Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

4.12.2023.

Prijedlozi tema seminara

Prijedlozi tema seminara

Sferni dizajni

Béla Bajnok, *Additive combinatorics. A menu of research problems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.

Prijedlozi tema seminara

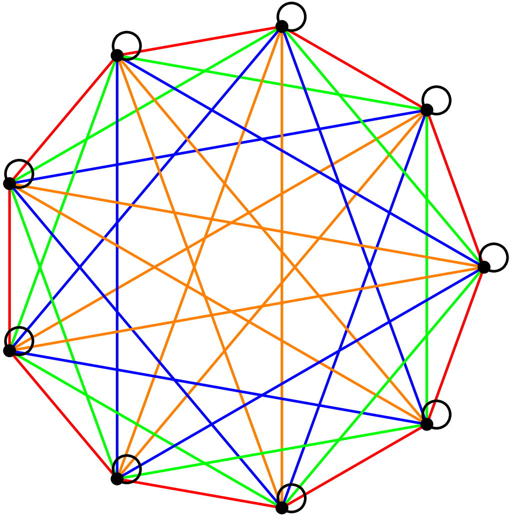
Sferni dizajni

Béla Bajnok, *Additive combinatorics. A menu of research problems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.

Spojeni sustavi simetričnih dizajna

Brian G. Kodalen, *Linked systems of symmetric designs*, Algebraic Combinatorics **2** (2019), no. 1, 119–147.

Asocijacijska shema



Asocijacijska shema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna slična matrica

$$\begin{bmatrix}
0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\
1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0
\end{bmatrix}$$

Reklama za seminar

Ponedjeljak, 11.12.2023. u 10 sati, FER (Unska 3, Zagreb).

Mozaici simetričnih dizajna

Reklama za seminar

Ponedjeljak, 11.12.2023. u 10 sati, FER (Unska 3, Zagreb).

Mozaici simetričnih dizajna

https://www.imaginary.org/gallery/difference-bracelets

Koherentna konfiguracija

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa *vrhova* X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je "dijagonala",
2. $\{R_0, \ldots, R_d\}$ čine particiju od $X \times X$,
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^t = R_{i'}$,
4. za svaki izbor indeksa i, j, k postoji *presječni broj* $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i,\ (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve parove $(x,y) \in R_k$.

Ako su relacije simetrične, tj. u 3. svojstvu uvijek vrijedi $i = i'$, koherentnu konfiguraciju zovemo asocijacijskom shemom. Ako presječni brojevi zadovoljavaju $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ za svaki izbor indeksa, kažemo da je koherentna konfiguracija komutativna.

Schurove koherentne konfiguracije

Primjer.

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ grupa permutacija na skupu X koja djeluje tranzitivno, tj. tako da vrijedi $(\forall x, y \in X)(\exists g \in G)\ x^g = y$. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju grupe G na skup svih uređenih parova $X \times X$. Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Tada te relacije čine koherentnu konfiguraciju na skupu X.

Schurove koherentne konfiguracije

Primjer.

Neka je $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ grupa permutacija na skupu X koja djeluje tranzitivno, tj. tako da vrijedi $(\forall x, y \in X)(\exists g \in G)\ x^g = y$. Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d$ orbite pri djelovanju grupe G na skup svih uređenih parova $X \times X$. Možemo pretpostaviti da je $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$. Tada te relacije čine koherentnu konfiguraciju na skupu X.

Djelovanje permutacije $g \in G$ zapisujemo zdesna x^g, umjesto funkcijski $g(x)$ kao ranije. Orbitu elementa $x \in X$ označavamo $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$, a stabilizator $G_x = \{g \in G \mid x^g = x\}$. Promatramo inducirano djelovanje na parovima $(x,y)^g = (x^g, y^g)$. Orbite na parovima zovemo orbitalama, a broj orbitala rangom tranzitivne permutacijske grupe G.

Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

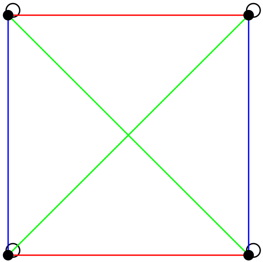
Zadatak. Koliko klasa konjugacije ima komutativna grupa reda n? Koliko ih ima simetrična grupa S_n?

Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Zadatak. Koliko klasa konjugacije ima komutativna grupa reda n? Koliko ih ima simetrična grupa S_n?

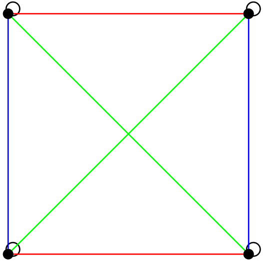


Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Zadatak. Koliko klasa konjugacije ima komutativna grupa reda n? Koliko ih ima simetrična grupa S_n?



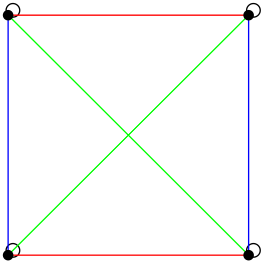
$$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Zadatak. Koliko klasa konjugacije ima komutativna grupa reda n? Koliko ih ima simetrična grupa S_n?



$$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$C_0 = \{00\},\ C_1 = \{01\},\ C_2 = \{10\},$$

$$C_3 = \{11\}$$

Klase konjugacije grupe

Primjer.

Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}, C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Zadatak. Koliko klasa konjugacije ima komutativna grupa reda n? Koliko ih ima simetrična grupa S_n?

Zadatak. Pod kojim uvjetom na grupu G njezine klase konjugacije čine asocijacijsku shemu, tj. simetričnu koherentnu konfiguraciju?

Klase ciklotomije konačnog polja

Multiplikativna grupa konačnog polja $\mathbb{F}_q^*$ je ciklička reda $q-1$. Njezini generatori su primivni elementi polja. Ako je $\omega \in \mathbb{F}_q^*$ primitivni element i $q-1 = r \cdot d$, onda je $H = \langle \omega^d \rangle$ podgrupa od $\mathbb{F}_q^*$ reda r. Susjedne klase $C_i = \omega^{i-1} H$, $i = 1, \ldots, d$ zovemo klasama ciklotomije konačnog polja.

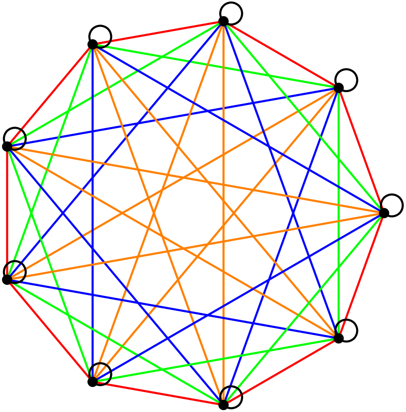
Klase ciklotomije konačnog polja

Multiplikativna grupa konačnog polja $\mathbb{F}_q^*$ je ciklička reda $q-1$. Njezini generatori su primivni elementi polja. Ako je $\omega \in \mathbb{F}_q^*$ primitivni element i $q-1 = r \cdot d$, onda je $H = \langle \omega^d \rangle$ podgrupa od $\mathbb{F}_q^*$ reda r. Susjedne klase $C_i = \omega^{i-1}H$, $i = 1, \ldots, d$ zovemo klasama ciklotomije konačnog polja.

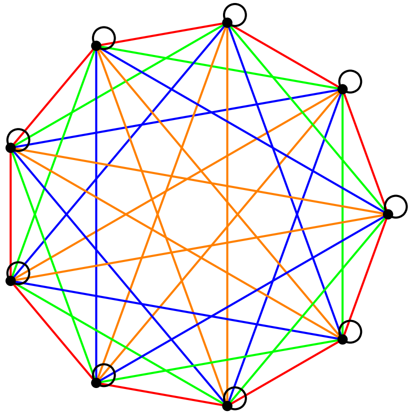
Primjer.

Neka je $C_0 = \{0\}$, a $C_1, \ldots, C_d$ klase ciklotomije polja $\mathbb{F}_q$. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \mid x - y \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda q s d klasa koja je komutativna.

Još jedna definicija

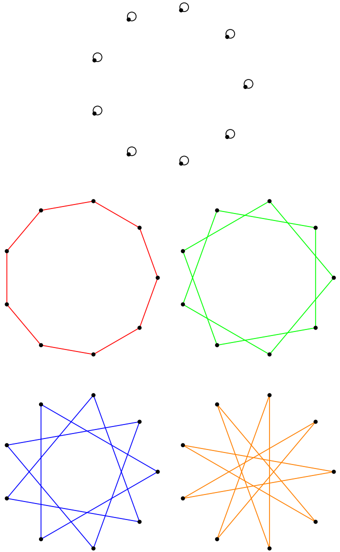


Još jedna definicija



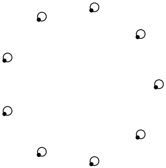
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Još jedna definicija

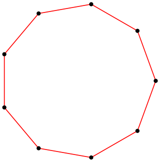


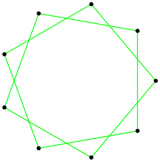
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Još jedna definicija

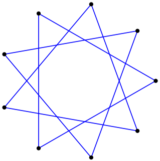


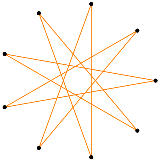
$$A_0 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$





$$\color{red}{A_1} \color{black}{=} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad \color{green}{A_2} \color{black}{=} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$





$$\color{blue}{A_3} \color{black}{=} \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \color{orange}{A_4} \color{black}{=} \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Još jedna definicija

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama takvih da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. $A_i^t \in \{A_0, \ldots, A_d\}$ za svaki $i = 0, \ldots, d$,
4. za svaki izbor indeksa i, j produkt matrica $A_i A_j$ je linearna kombinacija od $A_0, \ldots, A_d$.

Još jedna definicija

Definicija.

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od matrica $A_0, \ldots, A_d \in M_n(\mathbb{C})$ popunjenih nulama i jedinicama takvih da vrijedi:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. $A_i^t \in \{A_0, \ldots, A_d\}$ za svaki $i = 0, \ldots, d$,
4. postoje brojevi $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve indekse i, j.