Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

15.1.2024.

Prijedlozi tema seminara

Prijedlozi tema seminara

Erdős-Ko-Radov teorem

Teorem.

Ako je $n \geq 2k$, onda za svaku presijecajuću familiju $\mathcal{F}$ k-članih podskupova n-članog skupa vrijedi $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. Ako je $n > 2k$, jednakost se dostiže samo ako je $\mathcal{F}$ familija svih k-članih podskupova kroz danu točku.

Prijedlozi tema seminara

Erdős-Ko-Radov teorem

Teorem.

Ako je $n \geq 2k$, onda za svaku presijecajuću familiju $\mathcal{F}$ k-članih podskupova n-članog skupa vrijedi $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. Ako je $n > 2k$, jednakost se dostiže samo ako je $\mathcal{F}$ familija svih k-članih podskupova kroz danu točku.

C. Godsil, K. Meagher, *Erdős-Ko-Rado theorems: algebraic approaches*, Cambridge University Press, 2016.

Ponavljanje

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$.

Ako je $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ kažemo da je koherentna konfiguracija komutativna.
Ako je $i = i'$ kažemo da je simetrična, odnosno asocijacijska shema.

Ponavljanje

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$.

Ako je $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ kažemo da je koherentna konfiguracija komutativna.
Ako je $i = i'$ kažemo da je simetrična, odnosno asocijacijska shema.

Definicija.

Za potprostor $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično množenje i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathcal{A}$ imaju konstantne dijagonale. Ako matrice iz $\mathcal{A}$ komutiraju, kažemo da je $\mathcal{A}$ Bose-Mesnerova algebra.

Ponavljanje

Lema.

Neka je $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na Schurovo množenje. Onda postoji baza $\{A_0, \ldots, A_d\}$ od $\mathcal{A}$ takva da vrijedi $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica.

Ponavljanje

Lema.

Neka je $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na Schurovo množenje. Onda postoji baza $\{A_0, \ldots, A_d\}$ od $\mathcal{A}$ takva da vrijedi $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica.

Teorem.

Svaka koherentna algebra $\mathcal{A}$ ima jedinstvenu bazu $\{A_0, \ldots, A_d\}$ sastavljenu od Schurovih idempotenta, tj. 0-1 matrica koje zadovoljavaju $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Ta baza čini koherentnu konfiguraciju:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje presječni brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$.

Ponavljanje

Lema.

Neka je $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathcal{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathcal{A}$ takva da vrijedi $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice.

Ponavljanje

Lema.

Neka je $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathcal{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathcal{A}$ takva da vrijedi $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice.

Teorem.

Svaka Bose-Mesnerova algebra $\mathcal{A}$ ima jedinstvenu bazu $\{E_0, \ldots, E_d\}$ sastavljenu od primitivnih idempotenta, tj. hermitskih matrica koje zadovoljavaju $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Ta baza ima sljedeća svojstva:

1. $E_0 = \frac{1}{n} J$,
2. $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$,
3. za svaki indeks i postoji indeks $\hat{i}$ takav da je $E_i^t = E_{\hat{i}} = \overline{E}_i$,
4. postoje Kreinovi parametri $q_{ij}^k \in \mathbb{C}$ takvi da je $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$.

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

- $\{A_0, \dots, A_d\}$ je baza Schurovih idempotenta
- $A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $A_0 = I$
- $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$
- $A_i \cdot A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$

- $\{E_0, \dots, E_d\}$ je baza primitivnih idempotenta
- $E_i E_j = \begin{cases} E_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $E_0 = \frac{1}{n} J$
- $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$
- $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$

Domaća zadaća

Zadatak 2.15.

Iz svojstva Schurovih idempotenta $A_i^t = A_{i'}$ dobivamo involuciju $i \mapsto i'$ (permutaciju stupnja 2) na skupu svih indeksa $\{0, \ldots, d\}$. Dualno, iz svojstva primitivnih idempotenta $E_i^t = E_{\hat{i}}$ dobivamo involuciju $i \mapsto \hat{i}$. Dokažite da možemo numerirati Schurove idempotente $A_0, \ldots, A_d$ i primitivne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ tako da se te dvije involucije podudaraju, tj. da obje involucije imaju isti broj fiksnih točaka i transpozicija.

