Asocijacijske sheme - domaća zadaća

Helena Marciuš

20. svibnja 2024.

Zadatak 4.32. *Proučite sustave imprimitivnosti od $H(3,2)$ i $J(6,3)$ i uvjerite se da su to sheme tipa B_1. Dokažite da su $H(3,q)$, $q > 2$ i $J(v,3)$, $v > 6$ primitivne.*

Prisjetimo se prvo definicije (im)primitive koherentne konfiguracije.

Definicija 4.1. *Neka je $\mathcal{X}$ koherentna konfiguracija sa skupom vrhova X i relacijama $R_0, R_1, \ldots, R_d$. Kažemo da je $\mathcal{X}$ primitivna ako su relacije $R_1, \ldots, R_d$ povezane, a imprimitivna ako je bar jedna od tih relacija nepovezana.*

Hammingova shema

Definicija (Hammingova shema)**.** *Neka je F skup od q simbola ("slova"). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene d-torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ i $y = (y_1, ..., y_d)$ definiramo kao broj različitih koordinata: $\partial(x,y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Funkcija $\partial\colon X \times X \to \mathbb{R}$ je takozvana Hammingova metrika. Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti $\partial(x,y) = i$. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d,q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.*

Skup vrhova sheme $H(3,2)$ je $X = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$. Na slici 1 vidimo Hammingove grafove G_0, G_1, G_2 i G_3. Vidimo da grafovi G_2 i G_3 nisu povezani. Dakle, $H(3,2)$ je imprimitivna shema.

Promotrimo sada sustave imprimitivnosti od $H(3,2)$. $R_\Omega = \bigcup\limits_{i \in \Omega} R_i$ je relacija ekvivalencije za $\Omega = \{0,2\}$ i $\Omega = \{0,3\}$.

Za $\Omega = \{0,2\}$ imamo $r = 2$ vlakna veličine $m = 4$. Na slici 1c vidimo da je relacija R_2 susjedstvno u grafu $2 \cdot K_4$, a na slici 2a vidimo da relacije R_1 i R_3 u uniji daju susjedstvo u grafu $K_{4,4}$. Dobivamo sljedeću kvocijentnu konfiguraciju:

- Vrhovi su $X_1 = \{000, 011, 101, 110\}$ i $X_2 = \{001, 010, 100, 111\}$
- Relacije su $\tilde{R_0} = \tilde{R_2} = \{(X_1, X_1), (X_2, X_2)\}$ i $\tilde{R_1} = \tilde{R_3} = \{(X_1, X_2)\}$

Za $\Omega = \{0,3\}$ imamo $r = 4$ vlakna veličine $m = 2$. Na slici 1d vidimo da je R_3 susjedstvo u grafu $4 \cdot K_2$, a na slici 2b vidimo da je $R_1 \cup R_2$ susjedstvo u grafu $K_{2,2,2,2}$. Dobivamo sljedeću kvocijentnu konfiguraciju:

- Vrhovi su $X_1 = \{000, 111\}$, $X_2 = \{001, 110\}$, $X_3 = \{010, 101\}$ i $X_4 = \{011, 100\}$
- Relacije su $\tilde{R_0} = \tilde{R_3} = \{(X_1, X_1), (X_2, X_2), (X_3, X_3), (X_4, X_4)\}$ i
  $\tilde{R_1} = \tilde{R_2} = \{(X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_1, X_4), (X_2, X_3), (X_2, X_4), (X_3, X_4)\}$.

