Konstrukcija jedne familije asocijacijskih shema s 5 klasa

Ana Šumberac

23. rujna 2024.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom seminarskom radu cilj je pokazati konstrukciju asocijacijske sheme s pet klasa koristeći kose balansirane generalizirane težinske matrice.
Na početku se uvode svi pojmovi koji će se kasnije koristiti kao što su digraf djeljivog dizajna, kose balansirane generalizirane težinske matrice, Hadamardove matrice te asocijacijske sheme.
Nakon toga kreće konstrukcija i to najprije digrafa djeljivog dizajna digrafa, a zatim se na nju nadovezuje konstrukcija asocijacijske sheme s pet klasa.

2 Oznake

Koristit će se oznake I_n za jediničnu matricu reda n, J_n za matricu reda n kojoj su svi elementi 1. $(0,1)$-matricom zvati ćemo svaku matricu kojoj su svi elementi iz skupa $\{0,1\}$.
Kod blok matrice X, za (i,j)-ti blok koristit ćemo oznaku $[X]_{ij}$.
Koristit ćemo oznaku R_n za matricu reda n kojoj su na antidijagonali jedinice, a svi ostali elementi su 0, tj.

$$R_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 Digraf

Usmjereni graf(digraf) je uređeni par $\Gamma = (V, E)$, gdje je $V \neq \emptyset$ konačan skup vrhova, a $E \subseteq \{(x, y)|x, y \in V, x \neq y\}$. Elemente od E zovemo lukovi. Ako je $(x, y) \in E$, kažemo da x dominira y te da je y dominiran od x. Digraph je k-**regularan** ako svaki njegov vrh dominira i dominiran je od točno k vrhova.

Digraf je **asimetričan** ako $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \notin E$.

Neka je $|V| = v$. **Matrica susjedstva (incidencije)** $M = [m_{xy}]_{x,y\in V}$ digrafa Γ je $(v \times v)$ $(0, 1)$-matrica kojoj su retci i stupci indeksirani vrhovima digrafa tako da je $m_{xy} = 1$ ako je $(x, y) \in E$, odnosno $m_{xy} = 0$ ako $(x, y) \notin E$. Slijedi

- Digraf je k-regularan akko $MJ_v = M^T J_v = kJ_v$.
- Digraf asimetričan akko je $M + M^T$ $(0, 1)$-matrica.

4 Digraf djeljivog dizajna

Neka je $\Gamma = (V, E)$ k-regularan asimetričan digraf, $|V| = v$.

Digraf Γ je **digraf djeljivog dizajna** s parametrima $(v, k, \lambda_1, \lambda_2, m, n)$, u oznaci $DDD(v, k, \lambda_1, \lambda_2, m, n)$, ako se V može particionirati u m klasa veličine n tako da:

- $\forall x, y \in V$, $x \neq y$, x i y iz iste klase, broj vrhova z koji dominiraju ili su dominirani i od x i od y je jednak λ_1
- $\forall x, y \in V$, x i y iz različitih klasa, broj vrhova z koji dominiraju ili su dominirani i od x i od y je jednak λ_2

Neka je M matrica susjedstva digrafa Γ. Γ je $DDD(v, k, \lambda_1, \lambda_2, m, n)$ akko $M + M^T$ je $(0, 1)$-matrica i

$$MM^T = M^T M = kI_v + \lambda_1 (I_m \otimes J_n - I_v) + \lambda_2 (J_v - I_m \otimes J_n). \qquad (1)$$

5 Balansirane generalizirane težinske matrice

Neka je G konačna multiplikativna grupa. **Balansirana generalizirana težinska matrica** nad G s parametrima (v,k,λ), u oznaci $BGW(v,k,\lambda)$, je matrica $W=[w_{ij}]$ s elementima iz $G\cup\{0\}$, reda v, takva da:

- svaki red od W sadrži točno k nenula elemenata,
- $\forall i,h\in\{1,2,\dots,v\}$, $i\neq h$, multiskup

$$\{\, w_{ij}w_{hj}^{-1} \mid 1\leq j\leq v,\ \ w_{ij},w_{hj}\neq 0\,\}$$

  sadrži točno $\frac{\lambda}{|G|}$ kopija svakog elementa iz G.

