Metoda konačnih diferencija

Predavanja

Mladen Jurak

13. prosinca 2004.

Sadržaj

1

Uvod u metodu konačnih diferencija

U ovom poglavlju uvodimo metodu konačnih elemenata na primnjeru jednodimenzionalne jednadžbe provođenja s konstantnim koeficijentim. Izlaganje slijedi [1].

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in (0,1),\ t > 0 \tag{1.1}$$
$$v(x,0) = f(x) \quad x \in [0,1] \tag{1.2}$$
$$v(0,t) = a(t), \quad v(1,t) = b(t), \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Diskretizacija. Domenu $[0,1]$ dikretiziramo uvođenjem brojeva $M \in \mathbb{N}$, $\Delta x = 1/M$ te niza točaka

$$x_k = k\Delta x, \quad k = 0, 1, \ldots, M.$$

Broj Δx nazivamo prostornim korakom mreže. Analogno uvodimo vremenski korak $\Delta t > 0$ i niz vremenskih točaka

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Time smo dobili mrežu točaka (eng. lattice)

$$(x_k, t^n) = (k\Delta x, n\Delta t), \quad k = 0, 1, \ldots, M,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Metoda konačnih diferencija daje aproksimaciju točnog rješenja u točkama mreže:

$$u_k^n \approx v(x_k, t^n).$$

Aproksimacija se dobiva iz diferencijalne jednadžbe tako da se parcijalne derivacije zamijene s diferencijskim kvocijentima. Na primjer,

$$v_t \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}, \quad v_{xx} \approx \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2},$$

što daje

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = D\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Time dobivamo shemu

$$u_k^{n+1} = u_k^n + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) \tag{1.4}$$

$$n = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots, M - 1$$

$$u_k^0 = f(k\Delta x) \quad k = 0, 1, \ldots, M \tag{1.5}$$

$$u_0^n = a(n\Delta t), \quad u_M^n = b(n\Delta t) \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.6}$$

Bibliografija

[1] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations*, volume 22 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 1995.

2

Laxov teorem

U ovom poglavlju analiziramo konvergenciju metode konačnih diferencija za linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Uvodimo pojmove konvergencije, konzistencije i stabilnosti te Laxov teorem ekvivalencije koji kaže da su konzistencija i stabilnost ekvivalentni konvergenciji. Radi jednostavnosti promatrat ćemo diferencijalne jednadžbe u jednoj prostornoj dimenziji.

2.1 Konvergencija

Promatramo Cauchyjev problem za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\mathcal{L}v = F \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{2.1}$$
$$v(x,0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

gdje smo diferencijalni operator označili s $\mathcal{L}$. Pretpostavljamo nadalje da smo odabrali neke konstantne parametre diskretizacije Δx i Δt i konstruirali diferencijski operator L_k^n koji aproksimira diferencijalni operator $\mathcal{L}$. Rješenje diferencijske sheme, kao i do sada, označavamo s u_k^n, pri čemu je $u_k^0 = f(k\Delta x)$.

Definicija 2.1 Diferencijska shema $L_k^n u_k^n = G_k^n$ koja aproksimira diferencijalnu jednadžbu $\mathcal{L}v = F$ je konvergentna po točkama ako za svako (x,t)

$$\lim_{(\Delta x,\Delta t)\to 0} (k\Delta x, n\Delta t) = (x,t) \quad \Rightarrow \quad \lim_{(\Delta x,\Delta t)\to 0} u_k^n = v(x,t).$$

U ovoj definiciji k i n moraju težiti u $+\infty$ kada Δx i Δt teže u nulu kao bismo imali $(k\Delta x, n\Delta t) \to (x,t)$.

Primjer 2.1 Pokažimo da diferencijska shema

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \\ u_k^0 &= f(k\Delta x), \end{aligned}$$

gdje je $r = D\Delta t/\Delta x^2$, $0 < r \leq 1/2$ konvergira točkovno prema rješenju Cauchyjeve zadaće

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v(x,0) &= f(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Rješenje: Neka je $v(x,t)$ točno rješene i uvedimo mrežnu funkciju $v_k^n = v(k\Delta x, n\Delta t)$, te grešku aproksimacije $z_k^n = u_k^n - v_k^n$. Za točno rješenje znamo da zadovoljava

$$v_k^{n+1} = (1-2r)v_k^n + r(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t \Delta x^2).$$

Tada je očito i

$$z_k^{n+1} = (1-2r)z_k^n + r(z_{k+1}^n + z_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t \Delta x^2).$$

Iz uvjeta $0 < r \leq 1/2$ vidimo da na desnoj strani imamo konveksnu kombinaciju vrijednosti z_k^n pa možemo ocijeniti:

$$|z_k^{n+1}| \leq (1-2r)|z_k^n| + r(|z_{k+1}^n| + |z_{k-1}^n|) + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2),$$

gdje je A konstanta iz defnicije simbola $O(\cdot)$. Neka je $Z^n = \sup_k |z_k^n|$. Uzimajući supremum na desnoj strani, a zatim i na lijevoj, dobivamo

$$Z^{n+1} \leq Z^n + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2).$$

Uočimo da smo u ovom koraku koristili uniformnost konstante A u odnosu na indeks k (A u principu ovisi o k no supremum po k pretpostavljamo da je konačan), što se svodi na uniformnu ograničenost po x odgovarajućih derivacija funkcije $v(x,t)$. Sada iteriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} Z^{n+1} &\leq Z^n + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\leq Z^{n-1} + 2A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\vdots \\ &\leq Z^0 + (n+1)A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2). \end{aligned}$$

