Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

29.1.2024.

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

Schurove idempotente

- $\{A_0, \dots, A_d\}$
- $A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $A_0 = I$
- $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$
- $A_i \cdot A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$

Primitivne idempotente

- $\{E_0, \dots, E_d\}$
- $E_i E_j = \begin{cases} E_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $E_0 = \frac{1}{n} J$
- $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$
- $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

Stupnjevi

- $n_i = p^0_{ii'} = \frac{1}{n}\,\mathrm{sum}\, A_i$
- $n_0 = 1$
- $n_0 + \ldots + n_d = n$
- $n_i = n_{i'}$

Kratnosti

- $m_i = q^0_{i\hat{i}} = \mathrm{tr}\, E_i$
- $m_0 = 1$
- $m_0 + \ldots + m_d = n$
- $m_i = m_{\hat{i}}$

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

Stupnjevi

- $n_i = p^0_{ii'} = \frac{1}{n} \operatorname{sum} A_i$
- $n_0 = 1$
- $n_0 + \ldots + n_d = n$
- $n_i = n_{i'}$
- $p^k_{ij} = \dfrac{1}{n\, n_k} \operatorname{tr}(A_i A_j A_k^t)$

Kratnosti

- $m_i = q^0_{i\,\hat{i}} = \operatorname{tr} E_i$
- $m_0 = 1$
- $m_0 + \ldots + m_d = n$
- $m_i = m_{\hat{i}}$
- $q^k_{ij} = \dfrac{n}{m_k} \operatorname{tr}((E_i \circ E_j) E_k)$

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

Presječni brojevi

- $p_{i0}^{k} = \delta_{ik}$
- $p_{0j}^{k} = \delta_{jk}$
- $p_{ij}^{0} = n_i \delta_{ij'}$
- $p_{ij}^{k} = p_{j'i'}^{k'}$
- $\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^{k} = n_i$
- $n_k p_{ij}^{k} = n_j p_{i'k}^{j} = n_i p_{kj'}^{i}$
- $\sum_{a=0}^{d} p_{ij}^{a} p_{ka}^{b} = \sum_{a=0}^{d} p_{ki}^{a} p_{aj}^{b}$

Kreinovi parametri

- $q_{i0}^{k} = \delta_{ik}$
- $q_{0j}^{k} = \delta_{jk}$
- $q_{ij}^{0} = m_i \delta_{i\hat{j}}$
- $q_{ij}^{k} = q_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}}$
- $\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^{k} = m_i$
- $m_k q_{ij}^{k} = m_j q_{\hat{i}k}^{j} = m_i q_{k\hat{j}}^{i}$
- $\sum_{a=0}^{d} q_{ij}^{a} q_{ka}^{b} = \sum_{a=0}^{d} q_{ki}^{a} q_{aj}^{b}$

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

Svojstvene vrijednosti

- $A_j = \sum_{i=0}^{d} P_j(i) E_i$
- $A_i E_j = P_i(j) E_j$
- $P = [P_j(i)]$
- $P_0(i) = 1, \quad P_j(0) = n_j$
- $|P_j(i)| \leq n_j$
- $P_{j'}(i) = \overline{P_j(i)}$

Dualne svojstvene vrijednosti

- $E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} Q_j(i) A_i$
- $E_i \circ A_j = \frac{1}{n} Q_i(j) A_j$
- $Q = [Q_j(i)]$
- $Q_0(i) = 1, \quad Q_j(0) = m_j$
- $|Q_j(i)| \leq m_j$
- $Q_{\hat{j}}(i) = \overline{Q_j(i)}$

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

Svojstvene vrijednosti

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \frac{1}{n_k} P_k(i)\overline{P_k(j)} = \frac{n}{m_i}\delta_{ij}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} m_k P_i(k)\overline{P_j(k)} = n\, n_i \delta_{ij}$
- $\displaystyle P_i(\ell)P_j(\ell) = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k P_k(\ell)$
- $\displaystyle P_i(j)Q_j(\ell) = \sum_{k=0}^{d} p_{ik}^{\ell} Q_j(k)$
- $p_{ij}^k = \frac{1}{nn_k} \sum_{\ell=0}^{d} m_\ell P_i(\ell)P_j(\ell)\overline{P_k(\ell)}$

