako i samo ako je oblika $K_{m,\ldots,m}$.

$0 < \mu < \Bbbk \rightsquigarrow$ primitivni jako regularni grafovi (**zanimljiviji!**)

Nužni uvjeti na parametre

$$k(k-\lambda-1)=(n-k-1)\mu$$

Nužni uvjeti na parametre

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu$$

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Nužni uvjeti na parametre

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu$$

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Schurove idempotente:

$$A_0 = I, \qquad A_1 = A, \qquad A_2 = J - I - A$$

Nužni uvjeti na parametre

$$k(k-\lambda-1)=(n-k-1)\mu$$

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Schurove idempotente:

$$A_0=I, \qquad A_1=A, \qquad A_2=J-I-A$$

Stupnjevi:

$$n_0=1, \qquad n_1=k, \qquad n_2=n-1-k$$

Nužni uvjeti na parametre

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu$$

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Schurove idempotente:

$$A_0 = I, \qquad A_1 = A, \qquad A_2 = J - I - A$$

Stupnjevi:

$$n_0 = 1, \qquad n_1 = k, \qquad n_2 = n - 1 - k$$

Presječni brojevi:

$$p_{11}^0 = k, \qquad p_{11}^1 = \lambda, \qquad p_{11}^2 = \mu$$

Nužni uvjeti na parametre

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu$$

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Schurove idempotente:

$$A_0 = I, \qquad A_1 = A, \qquad A_2 = J - I - A$$

Stupnjevi:

$$n_0 = 1, \qquad n_1 = k, \qquad n_2 = n - 1 - k$$

Presječni brojevi:

$$p_{11}^0 = k, \qquad p_{11}^1 = \lambda, \qquad p_{11}^2 = \mu$$

$$A_1 \cdot A_1 = p_{11}^0 A_0 + p_{11}^1 A_1 + p_{11}^2 A_2$$

Nužni uvjeti na parametre

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu$$

Teorem.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Schurove idempotente:

$$A_0 = I, \qquad A_1 = A, \qquad A_2 = J - I - A$$

Stupnjevi:

$$n_0 = 1, \qquad n_1 = k, \qquad n_2 = n - 1 - k$$

Presječni brojevi:

$$p_{11}^0 = k, \qquad p_{11}^1 = \lambda, \qquad p_{11}^2 = \mu$$

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i, j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i,j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i,j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Matrica A ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk$ i svojstveni vektor $\mathbf{1}$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i,j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Matrica A ima svojstvenu vrijednost $\Bbbk$ i svojstveni vektor $\mathbf{1}$

$\Rightarrow$ algebarski dokaz uvjeta $\Bbbk(\Bbbk - \lambda - 1) = (n - \Bbbk - 1)\mu$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i, j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Neka je $x \neq \Bbbk$ neka druga svojstvena vrijednost i e svojstveni vektor...

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i, j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Neka je $x \neq \Bbbk$ neka druga svojstvena vrijednost i e svojstveni vektor...

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - \Bbbk = 0$$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i, j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Neka je $x \neq \Bbbk$ neka druga svojstvena vrijednost i e svojstveni vektor...

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - \Bbbk = 0$$

Svojstvene vrijednosti:

$$r = \frac{\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(\Bbbk - \mu)}}{2}$$

$$s = \frac{\lambda - \mu - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(\Bbbk - \mu)}}{2}$$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i,j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Neka je $x \neq \Bbbk$ neka druga svojstvena vrijednost i e svojstveni vektor...

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - \Bbbk = 0$$

Vieteove formule:

$$r + s = \lambda - \mu, \qquad rs = \mu - \Bbbk$$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i, j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Neka je $x \neq \Bbbk$ neka druga svojstvena vrijednost i e svojstveni vektor...

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - \Bbbk = 0$$

Vieteove formule:

$$r + s = \lambda - \mu, \qquad rs = \mu - \Bbbk$$

$$s < 0 < r$$

Nužni uvjeti na parametre

Lema.

Neka je A matrica susjedstva grafa G. Element na mjestu (i,j) potencije A^k jednak je broju šetnji duljine k od i-tog do j-tog vrha u grafu G.

$$A^2 = \Bbbk I + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Neka je $x \neq \Bbbk$ neka druga svojstvena vrijednost i e svojstveni vektor...

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - \Bbbk = 0$$

Zadatak 3.10.

Neka je $G \neq K_n$ povezan $\Bbbk$-regularan graf. Dokažite da je G jako regularan ako i samo ako ima točno tri svojstvene vrijednosti (od kojih je jedna $\Bbbk$).