Kako je $Z^0 = 0$ dobivamo

$$|u_k^n - v_k^n| \leq Z^n \leq n\Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \to 0$$

kada Δt, $\Delta x \to 0$ i $n\Delta t \to t$. $\Box$

Konvergencija po točkama nije naročito korisna. Najčešće tražimo konvergenciju u nekoj normi. U tu svrhu uvedimo oznake

$$\mathbf{u}^n = (\ldots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \ldots), \quad \mathbf{v}^n = (\ldots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \ldots)$$

gdje je $v_k^n = v(k\Delta x, n\Delta t)$. $\mathbf{u}^n$ i $\mathbf{v}^n$ su beskonačni nizovi (mrežne funkcije). Skup svih beskonačnih nizova je evidentno linearan prostor u odnosu na uobičajeno zbrajanje i množenje skalarom. Da bismo uveli pojam konvergencije beskonačnih nizova moramo definirati neku normu na na njima. Odabranu normu ćemo označiti s $\|\cdot\|$. Jedan primjer je sup-norma:

$$\|\mathbf{u}^n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_k^n|.$$

Imamo sljedeći, jaču definiciju konvergencije:

Definicija 2.2 Diferencijska shema $L_k^n u_k^n = G_k^n$ koja aproksimira diferencijalnu jednadžbu $\mathcal{L}v = F$ je konvergentna u trenutku t ako

$$\lim_{\Delta t \to 0} n\Delta t = t \quad \Rightarrow \quad \lim_{(\Delta x, \Delta t) \to 0} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\| = 0.$$

Zadatak 2.1 Pokažite da diferencijska shema

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n$$

gdje je $R = a\Delta t/\Delta x$ (Lax-Friedrichsova shema) konvergira prema rješenju parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$v_t + a v_x = 0,$$

za $|R| \leq 1$. $\square$

Brzinu konvergencije možemo precizirati kao u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.3 Diferencijska shema $L_k^n u_k^n = G_k^n$ koja aproksimira diferencijalnu jednadžbu $\mathcal{L}v = F$ je konvergentna s redom (p, q) ako za svako $t > 0$ vrijedi

$$\lim_{\Delta t \to 0} n\Delta t = t \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$$

kada $(\Delta x, \Delta t) \to 0$.

Ocjena iz ove definicije znači da postoji konstana C takva da je

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\| \leq C(\Delta x^p + \Delta t^q).$$

Treba uočiti da C općenito ovisi o t.

Razlika između konvergencije diferencijskih shema za Cauchyjev i inicijalno-rubni problem leži u prostorima. Kod inicijalnog problema mrežna funkcija je predstavljena beskonačnim nizom vrijednosti te je prostor beskonačnih nizova osnovni prostor u koji uvodimo normu. Kod inicijalno-rubnog problema mrežna funkcija za zadani Δx ima konačno mnogo vrijednosti, recimo k, i kada Δx teži u nulu, k teži u ∞. Prema tome, nema jedinstvenog prostora u kome bismo mogli promatrati konvergenciju već moramo promatrati niz prostora čija dimenzija neograničeno raste kada $\Delta x \to 0$.

Da bismo precizirali definiciju konvergencije odaberemo niz uniformnih particija prostorne domene (segmenta $[0, 1]$ u našim primjerima), tj. niz prostornih koraka $(\Delta x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ takav da $\Delta x_j \to 0$ kada $j \to \infty$. Svakom j odgovara konanodimenzionalan prostor X_j u kome se nalazi mrežna funkcija. U prostor X_j uvodimo normu $\|\cdot\|_j$ i konvergenciju definiramo na sljedeći način:

Definicija 2.4 Diferencijska shema $L_k^n u_k^n = G_k^n$ koja aproksimira inicijalno-rubnu zadaću za diferencijalnu jednadžbu $\mathcal{L}v = F$ je konvergentna u trenutku t ako za svaki niz particija $(\Delta x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vrijedi

$$\lim_{\Delta t \to 0} n\Delta t = t \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{j \to \infty \\ \Delta t \to 0}} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_j = 0.$$

Primjer 2.2 Pokažite da za $r = D\Delta t/\Delta x^2$, $0 < r \leq 1/2$, diferencijska shema

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad n \geq 0, \quad k = 1,\dots,M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x), \quad k = 0,\dots,M \\ u_0^{n+1} &= u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

konvergira u sup-normi prema rješenju inicijalno-rubne zadaće

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} \quad x \in (0,1) \quad t > 0 \\ v(x,0) &= f(x) \quad x \in [0,1] \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Rješenje: Dokaz konvergencije posve je isti kao u Primjeru 2.1. Uzmimo da Δx_j odgovara particiji segmenta $[0,1]$ na $M_j + 1$ točaka. Pripadni prostor X_j je prostor vektora s $M_j - 1$ komponenti i u njemu uvodimo sup-normu:

$$\|(u_1,\dots,u_{M_j-1})\|_j = \max_{1\leq j\leq M_j-1} |u_k|.$$

Ponovo definiramo $v_k^n = v(k\Delta x, n\Delta t)$, te $z_k^n = u_k^n - v_k^n$. Kao i u Primjeru 2.1 imamo

$$z_k^{n+1} = (1-2r)z_k^n + r(z_{k+1}^n + z_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t\Delta x_j^2),$$

za $k = 1,\dots,M_j - 1$ ($z_0^n = z_{M_j}^n = 0$). Iz uvjeta $0 < r \leq 1/2$ dobivamo

$$\begin{aligned} |z_k^{n+1}| &\leq (1-2r)|z_k^n| + r(|z_{k+1}^n| + |z_{k-1}^n|) + A(\Delta t^2 + \Delta t\Delta x_j^2) \\ &\leq \|\mathbf{z}^n\|_j + A(\Delta t^2 + \Delta t\Delta x_j^2), \end{aligned}$$

gdje je A konstanta iz defnicije simbola $O(\cdot)$ i $\mathbf{z}^n = (z_1^n,\dots,z_{M_j-1}^n)^T$. Odavdje je

$$\|\mathbf{z}^{n+1}\|_j \leq \|\mathbf{z}^n\|_j + \Delta t A(\Delta t + \Delta x_j^2),$$

te dobivamo

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_j \to 0$$

kada $\Delta t \to 0$, $n\Delta t \to t$ i $j \to \infty$.