Stupnjevi

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

Stupnjevi

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi: $n_i = p_{ii'}^0 = |N_i(x)|$

Stupnjevi

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi: $n_i = p_{ii'}^0 = |N_i(x)|$ $\qquad A_i\mathbf{1} = n_i\mathbf{1}$

Stupnjevi

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi: $n_i = p_{ii'}^0 = |N_i(x)|$ $\qquad A_i\mathbf{1} = n_i\mathbf{1}$

Propozicija.

1. $n_0 = 1$
2. $n_0 + \ldots + n_d = n$
3. $n_i = n_{i'}$

Domaća zadaća

Zadatak 2.17.

Za koherentnu konfiguraciju kažemo da je tanka (eng. thin) ako su svi stupnjevi jednaki 1. Zbog $n_0 + \ldots + n_d = n$, to je ekvivalentno s $n = d + 1$. Dokažite da sve tanke koherentne konfiguracije nastaju Schurovom konstrukcijom od regularnih permutacijskih grupa, tj. grupa koje djeluju strogo tranzitivno:

$$(\forall x, y \in X)(\exists! g \in G)\ x^g = y$$

Kratnosti

Što je dualni pojam stupnjevima $n_0, \ldots, n_d$?

Kratnosti

Što je dualni pojam stupnjevima $n_0, \ldots, n_d$?

- $n_i = p^0_{i\,i'}$
- $m_i = q^0_{i\,\hat{i}}$

Kratnosti

Što je dualni pojam stupnjevima $n_0, \ldots, n_d$?

- $n_i = p^0_{i\,i'}$
- $m_i = q^0_{i\,\hat{i}}$

Koji je smisao brojeva m_i, koje zovemo kratnostima?

Kratnosti

Što je dualni pojam stupnjevima $n_0, \ldots, n_d$?

- $n_i = p^0_{i\,i'}$
- $m_i = q^0_{i\,\hat{i}}$

Koji je smisao brojeva m_i, koje zovemo kratnostima?

Suma svih elemenata matrice: $\operatorname{sum} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Kratnosti

Što je dualni pojam stupnjevima $n_0, \ldots, n_d$?

- $n_i = p^0_{i\,i'}$
- $m_i = q^0_{i\,\hat{i}}$

Koji je smisao brojeva m_i, koje zovemo kratnostima?

Suma svih elemenata matrice: $\operatorname{sum} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Lema.

$$\operatorname{sum}(A \circ B) = \operatorname{tr}(AB^t) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sum}(A \circ B \circ C) &= \operatorname{tr}((A \circ B)C^t) = \operatorname{tr}((B \circ C)A^t) = \operatorname{tr}((C \circ A)B^t) \\ &= \operatorname{tr}((A^t \circ B^t)C) = \operatorname{tr}((B^t \circ C^t)A) = \operatorname{tr}((C^t \circ A^t)B)\end{aligned} \tag{6}$$

Kratnosti

Što je dualni pojam stupnjevima $n_0, \ldots, n_d$?

- $n_i = p^0_{i\,i'}$
- $m_i = q^0_{i\,\hat{i}}$

Koji je smisao brojeva m_i, koje zovemo kratnostima?

Suma svih elemenata matrice: $\operatorname{sum} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Lema.

$$\operatorname{sum}(A \circ B) = \operatorname{tr}(AB^t) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sum}(A \circ B \circ C) &= \operatorname{tr}((A \circ B)C^t) = \operatorname{tr}((B \circ C)A^t) = \operatorname{tr}((C \circ A)B^t) \\ &= \operatorname{tr}((A^t \circ B^t)C) = \operatorname{tr}((B^t \circ C^t)A) = \operatorname{tr}((C^t \circ A^t)B)\end{aligned} \tag{6}$$

$$m_i = \operatorname{tr} E_i$$

Kratnosti

Propozicija.