Dualne svojstvene vrijednosti

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \frac{1}{m_k} Q_k(i)\overline{Q_k(j)} = \frac{n}{n_i}\delta_{ij}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} n_k Q_i(k)\overline{Q_j(k)} = n\, m_i \delta_{ij}$
- $\displaystyle Q_i(\ell)Q_j(\ell) = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k Q_k(\ell)$
- $\displaystyle Q_i(j)P_j(\ell) = \sum_{k=0}^{d} q_{ik}^{\ell} P_j(k)$
- $q_{ij}^k = \frac{1}{nm_k} \sum_{\ell=0}^{d} n_\ell Q_i(\ell)Q_j(\ell)\overline{Q_k(\ell)}$

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

Skalarni produkt: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*) = \mathrm{sum}(A \circ \overline{B})$

- $\langle A_i, A_j\rangle = \delta_{ij} n n_i$
- $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij} m_i$

$$\langle A_i, E_j\rangle = m_j P_i(j) = n_i \overline{Q_j(i)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{Q_j(i)}{m_j} = \frac{\overline{P_i(j)}}{n_i}$$

- $P = M^{-1} Q^* N$
- $Q = N^{-1} P^* M$
- $p_{ij}^k = \frac{n_i n_j}{n} \sum_{\ell=0}^{d} \frac{1}{m_\ell^2} Q_\ell(i) Q_\ell(j) \overline{Q_\ell(k)}$
- $q_{ij}^k = \frac{m_i m_j}{n} \sum_{\ell=0}^{d} \frac{1}{n_\ell^2} P_\ell(i) P_\ell(j) \overline{P_\ell(k)}$

“Frame quotient”

$$\det(PP^*) = n^{d+1}\frac{\det N}{\det M} = n^{d+1}\prod_{i=0}^{d}\frac{n_i}{m_i}$$

“Frame quotient”

$$\det(PP^*) = n^{d+1}\frac{\det N}{\det M} = n^{d+1}\prod_{i=0}^{d}\frac{n_i}{m_i} = \prod_{i=0}^{d}\frac{\langle A_i, A_i\rangle}{\langle E_i, E_i\rangle}$$

"Frame quotient"

$$\det(PP^*) = n^{d+1}\frac{\det N}{\det M} = n^{d+1}\prod_{i=0}^{d}\frac{n_i}{m_i} = \prod_{i=0}^{d}\frac{\langle A_i, A_i\rangle}{\langle E_i, E_i\rangle}$$

J. S. Frame, *The double cosets of a finite group*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 458–467.

"Frame quotient"

$$\det(PP^*) = n^{d+1}\frac{\det N}{\det M} = n^{d+1}\prod_{i=0}^{d}\frac{n_i}{m_i} = \prod_{i=0}^{d}\frac{\langle A_i, A_i\rangle}{\langle E_i, E_i\rangle}$$

J. S. Frame, *The double cosets of a finite group*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 458–467.

Teorem.

Frameov kvocijent je prirodan broj.

“Frame quotient”

$$\det(PP^*) = n^{d+1}\frac{\det N}{\det M} = n^{d+1}\prod_{i=0}^{d}\frac{n_i}{m_i} = \prod_{i=0}^{d}\frac{\langle A_i, A_i\rangle}{\langle E_i, E_i\rangle}$$

J. S. Frame, *The double cosets of a finite group*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 458–467.

Teorem.

Frameov kvocijent je prirodan broj.

Lema.

Ako je algebarski cijeli broj racionalan, onda je cijeli broj.

Zadatak. Dokažite da je skup algebarskih cijelih brojeva zatvoren na zbrajanje, množenje i konjugiranje.

“Frame quotient”

$$\det(PP^*) = n^{d+1}\frac{\det N}{\det M} = n^{d+1}\prod_{i=0}^{d}\frac{n_i}{m_i} = \prod_{i=0}^{d}\frac{\langle A_i, A_i\rangle}{\langle E_i, E_i\rangle}$$

J. S. Frame, *The double cosets of a finite group*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 458–467.

Teorem.