Neka je G sada još i ciklička grupa tj. $G=\langle U\rangle$. U tom slučaju za elemente od W označavati ćemo sa $U^{w_{ij}}$.

Kosa balansirana generalizirana težinska matrica je matrica $W=[U^{w_{ij}}]$ koja je $BGW(n+1,n,n-1)$ nad cikličkom grupom $G=\langle U\rangle$ reda $2m$ sa dijagonalom 0 za koju vrijedi $U^{w_{ji}}=U^{w_{ij+m}}$, $\forall i\neq j$.

Primjer 1. *Neka je $G=\langle\sigma\rangle$ ciklička grupa reda 3.*

$$W=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \sigma & \sigma^2\\ 1 & 1 & 0 & \sigma^2 & \sigma\\ 1 & \sigma & \sigma^2 & 0 & 1\\ 1 & \sigma^2 & \sigma & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

W je $BGW(5,4,3)$ nad G.

Lema 1. [1] *Neka su $q,m\in\mathbb{N}$ tako da je q neparna potencija prostog broja, te $\frac{q-1}{m}$ neparan broj. Tada postoji kosa $BGW(q+1,q,q-1)$ sa dijagonalom 0 nad cikličkom grupom reda m.*

[1] Yury J. Ionin, H. Kharaghani, Doubly regular digraphs and symmetric designs, J. Comb. Theory, Ser. A 101 (2003) 35–48.

6 Asocijacijske sheme

Neka je $d \in \mathbb{N}$. Neka je $X \neq \emptyset$ konačan skup, $|X| = n$. Neka je $R_i \subseteq X \times X$, $R_i \neq \emptyset$, te neka je A_i matrica susjedstva grafa (X, R_i), $i = 0, 1, \ldots, d$.
Asocijacijska shema s d klasa je uređeni par $(X, \{R_i\}_{i=0}^d)$, gdje matrice susjedstva $A_0, A_1, \ldots, A_d$ zadovoljavaju uvijete:

- $A_0 = I_n$,
- $\sum_{i=0}^d A_i = J_n$,
- $A_i^T \in \{A_1, A_2, \ldots, A_d\}$, $i = 1, 2, \ldots, d$,
- $\exists p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ tako da je $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k, \forall i, j$.

Asocijacijska shema je simetrična ako je $A_i^T = A_i$, $\forall i$.
Asocijacijska shema je komutativna ako je $A_i A_j = A_j A_i$, $\forall i, j$.

7 Hadamardove matrice

Hadamardova matrica reda n je $(n \times n)$ matrica $H = [h_{ij}]$, $h_{ij} \in \{-1, 1\}$, za koju vrijedi $HH^T = H^T H = nI_n$.
Hadamardova matrica je **normalizirana** ako su svi elementi prvog retka i prvog stupca jednaki 1.
Svaka Hadamardova matrica može se transformirati u ekvivalentnu Hadamardovu matricu koristeći slijedeće operacije:

- zamjena dva retka ili dva stupca
- množenje retka ili stupca s -1

Koristeći navedene operacije, normalizirati se može bilo koja Hadamardova matrica. Za normaliziranu Hadamardovu matricu reda ≥ 2, svaki redak i stupac osim prvih imaju $\frac{n}{2}$ elemenata -1, te $\frac{n}{2}$ elemenata 1.
Red Hadamardove matrice je 1, 2 ili $4k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je H normalizirana Hadamardova matrica reda n, $n \geq 4$.
Označimo $(i+1)$-vi redak od H sa r_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Stavimo

$$r_i = \begin{bmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \ldots & r_{in} \end{bmatrix}.$$

Za $n = 1, 2, \ldots, n-1$, definiramo $(n \times n)$ matrice C_i sa

$$C_i = r_i^T \cdot r_i = \begin{bmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ \vdots \\ r_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \ldots & r_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{i1}^2 & r_{i1}r_{i2} & \ldots & r_{i1}r_{in} \\ r_{i2}r_{i1} & r_{i2}^2 & \ldots & r_{i2}r_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{in}r_{i1} & r_{in}r_{i2} & \ldots & r_{in}^2 \end{bmatrix}.$$

