

Asocijacijske sheme

Domaća zadaća

Paula Džigumović

Zadatak 2.34. *Odredite svojstvene vrijednosti permutacijske matrice.*

Rješenje. Neka je σ proizvoljna permutacija skupa n elemenata i $P = [p_{ij}]$ odgovarajuća $n \times n$ permutacijska matrica, tj. vrijedi

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \sigma(i) = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Prikažimo permutaciju σ kao produkt disjunktne ciklusa, $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_k$, $1 \leq k \leq n$, pri čemu je ciklus c_i duljine d_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Disjunktne ciklusi komutiraju pa je svejedno kojim redom su zapisani u produktu.

Neka je P_i permutacijska matrica ciklusa c_i . Svojstvene vrijednosti matrice P_i rješenja su jednadžbe

$$\det(P_i - \lambda I) = 0,$$

gdje I označava $d_i \times d_i$ jediničnu matricu. Prethodna jednadžba svodi se na jednadžbu $\lambda^{d_i} = 1$, čija su rješenja d_i -ti korijeni jedinice.

Označimo s E_i skup svojstvenih vrijednosti matrice P_i , $i = 1, \dots, k$.

Neka je $(e_{11}, \dots, e_{1d_1})$ baza za ciklus c_1 , $(e_{21}, \dots, e_{2d_2})$ baza za ciklus c_2 , \dots , $(e_{k1}, \dots, e_{kd_k})$ baza za ciklus c_k . Prikaz permutacijske matrice permutacije σ u bazi

$$(e_{11}, \dots, e_{1d_1}, e_{21}, \dots, e_{2d_2}, \dots, e_{k1}, \dots, e_{kd_k})$$

je blok-dijagonalna matrica s blokovima koji odgovaraju ciklusima, tj.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_k \end{bmatrix}.$$

Iz ovog prikaza vidljivo je da su svojstvene vrijednosti matrice P upravo svojstvene vrijednosti matrice P_i .

Dakle, skup svojstvenih vrijednosti matrice P jednak je

$$\bigcup_{i=1}^k E_i.$$