Frameov kvocijent je prirodan broj.

Lema.

Ako je algebarski cijeli broj racionalan, onda je cijeli broj.

Zadatak. Dokažite da je skup algebarskih cijelih brojeva zatvoren na zbrajanje, množenje i konjugiranje.

Propozicija.

Ako su sve svojstvene vrijednosti komutativne koherentne konfiguracije racionalni brojevi, onda je Frameov kvocijent kvadrat prirodnog broja.

“Frame quotient”

$$\det(PP^*) \;=\; n^{d+1}\frac{\det N}{\det M} \;=\; n^{d+1}\prod_{i=0}^{d}\frac{n_i}{m_i} \;=\; \prod_{i=0}^{d}\frac{\langle A_i, A_i\rangle}{\langle E_i, E_i\rangle}$$

J. S. Frame, *The double cosets of a finite group*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 458–467.

Teorem.

Frameov kvocijent je prirodan broj. Pitanje: kombinatorna interpretacija?

Lema.

Ako je algebarski cijeli broj racionalan, onda je cijeli broj.

Zadatak. Dokažite da je skup algebarskih cijelih brojeva zatvoren na zbrajanje, množenje i konjugiranje.

Propozicija.

Ako su sve svojstvene vrijednosti komutativne koherentne konfiguracije racionalni brojevi, onda je Frameov kvocijent kvadrat prirodnog broja.

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako vrijedi $A = A^*$.

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako vrijedi $A = A^*$.

Primjer: primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ su hermitske matrice.

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako vrijedi $A = A^*$.

Primjer: primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ su hermitske matrice.

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ hermitske matrice.

- Je li $A + B$ hermitska?

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako vrijedi $A = A^*$.

Primjer: primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ su hermitske matrice.

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ hermitske matrice.

- Je li $A + B$ hermitska?
- Je li AB hermitska?

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako vrijedi $A = A^*$.

Primjer: primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ su hermitske matrice.

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ hermitske matrice.

- Je li $A + B$ hermitska?
- Je li AB hermitska?
- Je li $A \circ B$ hermitska?

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako vrijedi $A = A^*$.

Primjer: primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ su hermitske matrice.

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ hermitske matrice.

- Je li $A + B$ hermitska?
- Je li AB hermitska?
- Je li $A \circ B$ hermitska?
- Može li se svaka hermitska matrica dijagonalizirati?

Kreinov uvjet

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je hermitska ako vrijedi $A = A^*$.

Primjer: primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ su hermitske matrice.

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ hermitske matrice.

- Je li $A + B$ hermitska?
- Je li AB hermitska?
- Je li $A \circ B$ hermitska?
- Može li se svaka hermitska matrica dijagonalizirati?

Teorem.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ se može dijagonalizirati ako i samo ako je normalna ($AA^* = A^*A$).

Kreinov uvjet

Zadatak. Dokažite da su svojstvene vrijednosti hermitske matrice realni brojevi.

Kreinov uvjet

Zadatak. Dokažite da su svojstvene vrijednosti hermitske matrice realni brojevi.

Zadatak. Dokažite da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima hermitske matrice ortogonalni.

Kreinov uvjet

Zadatak. Dokažite da su svojstvene vrijednosti hermitske matrice realni brojevi.

Zadatak. Dokažite da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima hermitske matrice ortogonalni.

Zbog svojstva $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, za hermitsku matricu A i bilo koji vektor $x \in \mathbb{C}^n$ skalarni produkt $\langle Ax, x\rangle$ je realan broj. Za A kažemo da je pozitivno semidefinitna ako je hermitska i vrijedi $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.

Zadatak. Dokažite da su svojstvene vrijednosti hermitske matrice realni brojevi.

Zadatak. Dokažite da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima hermitske matrice ortogonalni.

