Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

13.11.2023.

Jako regularni grafovi

Teorem 1.12.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Jako regularni grafovi

Teorem 1.12.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Propozicija 1.11.

Ako je graf G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, onda je njegov komplement G^c jako regularan s parametrima

$$SRG(n,\ n-1-k,\ n-2k+\mu-2,\ n-2k+\lambda).$$

Jako regularni grafovi

Teorem 1.12.

Asocijacijska shema s dvije klase ekvivalentna je s parom međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Propozicija 1.11.

Ako je graf G jako regularan s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, onda je njegov komplement G^c jako regularan s parametrima

$$SRG(n,\ n-1-k,\ n-2k+\mu-2,\ n-2k+\lambda).$$

Propozicija 1.13.

Ako postoji jako regularan graf s parametrima $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, onda vrijedi $k(k-\lambda-1) = (n-k-1)\mu$.

Jako regularni grafovi

Brouwerova tablica:

https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html

Jako regularni grafovi

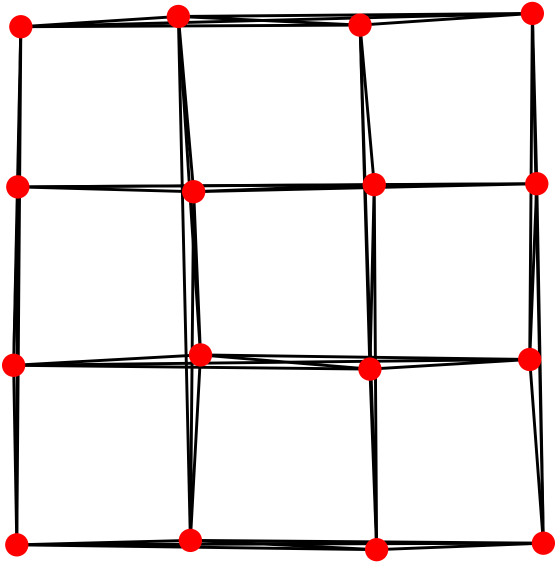
Brouwerova tablica:

https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html

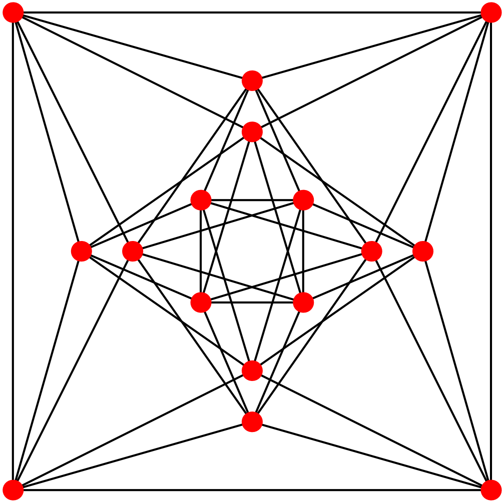
D. Crnković, S. Rukavina, A. Švob, *New strongly regular graphs from orthogonal groups* $O^+(6,2)$ *and* $O^-(6,2)$, Discrete Math. **341** (2018), no. 10, 2723–2728.

$SRG(216, 40, 4, 8)$, $SRG(540, 187, 58, 68)$, $SRG(540, 224, 88, 96)$

Topovski graf – $SRG(16, 6, 2, 2)$



Shrikhandeov graf – $SRG(16, 6, 2, 2)$



Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\mathscr{k}}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima $(v, \mathscr{k}, \lambda)$ ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$.

