Asocijacijske sheme

Domaća zadaća

Lucija Relić

1 Uvod

Zadatak 1.44. *Pod kojim uvjetom na grupu G njezine klase konjugacije čine asocijacijsku shemu, tj. simetričnu koherentnu konfiguraciju?*

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, podsjetimo se na koji način od klasa konjugacije grupe G dobivamo koherentnu konfiguraciju.

Promatramo apstraktnu grupu G reda n. Za elemente g_1, g_2 kažemo da su *konjugirani* ako postoji $h \in G$ takav da je $g_2 = h^{-1} g_1 h$. Klase ekvivalencije relacije konjugiranosti nazivamo *klasama konjugacije* grupe G.

Primjer 1.42. *Neka je G grupa reda n, a $C_0 = \{1\}$, $C_1, \ldots C_d$ njezine klase konjugacije. Definiramo relacije*

$$R_i = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}.$$

Tako dobijemo koherentnu konfiguraciju reda n s d klasa koja je komutativna.

Naravno, dobivena koherentna konfiguracija ne mora biti simetrična. Sjetimo se, koherentna konfiguracija je simetrična ako za svaki $i = 0, 1, \ldots, d$ vrijedi $R_i^t = R_i$. U kontekstu klasa konjugacije grupe G uvjet simetričnosti postaje

$$\{(y, x) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\} = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\},$$

odnosno

$$\{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in C_i\} = \{(x, y) \in G \times G \mid y^{-1}x \in C_i\}.$$

Dakle, za simetričnu koherentnu konfiguraciju vrijedi

$$y^{-1}x \in C_i \iff x^{-1}y \in C_i, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, d.$$

Zaključujemo da je nužan i dovoljan uvjet simetričnosti promatrane koherentne konfiguracije zatvorenost klasa konjugacije na invertiranje, tj. da je svaki element $g \in G$ konjugiran svom inverzu. Taj uvjet može se izraziti pomoću teorije reprezentacija i karaktera konačne grupe G.

2 Reprezentacije i karakteri konačnih grupa

Definicija 2.1. *Neka je G konačna grupa. Za $n \in \mathbb{N}$, n-dimenzionalna* reprezentacija *od G nad poljem $\mathbb{C}$ je homomorfizam grupa $\rho \colon G \to GL(V)$, pri čemu je V n-dimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.*

Definicija 2.2. *Neka su $\rho_1 \colon G \to GL(V)$ i $\rho_2 \colon G \to GL(W)$ reprezentacije od G nad $\mathbb{C}$. Kažemo da su reprezentacije ρ_1 i ρ_2* ekvivalentne *ako postoji invertibilno linearno preslikavanje $M \colon V \to W$ takvo da ze sve $g \in G$ i $v \in V$ vrijedi*

$$M(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)M(v),$$

odnosno ako postoji M takav da je

$$\rho_1 = M^{-1}\rho_2 M.$$

Definicija 2.3. *Neka je G konačna grupa i $\rho \colon G \to GL(V)$ reprezentacija od G nad $\mathbb{C}$. Definiramo* karakter *reprezentacije kao funkciju $\chi \colon G \to \mathbb{C}$,*

$$\chi(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g)), \quad g \in G.$$

Prisjetimo se, za vektorski prostor V, trag operatora $A \in GL(V)$ je zbroj dijagonalnih elemenata u matričnom prikazu tog operatora u nekoj bazi ili ekvivalentno, zbroj njegovih svojstvenih vrijednosti računajući kratnosti.

Kažemo da je karakter *trivijalan* ako je konstantno preslikavanje u 1.

Lema 2.4. *Pripadni karakteri ekvivalentnih reprezentacija su jednaki.*

Dokaz. Matrični prikazi ekvivalentnih reprezentacija su slične (konjugirane) matrice, a slične matrice imaju isti trag. □

Propozicija 2.5. *Neka je G konačna grupa, V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, $\rho \colon G \to GL(V)$ reprezentacija od G te χ pridruženi karakter. Tada vrijedi:*

a) ako su $x, y \in G$ u istoj klasi konjugacije, tada je $\chi(x) = \chi(y)$,

b) za svaki $g \in G$ je $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Dokaz. a) Za $x, y \in G$ u istoj klasi konjugacije postoji $h \in G$ takav da je $y = h^{-1}xh$. Budući da je ρ homomorfizam grupa, za svaki $g \in G$ vrijedi $\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$ pa imamo

$$\rho(y) = \rho(h^{-1})\rho(x)\rho(h) = (\rho(h))^{-1}\rho(x)\rho(h).$$

Vrijedi $\mathrm{Tr}\left((\rho(h))^{-1}\rho(x)\rho(h)\right) = \mathrm{Tr}(\rho(x))$ pa stoga i $\chi(x) = \chi(y)$.

b) Neka je $g \in G$ reda k, tj. $g^k = 1$. Tada je $\rho(1) = \rho(g^k) = \rho(g)^k$, odnosno svaka svojstvena vrijednost od $\rho(g)^k$ jednaka je 1. Zaključujemo da je svaka svojstvena vrijednost od $\rho(g)$ jednaka nekom k-tom korijenu jedinice. Slijedi da za svaku svojstvenu vrijednost λ_i od $\rho(g)$ vrijedi $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. Dakle,
$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}.$$

□

Definicija 2.6. *Neka je G grupa. Za funkciju $f\colon G \to \mathbb{C}$ kažemo da je* klasna funkcija *ako za sve $x, y \in G$ koji su međusobno konjugirani vrijedi $f(x) = f(y)$.*

Iz Propozicije 2.5 jasno je da su karakteri klasne funkcije.

Korolar 2.7. *Neka je G konačna grupa i $g \in G$. Elementi g i g^{-1} su međusobno konjugirani ako i samo ako je $\chi(g) \in \mathbb{R}$ za svaki karakter χ.*

Skica dokaza. Ako su elementi g i g^{-1} međusobno konjugirani, odnosno sadržani u istoj klasi konjugacije, iz prethodne propozicije slijedi da vrijedi $\chi(g) = \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, pa stoga zaključujemo i $\chi(g) \in \mathbb{R}$.

Obratno, pretpostavimo da karakteri $\chi(g)$ poprimaju realne vrijednosti za sve $g \in G$. Kad neki element g i njegov inverz g^{-1} ne bi bili u istoj klasi konjugacije, tada bi postojao karakter χ takav da $\chi(g) \neq \chi(g^{-1})$.[1] Međutim, budući da je $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} \in \mathbb{R}$ vrijedi $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ čime dobivamo kontradikciju. □

Definicija 2.8. *Za grupu G kažemo da je* ambivalentna *ako svi njeni karakteri poprimaju realne vrijednosti.*

Konačno, klase konjugacije grupe G čine asocijacijsku shemu na način opisan u Primjeru 1.42 ako i samo ako je G ambivalentna grupa.

[1] Za dokaz ove tvrdnje potrebna je činjenica da ireducibilni karakteri čine bazu klasnih funkcija.

Literatura

[1] Ion Armeanu. „About ambivalent groups”. *Annales mathématiques Blaise Pascal* 3.2 (1996.), str. 17–22. URL: `http://eudml.org/doc/79162`.

[2] K. Maegher C. Godsil. *Erdős-Ko-Rado Theorems: Algebraic Approaches*. Cambridge University Press, 2016.

[3] Peter J. Cameron. *Permutation Groups*. Cambridge University Press, 1999.

[4] C. Godsil. *Association Schemes*. 2018.

[5] V. Krčadinac. *Asocijacijske sheme*. 2023.