Definicija 1. Neka je zadana koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \dots, R_d$. Kažemo da je **primitivna** ako su sve relacije $R_1, \dots, R_d$ povezane, a **impritivna** ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.

Uzmimo bilo koji skup indeksa $\Omega \subseteq \{0, \dots, d\}$ i promotrimo odgovarajuću uniju relacija $R_\Omega = \bigcup_{k \in \Omega} R_k$. Sada (im)primitivne koherentne konfiguracije možemo karakterizirati na sljedeći način:

Teorem 2. *Koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, \dots, R_d$ je imprimitivna ako i samo ako postoji skup indeksa Ω takav da je $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \dots, d\}$ i pritom je R_Ω relacija ekvivalencije.*

Neka je sada dana $(X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ imprimitivna koherentna konfiguracija. Neka je $\Sigma = \{X_1, \dots, X_r\}$ particija skupa vrhova X na klase ekvivalencije od R_Ω. Pokazali smo da su svi X_i, tj. vlakna iste kardinalnosti (oznaka m) te da vrijedi

$$n = |X| = \sum_{i=1}^{r} |X_i| = r \cdot m$$

Primjetimo da vrijedi $1 < r, m < n$.
Dakle, u slučaju imprimitivne koherentne konfiguracije, broj vrhova n je složen broj.

Primjer 3. Neka je $X = \mathbb{Z}_n$ grupa cijelih brojeva modulo n. Definirajmo da su x i y susjedni u G_i ako je $x - y = \pm i$, za $i = 0, 1, 2, \dots$. Na taj način smo dobili simetričnu koherentnu konfiguraciju tj. asocijacijsku shemu sa $d = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ klasa koju zovemo **poligonom** reda n.

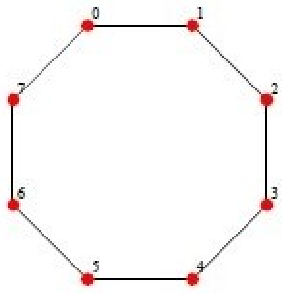
Zadatak 4 (Zadatak 4.2)**.** Dokažite da je poligon reda $n \geq 2$ primitivan ako i samo ako je n prost broj.

Dokaz. Ako je n prost broj, po prethodnim razmatranjima slijedi da je poligon primitivan. Pretpostavimo sada da je n složen broj. Neka je r neki njegov netrivijalni djelitelj (očito je onda $r \leq \frac{n}{2}$). Relacija kongruencije modulo r na skupu vrhova Z_n je relacija ekvivalencije, a dobije se kao unija R_i (gdje su R_i relacije susjedstva grafova G_i), pri čemu je $r \mid i$, tj. lako se pokaže da vrijedi

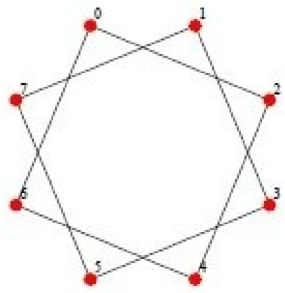
$$R_{\text{mod } r} = \bigcup_{r|i} R_i$$

$\square$

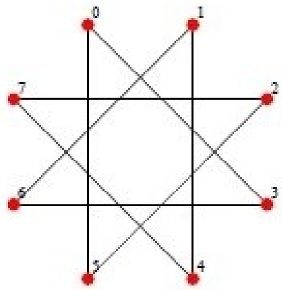
Promotrimo danu konstrukciju na jednostavnom primjeru za $n = 8$:



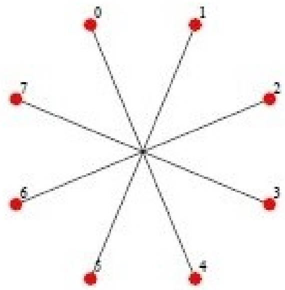
G_1



G_2



G_3



G_4

Neka su R_1, R_2, R_3, R_4 relacije susjedstva grafova G_1, G_2, G_3, G_4, a R_0 dijagonala. Netrivijalnu relaciju ekvivalencije dobivamo kao $R_0 \cup R_4$ pri čemu su klase ekvivalencije onda $\{0, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 6\}$ i $\{3, 7\}$.

Promotrimo sada drugi zadatak.
Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{e\}$, $C_1, \ldots, C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije $R_i = \{(x, y) \in G \times G | \ y^{-1}x \in C_i\}$. Tako dobijemo koherentnu kongiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna. Prvo pokažimo sljedeću lemu:

Lema 5. *$N \leq G$ je normalna podgrupa grupe G ako i samo ako je unija nekih njenih klasa konjugacije.*

Dokaz. Neka je N normalna podgrupa grupe G i $n \in N$ proizvoljan. Zbog normalnosti vrijedi $gng^{-1} \in N$ za svaki $g \in G$, tj $[n] \subseteq N$. Dakle,

$$N = \bigcup_{n \in N} [n]$$

Obratno, ako je N podgrupa od G koja je unija nekih njenih klasa konjugacije, očito vrijedi $xNx^{-1} = N$ za svaki $x \in G$. □

Primjetimo da ako je $N = \{e\}$, onda je $N = C_0$, a ako je $N = G$, onda je N unija svih klasa konjugacije.

Zadatak 6 (Zadatak 4.3)**.** Dokažite da klase konjugacije konačne grupe G čine primitivnu koherentnu konfiguraciju ako i samo ako je grupa G jednostavna, tj. ako nema netrivijalnih normalnih podgrupa.