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$.

$$r = \lambda \cdot \frac{v-1}{k-1}$$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$.

$$r = \lambda \cdot \frac{v-1}{k-1}$$

$$b = |\mathscr{D}| = \lambda \cdot \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{\Bbbk}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima $(v, \Bbbk, \lambda)$ ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$.

$$r = \lambda \cdot \frac{v-1}{\Bbbk - 1}$$

$$b = |\mathscr{D}| = \lambda \cdot \frac{v(v-1)}{\Bbbk(\Bbbk - 1)}$$

$$\lambda(v-1) = \Bbbk(\Bbbk - 1)$$

Simetrični dizajni

Točke: $V = \{1, \ldots, v\}$ Blokovi: $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{k}$

Kažemo da je $\mathscr{D}$ dizajn s parametrima (v, k, λ) ako za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Dizajn je simetričan ako je broj blokova jednak broju točaka: $|\mathscr{D}| = v$.

$$r = \lambda \cdot \frac{v-1}{k-1}$$

$$b = |\mathscr{D}| = \lambda \cdot \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$$

$$\lambda(v-1) = k(k-1)$$

R. Mathon, A. Rosa, 2-(v, k, λ) *designs of small order*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 25–58.

Simetrični dizajni

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima $(v, \Bbbk, \lambda)$ simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

Simetrični dizajni

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima $(v, \Bbbk, \lambda)$ simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

Primjer.

Neka je q potencija prostog broja i $\mathbb{F}_q^{d+1}$ vektorski prostor dimenzije $d+1$ nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$. Kao točake uzmimo sve 1-dimenzionalne potprostore, a kao blokove skupove točaka sadržane u d-dimenzionalnim potprostorima ("hiperravninama"). Tako dobijemo simetrični dizajn s parametrima $v = \begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q$, $\Bbbk = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix}_q$ i $\lambda = \begin{bmatrix} d-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q$.

Simetrični dizajni

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima $(v, \Bbbk, \lambda)$ simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

Primjer.

Neka je q potencija prostog broja i $\mathbb{F}_q^{d+1}$ vektorski prostor dimenzije $d+1$ nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$. Kao točake uzmimo sve 1-dimenzionalne potprostore, a kao blokove skupove točaka sadržane u d-dimenzionalnim potprostorima ("hiperravninama"). Tako dobijemo simetrični dizajn s parametrima $v = \begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q$, $\Bbbk = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix}_q$ i $\lambda = \begin{bmatrix} d-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q$.

Projektivna ravnina reda n je simetrični $(n^2+n+1, n+1, 1)$ dizajn.

Simetrični dizajni

Teorem (Bruck-Ryser).

Ako postoji projektivna ravnina reda $n \equiv 1$ ili $2 \pmod 4$, onda se n može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Simetrični dizajni

Teorem (Bruck-Ryser).

Ako postoji projektivna ravnina reda $n \equiv 1$ ili $2 \pmod 4$, onda se n može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Korolar.

Ne postoje projektivne ravnine reda $n \equiv 6 \pmod 8$.

Simetrični dizajni

Teorem (Bruck-Ryser).

Ako postoji projektivna ravnina reda $n \equiv 1$ ili $2 \pmod 4$, onda se n može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Korolar.

Ne postoje projektivne ravnine reda $n \equiv 6 \pmod 8$.

C. W. H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz, *The nonexistence of finite projective planes of order* 10, Canad. J. Math. **41** (1989), no. 6, 1117–1123.

Simetrični dizajni

Teorem (Bruck-Ryser).

Ako postoji projektivna ravnina reda $n \equiv 1$ ili $2 \pmod 4$, onda se n može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Korolar.

Ne postoje projektivne ravnine reda $n \equiv 6 \pmod 8$.

C. W. H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz, *The nonexistence of finite projective planes of order* 10, Canad. J. Math. **41** (1989), no. 6, 1117–1123.

Teorem (Bruck-Ryser-Chowla).

Neka postoji simetrični $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn.

1. Ako je v paran, onda je red $n = \Bbbk - \lambda$ kvadrat cijelog broja.
2. Ako je v neparan, onda jednadžba $n\,x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\,\lambda\,y^2 = z^2$ ima netrivijalno cjelobrojno rješenje $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Simetrični dizajni

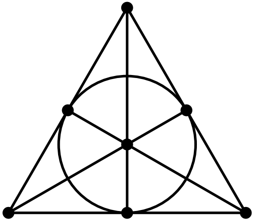
Zadatak.