U dokazu konvergencije važan je izbor norme. Kod linearnih problema uglavnom se koriste dvije norme. Na $\mathbb{R}^N$ to su norme

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{k=1}^N |u_k|^2 \Delta x}, \quad \|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1\leq k\leq N} |u_k|.$$

Te su norme diskretni analogoni sljedećih normi na prostorima funkcija:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

za neki segment $[a,b]$.

U prostoru svih beskonačnih nizova promatraju se normirani potprostori l_2 i l_∞:

$$l_2 = \{\mathbf{u} = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots) \colon \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 < \infty\},$$

s normom

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2 \Delta x};$$

$$l_\infty = \{\mathbf{u} = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots) \colon \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| < \infty\},$$

s normom

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|.$$

U prostoru l_2 se često koristi norma

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2};$$

Uočimo da je norma $\|\mathbf{u}\|_{2,\Delta x}$ diskretna varijanta norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx}.$$

2.2 Konzistencija

Kao i kod konvergencije dajemo prvo definiciju konzistencije po točkama.

Definicija 2.5 Diferencijska shema $L_k^n u_k^n = G_k^n$ je točkovno konzistenta s diferencijalnom jednadžbom $\mathcal{L}v = F$ u točki (x,t) ako za svaku glatku funkciju vrijedi $\phi = \phi(x,t)$

$$(\mathcal{L}\phi - F)\big|_k^n - [L_k^n \phi(k\Delta x, n\Delta t) - G_k^n] \to 0$$

kada $\Delta t,\ \Delta x \to 0$ i $(k\Delta x, n\Delta t) \to (x,t)$.

U ovoj definiciji je uključena aproksimacija diferencijalnog operatora diferencijskom shemom i aproksimacija desne strane diferencijalne jednadžbe. Pri definiciji konzistentnosti te se dvije aproksimacije evidentno mogu promatrati i odvojeno. Ukoliko za G_k^n uzmemo F_k^n (što je čest slučaj premda ne i jedini mogući izbor) dobivamo jednostavniju definiciju konzistentnosti koja kaže da na rješenju v diferencijalne jednadžbe $\mathcal{L}v = F$ mora vrijediti

$$L_k^n v\big|_k^n - F_k^n \to 0$$

kada $\Delta t,\ \Delta x \to 0$ i $(k\Delta x, n\Delta t) \to (x,t)$.

Nadalje ćemo se koncentrirati na jednokoračne sheme. Njih je moguće zapisati u obliku

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{G}^n, \tag{2.3}$$

gdje je

$$\mathbf{u}^n = (\ldots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \ldots), \quad \mathbf{G}^n = (\ldots, G_{-1}^n, G_0^n, G_1^n, \ldots).$$

$\mathbf{Q}$ predstavlja operator koji djeluje s prostora beskonačnih nizova u prostor beskonačnih nizova i koji je zadan diferencijskom formulom.

Definicija 2.6 Diferencijska shema (2.3) je konzistentna s parcijalnom diferencijalnom jednadžbom u normi $\|\cdot\|$ ako rješenje v parcijalne diferencijalne jednadžbe zadovoljava

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{G}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n, \quad \|\boldsymbol{\tau}^n\| \to 0$$

kada $\Delta t,\ \Delta x \to 0$, a $\mathbf{v}^n$ je vektor s komponentama $v(k\Delta x, n\Delta t)$.

Vektor $\boldsymbol{\tau}^n$ (odnosno njegove komponente ili njegova norma $\|\boldsymbol{\tau}^n\|$) nazivamo greškom diskretizacije. Točnost metode mjerimo uspoređujući grešku diskretizacije s parametrima Δt i Δx:

Definicija 2.7 Diferencijska shema (2.3) ima točnost reda (p, q) u odnosu na danu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu ako je

$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q),$$

kada $\Delta t,\ \Delta x \to 0$.

Primjer 2.3 Treba diskutirati konzistentnost diferencijske sheme

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = D\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}$$

s diferencijalnom jednadžbom

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Rješenje: Neka je $v(x,t)$ točno rješene. Pomoću Taylorovog razvoja lako se pokazuje

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - D\frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} = O(\Delta t) + O(\Delta x^2).$$

Takva ocjena nije dovoljno precizna ako želimo vidjeti pod kojim uvjetima imamo preciznost reda $(2, 1)$ u odabranoj normi. Stoga je potrebno pretpostaviti dovoljnu glatkoću točnog rješenja i iskoristiti Taylorov razvoj rješenja do uključivo četvrtog reda po x i drugog reda po t. Tada, uz oznaku $r = D\Delta t/\Delta x^2$ imamo:

$$\begin{aligned}
\Delta t \tau_k^n &= v_k^{n+1} - v_k^n - r(v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) \\
&= (v_t)_k^n \Delta t + v_{tt}(k\Delta x, \eta_1)\frac{\Delta t^2}{2} \\
&\quad - r\left[(v_{xx})_k^n \Delta x^2 + v_{xxxx}(\xi_1, n\Delta t)\frac{\Delta x^4}{4!} + v_{xxxx}(\xi_2, n\Delta t)\frac{\Delta x^4}{4!}\right]
\end{aligned}$$

gdje je $t^n < \eta_1 < t^{n+1}$, $x_k < \xi_1, \xi_2 < x_{k+1}$. Koristeći neprekidnost četvrte prostorne derivacije i definiciju broja r, dobivamo:

$$\begin{aligned}\Delta t \tau_k^n &= (v_t - Dv_{xx})_k^n \Delta t + v_{tt}(k\Delta x, t_1)\frac{\Delta t^2}{2} - Dv_{xxxx}(\xi_3, n\Delta t)\Delta t \frac{\Delta x^2}{12} \\ &= v_{tt}(k\Delta x, t_1)\frac{\Delta t^2}{2} - Dv_{xxxx}(\xi_3, n\Delta t)\Delta t \frac{\Delta x^2}{12},\end{aligned}$$

za neki $x_k < \xi_3 < x_{k+1}$. Ako želimo točnost reda $(2,1)$ u $l_{2,\Delta x}$ normi, onda moramo pretpostaviti da je