Nužni uvjeti na parametre

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_j(i) E_i, \qquad j = 0, \dots, d$$

Nužni uvjeti na parametre

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_j(i) E_i, \qquad j = 0, \ldots, d$$

$$A_0 = E_0 + E_1 + E_2, \quad A_1 = \mathscr{k} E_0 + r E_1 + s E_2$$

$$A_2 = (n - 1 - \mathscr{k}) E_0 - (r + 1) E_1 - (s + 1) E_2$$

Nužni uvjeti na parametre

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_j(i) E_i, \qquad j = 0, \ldots, d$$

$$A_0 = E_0 + E_1 + E_2, \quad A_1 = k E_0 + r E_1 + s E_2$$

$$A_2 = (n - 1 - k) E_0 - (r + 1) E_1 - (s + 1) E_2$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k & n-1-k \\ 1 & r & -r-1 \\ 1 & s & -s-1 \end{bmatrix}$$

Nužni uvjeti na parametre

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-k-(n-1)s}{r-s} & \dfrac{k+(n-1)r}{r-s} \\[2ex] 1 & \dfrac{n-k+s}{r-s} & \dfrac{k-n-r}{r-s} \\[2ex] 1 & \dfrac{s-k}{r-s} & \dfrac{k-r}{r-s} \end{bmatrix}$$

Nužni uvjeti na parametre

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-k-(n-1)s}{r-s} & \dfrac{k+(n-1)r}{r-s} \\ 1 & \dfrac{n-k+s}{r-s} & \dfrac{k-n-r}{r-s} \\ 1 & \dfrac{s-k}{r-s} & \dfrac{k-r}{r-s} \end{bmatrix}$$

Kratnosti:

$$m_0 = 1, \qquad m_1 = \frac{-k-(n-1)s}{r-s} = f, \qquad m_2 = \frac{k+(n-1)r}{r-s} = g$$

Nužni uvjeti na parametre

$$f = \frac{1}{2}\left(n-1+\frac{(n-1)(\mu-\lambda)-2k}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right)$$

$$g = \frac{1}{2}\left(n-1-\frac{(n-1)(\mu-\lambda)-2k}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right)$$

Nužni uvjeti na parametre

$$f = \frac{1}{2}\left(n - 1 + \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}}\right)$$

$$g = \frac{1}{2}\left(n - 1 - \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}}\right)$$

Propozicija.

Ako postoji jako regularan graf $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, onda su izrazi za f i g prirodni brojevi.

Nužni uvjeti na parametre

$$f = \frac{1}{2}\left(n - 1 + \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}}\right)$$

$$g = \frac{1}{2}\left(n - 1 - \frac{(n-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}}\right)$$

Propozicija.

Ako postoji jako regularan graf $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, onda su izrazi za f i g prirodni brojevi.

Brouwerova tablica:
https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab1-50.html

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
1	5	2	0	1	$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$		2	2	1	Paley(5)
2	9	4	1	2	1	-2	4	4	1	Paley(9)
3	10	3	0	1	1	-2	5	4	1	Petersen= $T(5)^c$
4	13	6	2	3	$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$		6	6	1	Paley(13)
5	15	6	1	3	1	-3	9	5	1	$T(6)^c$
6	16	5	0	2	1	-3	10	5	1	
7	16	6	2	2	2	-2	6	9	2	4×4, Shrikhande
8	17	8	3	4	$\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$		8	8	1	Paley(17)
9	21	10	3	6	1	-4	14	6	1	$T(7)^c$
10	21	10	4	5	$\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$		10	10	0	

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
11	25	8	3	2	3	-2	8	16	1	5×5
12	25	12	5	6	2	-3	12	12	15	Paley(25)
13	26	10	3	4	2	-3	13	12	10	
14	27	10	1	5	1	-5	20	6	1	
15	28	9	0	4	1	-5	21	6	0	
16	28	12	6	4	4	-2	7	20	4	$T(8)$, Chang
17	29	14	6	7	$\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$		14	14	41	Paley(29)
18	33	16	7	8	$\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$		16	16	0	
19	35	16	6	8	2	-4	20	14	3854	
20	36	10	4	2	4	-2	10	25	1	6×6

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
21	36	14	4	6	2	-4	21	14	180	
22	36	14	7	4	5	-2	8	27	1	$T(9)$
23	36	15	6	6	3	-3	15	20	32548	
24	37	18	8	9	$\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$		18	18	$\geq$6802	Paley(37)
25	40	12	2	4	2	-4	24	15	28	
26	41	20	9	10	$\frac{-1\pm\sqrt{41}}{2}$		20	20	$\geq$18439	Paley(41)
27	45	12	3	3	3	-3	20	24	78	
28	45	16	8	4	6	-2	9	35	1	$T(10)$
29	45	22	10	11	$\frac{-1\pm 3\sqrt{5}}{2}$		22	22	$+$	
30	49	12	5	2	5	-2	12	36	1	7×7

Tablica dopustivih parametara

Rbr	n	k	λ	μ	r	s	f	g	Broj	Napomena
31	49	16	3	6	2	-5	32	16	0	
32	49	18	7	6	4	-3	18	30	$\geq$727	
33	49	24	11	12	3	-4	24	24	$+$	Paley(49)
34	50	7	0	1	2	-3	28	21	1	
35	50	21	4	12	1	-9	42	7	0	
36	50	21	8	9	3	-4	25	24	$+$	