Zbog svojstva $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, za hermitsku matricu A i bilo koji vektor $x \in \mathbb{C}^n$ skalarni produkt $\langle Ax, x \rangle$ je realan broj. Za A kažemo da je pozitivno semidefinitna ako je hermitska i vrijedi $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.

Zadatak. Dokažite da je hermitska matrica A pozitivno semidefinitna ako i samo ako su joj sve svojstvene vrijednosti nenegativne.

Kreinov uvjet

Zadatak. Dokažite da su svojstvene vrijednosti hermitske matrice realni brojevi.

Zadatak. Dokažite da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima hermitske matrice ortogonalni.

Zbog svojstva $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, za hermitsku matricu A i bilo koji vektor $x \in \mathbb{C}^n$ skalarni produkt $\langle Ax, x \rangle$ je realan broj. Za A kažemo da je pozitivno semidefinitna ako je hermitska i vrijedi $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.

Zadatak. Dokažite da je hermitska matrica A pozitivno semidefinitna ako i samo ako su joj sve svojstvene vrijednosti nenegativne.

Primjer: primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ su pozitivno semidefinitne.

Kreinov uvjet

Glavna podmatrica od A je podmatrica dobivena izbacivanjem nekih redaka i odgovarajućih stupaca (s istim indeksima).

Kreinov uvjet

Glavna podmatrica od A je podmatrica dobivena izbacivanjem nekih redaka i odgovarajućih stupaca (s istim indeksima).

Zadatak. Ako je A hermitska matrica, dokažite da je svaka njezina glavna podmatrica hermitska.

Kreinov uvjet

Glavna podmatrica od A je podmatrica dobivena izbacivanjem nekih redaka i odgovarajućih stupaca (s istim indeksima).

Zadatak. Ako je A hermitska matrica, dokažite da je svaka njezina glavna podmatrica hermitska.

Zadatak. Ako je A pozitivno semidefinitna, dokažite da je svaka njezina glavna podmatrica pozitivno semidefinitna.

Kreinov uvjet

Glavna podmatrica od A je podmatrica dobivena izbacivanjem nekih redaka i odgovarajućih stupaca (s istim indeksima).

Zadatak. Ako je A hermitska matrica, dokažite da je svaka njezina glavna podmatrica hermitska.

Zadatak. Ako je A pozitivno semidefinitna, dokažite da je svaka njezina glavna podmatrica pozitivno semidefinitna.

Kroneckerov produkt matrice A tipa $m \times n$ i matrice B tipa $p \times q$ je matrica

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

tipa $mp \times nq$.

Kreinov uvjet

Svojstva Kroneckerovog produkta:

$$(\alpha A + \beta B) \otimes C = \alpha(A \otimes C) + \beta(B \otimes C)$$

$$A \otimes (\beta B + \gamma C) = \beta(A \otimes B) + \gamma(A \otimes C)$$

Kreinov uvjet

Svojstva Kroneckerovog produkta:

$$(\alpha A + \beta B) \otimes C = \alpha(A \otimes C) + \beta(B \otimes C)$$

$$A \otimes (\beta B + \gamma C) = \beta(A \otimes B) + \gamma(A \otimes C)$$

$$\overline{A \otimes B} = \overline{A} \otimes \overline{B}, \quad (A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t, \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$$

Kreinov uvjet

Svojstva Kroneckerovog produkta:

$$(\alpha A + \beta B) \otimes C = \alpha(A \otimes C) + \beta(B \otimes C)$$

$$A \otimes (\beta B + \gamma C) = \beta(A \otimes B) + \gamma(A \otimes C)$$

$$\overline{A \otimes B} = \overline{A} \otimes \overline{B}, \quad (A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t, \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$$

Propozicija.

Ako su definirani produkti AC i BD, onda vrijedi

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

Kreinov uvjet

Svojstva Kroneckerovog produkta:

$$(\alpha A + \beta B) \otimes C = \alpha(A \otimes C) + \beta(B \otimes C)$$

$$A \otimes (\beta B + \gamma C) = \beta(A \otimes B) + \gamma(A \otimes C)$$

$$\overline{A \otimes B} = \overline{A} \otimes \overline{B}, \quad (A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t, \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$$

Propozicija.