1. $m_0 = 1$
2. $m_0 + \ldots + m_d = n$
3. $m_i = m_{\hat{i}}$

Kratnosti

Propozicija.

1. $m_0 = 1$
2. $m_0 + \ldots + m_d = n$
3. $m_i = m_{\hat{i}}$

Lema.

- $p_{ij}^k = \dfrac{1}{n\, n_k} \operatorname{tr}(A_i A_j A_k^t)$ (7)
- $q_{ij}^k = \dfrac{n}{m_k} \operatorname{tr}((E_i \circ E_j) E_k)$ (8)

Kratnosti

Propozicija.

1. $m_0 = 1$
2. $m_0 + \ldots + m_d = n$
3. $m_i = m_{\hat{i}}$

Lema.

- $p_{ij}^k = \dfrac{1}{n\, n_k} \operatorname{tr}(A_i A_j A_k^t)$ (7)
- $q_{ij}^k = \dfrac{n}{m_k} \operatorname{tr}((E_i \circ E_j) E_k)$ (8)

Korolar.

Kreinovi parametri su realni brojevi.

Presječni brojevi

Propozicija.

1. $p_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $p_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij'}$
4. $p_{ij}^k = p_{j'i'}^{k'}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^k = n_i$
6. $n_k p_{ij}^k = n_j p_{i'k}^j = n_i p_{kj'}^i$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} p_{ij}^a p_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} p_{ki}^a p_{aj}^b$

Kreinovi parametri

Propozicija.

1. $q_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $q_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $q_{ij}^0 = m_i \delta_{i\hat{j}}$
4. $q_{ij}^k = q_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}}$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^k = m_i$
6. $m_k q_{ij}^k = m_j q_{\hat{i}k}^j = m_i q_{k\hat{j}}^i$
7. $\displaystyle\sum_{a=0}^{d} q_{ij}^a q_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} q_{ki}^a q_{aj}^b$

Svojstvene vrijednosti

$$m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i$$

Svojstvene vrijednosti

$$m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i$$

Lema.

$V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_d$

Svojstvene vrijednosti

$$m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i$$

Lema.

$V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_d$

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_j(i) E_i, \;\; j = 0, \ldots, d$$

Svojstvene vrijednosti

$$m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i$$

Lema.

$V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_d$

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_j(i) E_i, \;\; j = 0, \ldots, d$$

$$E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} Q_j(i) A_i, \;\; j = 0, \ldots, d$$

Svojstvene vrijednosti

$$m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i$$

Lema.

$V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_d$

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_j(i) E_i, \;\; j = 0, \ldots, d$$

$$E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} Q_j(i) A_i, \;\; j = 0, \ldots, d$$

$$P = [P_j(i)], \;\; Q = [Q_j(i)] \in M_{d+1}(\mathbb{C})$$

Svojstvene vrijednosti

Propozicija.

$PQ = QP = nI$

Svojstvene vrijednosti

Propozicija.

$PQ = QP = nI$

Skalarni produkt: $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*) = \mathrm{sum}(A \circ \overline{B})$

Svojstvene vrijednosti

Propozicija.

$PQ = QP = nI$

Skalarni produkt: $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*) = \mathrm{sum}(A \circ \overline{B})$

$$\langle A_i, A_j \rangle = \mathrm{sum}(A_i \circ \overline{A_j}) = \mathrm{sum}(A_i \circ A_j) = \mathrm{sum}(\delta_{ij} A_i) = \delta_{ij} n n_i$$

Svojstvene vrijednosti

Propozicija.

$PQ = QP = nI$

Skalarni produkt: $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*) = \operatorname{sum}(A \circ \overline{B})$

$$\langle A_i, A_j \rangle = \operatorname{sum}(A_i \circ \overline{A_j}) = \operatorname{sum}(A_i \circ A_j) = \operatorname{sum}(\delta_{ij} A_i) = \delta_{ij} n n_i$$

$$\langle E_i, E_j \rangle = \operatorname{tr}(E_i E_j^*) = \operatorname{tr}(E_i E_j) = \operatorname{tr}(\delta_{ij} E_i) = \delta_{ij} m_i$$

Svojstvene vrijednosti

Propozicija.

