Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

18.12.2023.

"Godsilov teorem"

Teorem.

Neka je $(\mathscr{A}, \star)$ komutativna i asocijativna algebra kompleksnih $n \times n$ matrica s jedinicom E. Ako u $\mathscr{A}$ nema nilpotentnih elemenata osim 0 (tj. vrijedi $N^{\star k} = 0 \Rightarrow N = 0$), onda $\mathscr{A}$ ima bazu sastavljenu od međusobno ortogonalnih idempotenta. Takva baza je jedinstvena.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.
https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf

“Godsilov teorem”

Teorem.

Neka je $(\mathscr{A}, \star)$ komutativna i asocijativna algebra kompleksnih $n \times n$ matrica s jedinicom E. Ako u $\mathscr{A}$ nema nilpotentnih elemenata osim 0 (tj. vrijedi $N^{\star k} = 0 \Rightarrow N = 0$), onda $\mathscr{A}$ ima bazu sastavljenu od međusobno ortogonalnih idempotenta. Takva baza je jedinstvena.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.
`https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf`

Matrice koje zadovoljavaju $A \star A = A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A \star B = 0$, kažemo da su ortogonalne.

“Godsilov teorem”

Teorem.

Neka je $(\mathscr{A},\star)$ komutativna i asocijativna algebra kompleksnih $n\times n$ matrica s jedinicom E. Ako u $\mathscr{A}$ nema nilpotentnih elemenata osim 0 (tj. vrijedi $N^{\star k}=0 \Rightarrow N=0$), onda $\mathscr{A}$ ima bazu sastavljenu od međusobno ortogonalnih idempotenta. Takva baza je jedinstvena.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.
`https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf`

Matrice koje zadovoljavaju $A\star A=A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A\star B=0$, kažemo da su ortogonalne.

Na skupu svih idempotenta definiramo parcijalni uređaj: $A\leq B$ ako je $A\star B=A$. Minimalna idempotenta je minimalni element u parcijalno uređenom skupu svih idempotenta različitih od 0.

"Godsilov teorem"

Teorem.

Neka je $(\mathscr{A}, \star)$ komutativna i asocijativna algebra kompleksnih $n \times n$ matrica s jedinicom E. Ako u $\mathscr{A}$ nema nilpotentnih elemenata osim 0 (tj. vrijedi $N^{\star k} = 0 \Rightarrow N = 0$), onda $\mathscr{A}$ ima bazu sastavljenu od međusobno ortogonalnih idempotenta. Takva baza je jedinstvena.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.
`https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf`

Matrice koje zadovoljavaju $A \star A = A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A \star B = 0$, kažemo da su ortogonalne.

Na skupu svih idempotenta definiramo parcijalni uređaj: $A \leq B$ ako je $A \star B = A$. Minimalna idempotenta je minimalni element u parcijalno uređenom skupu svih idempotenta različitih od 0.

Baza iz teorema sastoji se od svih minimalnih idempotenta. Minimalne idempotente su automatski ortogonalne, a iz toga slijedi linearna nezavisnost.

"Godsilov teorem"

Teorem.

Neka je $(\mathscr{A}, \star)$ komutativna i asocijativna algebra kompleksnih $n \times n$ matrica s jedinicom E. Ako u $\mathscr{A}$ nema nilpotentnih elemenata osim 0 (tj. vrijedi $N^{\star k} = 0 \Rightarrow N = 0$), onda $\mathscr{A}$ ima bazu sastavljenu od međusobno ortogonalnih idempotenta. Takva baza je jedinstvena.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.
`https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf`

Matrice koje zadovoljavaju $A \star A = A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A \star B = 0$, kažemo da su ortogonalne.

Na skupu svih idempotenta definiramo parcijalni uređaj: $A \leq B$ ako je $A \star B = A$. Minimalna idempotenta je minimalni element u parcijalno uređenom skupu svih idempotenta različitih od 0.

