

## Obične diferencijalne jednačbe

Opći oblik ODJ 1. reda:  $y' = f(x, y)$ , zapisuje se i kao  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , gdje je  $f$  neka funkcija.

- **ODJ sa separiranim varijablama:**

Ako  $f(x, y)$  ima oblik  $f(x, y) = F(x) * G(y)$ .

Rješavamo prebacivanjem članova sa  $y$  na jednu a sa  $x$  na drugu stranu i integriranjem.

- **Homogene ODJ:**

Ako jednačbu možemo zapisati u obliku  $y' = f(\frac{y}{x})$ .

Rješavamo supstitucijom  $z = \frac{y}{x}$ . Na taj način dobijemo  $y' = f(z)$  i uvrstimo  $f(z)$  u jednačbu  $xz' = f(z) - z$ . Dobijemo jednačbu sa separiranim varijablama.

- **Linearna ODJ:**

Ako jednačba ima oblik  $y' + p(x)y = q(x)$ , gdje su  $p(x)$  i  $q(x)$  neke funkcije.

1. rješavamo jednačbu  $y' + p(x)y = 0$  i njeno rješenje zapišemo u obliku  $y = C * h(x)$ , gdje je  $h(x)$  neka funkcija.

2. uvrstimo  $y = C(x) * h(x)$  u početnu jednačbu  $y' + p(x)y = q(x)$  i izračunamo  $C(x)$ .

3. uvrstimo  $C(x)$  u rješenje iz 1., umjesto  $C$ , i tako dobijemo konačno rješenje.

- **Linearna ODJ sa konstantnim koeficijentima:**

*homogena* je oblika

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

gdje su  $a$ -ovi neki realni brojevi.

Postupak rješavanja:

1) jednačbi pridružimo karakterističnu jednačbu:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

i odredimo joj rješenja ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ) i njihove kratnosti ( $r_1, r_2, \dots$ )

2)a) Svakom jednostrukom realnom rješenju  $\lambda_j$  pridružujemo rješenje  $y = e^{\lambda_j x}$ .

b) Svakom višestrukom realnom rješenju  $\lambda_j$  kratnosti  $r$  pridružujemo  $r$  rješenja:  $y_1 = e^{\lambda_j x}$ ,  $y_2 = x e^{\lambda_j x}$ ,  $y_3 = x^2 e^{\lambda_j x}$  ...,  $y_r = x^{r-1} e^{\lambda_j x}$ .

c) Svakom paru jednostrukih kompleksnih rješenja  $\lambda_l = \alpha + \beta i$  i  $\bar{\lambda}_l = \alpha - \beta i$  pridružujemo dva rješenja:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  i  $y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

d) Svakom paru višestrukih kompleksnih rješenja kratnosti  $r$   $\lambda_l = \alpha + \beta i$  i  $\bar{\lambda}_l = \alpha - \beta i$  pridružujemo  $2r$  rješenja:  $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ,  $y_2 = x e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ,  $y_3 = x^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ , ...,  $y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ ,  $y_{r+2} = x e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ , ...,  $y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ .

3) Konačno rješenje je je linearna kombinacija svih pridruženih rješenja ( $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots$ ).