Očito je $C_i^T = C_i$, $\forall i$.
Pogledajmo kako izgleda $C_i \cdot C_j$:

$$C_iC_j = \begin{bmatrix} r_{i1}^2 & r_{i1}r_{i2} & \dots & r_{i1}r_{in} \\ r_{i2}r_{i1} & r_{i2}^2 & \dots & r_{i2}r_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{in}r_{i1} & r_{in}r_{i2} & \dots & r_{in}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{ji1}^2 & r_{j1}r_{j2} & \dots & r_{j1}r_{jn} \\ r_{j2}r_{j1} & r_{j2}^2 & \dots & r_{j2}r_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{jn}r_{j1} & r_{jn}r_{j2} & \dots & r_{jn}^2 \end{bmatrix}.$$

Uzmemo li k-ti redak od C_i:

$$\begin{bmatrix} r_{ik}r_{i1} & r_{ik}r_{i2} & \dots & r_{ik}^2 & \dots & r_{ik}r_{in} \end{bmatrix},$$

te l-ti stupac od C_j:

$$\begin{bmatrix} r_{jl}r_{j1} \\ r_{jl}r_{j2} \\ \vdots \\ r_{jl}^2 \\ \vdots \\ r_{jl}r_{jn} \end{bmatrix},$$

vidimo da će na (k, l)-toj poziciji u C_iC_j biti

$$\sum_{s=1}^{n} r_{ik}r_{is}r_{jl}r_{js} = r_{ik}r_{jl}\sum_{s=1}^{n} r_{is}r_{js}.$$

Ukoliko je $i \neq j$, tada je $\sum_{s=1}^{n} r_{is}r_{js} = 0$ jer se tu zapravo radi o umnošku dva različita retka Hadamardove matrice (a znamo da su oni ortogonalni). Dakle, $C_iC_j = O_n$, za $i \neq j$.

Ukoliko je $i = j$ dobivamo, na (k, l)-toj poziciji u C_i^2 imamo

$$r_{ik}r_{il}\sum_{s=1}^{n}\underbrace{r_{is}^2}_{=1} = r_{ik}r_{il}\cdot n = \begin{cases} \underbrace{r_{ik}^2}_{=1}\cdot n = n, & k = l \\ r_{ik}r_{il}\cdot n & k \neq l \end{cases}$$

Definirajmo $(n^2 \times n^2)$ blok matricu D tako da definiramo (i, j)-ti blok od D kao $(n \times n)$ matricu danu sa

$$[D]_{ij} = \begin{cases} O_n, & i = j \\ C_{j-i}, & i < j \\ -C_{n-(i-j)}, & i > j. \end{cases}$$

Blok matrica D ima slijedeći oblik

$$D = \begin{bmatrix} O_n & C_1 & C_2 & \dots & C_{n-3} & C_{n-2} & C_{n-1} \\ -C_{n-1} & O_n & C_1 & \dots & C_{n-4} & C_{n-3} & C_{n-2} \\ -C_{n-2} & -C_{n-1} & O_n & \dots & C_{n-5} & C_{n-4} & C_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ -C_3 & -C_4 & -C_5 & \dots & O_n & C_1 & C_2 \\ -C_2 & -C_3 & -C_4 & \dots & -C_{n-1} & O_n & C_1 \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 & \dots & -C_{n-2} & -C_{n-1} & O_n \end{bmatrix}.$$

Vrijedi slijedeća lema:

Lema 2. $DD^T = nI_n \otimes (nI_n - J_n)$.

Dokaz.

$$nI_n \otimes (nI_n - J_n) = \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
n(n-1) & -n & \dots & -n & & & & & \\
-n & n(n-1) & \dots & -n & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & O_n & & \\
-n & -n & \dots & n(n-1) & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & n(n-1) & -n & \dots & -n \\
& & & & & -n & n(n-1) & \dots & -n \\
& & O_n & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
& & & & & -n & -n & \dots & n(n-1)
\end{bmatrix}.
$$

Dakle, treba pokazati da se gornja blokmatrica dobije množenjem matrica D i D^T.