Baza iz teorema sastoji se od svih minimalnih idempotenta. Minimalne idempotente su automatski ortogonalne, a iz toga slijedi linearna nezavisnost. **Egzistencija minimalnih idempotenta?**

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Schurov produkt $\circ$

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Schurov produkt $\circ$

- idempotente su 0-1 matrice

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Schurov produkt $\circ$

- idempotente su 0-1 matrice
- ortogonalnost ($A \circ B = 0$) znači da nemaju jedinice na istim mjestima

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Schurov produkt $\circ$

- idempotente su 0-1 matrice
- ortogonalnost $(A \circ B = 0)$ znači da nemaju jedinice na istim mjestima
- parcijalni uređaj: $A \leq B \iff A \circ B = A \iff \operatorname{supp} A \subseteq \operatorname{supp} B$

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Schurov produkt $\circ$

- idempotente su 0-1 matrice
- ortogonalnost ($A \circ B = 0$) znači da nemaju jedinice na istim mjestima
- parcijalni uređaj: $A \leq B \iff A \circ B = A \iff \operatorname{supp} A \subseteq \operatorname{supp} B$
- postoje minimalne idempotente

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Schurov produkt $\circ$

- idempotente su 0-1 matrice
- ortogonalnost ($A \circ B = 0$) znači da nemaju jedinice na istim mjestima
- parcijalni uređaj: $A \leq B \iff A \circ B = A \iff \operatorname{supp} A \subseteq \operatorname{supp} B$
- postoje minimalne idempotente
- jedina nilpotentna matrica je nulmatrica

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Schurov produkt $\circ$

- idempotente su 0-1 matrice
- ortogonalnost ($A \circ B = 0$) znači da nemaju jedinice na istim mjestima
- parcijalni uređaj: $A \leq B \iff A \circ B = A \iff \operatorname{supp} A \subseteq \operatorname{supp} B$
- postoje minimalne idempotente
- jedina nilpotentna matrica je nulmatrica

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na Schurovo množenje. Onda postoji baza $\{A_0, \ldots, A_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica.

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$
- svojstvene vrijednosti idempotente A su 0 i/ili 1 i vrijedi $\operatorname{tr} A = \operatorname{rk} A$

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \le M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$
- svojstvene vrijednosti idempotente A su 0 i/ili 1 i vrijedi $\operatorname{tr} A = \operatorname{rk} A$
- ortogonalnost $(AB = 0)$ znači da je $\operatorname{Im} A \le \operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B \le \operatorname{Ker} A$

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \le M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$
- svojstvene vrijednosti idempotente A su 0 i/ili 1 i vrijedi $\operatorname{tr} A = \operatorname{rk} A$
- ortogonalnost $(AB = 0)$ znači da je $\operatorname{Im} A \le \operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B \le \operatorname{Ker} A$
- parcijalni uređaj: $A \le B \iff AB = A \iff \operatorname{Im} A \le \operatorname{Im} B$

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$
- svojstvene vrijednosti idempotente A su 0 i/ili 1 i vrijedi $\operatorname{tr} A = \operatorname{rk} A$
- ortogonalnost $(AB = 0)$ znači da je $\operatorname{Im} A \leq \operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B \leq \operatorname{Ker} A$
- parcijalni uređaj: $A \leq B \iff AB = A \iff \operatorname{Im} A \leq \operatorname{Im} B$
- postoje minimalne idempotente

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$
- svojstvene vrijednosti idempotente A su 0 i/ili 1 i vrijedi $\operatorname{tr} A = \operatorname{rk} A$
- ortogonalnost $(AB = 0)$ znači da je $\operatorname{Im} A \leq \operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B \leq \operatorname{Ker} A$
- parcijalni uređaj: $A \leq B \iff AB = A \iff \operatorname{Im} A \leq \operatorname{Im} B$
- postoje minimalne idempotente

Zadatak.

Ako je $N \in M_n(\mathbb{C})$ normalna i nilpotentna, onda je $N = 0$.

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathscr{A} \le M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$
- svojstvene vrijednosti idempotente A su 0 i/ili 1 i vrijedi $\operatorname{tr} A = \operatorname{rk} A$
- ortogonalnost $(AB = 0)$ znači da je $\operatorname{Im} A \le \operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B \le \operatorname{Ker} A$
- parcijalni uređaj: $A \le B \iff AB = A \iff \operatorname{Im} A \le \operatorname{Im} B$
- postoje minimalne idempotente

Zadatak.