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}[(v_{tt})_k^n]^2\Delta x \le A < \infty, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}}[(v_{xxxx})_k^n]^2\Delta x \le B < \infty.$$

Primjer 2.4 Treba diskutirati konzistentnost implicitne diferencijske sheme

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = D\frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + F_k^{n+1}$$

s diferencijalnom jednadžbom

$$v_t = Dv_{xx} + F \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Rješenje: Za točkovnu konzistentnost razvit ćemo rješenje u Taylorov red oko točke $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$:

$$\begin{aligned}L_k^n v_k^n - F_k^{n+1} &= \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - D\frac{v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - F_k^{n+1} \\ &= (v_t)_k^{n+1} - v_{tt}(k\Delta x, \eta_1)\frac{\Delta t}{2} \\ &- D\left[(v_{xx})_k^{n+1} + v_{xxxx}(\xi_1, t^{n+1})\frac{\Delta x^2}{4!} + v_{xxxx}(\xi_2, t^{n+1})\frac{\Delta x^2}{4!}\right] \\ &= -v_{tt}(k\Delta x, t_1)\frac{\Delta t}{2} - 2Dv_{xxxx}(\xi_3, t^{n+1})\frac{\Delta x^2}{4!}\end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje se brojevi ξ_i, $i = 1,2,3$ i η_1 nalaze u istim intervalima kao u Primjeru 2.3. Time smo dobili

$$L_k^n v_k^n - F_k^{n+1} = O(\Delta x^2) + O(\Delta t).$$

Da bismo pokazali konzistentnost u nekoj normi morali bismo zapisati shemu u obliku (2.3) jer je ona zadana u obliku

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t\mathbf{F}^{n+1},$$

gdje je $\mathbf{Q}_1$ operator koji se može prikazati beskonačnom matricom

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \cdots & -r & 1+2r & -r & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -r & 1+2r & -r & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

Tada $\mathbf{v}$ zadovoljava

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t\mathbf{F}^{n+1} + \Delta t\mathbf{r}^n,$$

gdje je $\mathbf{r}^n$ residual koji smo procijenili u (2.4),

$$r_k^n = -v_{tt}(k\Delta x, t_1)\frac{\Delta t}{2} - 2Dv_{xxxx}(\xi_3, t^{n+1})\frac{\Delta x^2}{4!}.$$

Da bismo došli do izraza u obliku (2.3) trebamo pokazati da je operator $\mathbf{Q}_1$ invertibilan i zatim slijedi
$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{v}^n + \Delta t\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{F}^{n+1} + \Delta t\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{r}^n.$$
Sada vidimo da je $\boldsymbol{\tau}^n = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{r}^n$ te nam stoga treba ocjena oblika
$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| \leq \|\mathbf{Q}_1^{-1}\|\|\mathbf{r}^n\|$$
iz koje vidimo da ćemo imati točnost koju daje račun reziduala, ako imamo uniformnu ocjenu norme $\|\mathbf{Q}_1^{-1}\|$ (uniformnu obzirom na Δt i Δx).

Takvu ocjenu najlakše je dobiti u sup-normi. Uzmimo stoga da su derivacije v_{tt} i v_{xxxx} uniformno ograničene tako da imamo $\|\mathbf{r}^n\|_\infty = O(\Delta x^2)+O(\Delta t)$. Operator $\mathbf{Q}_1 : l_\infty \to l_\infty$ djeluje na sljedeći način:
$$\mathbf{Q}_1(\alpha_k) = (\beta_k), \quad \beta_k = -r\alpha_{k-1} + (1+2r)\alpha_k - r\alpha_{k+1}.$$
Kako je
$$|\beta_k| \geq -r|\alpha_{k-1}| + (1+2r)|\alpha_k| - r|\alpha_{k+1}|$$
slijedi
$$|\beta_k| \geq (1+2r)|\alpha_k| - 2r\|(\alpha_k)\|_\infty$$
pa uzimanje supremuma na lijevoj strani izlazi
$$\|(\beta_k)\|_\infty \geq (1+2r)\|(\alpha_k)\|_\infty - 2r\|(\alpha_k)\|_\infty = \|(\alpha_k)\|_\infty.$$
Time smo dokazali da je za svako $\mathbf{u} \in l_\infty$, $\|\mathbf{Q}_1\mathbf{u}\|_\infty \geq \|\mathbf{u}\|_\infty$, pa je operator injektivan (i ima zatvorenu sliku). Pretpostavimo nadalje da je operator $\mathbf{Q}_1$ i surjektivan (to se može dokazati na dovoljno malom potprostoru od l_∞ ili se jednostavno može promatrati $\mathbf{Q}_1 \colon \mathcal{R}(\mathbf{Q}_1) \to \mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$, gdje je $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$ slika operatora $\mathbf{Q}_1$), onda evidentno inverzno preslikavanje zadovoljava $\|\mathbf{Q}_1^{-1}\|_\infty \leq 1$. Time dolazimo do $(2,1)$ točnosti sheme u sup-normi.

Uniformna ograničenost inverznog operatora može se dokazati i u $l_{2,\Delta x}$ normi, no dokaz nije tako jednostavan kao u sup-normi.

Zadatak 2.2 Odredite točnost slijedećih diferencijskih shema za Cauchyjev problem za jednadžbu:
$$v_t + av_x = Dv_{xx}.$$
(a) Eksplicitna:
$$u_k^{n+1} = u_k^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_0 u_k^n + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_k^n;$$
(b) Implicitna:
$$u_k^{n+1} = u_k^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_0 u_k^{n+1} + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_k^{n+1}.$$
Precizirajte uvjete na egzaktno rješenje uz koje se dobiva odgovarajuća točnost.