Pogledajmo naprije kako će izgledati blokovi na dijagonali od DD^T tj., kako će izgledati proizvoljan blok $[D]_{ii}$ za $i \in \{1, 2, \dots n\}$. i-ti redak od D izgleda ovako:

$$
[-C_{n-i+1} \quad - C_{n-i+2} \quad \dots \quad - C_{n-1} \quad O_n \quad C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_{n-i}] \, .
$$

Blok $[D]_{ii}$ dobije se množenjem navedenog i-tog retka od D i i-tog stupca od D^T, a to je opet navedeni i-ti redak od D (jer je $C_i^T = C_i$, $\forall i$), pa je

$$
\left[DD^T\right]_{ii} = O_n^2 + \sum_{s=1}^{n-1} C_s^2 = \sum_{s=1}^{n-1} C_s^2.
$$

Koristeći ranija razmatranja, ovaj će blok na dijagonali imati element $(n-1) \cdot n$, što smo i trebali dobiti.

Slično, ovaj će blok izvan dijagonale na poziciji (k, l) imati element

$$
\sum_{s=1}^{n-1} r_{sk} r_{sl} \cdot n = n \cdot \sum_{s=1}^{n-1} r_{sk} r_{sl} = n \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} r_{sk} r_{sl} - r_{0k} r_{0l} \right)
$$

$$
= n \cdot (0 - r_{0k} r_{0l}) = n \cdot (0 - 1 \cdot 1) = -n.
$$

Ovime smo pokazali koji je oblik blokova na dijagonali od DD^T.
Što se tiče blokova u DD^T izvan dijagonale, ovaj je slučaj jednostavan jer samo iskoristimo prije pokazano $C_iC_j = 0$, za $i \neq j$. Odmah slijedi da će svi blokovi izvan dijagonale biti O_n. $\square$

8 Digraf djeljivog dizajna

Neka je N $(n^2 \times n^2)$ slijedeća blok matrica

$$N = \begin{bmatrix} O_n & I_n & O_n & \cdots & O_n \\ O_n & O_n & I_n & \cdots & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & I_n \\ -I_n & O_n & O_n & \cdots & O_n \end{bmatrix}.$$

Za matricu N imamo

$$NN^T = \begin{bmatrix} O_n & I_n & \cdots & O_n \\ O_n & O_n & \cdots & O_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_n & O_n & \cdots & I_n \\ -I_n & O_n & \cdots & O_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_n & O_n & \cdots & O_N & -I_n \\ I_n & O_n & \cdots & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_n & O_n & \cdots & I_n & O_n \end{bmatrix} = I_{n^2},$$

pa je $N^T = N^{-1}$.
Također, vrijedi

$$N^2 = \begin{bmatrix} O_n & O_n & I_n & \cdots & O_n \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -I_n & O_n & O_n & \cdots & O_n \\ O_n & -I_n & O_n & \cdots & O_n \end{bmatrix}, \ldots, N^n = \begin{bmatrix} -I_n & O_n & O_n & \cdots & O_n \\ O_n & -I_n & O_n & \cdots & O_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_n & O_n & O_n & \cdots & O_n \\ O_n & -O_n & O_n & \cdots & -I_n \end{bmatrix} = -I_{n^2},$$

iz čega slijedi da je $N^{2n} = N^n N^n = (-I_{n^2}) \cdot (-I_{n^2}) = I_{n^2}^2 = I_{n^2}$, tj. red matrice N jednak je $2n$.

Neka je R $(n^2 \times n^2)$ matrica dana s

$$R = R_n \otimes I_n = \begin{bmatrix} O_n & O_n & \dots & O_n & I_n \\ O_n & O_n & \dots & I_n & O_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_n & I_n & \dots & O_n & O_n \\ I_n & O_n & \dots & O_n & O_n \end{bmatrix}.$$

Odmah se vidi da je $R = R^T$.

Neka je sada $p = 2qn + 1$ potencija prostog broja, gdje je $q = \frac{p-1}{2n}$ neparan cijeli broj.
Po Lemi 1, znamo da postoji kosa $BGW(p+1, p, p-1)$, $W = [N^{w_{ij}}]$, s dijagonalom 0 nad cikličkom grupom $\langle N \rangle$.