Ako je $N \in M_n(\mathbb{C})$ normalna i nilpotentna, onda je $N = 0$.

Teorem.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ može se dijagonalizirati ako i samo ako je normalna.

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Matrični produkt $\cdot$ na potprostoru $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ matrica koje komutiraju

- idempotente su matrice projektora na potprostore od $\mathbb{C}^n$
- svojstvene vrijednosti idempotente A su 0 i/ili 1 i vrijedi $\operatorname{tr} A = \operatorname{rk} A$
- ortogonalnost $(AB = 0)$ znači da je $\operatorname{Im} A \leq \operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B \leq \operatorname{Ker} A$
- parcijalni uređaj: $A \leq B \iff AB = A \iff \operatorname{Im} A \leq \operatorname{Im} B$
- postoje minimalne idempotente

Zadatak.

Ako je $N \in M_n(\mathbb{C})$ normalna i nilpotentna, onda je $N = 0$.

Teorem.

Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ može se dijagonalizirati ako i samo ako je normalna.

Primjeri matrica koje se ne mogu dijagonalizirati?

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice.

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ skup matrica koje međusobno komutiraju. Onda postoji $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ koji je svojstveni vektor svih matrica iz $\mathscr{A}$.

Specijalni slučajevi operacije $\star$

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathscr{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ skup matrica koje međusobno komutiraju. Onda postoji $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ koji je svojstveni vektor svih matrica iz $\mathscr{A}$.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ skup matrica koji je zatvoren na adjungiranje i matrice iz $\mathscr{A}$ međusobno komutiraju. Onda se matrice iz $\mathscr{A}$ mogu simultano dijagonalizirati, tj. postoji baza od $\mathbb{C}^n$ kojoj su elementi svojstveni vektori svih matrica iz $\mathscr{A}$.

Schurove idempotente

Teorem.

Svaka koherentna algebra $\mathscr{A}$ ima jedinstvenu bazu $\{A_0, \ldots, A_d\}$ sastavljenu od Schurovih idempotenta, tj. matrica koje zadovoljavaju $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Ta baza je koherentna konfiguracija, tj. ima svojstva:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve indekse i, j.

Primitivne idempotente

Teorem.

Svaka Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ ima jedinstvenu bazu $\{E_0, \ldots, E_d\}$ sastavljenu od primitivnih idempotenta, tj. matrica koje zadovoljavaju $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Ta baza ima sljedeća svojstva:

1. $E_0 = \frac{1}{n} J$,
2. $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$,
3. za svaki indeks i postoji indeks $\hat{i}$ takav da je $E_i^t = E_{\hat{i}} = \overline{E}_i$,
4. postoje $q_{ij}^k \in \mathbb{C}$ takvi da je $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$ za sve indekse i, j.

Primitivne idempotente

Teorem.

Svaka Bose-Mesnerova algebra $\mathscr{A}$ ima jedinstvenu bazu $\{E_0, \ldots, E_d\}$ sastavljenu od primitivnih idempotenta, tj. matrica koje zadovoljavaju $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Ta baza ima sljedeća svojstva:

1. $E_0 = \frac{1}{n} J$,
2. $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$,
3. za svaki indeks i postoji indeks $\hat{i}$ takav da je $E_i^t = E_{\hat{i}} = \overline{E}_i$,
4. postoje $q_{ij}^k \in \mathbb{C}$ takvi da je $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$ za sve indekse i, j.

Brojeve q_{ij}^k zovemo Kreinovim parametrima Bose-Mesnerove algebre, odnosno odgovarajuće komutativne koherentne konfiguracije.