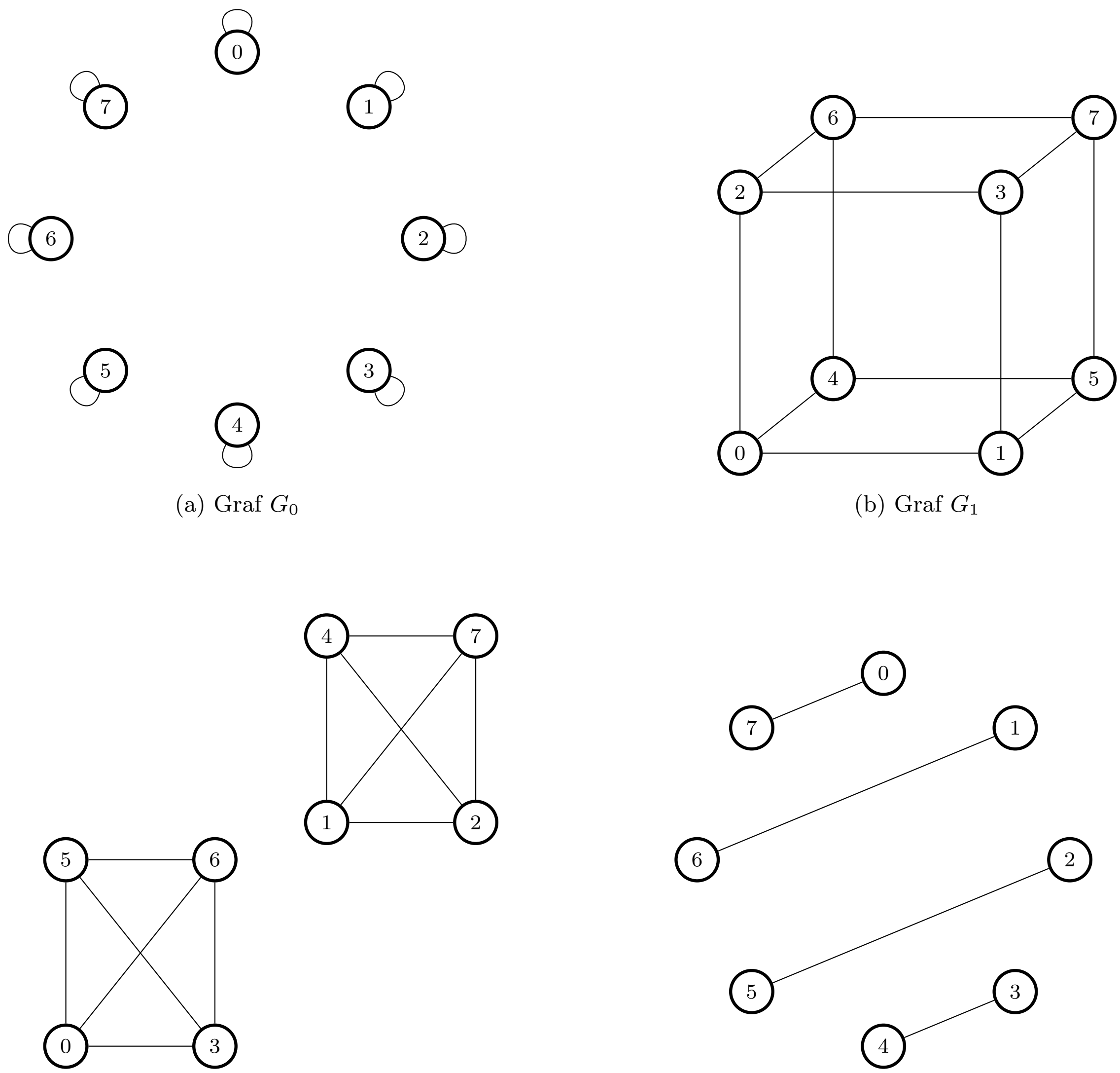
Na slici 3 vidimo kvocijentne konfiguracije od $H(3,2)$. Dakle, zatvoreni skupovi su dvočlani, a kvocijentne konfiguracije imaju jednu klasu pa je $H(3,2)$ shema tipa B_1.

Pokažimo još da je $H(3,q), q > 2$ primitivna. Koristimo karakterizaciju imprimitivnosti preko zatvorenih skupova.

Definicija. *Za podskup indeksa Ω kažemo da je zatvoren ako vrijedi $\Omega^2 = \Omega$ gdje je*

$$\Omega^2 = \Omega\Omega = \{k \in \{0, \ldots d\} \mid \textit{postoje } i, j \in \Omega \textit{ takvi da je } p_{ij}^k > 0\}.$$

Teorem. *Koherentna konfiguracije je imprimitivna ako i samo ako postoji zatvoreni podskup Ω koji je netrivijalan: $\{0\} \subsetneq \Omega \subsetneq \{0, \ldots, d\}$*



(a) Graf G_0 (b) Graf G_1

(c) Graf G_2 (d) Graf G_3

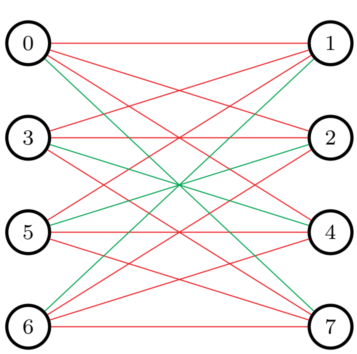
Slika 1: Hammingovi grafovi

Odnosno, koherentna konfiguracije je primitivna ako i samo ako ne postoji zatvoreni podskup Ω koji je netrivijalan. Pronađimo prvo presječne matrice od $H(3,q)$.