Zadatak 2.3 Odrediti točnost Crank-Nicolsonove sheme
$$u_k^{n+1} - D\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\delta^2 u_k^{n+1} = u_k^n + D\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\delta^2 u_k^n$$
za diferencijalnu jednažbu $v_t = Dv_{xx}$. Zašto je logično promatrati konzistentnost sheme u točki $(k\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$, a ne u točkama $(k\Delta x, n\Delta t)$ ili $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$?

Zadatak 2.4 Ispitati konzistentnost Dufort-Frankelove sheme

$$u_k^{n+1} = \frac{2r}{1+2r}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) + \frac{1-2r}{1+2r}u_k^{n-1},$$

gdje je $r = \Delta t/\Delta x^2$, s jednadžbom $v_t = v_{xx}$.

Zadatak 2.5 (a) Pokažite da je diferencijska shema

$$u_k^{n+1} = u_k^n + r(-\frac{1}{12}u_{k-2}^n + \frac{4}{3}u_{k-1}^n - \frac{5}{2}u_k^n + \frac{4}{3}u_{k+1}^n - \frac{1}{12}u_{k+2}^n)$$

$O(\Delta t) + O(\Delta x^4)$ aproksimacija jednadžbe $v_t = Dv_{xx}$ ($r = D\Delta t/\Delta x^2$). Uz koje uvjete na derivacije rješenja to vrijedi?

(b) Pokažite da je diferencijska shema (`Što je` δ_0^2`!!!`)

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n + \frac{R}{12}\delta^2\delta_0 u_k^n + \frac{R^2}{2}\left(\frac{4}{3} + R^2\right)\delta^2 u_k^n - \frac{R^2}{8}\left(\frac{1}{3} + R^2\right)\delta_0^2 u_k^n,$$

gdje je $R = a\Delta t/\Delta x$, $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$ aproksimacija jednadžbe $v_t + av_x = 0$. Uz koje uvjete na derivacije rješenja to vrijedi?

Zadatak 2.6 Odredite red točnosti sljedećih diferencijskih shema za jednadžbu

$$v_t + av_x = 0.$$

(a) $u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n)$.
(b) Leapfrog shema: $u_k^{n+1} = u_k^n - R\delta_0 u_k^n$.
(c) $u_k^{n+1} = u_k^n - R\delta_0 u_k^n + \frac{R}{6}\delta^2\delta_0 u_k^n - \frac{R}{30}\delta^4\delta_0 u_k^n$, gdje je $\delta^4 = \delta^2\delta^2$.
(d) $u_k^{n+2} = u_k^{n-2} - \frac{2R}{3}\left(1 - \frac{1}{6}\delta^2\right)\delta_0(2u_k^{n+1} - u_k^n + 2u_k^{n-1})$.

Definicija točkovne konzistentnosti je primijenjiva i na inicijalno-rubne zadaće, s time da treba posebno analizirati rubne uvjete.

Definicije konzistentnosti i točnosti dane u Definiciji 2.6 i Definiciji 2.7 prenose se i na slučaj inicijalno-rubne zadaće s time da je nužno odabrati odgovarajući niz normi $\|\cdot\|_j$. Pokažimo to na jednom primjeru.

Primjer 2.5 Treba diskutirati konzistentnost diferecijske sheme

$$u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad n \ge 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \tag{2.5}$$
$$u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \tag{2.6}$$
$$u_0^{n+1} = (1-2r)u_0^n + 2ru_1^n, \quad n \ge 0 \tag{2.7}$$
$$u_M^{n+1} = 0, \quad n \ge 0, \tag{2.8}$$

s inicijalno-rubnom zadaćom

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in (0,1) \quad t > 0 \tag{2.9}$$
$$v(x,0) = f(x) \quad x \in [0,1] \tag{2.10}$$
$$v_x(0,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.11}$$
$$v(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.12}$$

Rješenje: Diferencijska jednadžba (2.5) aproksimira diferencijalnu jednadžbu (2.9) s greškom $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$. Rubni uvjet (2.11) je aproksimiran centralnom diferencijom

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\Delta x} = 0,$$

pa možemo zaključiti da je shema (2.5) – (2.8) $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ aproksimacija po točkama inicijalno-rubne zadaće (2.9)–(2.12).

Da bismo odredili konzistenciju u normi moramo zapisati našu jednadžbu u obliku

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n$$

i zatim izračunati grešku diskretizacije $\boldsymbol{\tau}^n$ iz jednadžbe

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n.$$

Prvo zapišemo (2.5) – (2.8) u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & 2r & \cdots & & \\ r & 1-2r & r & \cdots & \\ 0 & r & 1-2r & r & \cdots \\ & & \cdots & & \\ & \cdots & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \cdots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}.$$

Neumannov rubni uvjet je reprezentiran promjenom u prvom redu matrice gdje je r postao $2r$.

U analizi točnosti metode potrebno je samo računati τ_0^n budući da za τ_k^n, $1 \le k \le M-1$, znamo da je reda $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$.

Jednostavna analiza na bazi Taylorovog razvoja daje

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_0^n &= v_0^{n+1} - (1-2r)v_0^n - 2rv_1^n \\ &= [(v_t)_0^n - D(v_{xx})_0^n]\Delta t - 2r(v_x)_0^n \Delta x + (v_{tt})_0^n \Delta t^2/2 - D(v_{xxxx})_0^n \Delta t \Delta x/3 + \cdots \end{aligned}$$

pa je stoga

$$\tau_0^n = (v_{tt})_0^n \Delta t/2 - D(v_{xxxx})_0^n \Delta x/3 + \cdots$$

Vidimo da za $k = 0$ shema ima samo točnost $O(\Delta t) + O(\Delta x)$ što je posljedica načina na koji se rubni uvjet slaže s diferencijalnom jednadžbom.

