Domaća zadaća - Asocijacijske sheme
Daniel Šanko

Definicija 1. *Za koherentnu konfiguraciju kažemo da je tanka ako su svi stupnjevi jednaki 1.*

Zbog druge tvrdnje propozicije 2.16, to je ekvivalentno s $n = d + 1$.

Definicija 2. *Stupanj n_i relacije R_i koherentne konfiguracije definira se kao $n_i = p^0_{ii'} = |N_i(x)|$, za bilo koji vrh x.*

Definicija 3. *Za permutacijsku grupu G na X kažemo da djeluje strogo tranzitivno ako vrijedi $(\forall x, y \in X)(\exists! g \in G) x^g = y$.*

Zadatak 1. *Dokažite da sve tanke kohrentne konfiguracije nastaju Schurovom konstrukcijom od permutacijskih grupa koje djeluju strogo tranzitivno.*

Znamo da se Schurova konstrukcija (opisana u primjeru 1.36) zasniva na tranzitivnim permutacijskim grupama. Sada želimo pokazati da je ta grupa strogo tranzitivna ako je dobivena koherentna konfiguracija tanka.

Neka su $R_0, R_1, \ldots, R_d \subset X \times X$ orbite pri djelovanju grupe G na skup svih uređenih parova iz $X \times X$. Neka su $A_0, A_1, \ldots, A_d$ pripadne matrice:

$$A_i = [a^{(i)}_{xy}], a^{(i)}_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (x, y) \in R_i, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \text{ za } i = 0, 1, \ldots, d.$$

n_i odgovara sumi bilo kojeg retka matrice A_i, a $n_{i'}$ sumi bilo kojeg stupca matrice A_i. Iz propozicije 2.16 znamo da je $n_i = n_{i'}$. To znači da u svakom retku i u svakom stupcu imamo točno jednu jedinicu, što znači da su dobivene matrice permutacijske matrice:

$$P(g) = [p_{xy}], p_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x^g = y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Iz toga i iz svojstva (2) definicije 2.1

$$\sum_{i=0}^{d} A_i = J,$$

gdje je J $n \times n$ matrica sa svim vrijednostima jednakim 1 slijedi da je G nužno strogo tranzitivna jer bi inače postojale dvije različite permutacije $g_1, g_2 \in G$ takve da vrijedi $x^{g_1} = y$ i $x^{g_2} = y$, za neke $x, y \in X$, odnosno imali bi dvije permutacijske matrice koje bi imale jedinicu na poziciji p_{xy}, a onda svojstvo (2) ne bi bilo zadovoljeno.

Znamo da Schurovom konstrukcijom ne možemo dobiti sve koherentne konfiguracije. Moramo pokazati da sve tanke koherentne konfiguracije zaista jesu Schurove, tj. nastaju Schurovom konstrukcijom. Pitamo se zašto uopće postoji neka grupa koja daje baš tu tanku koherentnu konfiguraciju? To je zato što tanka koherentna konfiguracija je grupa. Dokažimo to.

Neka su $A_0, \dots, A_d$ matrice tanke koherentne konfiguracije reda n s d klasa. Pokažimo da te matrice tvore grupu obzirom na množenje matrica.

Zatvorenost: Uzmimo A_i i A_j matrice tanke koherentne konfiguracije. Tvrdimo da je umnožak A_iA_j ponovno jedna od matrica $A_0, \dots, A_d$. Već smo ranije rekli da su te matrice permutacijske, a znamo da će umnožak dvije permutacijske matrice ponovno biti permutacijska matrica. Ostaje dokazati da je dobivena permutacijska matrica jedna od matrica $A_0, \dots, A_d$. To slijedi iz svojstva (4) definicije 2.1 koje kaže da je umnožak matrica A_i i A_j linearna kombinacija matrica $A_0, \dots, A_d$, tj. postoje $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $A_iA_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ za sve indekse i, j. Očito za svaki par indeksa (i, j) postoji jedinstveni indeks k za koji je p_{ij}^k jednak 1, dok je za sve ostale jednak 0, jer inače umnožak A_iA_j ne bi bila permutacijska matrica.