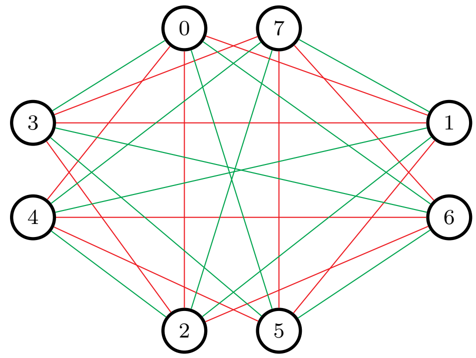
$$[p_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3(q-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(q-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (q-1)^3 \end{bmatrix} \qquad [p_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & q-2 & 2(q-1) & 0 \\ 0 & 2(q-1) & 2(q-2)(q-1) & (q-1)^2 \\ 0 & 0 & (q-1)^2 & (q-2)(q-1)^3 \end{bmatrix}$$

$$[p_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2(q-2) & q-1 \\ 1 & 2(q-2) & 2q+(q-2)^2 & 2(q-2)(q-1) \\ 0 & q-1 & 2(q-2)(q-1) & (q-1)(q-2)^2 \end{bmatrix} \qquad [p_{ij}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3(q-2) \\ 0 & 3 & 6(q-2) & 3(q-2)^2 \\ 1 & 3(q-2) & 3(q-2)^2 & (q-2)^3 \end{bmatrix}$$

Kandidati za netrivijalne zatvorene skupove su $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$ i $\{0,2,3\}$. Za $q>2$ imamo:

