

Primjeri teorijskih pitanja za 2. kolokvij –Matematika 2.

1. (datiranje starosti nekog objekta putem radioaktivnog ugljika) Nađen je fosil i udio ^{14}C je 30% onoga koji bi bio u živom organizmu. Koliko je otprilike star fosil?

Uputa: ^{14}C se raspada po rati proporcionalnoj njegovoj masi i njegovo vrijeme poluraspada je otprilike 5730 godina.

2. Brzina povećanja populacije bakterija je proporcionalna populaciji bakterija. Inicijalno je populacija 10000 (jedinki) a nakon 10 dana je 25000. Koliko je velika populacija za 20 dana? A nakon 30?

Uputa (općenita): kada god se opisuje neki proces, populacija ili sl. čija je brzina rasta (u nekom trenutku) proporcionalna broju jedinki (u tom trenutku) u stvari se uvijek javlja isti tip jednadžbe (kao i u prethodnom zadatku) čije je rješenje neki oblik eksponencijalne funkcije

3. Radioaktivni berilij se ponekad koristi za datiranje starosti fosila u sedimentu dubokih mora. Raspad berilija zadovoljava jednadžbu

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A, \quad \text{gdje je } \alpha = 1.5 \cdot 10^{-7},$$

a t je vrijeme mjereno u godinama. Ovdje je $A(t)$ količina berilija u trenutku (godini) t . Koliko je vrijeme poluraspada berilija, tj. nakon koliko godina od 1 grama berilija, čija se količina mijenja prema ovoj jednadžbi, ostane 0.5 grama berilija?

4. Skicirajte polje smjerova za jednadžbu

$$y' = (y^2 - 9)(y + 4).$$

5. Nađite približnu vrijednost od $y(1)$ Eulerovom metodom ako je $y = y(t)$ rješenje inicijalnog problema

$$\frac{dy}{dt} = x + y,$$

$$y(0) = 1.$$

Uzmite da je korak $h = 0.2$

6. Nađite približnu vrijednost od $y(3)$ Eulerovom metodom ako je $y = y(t)$ rješenje inicijalnog problema

$$\frac{dy}{dt} = x - y,$$

$$y(1) = 2.$$

Uzmite da je korak $h = 0.4$ (Ovdje je segment na kojem aproksimirate $[1, 3]$, dakle početna točka je $x_0 = 1$ a $x_5 = 3$.)

7. Ima li inicijalni problem

$$\frac{dy}{dt} = x^3 - xy^3,$$

$$y(0) = 2,$$

jedinstveno rješenje oko $(0, 2)$?

Uputa: ne rješavati eksplicitno, samo vidjeti da li su zadovoljeni uvjeti teorema o egzistenciji i jedinstvenosti

8. Nađite općenito rješenje sljedećih jednadžbi

(a) $y'' + 9y = t^2 e^{3t} + 6,$

(b) $y'' + y' + 4y = 2sh(t)$ uputa: $sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$

(c) $y'' + y = 3 \sin(2t) + t \cos(2t).$

9. Nađite rješenje inicijalnog problema

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

10. * Zadana je jednadžba

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1;$$

promatraju se rješenja (funkcije) definirane za $t > 0$.

- (a) Provjerite da su $y_1(t) = t^2$ i $y_2(t) = 1/t$ rješenja pripadne homogene jednadžbe. (Dakle, ne rješavate jednadžbu—ona nema ni konstantne koeficijente—već samo uvrštavate ove dvije funkcije i provjerite da zadovoljavaju homogenu jednadžbu)
- (b) Jesu li to linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe? (Wronskijan!)

- (c) Pokušajte, metodom varijacije parametara, riješiti i ovu nehomogenu jedndžbu! (Pomoć: Pretpostavite da je rješenje u obliku

$$y(t) = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2$$

sada to uvrštavate u lijevu stranu jednadžbe; stavite još i dodatne uvjete na $C_1(t)$ i $C_2(t)$ –kao što je pokazano u primjeru na predavanjima; naime $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$.) Trebali biste moći izračunati C_1' i C_2' i otuda i C_1 i C_2