Definiramo blok matricu B dimenzije $((p+1)n^2 \times (p+1)n^2)$ tako da definiramo $(n^2 \times n^2)$ (i, j)-ti blok od B sa

$$[B]_{ij} = \begin{cases} O_{n^2} & i = j \\ DN^{w_{ij}}R & i \neq j \end{cases}.$$

Neka su A_1 i A_2 disjunktne $(0, 1)$-matrice takve da je $B = A_1 - A_2$.
Pokažimo da je $A_1^T = A_2$. U tu svrhu, najprije ćemo pokazati da je $B^T = -B$.

Pogledajmo (i,j)-ti blok od B^T

$$\left[B^T\right]_{ij} = [B]_{ji}^T = \left(DN^{w_{ji}}R\right)^T.$$

Kako je $W = [N^{w_{ij}}]$ kosa BGW, nad cikličkom grupom $\langle N \rangle$ reda $2n$, vrijedi da je $N^{w_{ji}} = N^{w_{ij}+n} = N^{w_{ij}} \cdot (-I_{n^2}) = -N^{w_{ij}}$. Uzmemo li još u obzir ranije pokazano $R^T = R$ i $N^T = N^{-1}$, te da iz također ranije pokazanog $N^{-1} = N^T$ slijedi $\left(N^{w_{ij}}\right)^T = N^{-w_{ij}}$, dobivamo

$$\left[B^T\right]_{ij} = \left(D\left(-N^{w_{ij}}\right)R\right)^T = R^T\left(-N^{w_{ij}}\right)^T D^T = -RN^{-w_{ij}}D^T.$$

Direktnim uvrštavanjem lijeve i desne strane, lako se provjeri da vrijede slijedeće jednakosti: $RN = N^{-1}R$, $RD^T = DR$, $ND = DN$. Iz ovoga slijedi

$$\left[B^T\right]_{ij} = -N^{w_{ij}}RD^T = -N^{w_{ij}}DR = -DN^{w_{ij}}R = -[B]_{ij}.$$

Ovime smo pokazali d je $B^T = -B$.
Kako je $B = A_1 - A_2$, slijedi da je $B^T = A_1^T - A_2^T$ te $-B = A_2 - A_1$. Dobivamo

$$A_1^T - A_2^T = A_2 - A_1,$$

$$A_1^T + A_1 = A_2 + A_2^T,$$

iz čega slijedi da je $A_1^T = A_2$ (i $A_2^T = A_1$), pošto su A_1 i A_2 disjunktne $(0,1)$-matrice.

Teorem 1. *Matrice A_1 i A_2 su matrice susjedstva od*
$DDD\left(n^2(p+1), \frac{(n^2-n)p}{2}, \frac{(n^2-2n)p}{4}, \frac{(n-1)^2(p-1)}{2}, p+1, n^2\right)$.

Dokaz. Najprije ćemo pogledti kako izgleda (i,j)-ti blok od BB^T za $i,j \in \{1,2,\ldots,p+1\}$.

i-ti redak od B:

$$\left[DN^{w_{i1}}R \quad DN^{w_{i2}}R \quad \ldots O_{n^2} \quad DN^{w_{i\ \ i+1}}R \quad \ldots DN^{w_{i\ \ p+1}}R\right].$$

j-ti stupac od B^T:

$$\begin{bmatrix} \left(DN^{w_{j1}}R\right)^T \\ \left(DN^{w_{j2}}R\right)^T \\ \vdots \\ O_{n^2} \\ \left(DN^{w_{j\ \ j+1}}R\right)^T \\ \vdots \\ \left(DN^{w_{j\ \ p+1}}R\right)^T. \end{bmatrix}$$

Množenjem dobivamo da je

$$\left[BB^T\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{p+1} DN^{w_{ik}}R\left(DN^{w_{jk}}R\right)^T \cdot (1-\delta_{ik})(1-\delta_{jk}),$$

gdje posljednja dva faktora, $(1-\delta_{ik})$ i $(1-\delta_{jk})$, proizlaze iz toga što su samo i-ti blok i-tog retka od B te j-ti blok j-tog stupca d B^T jednaki O_{n^2} (dok su ostali elementi izraženi preko D, N i R).
Sređivanjem dobijemo

$$\left[BB^T\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{p+1}(1-\delta_{ik})(1-\delta_{jk})DN^{w_{ik}}\underbrace{RR^T}_{=I_{n^2}}N^{-w_{jk}}D^T$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1}(1-\delta_{ik})(1-\delta_{jk})DN^{w_{ik}-w_{jk}}D^T.$$