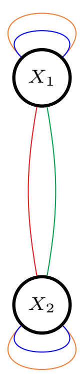


(a) $G_1 \cup G_3$

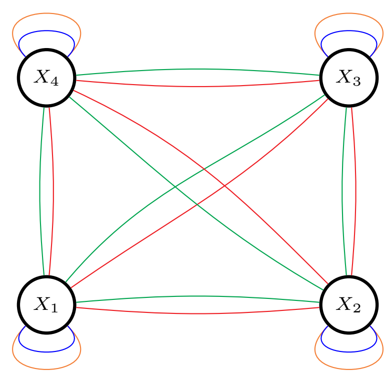


(b) $G_1 \cup G_2$

Slika 2: $(X \times X) \setminus R_\Omega$ za zatvorene skupove Ω



(a) Kvocijentna konfiguracija za $\Omega = \{0, 2\}$



(b) Kvocijentna konfiguracija za $\Omega = \{0, 3\}$

Slika 3: Kvocijentne konfiguracije od $H(3, 2)$

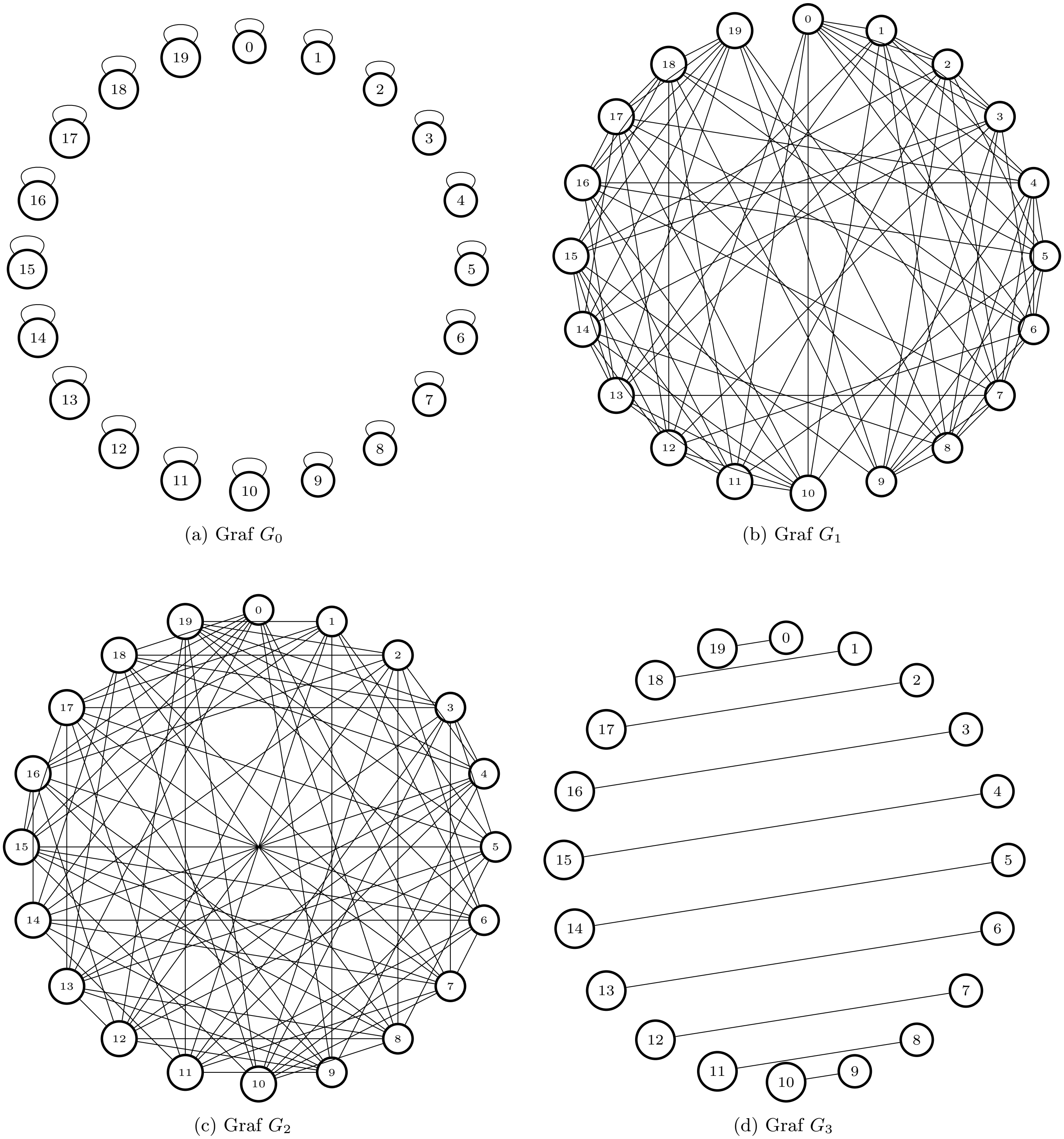
- $\{0, 1\}^2 = \{0, 1, 2\} \neq \{0, 1\}$
- $\{0, 2\}^2 = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 2\}$
- $\{0, 3\}^2 = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 3\}$
- $\{0, 1, 2\}^2 = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 1, 2\}$
- $\{0, 1, 3\}^2 = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 1, 3\}$
- $\{0, 2, 3\}^2 = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 2, 3\}$

Dakle, jedini zatvoreni skupovi su $\{0\}$ i $\{0, 1, 2, 3\}$ pa je $H(3, q)$ primitivna za $q > 2$.

Johnsonova shema

Definicija (Johnsonova shema)**.** *Neka su v i d prirodni brojevi takvi da je $2d \leq v$. Za skup vrhova uzmimo sve d-člane podskupove od $V = \{1, \ldots, v\}$. Vrhovi $X, Y \subseteq V$ su susjedni u grafu G_i ako je $|X \cap Y| = d - i$. Tako dobijemo Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ s d klasa, reda $n = \binom{v}{d}$. Grafove G_i iz ove sheme označavamo $J(v, d, i)$ i zovemo Johnsonovim grafovima.*

Sheme $J(6, 3)$ ima $\binom{6}{3} = 20$ vrhova. Na slici 4 vidimo grafove G_0, G_1, G_2, G_3.