Odavde slijedi da je točnost metode u sup-normi jednaka $O(\Delta t) + O(\Delta x)$. Kolika je točnost u $l_{2,\Delta x}$ normi?

U sljedećem primjeru analiziramo istu metodu ali s aproksimacijom Neumannovog rubnog uvjeta prvog reda.

Primjer 2.6 Treba diskutirati konzistentnost diferecijske sheme

$$u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad n \ge 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \tag{2.13}$$

$$u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \tag{2.14}$$

$$u_0^n = u_1^n, \quad n \ge 0 \tag{2.15}$$

$$u_M^{n+1} = 0, \quad n \ge 0, \tag{2.16}$$

s inicijalno-rubnom zadaćom

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in (0,1) \quad t > 0 \tag{2.17}$$

$$v(x,0) = f(x) \quad x \in [0,1] \tag{2.18}$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.19}$$

$$v(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.20}$$

Rješenje: Aproksimacija diferencijalne jednadžbe je reda $O(\Delta t)+O(\Delta x^2)$ dok je Neumannov rubni uvjet aproksimiran diferencijom unaprijed

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = 0,$$

pa možemo zaključiti da je shema $O(\Delta t) + O(\Delta x)$ aproksimacija po točkama inicijalno-rubne zadaće. U matričnoj formi shema ima zapis

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \cdots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & r & 0 & \cdots & & \\ r & 1-2r & r & \cdots & & \\ 0 & r & 1-2r & r & \cdots & \\ & & \cdots & & & \\ & \cdots & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \cdots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}.$$

Potrebno je samo računati τ_1^n:

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_1^n &= v_1^{n+1} - (1-r)v_1^n - r v_2^n \\ &= (v_t)_1^n \Delta t - r(v_x)_1^n \Delta x - r(v_{xx})_1^n \Delta x^2/2 + (v_{tt})_1^n \Delta t^2/2 - r(v_{xxx})_1^n \Delta x^3/6 + \cdots \end{aligned}$$

Kako je

$$0 = (v_x)_0^n = (v_x)_1^n + (v_{xx})_1^n(-\Delta x) + (v_{xxx})_1^n \Delta x^2/2 + \cdots$$

eliminacijom $(v_x)_1^n$ dobivamo

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_1^n &= \left[v_t - D\frac{3}{2} v_{xx} \right]_1^n + O(\Delta t \Delta x) + O(\Delta t^2) \\ &= -\frac{D}{2}(v_{xx})_1^n \Delta t + O(\Delta t \Delta x) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $r = D\Delta t/\Delta x^2$ i jednadžbu $v_t = Dv_{xx}$. Time smo dobili

$$\tau_1^n = -\frac{D}{2}(v_{xx})_1^n + O(\Delta x) + O(\Delta t)$$

i shema nije konzistentna u sup-normi.

Konačno pokažimo primjer implicitne sheme za inicijalno-rubnu zadaću.

Primjer 2.7 Treba diskutirati konzistentnost implicitne diferencijske sheme

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} &= D\frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad n \geq 0, \quad k = 1, \ldots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x), \quad k = 0, \ldots, M \\ u_0^{n+1} &= u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

s inicijalno-rubnom zadaćom

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\ v(x,0) &= f(x) \quad x \in (0,1) \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0 \quad t > 0. \end{aligned}$$

Rješenje: Točkovna konzistentnost se pokazuje kao i u slučaju inicijalne zadaće. Da bismo pokazali konzistentnost u normi shemu zapisujemo u obliku

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n.$$

gdje je $\mathbf{Q}_1$ matrica

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & & & \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \cdots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \cdots & 0 & -r & 1+2r & -r \\ & & \cdots & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}_{M-1\times M-1}$$

Tada $\mathbf{v}$ zadovoljava

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t\mathbf{r}^n,$$

gdje je $\mathbf{r}^n$ residual za koji se kao i ranije pokaže da vrijedi: $\|\mathbf{r}^n\| = O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ bilo u $l_{2,\Delta x}$ bilo u sup-normi, ovisno o pretpostavkama na derivacije. Kako je

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{v}^n + \Delta t\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{r}^n.$$

trebamo samo ocijeniti normu $\|\mathbf{Q}_1^{-1}\|$ (uniformnu obzirom na Δt i Δx).

Ocijent ćemo $l_{2,\Delta x}$-normu matrice $\mathbf{Q}_1^{-1}$. To znači da ćemo promatrati operatorsku normu matrice pridružene $l_{2,\Delta x}$ vektorskoj normi. No iz definicije operatorske norme odmah se vidi da se radi o matričnoj normi pridruženoj običnoj 2-vektorskoj normi, pa budući da je matrica simetrična znamo da je ta norma jednaka spektralnom radijusu matrice. Time dobivamo

$$\|\mathbf{Q}_1^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_{\min}}$$

gdje je $\lambda_{\min}$ najmanja svojstena vrijednost matrice $\mathbf{Q}_1$. Prema Dodatku A znamo da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{Q}_1$ jednake

$$\lambda_j = 1 + 2r(1 - \cos\frac{j\pi}{M}) = 1 + 4r\sin^2\frac{j\pi}{M},$$

$j = 1, \dots, M-1$. Stoga je

$$\|\mathbf{Q}_1^{-1}\| = \frac{1}{\min_j(1 + 4r\sin^2\frac{j\pi}{M})} \leq 1.$$

Zadatak 2.7 Odredite red točnosti diferencijske sheme

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\delta_0 u_k^{n+1} - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_k^{n+1} &= u_k^n, \quad k = 0, \dots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x) \quad k = 0, \dots, M \\ u_M^{n+1} &= 0 \\ \frac{u_1^{n+1} - u_{-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= \alpha((n+1)\Delta t) \end{aligned}$$

za inicijalno rubnu zadaću

$$\begin{aligned} v_t + av_x &= Dv_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\ v(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,1] \\ v(1,t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ v_x(0,t) &= \alpha(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 2.8 Odredite red točnosti diferencijske sheme

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\delta_0 u_k^{n+1} - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_k^{n+1} &= u_k^n, \quad k = 1, \ldots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x) \quad k = 0, \ldots, M \\ u_M^{n+1} &= 0 \\ \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{2\Delta x} &= \alpha((n+1)\Delta t) \end{aligned}$$

za inicijalno rubnu zadaću iz Zadatka 2.7.