Sada, ako uzmemo $i = j$, dobijemo

$$\left[BB^T\right]_{ii} = \sum_{k=1}^{p+1}(1-\delta_{ik})^2 D \underbrace{N^{w_{ik}-w_{ik}}}_{=N^0=I_{n^2}} D^T$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1}(1-\delta_{ik})^2 DD^T = DD^T \sum_{k=1}^{p+1}(1-\delta_{ik})^2$$

$$= DD^T \sum_{k=1,k\neq i}^{p+1} 1 = DD^T \cdot (p+1-1) = p \cdot DD^T$$

Po Lemi 2 dobivamo

$$\left[BB^T\right]_{ii} = pnI_n \otimes (nI_n - J_n)\,.$$

Ako je pak $i \neq j$ imamo

$$\left[BB^T\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{p+1}(1-\delta_{ik})(1-\delta_{jk})DN^{w_{ik}-w_{jk}}D^T$$

$$= D\left(\sum_{k=1}^{p+1}(1-\delta_{ik})(1-\delta_{jk})N^{w_{ik}-w_{jk}}\right)D^T$$

$$= D\left(\sum_{k=1,k\neq i,j}^{p+1} N^{w_{ik}-w_{jk}}\right)D^T = D\left(\frac{p-1}{2n}\underbrace{\sum_{l=0}^{2n-1}N^l}_{=O_{n^2}}\right)D^T = O_{n^2},$$

gdje je u posljednjem koraku korišteno da je $\langle N\rangle$ ciklička grupa reda $2n$ te da je $W = [N^{w_{ij}}]$ kosa BGW$(p+1, p, p-1)$ s konstantnom dijagonalom nad $\langle N\rangle$ (konkretno korištena je druga točka iz definicije BGW).

Sve zajedno, BB^T bi općenito mogli zapisati kao

$$BB^T = npI_{p+1} \otimes I_n \otimes (nI_n - J_n)\,.$$

Kako je $B = A_1 - A_2$, to je

$$\begin{aligned} npI_{p+1} \otimes I_n \otimes (nI_n - J_n) &= BB^T \\ &= (A_1 - A_2)\left(A_1^T - A_2^T\right) \\ &= A_1A_1^T - A_1A_2^T - A_2A_1^T + A_2A_2^T. \end{aligned} \tag{2}$$

Na sličan se način dobiju i slijedeće jednakosti

$$\begin{aligned} A_1A_1^T + A_1A_2^T + A_2A_1^T + A_2A_2^T &= (A_1 + A_2)\left(A_1^T + A_2^T\right) \\ &= npI_{p+1} \otimes (I_n \otimes J_n + (n-2)J_{n^2}) \\ &+ (n-1)^2(p-1)\,(J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

$$A_1A_1^T - A_1A_2^T + A_2A_1^T - A_2A_2^T = (A_1 + A_2)\left(A_1^T - A_2^T\right) = O_{(p+1)n^2}. \tag{4}$$

$$A_1A_1^T + A_1A_2^T - A_2A_1^T - A_2A_2^T = (A_1 - A_2)\left(A_1^T + A_2^T\right) = O_{(p+1)n^2}. \tag{5}$$

Iz (2)+(3)+(4)+(5) dobijemo

$$\begin{aligned} 4A_1A_1^T &= npI_{p+1} \otimes I_n \otimes (nI_n - J_n) + npI_{p+1} \otimes (I_n \otimes J_n + (n-2)J_{n^2}) \\ &\quad + (n-1)^2(p-1)\,(J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2} \\ &= npI_{p+1} \otimes \underbrace{I_n \otimes nI_n}_{nI_{n^2}} \cancel{- npI_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n} + \cancel{npI_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n} \\ &\quad + npI_{p+1} \otimes (n-2)J_{n^2} \\ &\quad + (n-1)^2(p-1)\,(J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2}, \end{aligned}$$

pa je

$$A_1A_1^T = \frac{n^2p}{4}I_{p+1}\otimes I_{n^2} + \frac{n(n-2)p}{4}I_{p+1}\otimes J_{n^2} \\ + \frac{(n-1)^2(p-1)}{4}\left(J_{p+1}-I_{p+1}\right)\otimes J_{n^2}.$$