Ako su definirani produkti AC i BD, onda vrijedi

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

Ako su definirani Schurovi produkti $A \circ C$ i $B \circ D$, onda vrijedi

$$(A \otimes B) \circ (C \otimes D) = (A \circ C) \otimes (B \circ D)$$

Kreinov uvjet

Propozicija.

Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostima $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a $B \in M_m(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostime $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$. Tada $A \otimes B$ ima svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i \mu_j \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$.

Kreinov uvjet

Propozicija.

Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostima $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a $B \in M_m(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostime $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$. Tada $A \otimes B$ ima svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i \mu_j \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$.

Korolar.

Ako su A i B pozitivno semidefinitne, onda je $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna.

Kreinov uvjet

Propozicija.

Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostima $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a $B \in M_m(\mathbb{C})$ matrica sa svojstvenim vrijednostime $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$. Tada $A \otimes B$ ima svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i \mu_j \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$.

Korolar.

Ako su A i B pozitivno semidefinitne, onda je $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna.

Korolar.

Za $A \in M_n(\mathbb{C})$ i $B \in M_m(\mathbb{C})$ vrijedi

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B), \qquad \det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$$

Kreinov uvjet

Lema.

Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitivno semidefinitne matrice, onda je njihov Schurov produkt $A \circ B$ pozitivno semidefinitna matrica.

Kreinov uvjet

Lema.

Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitivno semidefinitne matrice, onda je njihov Schurov produkt $A \circ B$ pozitivno semidefinitna matrica.

Primjer: Schurovi produkti primitivih idempotenta $E_i \circ E_j$ su pozitivno semidefinitne matrice.

Kreinov uvjet

Lema.

Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitivno semidefinitne matrice, onda je njihov Schurov produkt $A \circ B$ pozitivno semidefinitna matrica.

Primjer: Schurovi produkti primitivih idempotenta $E_i \circ E_j$ su pozitivno semidefinitne matrice.

Teorem (Kreinov uvjet).

Kreinovi parametri su nenegativni: $q_{ij}^k \geq 0$.

Presječne matrice

$$p_{ij}^k = \frac{1}{nn_k} \sum_{\ell=0}^{d} m_\ell P_i(\ell) P_j(\ell) \overline{P_k(\ell)}$$

$$q_{ij}^k = \frac{m_i m_j}{n} \sum_{\ell=0}^{d} \frac{1}{n_\ell^2} P_\ell(i) P_\ell(j) \overline{P_\ell(k)}$$

Presječne matrice

$$p_{ij}^k = \frac{1}{nn_k} \sum_{\ell=0}^{d} m_\ell P_i(\ell) P_j(\ell) \overline{P_k(\ell)}$$

$$q_{ij}^k = \frac{m_i m_j}{n} \sum_{\ell=0}^{d} \frac{1}{n_\ell^2} P_\ell(i) P_\ell(j) \overline{P_\ell(k)}$$

Pitanje: ako znamo p_{ij}^k (ili q_{ij}^k), jesu li time jednoznačno određeni $P_j(i)$?

Presječne matrice

$$p_{ij}^k = \frac{1}{nn_k} \sum_{\ell=0}^{d} m_\ell P_i(\ell) P_j(\ell) \overline{P_k(\ell)}$$

$$q_{ij}^k = \frac{m_i m_j}{n} \sum_{\ell=0}^{d} \frac{1}{n_\ell^2} P_\ell(i) P_\ell(j) \overline{P_\ell(k)}$$

Pitanje: ako znamo p_{ij}^k (ili q_{ij}^k), jesu li time jednoznačno određeni $P_j(i)$?

Primjer 1.37. Koherentna konfiguracija dobivena Schurovom konstrukcijom od $G = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ ima presječne brojeve

$$[p_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Presječne matrice

Primjer 1.39. Koherentna konfiguracija dobivena Schurovom konstrukcijom od $G = \langle (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6), (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4) \rangle$ ima presječne brojeve

$$[p_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Presječne matrice

$$[p_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[p_{ij}^4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Presječne matrice

Neka je $B_i \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j,k) jednak p_{ij}^k. Matrice $B_0, \ldots, B_d$ zovemo presječnim matricama komutativne koherentne konfiguracije.

