Zadatak 1.35.

Patrik Vasung

Neka je $\mathcal{D}$ simetrični (v, k, λ) dizajn, te neka je G graf definiran kao u zadatku. Pokažimo da je G povezan graf dijametra $d = 3$. Neka su x i y vrhovi grafa G. Pretpostavimo da su x i y blokovi. Iz teorema 1.29. slijedi da se x i y sijeku u λ točaka. Neka je $z \in x \cap y$. Sada imamo da je $x \sim z$ i $y \sim z$, pa je (x, z, y) put duljine 2 od x do y. Pretpostavimo sada da su x i y točke. Tada postoji λ blokova koji sadrže x i y. Neka je z jedan takav blok. Tada imamo da je (x, z, y) put duljine 2 od x do y. Posljednji slučaj je da je jedan od vrhova x, y točka, a drugi vrh blok. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je x točka, a y blok. Ako je $x \in y$, onda je (x, y) put od x do y duljine 1. Pretpostavimo da $x \notin y$. Neka je $z \in y$ proizvoljan, te neka je w blok koji sadrži x i z. Tada je (x, w, z, y) put od x do y duljine 3. Graf G je bipartitan pa u posljednjem slučaju duljina puta mora biti neparna, a kako očito ne postoji put duljine 1 od x do y put duljine 3 kojeg smo konstruirali je najkraći mogući. Očito postoji točka $x \in \{1, \ldots, v\}$ i blok y koji je ne sadrži, pa graf G ima dijametar $d = 3$.
Pokažimo da je G distancijsko regularan graf. Znamo da je G regularan graf stupnja k. Naime, svaku točku sadrži $\lambda\frac{v-1}{k-1} = \frac{k(k-1)}{k-1} = k$ blokova , pri čemu druga jednakost slijedi iz toga što je dizajn simetričan. Kako svaki blok sadrži k točaka, imamo da je svaki vrh grafa stupnja k. Neka su sada x, y vrhovi takvi da je $\partial(x, y) = 0$. Tada je $x = y$. Bez obzira na to je li x točka ili blok vrijedi $|N_1(x)| = k$, pa imamo

$$b_0 = |N_1(x) \cap N_1(y)| = |N_1(x) \cap N_1(x)| = |N_1(x)| = k.$$

Neka su x, y vrhovi takvi da je $\partial(x, y) = 1$. Tada je jedan od vrhova točka, a drugi blok koji ju sadrži. Pretpostavimo da je x točka, a y blok takav da je $x \in y$. Tada je

$$N_2(x) = \{1, \ldots, v\} \setminus \{x\}.$$

Dakle, imamo

$$|N_2(x) \cap N_1(y)| = |N_1(y) \setminus \{x\}| = k - 1.$$

Nadalje, vrijedi

$$|N_0(x) \cap N_1(y)| = |\{x\}| = 1.$$

Pretpostavimo sada da je x blok, a y točka takva da vrijedi $y \in x$. Tada je

$$N_2(x) = \mathcal{D} \setminus \{x\},$$

pa je

$$|N_2(x) \cap N_1(y)| = |N_1(y) \setminus \{x\}| = k - 1.$$

Ponovno imamo da je

$$|N_0(x) \cap N_1(y)| = |\{x\}| = 1.$$

zaključujemo da vrijedi $b_1 = k - 1$ i $c_1 = 1$. Pretpostavimo da su x, y vrhovi grafa G takvi da vrijedi $\partial(x, y) = 2$. Tada su x i y ili oba blokovi ili oba točke. Pretpostavimo prvo da su x i y točke. Tada vrijedi $N_3(x) = \{B \in \mathcal{D} \mid x \notin B\}$ i $N_1(y) = \{B \in \mathcal{D} \mid y \in B\}$. Kako točno λ blokova sadrži i x i y, a sveukupno k blokova sadrži y imamo da je