2.3 Stabilnost

Kontinuirane zadaće koje aproksimiramo numerički moraju biti korektno postavljene da bi diskretizacija zadaće davala dobru aproksimaciju. Korektnost inicijalne ili inicijalno-rubne zadaće znači da (1) zadaća ima jedno i samo jedno rješenje i (2) da rješenje ovisi neprekidno o zadanim podacima (desnoj strani, inicijalnim i rubnim uvjetima). Oba su ova zahtjeva prirodna kada se promatra problem numeričke aproksimacije. Ako problem ima više rješenja, onda se postavlja pitanje koje od rješenje naša diferencijska shema aproksimira. Ako pak rješenje ne ovisi neprekidno o zadanim podacima ne možemo očekivati korektnu numeričku aproksimaciju, budući da ulazne podatke redovito znamo samo aproksimativno (u najboljem slučaju do na greške zaokruživanja). Zbog svih tih razloga u analizi numeričkih postupaka uvijek pretpostavljamo da je kontinuirana zadaća koju aproksimiramo korektno postavljena. Nekorektne zadaće traže specijalne tehnike aproksimacije.

Stabilnost diskretne zadaće predstavlja na određen način korektnost diskretnog problema budući da zahtijeva da rješenje diskretnog problema ovisi neprekidno o zadanim podacima. Preciznu definiciju stabilnosti dajemo u slučaju jednokoračne sheme.

Promatramo diferencijsku shemu oblika

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n, \quad n \geq 0 \tag{2.21}$$

što predstavlja općenit oblik jednokoračne sheme za homogenu inicijalnu zadaću.

Definicija 2.8 Diferencijska shema (2.21) je stabilna u odnosu na normu $\|\cdot\|$ ako postoje konstante $\Delta x_0 > 0$, $\Delta t_0 > 0$, $K > 0$ i $\beta \geq 0$ takve da je

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t}\|\mathbf{u}^0\|, \tag{2.22}$$

za $t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ i $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Stabilnost nam kaže da rješenje može rasti s vremenom, ali ne i sa brojem prostornih koraka. Primijetimo još da je stabilnost definirana za homogenu zadaću stoga što ona predstavlja svojstvo diferencijske sheme i neovisna je o načinu diskretizacije "desne" strane.

Gornja definicija stabilnosti vrlo je općenita. U primjenama se često uvode dva ograničenja. Prvo, ne promatraju se sva vremena $t > 0$, već se korektnost zahtijeva samo za $t \in (0, T)$, ta neko zadano $T > 0$. Drugo, često se zahtijeva $\beta = 0$, odnosno

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq K\|\mathbf{u}^0\|. \tag{2.23}$$

Stabilnost je lako karakterizirati pomoću operatora $\mathbf{Q}$:

Propozicija 2.1 Diferencijska shema (2.21) je stabilna u odnosu na normu $\|\cdot\|$ ako i samo ako postoje konstante $\Delta x_0 > 0$, $\Delta t_0 > 0$, $K > 0$ i $\beta \geq 0$ takve da je

$$\|\mathbf{Q}^{n+1}\| \leq K e^{\beta t}, \tag{2.24}$$

za $t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ i $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Napomena 2.1 Uočimo da je u (2.24) $\|\cdot\|$ operatorska norma inducirana vektorskom normom iz (2.22). $\square$

Dokaz. Imamo

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n = \mathbf{Q}^2\mathbf{u}^{n-1} = \cdots = \mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{u}^0,$$

pa (2.22) možemo zapisati u obliku

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| = \|\mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{u}^0\| \leq K e^{\beta t}\|\mathbf{u}^0\|.$$

Time dobivamo

$$\frac{\|\mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{u}^0\|}{\|\mathbf{u}^0\|} \leq K e^{\beta t}$$

i kako to vrijedi za sve $\mathbf{u}^0$, slijedi (2.24). Obrat se dobiva na isti način. $\square$

Stabilnost je teško dokazivati neposredno te ćemo stoga u sljedećem poglavlju pokazati način kako se taj zadatak može pojednostaviti. Ovdje dajemo dva primjera.

Primjer 2.8 Treba pokazati da je diferencijska shema

$$u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$$

stabilna u odnosu na sup-normu.
Rješenje: Za $0 < r \leq 1/2$ imamo

$$|u_k^{n+1}| \leq (1-2r)|u_k^n| + r(|u_{k+1}^n| + |u_{k-1}^n|) \leq \|\mathbf{u}^n\|_\infty.$$

Uzimajući supremum po k na lijevoj strani izlazi

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{u}^n\|_\infty.$$

Prema tome, (2.22) je zadovoljeno s $\beta = 0$.

Uočimo da je ova shema iz prethodnog primjera **uvjetno stabilna**, jer je uvjet stabilnosti zadovoljen samo za $0 < r \le 1/2$. (Dokažite nestabilnost za $r > 1/2$.) To je određen uvjet na odnos između Δx i Δt. Ako takvog uvjeta nema onda kažemo da je shema **bezuvjetno stabilna**.