$PQ = QP = nI$

Skalarni produkt: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*) = \mathrm{sum}(A \circ \overline{B})$

$$\langle A_i, A_j\rangle = \mathrm{sum}(A_i \circ \overline{A_j}) = \mathrm{sum}(A_i \circ A_j) = \mathrm{sum}(\delta_{ij} A_i) = \delta_{ij} n n_i$$

$$\langle E_i, E_j\rangle = \mathrm{tr}(E_i E_j^*) = \mathrm{tr}(E_i E_j) = \mathrm{tr}(\delta_{ij} E_i) = \delta_{ij} m_i$$

$$\langle A_i, E_j\rangle = \mathrm{tr}(A_i E_j^*) = \mathrm{tr}(A_i E_j)\, \mathrm{tr}(P_i(j) E_j) = m_j P_i(j)$$

Svojstvene vrijednosti

Propozicija.

$PQ = QP = nI$

Skalarni produkt: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*) = \mathrm{sum}(A \circ \overline{B})$

$$\langle A_i, A_j\rangle = \mathrm{sum}(A_i \circ \overline{A_j}) = \mathrm{sum}(A_i \circ A_j) = \mathrm{sum}(\delta_{ij} A_i) = \delta_{ij} n n_i$$

$$\langle E_i, E_j\rangle = \mathrm{tr}(E_i E_j^*) = \mathrm{tr}(E_i E_j) = \mathrm{tr}(\delta_{ij} E_i) = \delta_{ij} m_i$$

$$\begin{aligned}\langle A_i, E_j\rangle &= \mathrm{tr}(A_i E_j^*) = \mathrm{tr}(A_i E_j)\,\mathrm{tr}(P_i(j) E_j) = m_j P_i(j) \\ &= \mathrm{sum}(A_i \circ \overline{E_i}) = \mathrm{sum}(\overline{A_i \circ E_j}) = \mathrm{sum}(\frac{1}{n}\overline{Q_j(i)} A_i) = n_i \overline{Q_j(i)}\end{aligned}$$

Svojstvene vrijednosti

Propozicija.

$PQ = QP = nI$

Skalarni produkt: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*) = \mathrm{sum}(A \circ \overline{B})$

$$\langle A_i, A_j\rangle = \mathrm{sum}(A_i \circ \overline{A_j}) = \mathrm{sum}(A_i \circ A_j) = \mathrm{sum}(\delta_{ij} A_i) = \delta_{ij} n n_i$$

$$\langle E_i, E_j\rangle = \mathrm{tr}(E_i E_j^*) = \mathrm{tr}(E_i E_j) = \mathrm{tr}(\delta_{ij} E_i) = \delta_{ij} m_i$$

$$\begin{aligned}\langle A_i, E_j\rangle &= \mathrm{tr}(A_i E_j^*) = \mathrm{tr}(A_i E_j)\,\mathrm{tr}(P_i(j) E_j) = m_j P_i(j)\\ &= \mathrm{sum}(A_i \circ \overline{E_i}) = \mathrm{sum}(\overline{A_i \circ E_j}) = \mathrm{sum}(\frac{1}{n}\overline{Q_j(i)} A_i) = n_i \overline{Q_j(i)}\end{aligned}$$

$$m_j P_i(j) = n_i \overline{Q_j(i)}$$

Svojstvene vrijednosti

$$N = \begin{bmatrix} n_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_d \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_d \end{bmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti

$$N = \begin{bmatrix} n_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_d \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_d \end{bmatrix}$$

$$P^t M = N\overline{Q} \quad \iff \quad P^* M = NQ$$

Svojstvene vrijednosti

$$N = \begin{bmatrix} n_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_d \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_d \end{bmatrix}$$

$$P^t M = N\overline{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad P^* M = NQ$$

Propozicija.

$Q = N^{-1} P^* M, \quad P = M^{-1} Q^* N$