Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

11.12.2023.

Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Zadatak 1.44.

Pod kojim uvjetom na grupu G njezine klase konjugacije čine asocijacijsku shemu, tj. simetričnu koherentnu konfiguraciju?

Koherentna konfiguracija

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

Koherentna konfiguracija

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

Zadatak 1.41.

Definiciju koherentne konfiguracije možemo oslabiti tako da umjesto 1. svojstva ($A_0 = I$) zahtijevamo postojanje matrica $A_0, \ldots, A_e$ koje u sumi daju jediničnu matricu I. U slučaju $e = 0$, kad je I jedna od matrica, kažemo da je koherentna konfiguracija homogena. Dokažite da iz komutativnosti ($A_i A_j = A_j A_i$) slijedi homogenost.

Algebra razapeta koherentnom konfiguracijom

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$

Algebra razapeta koherentnom konfiguracijom

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$ **Svojstva:**

- $I, J \in \mathcal{A}$.

Algebra razapeta koherentnom konfiguracijom

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$ **Svojstva:**

- $I, J \in \mathscr{A}$.
- Zatvorenost na transponiranje: $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^t \in \mathscr{A}$.

Algebra razapeta koherentnom konfiguracijom

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$ **Svojstva:**

- $I, J \in \mathscr{A}$.
- Zatvorenost na transponiranje: $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^t \in \mathscr{A}$.
- Zatvorenost na matrično množenje: $\mathscr{A}$ je *podalgebra* od $M_n(\mathbb{C})$.

Algebra razapeta koherentnom konfiguracijom

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$ **Svojstva:**

- $I, J \in \mathscr{A}$.
- Zatvorenost na transponiranje: $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^t \in \mathscr{A}$.
- Zatvorenost na matrično množenje: $\mathscr{A}$ je *podalgebra* od $M_n(\mathbb{C})$.
- Zatvorenost na Schurovo množenje: $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$.

Algebra razapeta koherentnom konfiguracijom

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama tako da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. za svaki $i \in \{0, \ldots, d\}$ postoji $i' \in \{0, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve i, j.

$\mathscr{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$ **Svojstva:**

- $I, J \in \mathscr{A}$.
- Zatvorenost na transponiranje: $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^t \in \mathscr{A}$.
- Zatvorenost na matrično množenje: $\mathscr{A}$ je *podalgebra* od $M_n(\mathbb{C})$.
- Zatvorenost na Schurovo množenje: $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$.
- Matrice iz $\mathscr{A}$ imaju konstantne dijagonale.

Koherentne algebre

Definicija.

Za potprostor $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično množenje i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathscr{A}$ imaju konstantne dijagonale.

Koherentne algebre

Definicija.

Za potprostor $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično množenje i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathscr{A}$ imaju konstantne dijagonale.

Je li svaka koherentna algebra razapeta koherentnom konfiguracijom?

Koherentne algebre

Definicija.

Za potprostor $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično množenje i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathscr{A}$ imaju konstantne dijagonale.

Je li svaka koherentna algebra razapeta koherentnom konfiguracijom?

Neka je $G \leq S_n$ tranzitivna permutacijska grupa.

Koherentne algebre

Definicija.

Za potprostor $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično množenje i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathscr{A}$ imaju konstantne dijagonale.

Je li svaka koherentna algebra razapeta koherentnom konfiguracijom?

Neka je $G \leq S_n$ tranzitivna permutacijska grupa.

- Skup svih orbitala $(x, y)^G$ čini *Schurovu koherentnu konfiguraciju*.

Koherentne algebre

Definicija.

Za potprostor $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično množenje i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathscr{A}$ imaju konstantne dijagonale.

Je li svaka koherentna algebra razapeta koherentnom konfiguracijom?

Neka je $G \leq S_n$ tranzitivna permutacijska grupa.

- Skup svih orbitala $(x, y)^G$ čini *Schurovu koherentnu konfiguraciju*.
- *Centralizatorska algebra* $C(G)$ je koherentna algebra.

$$C(G) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AP(g) = P(g)A, \forall g \in G\}$$

Koherentne algebre

Definicija.

Za potprostor $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično množenje i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathscr{A}$ imaju konstantne dijagonale.

Je li svaka koherentna algebra razapeta koherentnom konfiguracijom?

Neka je $G \leq S_n$ tranzitivna permutacijska grupa.

- Skup svih orbitala $(x, y)^G$ čini *Schurovu koherentnu konfiguraciju*.
- *Centralizatorska algebra* $C(G)$ je koherentna algebra.

$$C(G) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AP(g) = P(g)A, \forall g \in G\}$$

$$P : G \to GL(n, \mathbb{C}), \quad P(g) = [p_{xy}], \quad p_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x^g = y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Koherentne algebre

Propozicija.

Centralizatorska algebra $C(G)$ podudara se s algebrom Schurove koherentne konfiguracije grupe G.

Koherentne algebre

Propozicija.

Centralizatorska algebra $C(G)$ podudara se s algebrom Schurove koherentne konfiguracije grupe G.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Koherentne algebre

Propozicija.

Centralizatorska algebra $C(G)$ podudara se s algebrom Schurove koherentne konfiguracije grupe G.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Za matrice $A_0, \ldots, A_d$ koje zadovoljavaju $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$ kažemo da su Schurove idempotente.