Presječne matrice

Neka je $B_i \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j, k) jednak p_{ij}^k. Matrice $B_0, \dots, B_d$ zovemo presječnim matricama komutativne koherentne konfiguracije.

Primjer 1.37. Koherentna konfiguracija dobivena Schurovom konstrukcijom od $G = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ ima presječne matrice

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Presječne matrice

Neka je $B_i \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j, k) jednak p_{ij}^k. Matrice $B_0, \ldots, B_d$ zovemo presječnim matricama komutativne koherentne konfiguracije.

Primjer 1.37. Koherentna konfiguracija dobivena Schurovom konstrukcijom od $G = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ ima presječne matrice

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[p_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2.22. Heawoodov graf ima Kreinove parametre

$$[q_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad [q_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[q_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{10+\sqrt{2}}{4} & \frac{10-\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1 & \frac{10-\sqrt{2}}{4} & \frac{10+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \qquad [q_{ij}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10-\sqrt{2}}{4} & \frac{10+\sqrt{2}}{4} \\ 1 & 0 & \frac{10+\sqrt{2}}{4} & \frac{10-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Presječne matrice

Neka je $B_i^\circ \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j, k) jednak q_{ij}^k. Matrice $B_0^\circ, \ldots, B_d^\circ$ zovemo dualnim presječnim matricama komutativne koherentne konfiguracije.

Neka je $B_i^\circ \in M_{d+1}(\mathbb{C})$ matrica kojoj je unos na mjestu (j,k) jednak q_{ij}^k. Matrice $B_0^\circ, \ldots, B_d^\circ$ zovemo dualnim presječnim matricama komutativne koherentne konfiguracije.

Zadatak 2.22. Heawoodov graf ima dualne presječne matrice

$$M_0^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_1^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & \frac{10+\sqrt{2}}{4} & \frac{10-\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 6 & \frac{10-\sqrt{2}}{4} & \frac{10+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \qquad M_3^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & \frac{10-\sqrt{2}}{4} & \frac{10+\sqrt{2}}{4} \\ 6 & 0 & \frac{10+\sqrt{2}}{4} & \frac{10-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Presječne matrice

Propozicija.

Presječne matrice zadovoljavaju:

1. $B_0 = I$
2. nulti redak od B_i je vektor e_i kanonske baze od $\mathbb{C}^{d+1}$, koji na i-toj koordinati ima 1, a na ostalim koordinatama 0
3. matrice $B_0, \dots, B_d$ su linearno nezavisne
4. $B_i B_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k B_k$
5. $B_i B_j = B_j B_i$
6. $(B_i)^t = N^{-1} B_{i'} N$, gdje je $N = \mathrm{diag}(n_0, \dots, n_d)$

Presječne matrice

Propozicija 2.24.

1. $p_{i0}^{k} = \delta_{ik}$
2. $p_{0j}^{k} = \delta_{jk}$
3. $p_{ij}^{0} = n_i \delta_{ij'}$
4. $p_{ij}^{k} = p_{j'i'}^{k'}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^{k} = n_i$
6. $n_k p_{ij}^{k} = n_j p_{i'k}^{j} = n_i p_{kj'}^{i}$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} p_{ij}^{a} p_{ka}^{b} = \sum_{a=0}^{d} p_{ki}^{a} p_{aj}^{b}$

Presječne matrice

Propozicija.

Dualne presječne matrice zadovoljavaju:

1. $B_0^\circ = I$
2. nulti redak od B_i° je vektor e_i kanonske baze od $\mathbb{C}^{d+1}$, koji na i-toj koordinati ima 1, a na ostalim koordinatama 0
3. matrice $B_0^\circ, \dots, B_d^\circ$ su linearno nezavisne
4. $B_i^\circ B_j^\circ = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k B_k^\circ$
5. $B_i^\circ B_j^\circ = B_j^\circ B_i^\circ$
6. $(B_i^\circ)^t = M^{-1} B_{\hat{i}}^\circ M$, gdje je $M = \operatorname{diag}(m_0, \dots, m_d)$

Presječne matrice

Propozicija 2.25.