Asocijativnost: množenje matrica je asocijativno.

Postojanje neutrala: neutral za množenje matrica je jedinična matrica I, a znamo da je $A_0 = I$, dakle neutral postoji.

Inverz: inverz permutacijske matrice je njoj transponirana matrica, a jedno od svojstava koherentne konfiguracije je da za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $A_i^t = A_{i'}$.

Zadatak 2. *Dokažite da za strogo tranzitivne permutacijske grupe vrijedi: G je Abelova ako i samo ako je odgovarajuća Schurova koherentna konfiguracija komutativna.*

Pretpostavimo da je G strogo tranzitivna permutacijska Abelova grupa. Želimo pokazati da je odgovarajuća Schurova koherentna konfiguracija komutativna, tj. da vrijedi $p_{ij}^k = p_{ji}^k$. To je ekvivalentno zahtjevu $A_iA_j = A_jA_i$.

Vidjeli smo da Schurovom konstrukcijom od strogo tranzitivne permutacijske grupe dobivamo tanke koherentne konfiguracije, za koje su matrice A_i zapravo permutacijske matrice koje odgovaraju permutacijama grupe G.

Kako je grupa G Abelova, tj. $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1, \forall g_1, g_2 \in G$, a kompozicija permutacija je ekvivalentna umnošku pripadnih matrica, zaključujemo da vrijedi $A_iA_j = A_jA_i, i = 0, 1 \dots, d$.

Da bi dokazali obrat moramo pokazati da je tranzitivna grupa Abelova samo ako je strogo tranzitivna.

Neka je G tranzitivna i Abelova podgrupa grupe S_n. Pokazati ćemo da je red grupe G jednak n iz čega će direktno slijedit da je grupa strogo tranzitivna. Za dokaz će nam biti potreban sljedeći teorem:

Teorem 1 (Orbit - stabilizer theorem)**.** *Neka je G grupa koja djeluje na konačni skup X. Neka je $x \in X$. Označimo sa x^G orbitu, a sa G_x stabilizator elementa x. Neka je $[G : G_x]$ indeks podgrupe G_x u grupi G. Tada vrijedi:*

$$\left|x^G\right| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Kako je grupa G tranzitivna, onda je $1^G = \{1, \ldots, n\}$. Neka je $g_1 \in G_1$, gdje je $G_1 = \{g \in G | 1^g = 1\}$ stabilizator elementa 1. Uzmimo $x \in \{1, \ldots, n\}$. Po tranzitivnosti postoji $g_2 \in G$ takav da je $1^{g_2} = x$. Sada imamo

$$x^{g_1} = 1^{g_2^{g_1}} = 1^{g_1 \circ g_2} \overset{\text{G Abelova}}{=} 1^{g_2 \circ g_1} = 1^{g_1^{g_2}} = 1^{g_2} = x,$$

iz čega slijedi da je $g_1 = id$, tj. $G_1 = \{id\}$.

Sada po prethodnom teoremu dobivamo

$$|G| = |1^G| \cdot |G_1| = n \cdot 1 = n.$$

Pogledajmo sada jedan protuprimjer za tranzitivne grupe koje ne djeluju strogo.

Neka je $G = S_3 = \{(), (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Prije Schurove konstrukcije promotrimo svojstva ove grupe:

- G je tranzitivna jer ima samo jednu orbitu
- G nije Abelova: $(12) \circ (13) = (132), (13) \circ (12) = (123)$.
- G nije strogo tranzitivna: $1^{(12)} = 2$ i $1^{(123)} = 2$.

Odredimo orbitale:

- $R_0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,
- $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.

Pripadne matrice su

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Konačno, odredimo presječne brojeve:

$$[p^0_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, [p^1_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $p^k_{ij} = p^k_{ji}$, za $i, j, k = 0, 1$, odnosno našli smo komutativnu koherentnu konfiguraciju koja nije dobivena iz Abelove permutacijske grupe.