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi: $n_i = p_{ii'}^0 = |N_i(x)|$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi: $n_i = p_{ii'}^0 = |N_i(x)|$ $\qquad A_i\mathbf{1} = n_i\mathbf{1}$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Vrhovi: $X = \{1, \ldots, n\}$

Relacije: $R_0, \ldots, R_d$

Schurove idempotente: $A_0, \ldots, A_d$

$N_i(x) = \{z \in X \mid (x, z) \in R_i\}$

$N_{i'}(x) = \{z \in X \mid (z, x) \in R_i\}$

$p_{ij}^k = |N_i(x) \cap N_{j'}(y)|$

Stupnjevi: $n_i = p_{ii'}^0 = |N_i(x)|$ $\qquad A_i \mathbf{1} = n_i \mathbf{1}$

Propozicija.

1. $n_0 = 1$
2. $n_0 + \ldots + n_d = n$
3. $n_i = n_{i'}$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Primitivne idempotente: $E_0, \ldots, E_d$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Primitivne idempotente: $E_0, \ldots, E_d$

Kratnosti: $m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i = \dim \operatorname{Im} E_i$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Primitivne idempotente: $E_0, \ldots, E_d$

Kratnosti: $m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i = \dim \operatorname{Im} E_i$

Propozicija.

1. $m_0 = 1$
2. $m_0 + \ldots + m_d = n$
3. $m_i = m_{\hat{i}}$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Primitivne idempotente: $E_0, \ldots, E_d$

Kratnosti: $m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i = \dim \operatorname{Im} E_i$

Propozicija.

1. $m_0 = 1$
2. $m_0 + \ldots + m_d = n$
3. $m_i = m_{\hat{i}}$

Suma svih elemenata matrice: $\operatorname{sum} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Primitivne idempotente: $E_0, \ldots, E_d$

Kratnosti: $m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i = \dim \operatorname{Im} E_i$

Propozicija.

1. $m_0 = 1$
2. $m_0 + \ldots + m_d = n$
3. $m_i = m_{\hat{i}}$

Suma svih elemenata matrice: $\operatorname{sum} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

$\operatorname{sum}(A \circ B) = \operatorname{tr}(AB^t)$

Stupnjevi i kratnosti komutativne koherentne konfiguracije

Primitivne idempotente: $E_0, \ldots, E_d$

Kratnosti: $m_i = \operatorname{tr} E_i = \operatorname{rk} E_i = \dim \operatorname{Im} E_i$

Propozicija.

1. $m_0 = 1$
2. $m_0 + \ldots + m_d = n$
3. $m_i = m_{\hat{i}}$

Suma svih elemenata matrice: $\operatorname{sum} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

$\operatorname{sum}(A \circ B) = \operatorname{tr}(AB^t)$

Lema.

$$p_{ij}^k = \frac{1}{n\, n_k} \operatorname{tr}(A_i A_j A_k^t), \qquad q_{ij}^k = \frac{n}{m_k} \operatorname{tr}((E_i \circ E_j) E_k)$$

Presječni brojevi i Kreinovi parametri

Korolar.

Kreinovi parametri su realni brojevi.

Presječni brojevi i Kreinovi parametri

Korolar.

Kreinovi parametri su realni brojevi.

Propozicija.

1. $p_{i0}^{k} = \delta_{ik}$
2. $p_{0j}^{k} = \delta_{jk}$
3. $p_{ij}^{0} = n_i \delta_{ij'}$
4. $p_{ij}^{k} = p_{i'j'}^{k'}$
5. $\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^{k} = n_i$
6. $n_k p_{ij}^{k} = n_j p_{i'k}^{j} = n_i p_{kj'}^{i}$
7. $\sum_{a=0}^{d} p_{ij}^{a} p_{ka}^{b} = \sum_{a=0}^{d} p_{ki}^{a} p_{aj}^{b}$

Presječni brojevi i Kreinovi parametri

Propozicija.

1. $q_{i0}^k = \delta_{ik}$
2. $q_{0j}^k = \delta_{jk}$
3. $q_{ij}^0 = m_i \delta_{i\hat{j}}$
4. $q_{ij}^k = q_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}}$
5. $\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^k = m_i$
6. $m_k q_{ij}^k = m_j q_{\hat{i}k}^j = m_i q_{k\hat{j}}^i$
7. $\sum_{a=0}^{d} q_{ij}^a q_{ka}^b = \sum_{a=0}^{d} q_{ki}^a q_{aj}^b$