Zadatak 1.41. Definiciju koherentne konfiguracije 1.38 možemo još oslabiti tako da umjesto 1. svojstva zahtijevamo postojanje relacija $R_0, \ldots, R_e$ koje u uniji daju dijagonalu $\{(x,x) \mid x \in X\}$. Takve konfiguracije nastaju Schurovom konstrukcijom od netranzitivnih permutacijskih grupa. U slučaju $e = 0$, kad je dijagonala samo jedna relacija, kažemo da je koherentna konfiguracija *homogena*. Dokažite da iz komutativnosti $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ slijedi homogenost.

Rješenje. Ukoliko je $|X| = 0$, tvrdnja trivijalno vrijedi, jer tada je $R_0 = \emptyset$ i to je jedina moguća relacija u upravo je jednaka dijagonali praznog skupa (jer je ona prazan skup).

Pretpostavimo stoga da je $|X| = n$ za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Promotrimo ekvivalentnu konstrukciju (pomoću matrica $A_0, \ldots, A_d$), iz Definicije 2.1. Komutativnost tada odgovara komutativnosti matrica $A_iA_j = A_jA_i$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Prepostavimo da konfiguracija nije homogena, tj. da postoje matrice $A_0, \ldots, A_e$ (bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to baš prvih e matrica, $0 < e \leq d$, u suprotnom ih permutiramo), takve da u sumi daju jediničnu matricu I. Zbog toga što one sadrže samo jedinice i nule, sve te matrice su dijagonalne s jedinicama i nulama na dijagonali. Također možemo pretpostaviti da nijedna od njih nije nul-matrica (jer ih u suprotnom možemo izbaciti i tako dobiti konfiguraciju bez nul-matrica).

Uzmimo jednu od tih matrica, primjerice A_0. Ona mora na dijagonali imati barem jednu nulu (u suprotnom je jednaka I, što je u kontradikciji s pretpostavkom), neka je ta nula u l-tom stupcu (ili retku).

Kako A_0 nije nul-matrica (po pretpostavci), postoji neko mjesto, m-to, na dijagonali gdje A_0 ima jedinicu.

Tada, zbog činjenice da je množenje dijagonalnim matricama zdesna upravo množenje stupaca s odgovarajućim koeficijentima s dijagonale, a slijeva množenje redaka s odgovarajućim koeficijentima s dijagonale, možemo zaključiti da matrica JA_0 ima nule u l-tom stupcu, a matrica A_0J ima jedinice u m-tom retku. Dakle, vrijedi

$$(JA_0)_{ml} = 0 \neq 1 = (A_0J)_{ml},$$

pa nije moguće da vrijedi $JA_0 = A_0J$.

Kako je $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$, po definiciji, tada (zbog pretpostavke komutativnosti) vrijedi:

$$A_0J = A_0\sum_{i=0}^{d} A_i = \sum_{i=0}^{d} A_0A_i = \sum_{i=0}^{d} A_iA_0 = \left(\sum_{i=0}^{d} A_i\right) A_i = JA_0,$$

što je kontradikcija s prethodno dobivenim $JA_0 \neq A_0J$ pa zaključujemo da je komutativna koherentna konfiguracija homogena.