1. $q_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $q_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $q_{ij}^0 = m_i \delta_{i\hat{j}}$
4. $q_{ij}^k = q_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}}$
5. $\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^k = m_i$
6. $m_k q_{ij}^k = m_j q_{\hat{i}k}^j = m_i q_{k\hat{j}}^i$
7. $\sum_{a=0}^{d} q_{ij}^a q_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} q_{ki}^a q_{aj}^b$

Presječne matrice

$\mathscr{B} = \langle B_0, \ldots, B_d \rangle \rightsquigarrow$ presječna algebra

$\mathscr{B}^\circ = \langle B_0^\circ, \ldots, B_d^\circ \rangle \rightsquigarrow$ dualna presječna algebra

Presječne matrice

$\mathscr{B} = \langle B_0, \ldots, B_d \rangle \rightsquigarrow$ presječna algebra

$\mathscr{B}^\circ = \langle B_0^\circ, \ldots, B_d^\circ \rangle \rightsquigarrow$ dualna presječna algebra

Teorem.

Presječna algebra $\mathscr{B}$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \cdot)$ s operacijom matričnog množenja. Dualna presječna algebra $\mathscr{B}^\circ$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \circ)$ s operacijom Schurovog množenja.

Presječne matrice

$\mathscr{B} = \langle B_0, \ldots, B_d \rangle \rightsquigarrow$ presječna algebra

$\mathscr{B}^\circ = \langle B_0^\circ, \ldots, B_d^\circ \rangle \rightsquigarrow$ dualna presječna algebra

Teorem.

Presječna algebra $\mathscr{B}$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \cdot)$ s operacijom matričnog množenja. Dualna presječna algebra $\mathscr{B}^\circ$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \circ)$ s operacijom Schurovog množenja.

Pitanje: interpretacija $Q_j(i)$ kao svojstvenih vrijednosti Schurovih ili primitivnih idempotenta?

Presječne matrice

$\mathscr{B} = \langle B_0, \ldots, B_d \rangle \rightsquigarrow$ presječna algebra

$\mathscr{B}^\circ = \langle B_0^\circ, \ldots, B_d^\circ \rangle \rightsquigarrow$ dualna presječna algebra

Teorem.

Presječna algebra $\mathscr{B}$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \cdot)$ s operacijom matričnog množenja. Dualna presječna algebra $\mathscr{B}^\circ$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \circ)$ s operacijom Schurovog množenja.

Teorem.

- $P(B_i)^t P^{-1} = \operatorname{diag}(P_i(0), \ldots, P_i(d))$
- $Q(B_i^\circ)^t Q^{-1} = \operatorname{diag}(Q_i(0), \ldots, Q_i(d))$

Presječne matrice

$\mathscr{B} = \langle B_0, \dots, B_d \rangle \rightsquigarrow$ presječna algebra

$\mathscr{B}^\circ = \langle B_0^\circ, \dots, B_d^\circ \rangle \rightsquigarrow$ dualna presječna algebra

Teorem.

Presječna algebra $\mathscr{B}$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \cdot)$ s operacijom matričnog množenja. Dualna presječna algebra $\mathscr{B}^\circ$ izomorfna je Bose-Mesnerovoj algebri $(\mathscr{A}, \circ)$ s operacijom Schurovog množenja.

Teorem.

- $P(B_i)^t P^{-1} = \mathrm{diag}(P_i(0), \dots, P_i(d))$
- $Q(B_i^\circ)^t Q^{-1} = \mathrm{diag}(Q_i(0), \dots, Q_i(d))$

Korolar.

Spektar presječne matrice B_i je $\{P_i(0), \dots, P_i(d)\}$ i podudara se sa spektrom Schurove idempotente A_i. Spektar dualne presječne matrice B_i° je $\{Q_i(0), \dots, Q_i(d)\}$.