$$|N_3(x) \cap N_1(y)| = k - \lambda.$$

U slučaju da su x i y blokovi imamo da je $N_3(x) = \{z \in \{1, \ldots, v\} \mid z \notin x\}$ i $N_1(y) = \{z \in \{1, \ldots, v\} \mid z \in y\}$. Kako y sadrži točno k točaka, a x i y se sijeku u λ točaka, ponovno zaključujemo

$$|N_3(x) \cap N_1(y)| = k - \lambda.$$

Dakle, $b_2 = k - \lambda$. Bez obzira na to jesu li x i y točke ili blokovi vrijedi

$$c_2 = |N_1(x) \cap N_1(y)| = \lambda,$$

jer su svake dvije točke sadržane u λ blokova, a svaka dva bloka se sijeku u λ točaka. Neka su sada x, y vrhovi grafa G takvi da je $\partial(x, y) = 3$. Pretpostavimo prvo da je x točka, a y blok takav da vrijedi $x \notin y$. Tada je $N_2(x) = \{1, \ldots, v\} \setminus \{x\}$, a kako $x \notin y$ imamo

$$|N_2(x) \cap N_1(y)| = |N_1(y)| = k.$$

Pretpostavimo sada da je x blok, a y točka takva da vrijedi $y \notin x$. Imamo da je $N_2(x) = \mathcal{D} \setminus \{x\}$ i vrijedi

$$|N_2(x) \cap N_1(y)| = |N_1(y)| = k.$$

Zaključujemo, $c_3 = k$. Ovime smo pokazali da je G distancijsko regularan graf sa presječnim nizom

$$\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\} = \{k, k - 1, k - \lambda; 1, \lambda, k\}.$$

Presječni brojevi pripadne asocijacijske sheme su dani sa matricama

$$[p_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-k \end{bmatrix}$$

$$[p_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & v-k \\ 0 & 0 & v-k & 0 \end{bmatrix}$$

$$[p_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & k-\lambda \\ 1 & 0 & v-2 & 0 \\ 0 & k-\lambda & 0 & v-2k+\lambda \end{bmatrix}$$

$$[p_{ij}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & v-k-1 \\ 1 & 0 & v-k-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pokažimo sada da svaka asocijacijska shema sa ovim presječnim brojevima dolazi od nekog simetričnog dizajna. Neka je G_0, G_1, G_2, G_3 asocijacijska shema čiji presječni brojevi su dani prethodnim matricama. Neka je G distancijsko regularan graf sa presječnim nizom

$$\{b_0, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3\} = \{k, k-1, k-\lambda; 1, \lambda, k\}.$$

Neka je x_0 vrh grafa G. Definiramo simetrični dizajn $\mathcal{D}$ na sljedeći način. Uočimo da vrhova u grafu G čija udaljenost od x_0 je parna ima $p_{00}^0 + p_{22}^0 = 1 + v - 1 = v$. Označimo te vrhove sa $1, \ldots, v$. Nadalje, vrhova u grafu G čija udaljenost od x_0 je neparna ima $p_{11}^0 + p_{33}^0 = k + v - k = v$. Neka je z vrh čija udaljenost od x_0 je neparan broj. Vrh z je susjedan sa $p_{11}^0 = k$ vrhova i svi oni su od x_0 udaljeni za paran broj, pa vrhu z možemo pridružiti $B_z \subseteq \{1, \ldots, v\}$, gdje je B_z $k-$člani skup susjeda od z. Tvrdimo da je

$$\mathcal{D} = \{B_z \mid \partial(z, x_0) \equiv 1 (\text{mod } 2)\}$$

simetrični (v, k, λ) dizajn. Već smo argumentirali da je $|\mathcal{D}| = v$. Neka su $x, y \in \{1, \ldots, v\}, x \neq y$. Broj blokova koji sadrže točke x i y dan je sa

$$|N_1(x) \cap N_1(y)| = p_{11}^2 = \lambda.$$

Prema tome, $\mathcal{D}$ je simetrični (v, k, λ) dizajn.