(a) Graf G_0

(b) Graf G_1

(c) Graf G_2

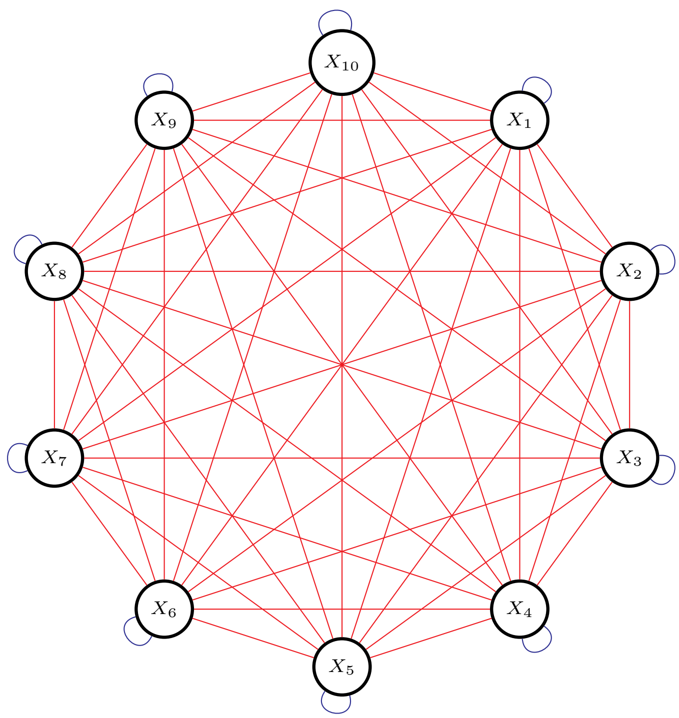
(d) Graf G_3

Slika 4: Johnsonovi grafovi

Vidimo da graf G_3 nije povezan. Grafovi G_1 i G_2 su povezani. Dakle, $J(6,3)$ je imprimitivna shema. Promotrimo sada sustave imprimitivnosti od $J(6,3)$. R_Ω je relacije ekvivalencije za $\Omega = \{0,3\}$. Imamo $r = 10$ vlakna veličine $m = 2$. Na slici 4d vidimo da je realcija R_3 susjedstvo grada $10 \cdot K_2$. Dobivamo sljedeću kvocijentnu shemu:

- Vrhovi su $X_1 = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$, $X_2 = \{\{1,2,4\},\{3,5,6\}\}$, $X_3 = \{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$, $X_4 = \{\{1,2,6\},\{3,4,5\}\}$, $X_5 = \{\{1,3,4\},\{2,5,6\}\}$, $X_6 = \{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$, $X_7 = \{\{1,3,6\},\{2,4,5\}\}$, $X_8 = \{\{1,4,5\},\{2,3,6\}\}$, $X_9 = \{\{1,4,6\},\{2,3,5\}\}$, $X_{10} = \{\{1,5,6\},\{2,3,4\}\}$
- Relacije su $\tilde{R}_0 = \tilde{R}_3$ te $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2$.

Na slici 5 vidimo kvocijentnu konfiguraciju. Dakle, zatvoreni skup je dvočlan, a kvocijentna shema ima jednu klasu pa je $J(6,3)$ tipa $B1$.



Slika 5: Kvocijentna konfiguracija od $J(6,3)$ za $\Omega = \{0,3\}$

Da bismo dokazali da je $J(v,3), v > 6$ primitivna, opet koristimo karakterizaciju preko zatvorenih skupova. Pronađimo prvo presječne matrice:

$$[p^0_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3(v-3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\binom{v-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{v-3}{3} \end{bmatrix} \quad [p^1_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & v-2 & 2(v-4) & 0 \\ 0 & 2(v-4) & v+2\binom{v-4}{2}-4 & \binom{v-4}{2} \\ 0 & 0 & \binom{v-4}{2} & \binom{v-4}{3} \end{bmatrix}$$

$$[p^2_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2(v-4) & v-5 \\ 1 & 2(v-4) & 4v+\binom{v-5}{2}-20 & 2\binom{v-5}{2} \\ 0 & v-5 & 2\binom{v-5}{2} & \binom{v-5}{3} \end{bmatrix} \quad [p^3_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 3(v-6) \\ 0 & 9 & 9(v-6) & 3\binom{v-6}{2} \\ 1 & 3(v-6) & 3\binom{v-6}{2} & \binom{v-6}{3} \end{bmatrix}$$

Kandidati za netrivijalne zatvorene skupove su $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$ i $\{0,2,3\}$. Za $v > 6$ imamo:

- $\{0,1\}^2 = \{0,1,2\} \neq \{0,1\}$
- $\{0,2\}^2 = \{0,1,2,3\} \neq \{0,2\}$
- $\{0,3\}^2 = \{0,1,3\} \neq \{0,3\}$ za $v = 7$ i $\{0,3\}^2 = \{0,1,2,3\} \neq \{0,3\}$ za $v > 7$
- $\{0,1,2\}^2 = \{0,1,2,3\} \neq \{0,1,2\}$
- $\{0,1,3\}^2 = \{0,1,2,3\} \neq \{0,1,3\}$
- $\{0,2,3\}^2 = \{0,1,2,3\} \neq \{0,2,3\}$

Dakle, jedini zatvoreni skupovi su $\{0\}$ i $\{0,1,2,3\}$ pa je $J(v,3)$ primitivna za $v > 6$.