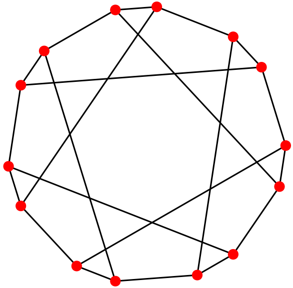
Neka je $\mathscr{D}$ simetrični $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn. Definiramo bipartitan graf G kojem su vrhovi točke i blokovi od $\mathscr{D}$, a susjedni su ako točka pripada bloku. Dokažite da je G distancijsko regularan graf dijametra $d = 3$, odredite mu presječni niz $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$ i presječne brojeve p_{ij}^k odgovarajuće asocijacijske sheme. Dolazi li svaka (metrička) asocijacijska shema s tim presječnim brojevima od simetričnog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna?

Simetrični dizajni

Zadatak.

Neka je $\mathscr{D}$ simetrični $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajn. Definiramo bipartitan graf G kojem su vrhovi točke i blokovi od $\mathscr{D}$, a susjedni su ako točka pripada bloku. Dokažite da je G distancijsko regularan graf dijametra $d = 3$, odredite mu presječni niz $\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\}$ i presječne brojeve p_{ij}^k odgovarajuće asocijacijske sheme. Dolazi li svaka (metrička) asocijacijska shema s tim presječnim brojevima od simetričnog $(v, \Bbbk, \lambda)$ dizajna?





Distancijsko regularni grafovi

Definicija 1.

Neka je G povezan graf dijametra d. Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako broj $|N_i(x) \cap N_j(y)|$ ovisi samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in X$.

Distancijsko regularni grafovi

Definicija 1.

Neka je G povezan graf dijametra d. Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako broj $|N_i(x) \cap N_j(y)|$ ovisi samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in X$.

Teorem 1.17.

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Ako za vrhove $x, y \in X$ definiramo da su i-asocirani kad je $\partial(x, y) = i$, dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa.

Distancijsko regularni grafovi

Definicija 1.

Neka je G povezan graf dijametra d. Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako broj $|N_i(x) \cap N_j(y)|$ ovisi samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in X$.

Teorem 1.17.

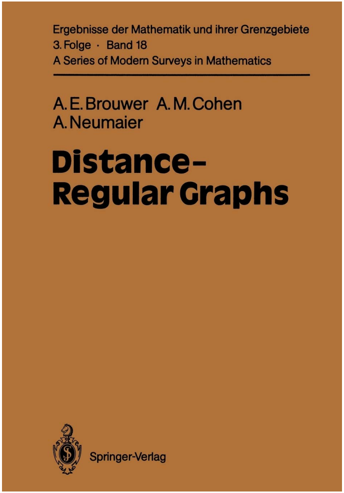
Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Ako za vrhove $x, y \in X$ definiramo da su i-asocirani kad je $\partial(x, y) = i$, dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa.

Definicija 2.

Povezan graf G je distancijsko regularan ako je regularan stupnja k i za svaka dva vrha na udaljenosti $\partial(x, y) = i$ brojevi $b_i = |N_{i+1}(x) \cap N_1(y)|$ i $c_i = |N_{i-1}(x) \cap N_1(y)|$ su konstantni.

Distancijsko regularni grafovi

A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.



Distancijsko regularni grafovi

Teorem 1.19.

(a) Brojevi $\Bbbk_i = |N_i(x)|$ ne ovise o izboru vrha x i vrijedi $\Bbbk_0 = 1$, $\Bbbk_1 = \Bbbk$, $\Bbbk_{i+1} = \Bbbk_i b_i / c_{i+1}$, za $i = 0, \ldots, d-1$.

(b) Ukupan broj vrhova grafa je $n = 1 + \Bbbk_1 + \ldots + \Bbbk_d$.

(c) $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d$.

(d) $\Bbbk = b_0 > b_1 \geq \cdots \geq b_{d-1}$.

(e) $c_0 = b_d = 0$.

(f) Ako je $i + j \leq d$, onda je $c_i \leq b_j$.

Teorem 1.20.