Koherentne algebre

Propozicija.

Centralizatorska algebra $C(G)$ podudara se s algebrom Schurove koherentne konfiguracije grupe G.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Za matrice $A_0, \ldots, A_d$ koje zadovoljavaju $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$ kažemo da su Schurove idempotente.

- Elementi tih matrica su nule i jedinice.

Koherentne algebre

Propozicija.

Centralizatorska algebra $C(G)$ podudara se s algebrom Schurove koherentne konfiguracije grupe G.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Za matrice $A_0, \ldots, A_d$ koje zadovoljavaju $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$ kažemo da su Schurove idempotente.

- Elementi tih matrica su nule i jedinice.
- Za $i \neq j$, matrice A_i i A_j nemaju jedinicu na istom mjestu.

Koherentne algebre

Propozicija.

Centralizatorska algebra $C(G)$ podudara se s algebrom Schurove koherentne konfiguracije grupe G.

P. J. Cameron, *Permutation groups*, Cambridge University Press, 1999.

Za matrice $A_0, \ldots, A_d$ koje zadovoljavaju $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$ kažemo da su Schurove idempotente.

- Elementi tih matrica su nule i jedinice.
- Za $i \neq j$, matrice A_i i A_j nemaju jedinicu na istom mjestu.

Teorem.

Svaka koherentna algebra ima jedinstvenu bazu $\{A_0, \ldots, A_d\}$ sastavljenu od Schurovih idempotenta. Ta baza je koherentna konfiguracija.

Schurove idempotente

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

Schurove idempotente

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.

Schurove idempotente

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na Schurovo množenje. Onda postoji baza $\{A_0, \ldots, A_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Ta baza je jedinstvena do na poredak matrica.

Schurove idempotente

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na Schurovo množenje. Onda postoji baza $\{A_0, \ldots, A_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Ta baza je jedinstvena do na poredak matrica.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.

Schurove idempotente

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.

Lema.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na Schurovo množenje. Onda postoji baza $\{A_0, \ldots, A_d\}$ od $\mathscr{A}$ takva da vrijedi $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$. Ta baza je jedinstvena do na poredak matrica.

C. Godsil, *Association schemes*, University of Waterloo, 2010.

Neka je $\mathscr{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor kompleksnih $n \times n$ matrica i $*$ binarna operacija takva da je $(\mathscr{A}, *)$ asocijativna i **komutativna** algebra s jedinicom E. Potenciranje u toj algebri označavamo $A^{*k} = A * \ldots * A$ (k faktora), uz $A^{*0} = E$.

Idempotente u općenitoj algebri matrica

Matrice koje zadovoljavaju $A * A = A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A * B = 0$, kažemo da su ortogonalne.

Idempotente u općenitoj algebri matrica

Matrice koje zadovoljavaju $A * A = A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A * B = 0$, kažemo da su ortogonalne.

Na skupu svih idempotenta definiramo parcijalni uređaj: $A \leq B$ ako je $A * B = A$. Minimalna idempotenta je minimalni element u parcijalno uređenom skupu svih idempotenta različitih od 0.

Idempotente u općenitoj algebri matrica

Matrice koje zadovoljavaju $A * A = A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A * B = 0$, kažemo da su ortogonalne.

Na skupu svih idempotenta definiramo parcijalni uređaj: $A \leq B$ ako je $A * B = A$. Minimalna idempotenta je minimalni element u parcijalno uređenom skupu svih idempotenta različitih od 0.

Ako su A i B idempotente, onda je $A * B \leq A$ i $A * B \leq B$. Iz toga slijedi da su minimalne idempotente ortogonalne, ako su različite.

Idempotente u općenitoj algebri matrica

Matrice koje zadovoljavaju $A * A = A$ zovemo idempotentama.
Ako za idempotente vrijedi $A * B = 0$, kažemo da su ortogonalne.

Na skupu svih idempotenta definiramo parcijalni uređaj: $A \leq B$ ako je $A * B = A$. Minimalna idempotenta je minimalni element u parcijalno uređenom skupu svih idempotenta različitih od 0.

Ako su A i B idempotente, onda je $A * B \leq A$ i $A * B \leq B$. Iz toga slijedi da su minimalne idempotente ortogonalne, ako su različite.

Teorem.

Neka je $(\mathscr{A}, *)$ komutativna algebra kvadratnih matrica nad $\mathbb{C}$ s jedinicom E. Ako u $\mathscr{A}$ nema nilpotentnih elemenata osim 0 (tj. vrijedi $N^{*k} = 0 \Rightarrow N = 0$), onda $\mathscr{A}$ ima bazu koja se sastoji od međusobno ortogonalnih idempotenta.

Normalne matrice

Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je normalna ako komutira s adjungiranom matricom: $AA^* = A^*A$.

Normalne matrice

Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je normalna ako komutira s adjungiranom matricom: $AA^* = A^*A$.

Teorem.

Ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ normalna, onda se može dijagonalizirati.

Normalne matrice

Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je normalna ako komutira s adjungiranom matricom: $AA^* = A^*A$.

Teorem.

Ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ normalna, onda se može dijagonalizirati.