Iz (2)+(3)-(4)-(5) dobijemo opet isto tj. $A_2A_2^T = A_1A_1^T$.
Iz -(2)+(3)-(4)+(5) dobijemo

$$\begin{aligned} 4A_1A_2^T &= -npI_{p+1}\otimes I_n\otimes (nI_n - J_n) + npI_{p+1}\otimes (I_n\otimes J_n + (n-2)J_{n^2}) \\ &\quad + (n-1)^2(p-1)\left(J_{p+1}-I_{p+1}\right)\otimes J_{n^2} \\ &= -n^2pI_{p+1}\otimes I_{n^2}\overbrace{+npI_{p+1}\otimes I_n\otimes J_n + npI_{p+1}\otimes I_n\otimes J_n}^{2npI_{p+1}\otimes I_n\otimes J_n} \\ &\quad + n(n-2)pI_{p+1}\otimes J_{n^2} \\ &\quad + (n-1)^2(p-1)\left(J_{p+1}-I_{p+1}\right)\otimes J_{n^2}, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} A_1A_2^T &= \frac{-n^2p}{4}I_{p+1}\otimes I_{n^2} + \frac{np}{2}I_{p+1}\otimes I_n\otimes J_n \\ &\quad + \frac{n(n-2)p}{4}I_{p+1}\otimes J_{n^2} \\ &\quad + \frac{(n-1)^2(p-1)}{4}\left(J_{p+1}-I_{p+1}\right)\otimes J_{n^2}. \end{aligned}$$

Iz -(2)+(3)+(4)-(5) dobijemo opet isto tj. $A_2A_1^T = A_1A_2^T$.
Prema (1), ovime smo pokazali da su A_1 i A_2 matrice susjedstva $DDD\left(n^2(p+1), \frac{(n^2-n)p}{2}, \frac{(n^2-2n)p}{4}, \frac{(n-1)^2(p-1)}{2}, p+1, n^2\right)$ jer je zadovoljen nužan i dovoljan uvijet na matricama incidencije. $\square$

9 Asocijacijska shema s 5 klasa

Definirajmo još sada

$$\begin{aligned}
A_0 &= I_{n^2(p+1)} \\
A_3 &= (J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2} - A_1 - A_2 \\
A_4 &= I_{p+1} \otimes I_n \otimes (J_n - I_n) \\
A_5 &= I_{p+1} \otimes (J_n - I_n) \otimes J_n
\end{aligned}$$

Teorem 2. *Skup matrica $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ je komutativna asocijacijska shema s 5 klasa.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$.
Prvo, imamo

$$\begin{aligned}
A_3 &= J_{p+1} \otimes J_{n^2} - I_{p+1} \otimes J_{n^2} - A_1 - A_2 \\
&= J_{n^2(p+1)} - I_{p+1} J_{n^2} - A_1 - A_2, \\
A_4 &= I_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n - I_{p+1} \otimes I_n \otimes I_n \\
&= I_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n - A_0, \\
A_5 &= I_{p+1} \otimes J_n \otimes J_n - I_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n \\
&= I_{p+1} \otimes J_{n^2} - I_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih tri jednakosti dobijemo

$$A_3 + A_4 + A_5 = J_{n^2(p+1)} - A_1 - A_2 - A_0,$$

pa smo dobili

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = J_{n^2(p+1)}.$$

Nadalje, već smo pokazali $A_1^T = A_2 \in \mathcal{A}$ i $A_2^T = A_1 \in \mathcal{A}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} A_3^T &= ((J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2} - A_1 - A_2)^T \\ &= ((J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2})^T - A_1^T - A_2^T \\ &= (J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2} - A_2 - A_1 = A_3 \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