Vrijedi $p_{0j}^k = \delta_{jk}$, $p_{i0}^k = \delta_{ik}$ i

$$p_{1j}^k = \begin{cases} c_k, & \text{za } j = k-1, \\ a_k, & \text{za } j = k, \\ b_k, & \text{za } j = k+1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uz to vrijedi rekurzija

$$p_{i+1,j}^k = \frac{1}{c_{i+1}} \left(p_{i,j-1}^k b_{j-1} + p_{i,j}^k (a_j - a_i) + p_{i,j+1}^k c_{j+1} - p_{i-1,j}^k b_{i-1} \right).$$

Distancijsko regularni grafovi

Propozicija 1.21.

Povezan graf je jako regularan ako i samo ako je distancijsko regularan dijametra 2. Parametri $SRG(n, k, \lambda, \mu)$ odgovaraju presječnom nizu $\{k, k - \lambda - 1; 1, \mu\}$.

Distancijsko regularni grafovi

Propozicija 1.21.

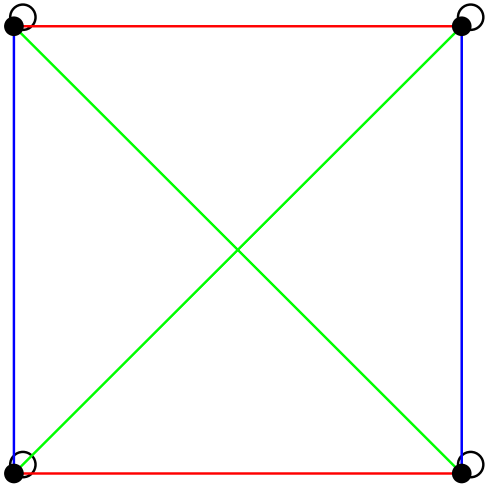
Povezan graf je jako regularan ako i samo ako je distancijsko regularan dijametra 2. Parametri $SRG(n, \Bbbk, \lambda, \mu)$ odgovaraju presječnom nizu $\{\Bbbk, \Bbbk - \lambda - 1; 1, \mu\}$.

Teorem 1.23.

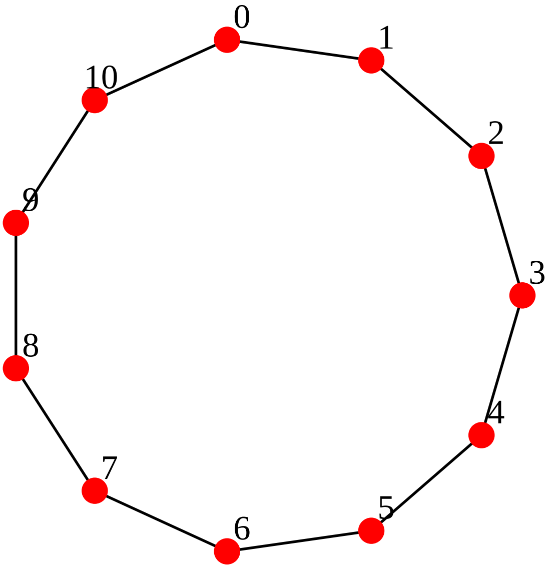
Asocijacijska shema je metrička obzirom na prvi graf G_1 ako i samo ako njezini presječni brojevi zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

1. ako je $k = i + j$, onda je $p_{ij}^k \neq 0$,
2. ako je $p_{ij}^k \neq 0$, onda je $|i - j| \leq k \leq i + j$.