Dokaz. Neka sada klase konjugacije konačne grupe G čine primitivnu koherentnu konfiguraciju. Pretpostavimo da grupa G nije jednostavna, tj. neka je N neka njena netrivijalna normalna podgrupa. Po prethodnoj lemi slijedi da postoji skup indeksa Ω takav da je $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ i $N = \bigcup_{k \in \Omega} C_k$. Stavimo $R = \bigcup_{k \in \Omega} R_k$. Pokazat ćemo da je R relacija ekvivalencije, iz čega onda po Teoremu 4 slijedi da je G imprimitivna, što je kontradikcija. Refleksivnost je očita zbog $R_0 \subset R$. Pokažimo simetričnost. Neka je $(x, y) \in R$. Tada je $(x, y) \in R_i$ za neki $i \in \Omega$, tj. vrijedi $y^{-1}x \in C_i \subset N$. Kako je N podgrupa od G, slijedi da je i $(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y \in N$, pa je $x^{-1}y \in C_j$ za neki $j \in \Omega$, tj. $(y, x) \in R_j \subset R$, iz čega slijedi da je $(y, x) \in R$. Pokažimo tranzitivnost. Neka su $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$. To znači da su $(x, y) \in R_i$ i $(y, z) \in R_j$ za neke $i, j \in \Omega$, tj. $y^{-1}x \in C_i \subset N$ i $z^{-1}y \in C_j \subset N$. Kako je N podgrupa od G slijedi da je i $z^{-1}yy^{-1}x = z^{-1}x \in N$, tj. $z^{-1}x \in R_k \subset R$ za neki $k \in \Omega$, tj. $(x, z) \in R$.

Obratno, pretpostavimo da je grupa G prosta i pretpostavimo da klase konjugacije te grupe čine imprimitivnu koherentnu konfiguraciju, tj. neka postoji netrivijalan skup indeksa Ω takav da je R_Ω relacija ekvivalencije. Stavimo $N = \bigcup_{k \in \Omega} C_k$. Prvo pokažimo da je N podgrupa od G. Neka su $a, b \in N$. To znači da su $a \in C_i$ i $b \in C_j$ za neke $i, j \in \Omega$. Vrijedi $b^{-1}ab \in C_i$ pa je $(ab, b) \in R_i \subset R$ te $b = a^{-1}ab \in C_j$ pa je $(ab, a) \in R_j \subset R$. Kako je R relacija ekvivalencije, vrijedi da je $(a, b) \in R$, tj. $(a, b) \in R_k$ za neki $k \in \Omega$, tj. $b^{-1}a \in C_k \subset N$. Dakle, N je podgrupa, pa po Lemi 10 slijedi da je N netrivijalna normalna podgrupa, što je kontradikcija. □

Prisjetimo se da koherentne konfiguracije možemo dobiti Schurovom konstrukcijom promatrajući tranzitivno djelovanje neke grupe permutacija $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ na skup X. U tom slučaju kažemo da je grupa G **imprimitivna** ako postoji netrivijalna particija od X koja je G-invarijantna, tj. koju G preslikava u samu sebe. U suprotnom, ako G čuva samo trivijalne particije (na jednočlane podskupove i na cijeli X), kažemo da je **primitivna**.

Zadatak 7 (Zadatak 4.10)**.** (Im)primitivnost tranzitivne permutacijske grupe G ekvivalentna je (im)primitivnosti koherentne konfiguracije dobivene Schurovom konstrukcijom od G.

Dokaz. Neka je G imprimitivna tranzitivna permutacijska grupa. Tada postoji netrivijalna G-invarijantna particija $X_1, \ldots, X_r$ od X. Neka je R relacija ekvivalencije na X čije su klase ekvivalencije upravo elementi ove particije. Sjetimo se da su relacije $R_0, \ldots, R_d$ kod koherentnih konfiguracija dobivenih Schurovom konstrukcijom upravo orbitale elemenata iz $X \times X$ te da te relacije čine particiju od $X \times X$. Iz tog razloga očigledno je da vrijedi $R = \bigcup_{k \in \Omega} R_k$ za neki skup indeksa Ω takav da je $0 \subseteq \Omega \subseteq \{0, \ldots, d\}$. Kad bi $\Omega = \{0\}$, onda bi klase ekvivalencije bile jednočlane, a kad bi $\Omega = \{0, \ldots, d\}$, onda bi imali samu jednu klasu ekvivalencije. U oba slučaja to je kontradikcija s pretpostavkom da je $X_1, \ldots, X_m$ netrivijalna particija.

Obratno, neka postoji skup indeksa Ω takav da je $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$ i R_Ω relacija ekvivalencije. Označimo sa $X_1, \ldots, X_r$ klase ekvivalencije te relacije. Očito onda imamo barem dvije klase i klase nisu jednočlane. Nadalje, kako je $R_0 \subset R_\Omega$, one očito čine netrivijalnu particiju od X. Pokažimo da je ta particija G-invarijantna. Neka je X_i proizvoljni član particije. Pretpostavimo da postoji $g \in G$ takav da je $X_i^g \neq X_i$ i $X_i^g \cap X_i \neq \emptyset$. Onda postoji $z \in X_i^g \cap X_i$, $z = y^g, y \in X_i$. Kako su $y, z \in X_i$, slijedi da je $(y, z) \in R_k$ za neki $k \in \Omega$. No sjetimo se da je R_k orbitala pri djelovanju grupe G, pa je i $(y^g, z^g) = (z, z^g) \in R_k \subset R_\Omega$. No, onda za svaki $w \neq z$ iz X_i vrijedi $(w, z) \in R_u$ za neki $u \in \Omega$, tj. $(w^g, z^g) \in R_u \subset R_\Omega$, pa zbog simetričnosti i tranzitivnosti relacije slijedi $(w^g, z) \in R_\Omega$. Dakle, w^g i z su u istoj klasi i to X_i, a kako je w bio proizvoljan slijedi $X_i^g = X_i$ što je kontradikcija. $\square$