jer je matrica $(J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2}$ simetrična.
Također je $A_4^T = A_4 \in \mathcal{A}$ i $A_5^T = A_5 \in \mathcal{A}$ jer su te matrice simetrične.
Još trebamo pokazati $A_iA_j = A_jA_i \in \mathcal{A}$, $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
U prethodnom smo teoremu dobili jednakosti za $A_iA_j^T$, $i, j \in \{1, 2\}$. Naime, kako je $A_1 = A_2^T$ i $A_2 = A_1^T$, uvrštavanjem toga u dobivene jednakosti i sređivanjem dobijemo

$$\begin{aligned} A_1A_2 = A_2A_1 =& \frac{n^2p}{4}A_0 + \frac{n(n-2)p}{4}(A_5 + A_4 + A_0) \\ &+ \frac{(n-1)^2(p-1)}{4}(A_3 + A_1 + A_2) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1A_1 = A_2A_2 =& -\frac{n^2p}{4}A_0 + \frac{np}{2}(A_4 + A_0) + \frac{n(n-2)p}{4}(A_5 + A_4 + A_0) \\ &+ \frac{(n-1)^2(p-1)}{4}(A_3 + A_1 + A_2) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Za preostale slučajeve $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $A_iA_j = A_jA_i \in \mathcal{A}$ se dobije iz $A_1 + A_2 + A_3 = (J_{p+1} - I_{p+1}) \otimes J_{n^2}$.
Kako je

$$\begin{aligned} (A_2A_4)^T &= A_4^TA_2^T = A_4A_1, & (A_2A_5)^T &= A_5^TA_2^T = A_5A_1, \\ (A_1A_4)^T &= A_4^TA_1^T = A_4A_2, & (A_1A_5)^T &= A_5^TA_1^T = A_5A_2 \\ (A_3A_4)^T &= A_4^TA_3^T = A_4A_3, & (A_3A_5)^T &= A_5^TA_3^T = A_5A_3 \end{aligned}$$

nije potrebno pokazivati pripadnost $\mathcal{A}$ za sve indekse.

Iz

$$\begin{aligned} A_4 &= I_{p+1} \otimes I_n \otimes (J_n - I_n) \\ &= I_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n - I_{p+1} \otimes I_n \otimes I_n \\ &= I_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n - A_0, \end{aligned}$$

dobije se, na primjer,

$$A_1 A_4 = A_1 \left(I_{p+1} \otimes I_n \otimes J_n\right) - A_1 = \frac{n}{2}\left(A_1 + A_2\right) - A_1 \in \mathcal{A},$$

pa je i

$$\begin{aligned} A_4 A_2 = \left(A_1 A_4\right)^T &= \frac{n}{2}\left(A_1 + A_2\right)^T - A_1^T \\ &= \frac{n}{2}\left(A_2 + A_1\right) - A_2 \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

Direktinim uvršavanjem dobije se

$$A_4 A_5 = (n-1)\left[I_{p+1} \otimes (J_n - I_n) \otimes J_n\right] = (n-1) A_5 \in \mathcal{A}$$

$$\begin{aligned} A_4 A_4 &= I_{p+1} \otimes I_n \otimes ((n-2) J_n + I_n) \\ &= (n-2)\left(A_4 + A_0\right) + A_0 \\ &= (n-2) A_4 + (n-1) A_0 \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 A_5 &= I_{p+1} \otimes I_n \otimes (n(n-2) J_n + n I_n) \\ &= n(n-2)\left(A_4 + A_0\right) + n A_0 \\ &= n(n-2) A_4 + n(n-1) A_0 \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi

$$A_5 A_4 = A_5^T A_4^T = \left(A_4 A_5\right)^T = \left((n-1) A_5\right)^T = (n-1) A_5^T = (n-1) A_5 \in \mathcal{A}.$$

$\square$

Literatura

[1] H. Kharaghania, S. Suda, Divisible design digraphs and association schemes,2020, https://arxiv.org/abs/2004.00510

[2] Y. J. Ionin, H. Kharaghani,Doubly regular digraphs and symmetric designs, 2003, https://doi.org/10.1016/S0097-3165(02)00015-8

[3] D. Jungnickel, H. Kharaghani, Balanced generalized weighing matrices and their applications, 2004., https://www.researchgate.net/publication/44250809_Balanced_generalized_weighing_matrices_and_their_applications

[4] V. Krčadinac, Asocijacijske sheme, 2024., https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/asheme/asheme.pdf