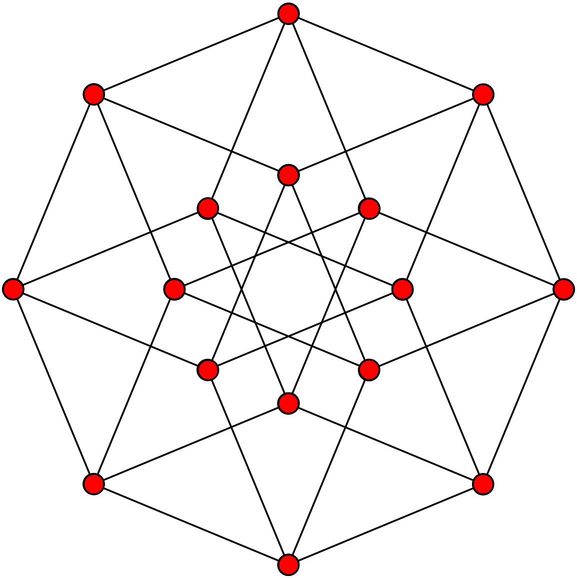
Asocijacijska shema koja nije metrička



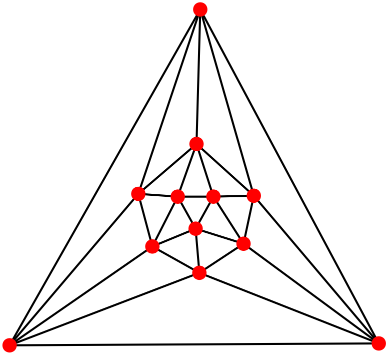
Poligon reda $n = 11$

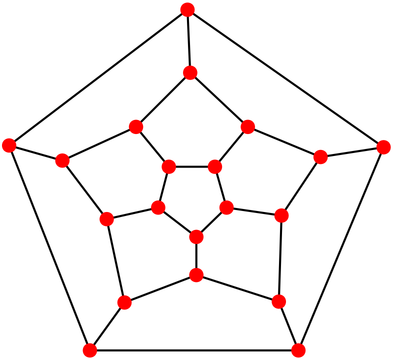


Hiperkocka dimenzije $d = 4$ / Hammingova shema $H(4, 2)$

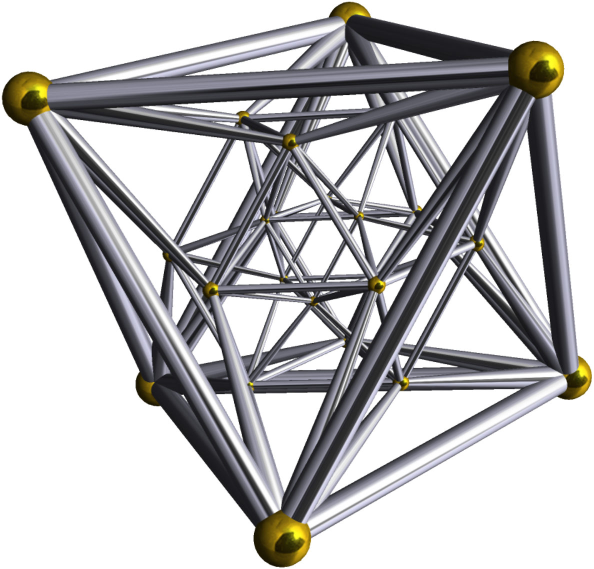


Mreže ikosaedra i dodekaedra

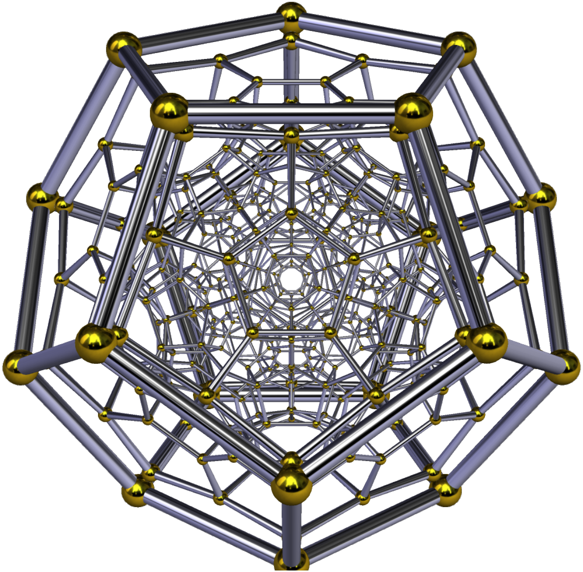




Oktapleks – strane: 24 oktaedra



Dodekapleks – strane: 120 dodekaedara



Tetrapleks – strane: 600 ikosaedara