Primjer 2.9 Diskutirajte stabilnost diferencijske sheme

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{k+1}^n - u_k^n).$$

Rješenje: Ova diferencijska shema aproksimira jednadžbu

$$v_t + av_x = 0.$$

Stabilnost ćemo ispitivati u $l_{2,\Delta x}$ normi. Uvedimo prvo koeficijent $R = a\Delta t/\Delta x$ i napišimo shemu u obliku

$$u_k^{n+1} = (1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k^{n+1}|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (|1+R|^2|u_k^n|^2 + 2|1+R||R||u_k^n||u_{k+1}^n| + |R|^2|u_{k+1}^n|^2) \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(|1+R|^2|u_k^n|^2 + |1+R||R|(|u_k^n|^2 + |u_{k+1}^n|^2) + |R|^2|u_{k+1}^n|^2\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(|1+R|^2 + 2|1+R||R| + |R|^2\right)|u_k^n|^2 \\
&= (|1+R| + |R|)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k^n|^2.
\end{aligned}$$

Time smo dobili

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_2 \le (|1+R| + |R|)\|\mathbf{u}^n\|_2,$$

ali jednako tako

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{2;\Delta x} \le (|1+R| + |R|)\|\mathbf{u}^n\|_{2;\Delta x}.$$

Iterirajući tu nejednakost dobivamo

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{2;\Delta x} \le (|1+R| + |R|)^{n+1}\|\mathbf{u}^0\|_{2;\Delta x}$$

i odavdje vidimo da je uvjet stabilnosti

$$|1+R| + |R| \le 1.$$

Time dolazimo do sljedećeg zaključka: ako je $a < 0$, onda je uvjet stabilnosti zadovoljen za $-1 \le R < 0$. Ta je shema stoga uvjetno stabilna. Ako je pak $a > 0$, onda uvjet stabilnosti ne može biti ispunjen i shema je nestabilna.

Zadatak 2.9 Pokažite da je shema

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n$$

stabilna u sup-normi za $R \leq 1$.

Stabilnost inicijalno rubne zadaće definira se posve analogno kao i za inicijalnu zadaću s tom razlikom da se umjesto jedne norme na prostoru bekonačnih nizova mora promatrati niz particija domene koje odgovaraju nizu (Δx_j), njima pridružen niz konačnodimenzionalnih prostora X_j i niz pripadnih normi $\|\cdot\|_j$.

Primjer 2.10 Treba pokazati stabilnost sheme

$$\begin{aligned}
\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} &= D\frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad n \geq 0, \quad k = 1, \ldots, M-1 \\
u_k^0 &= f(k\Delta x), \quad k = 0, \ldots, M \\
u_0^{n+1} &= u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0,
\end{aligned}$$

za inicijalno-rubnu zadaću

$$\begin{aligned}
v_t &= Dv_{xx} \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\
v(x,0) &= f(x) \quad x \in (0,1) \\
v(0,t) &= v(1,t) = 0 \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Rješenje: Račun je esencijalno isti kao u Primjeru 2.1, trebamo samo odabrati normu s kojom ćemo raditi. Prostor X_j je prostor vektora duljine $M_j - 1$, gdje je $M_j \Delta x_j = 1$. Norma $\|\cdot\|_j$ na X_j neka bude sup-norma. Tada za $r = D\Delta t/\Delta x \leq 1/2$ imamo

$$\begin{aligned}
|u_k^{n+1}| &= |(1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)| \\
&\leq (1-2r)|u_k^n| + r(|u_{k+1}^n| + |u_{k-1}^n|) \\
&\leq (1-2r)\|\mathbf{u}^n\|_j + 2r|\mathbf{u}^n|_j = \|\mathbf{u}^n\|_j
\end{aligned}$$

i stoga

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_j \leq \|\mathbf{u}^n\|_j.$$

Odavdje slijedi stabilnost sa $K = 1$ i $\beta = 0$.

Zadatak 2.10 Zadana je inicijalno rubna zadaća:

$$\begin{aligned}
v_t + av_x &= 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\
v(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,1] \\
v(1,t) &= 0, \quad t > 0,
\end{aligned}$$

gdje je $a < 0$ i diferencijska shema

$$\begin{aligned}
u_k^{n+1} &= (1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n, \quad k = 0, \ldots, M-1 \\
u_M^{n+1} &= 0 \\
u_k^0 &= f(k\Delta x), \quad k = 0, \ldots, M,
\end{aligned}$$

gdje je $R = a\Delta t/\Delta x$. Pokažite da je shema stabilna za $|R| \leq 1$.

2.4 Laxov teorem ekvivalencije

Teorem 2.1 (Laxov teorem ekvivalencije) Jednokoračna diferencijska shema koja je konzistentna s korektno postavljenom linearnom inicijalnom zadaćom je konvergentna ako i samo ako je stabilna.

Može se dokazati i nešto jača verzija:

Teorem 2.2 Jednokoračna diferencijska shema

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{F}^n$$

koja je konzistentna reda (p, q) u normi $\|\cdot\|$ s korektno postavljenom linearnom inicijalnom zadaćom je konvergentna reda (p, q) ako i samo ako je stabilna u normi $\|\cdot\|$.

Dokaz. Pokazat ćemo samo jedan smjer, tj. da konzistentnost i stabilnost povlače konvergenciju. Za suprotan smjer vidi [1].

Neka je $v(x, t)$ točno rješenje inicijalne zadaće. Ako je diferencijska shema točna reda (p, q), onda je

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{F}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n$$

pri čemu je $\|\boldsymbol{\tau}^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$. Tada razlika $\mathbf{z}^j = \mathbf{v}^j - \mathbf{u}^j$ zadovoljava

$$\mathbf{z}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{z}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n.$$

Iteriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^{n+1} &= \mathbf{Q}\mathbf{z}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \\
&= \mathbf{Q}(\mathbf{Q}\mathbf{z}^{n-1} + \Delta t \boldsymbol{\tau}^{n-1}) + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \\
&= \mathbf{Q}^2\mathbf{z}^{n-1} + \Delta t \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}^{n-1} + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \\
&= \mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{z}^0 + \Delta t \sum_{j=0}^{n} \mathbf{Q}^j \boldsymbol{\tau}^{n-j}.
\end{aligned}$$

Zbog $\mathbf{z}^0 = 0$ imamo

$$\mathbf{z}^{n+1} = \Delta t \sum_{j=0}^{n} \mathbf{Q}^j \boldsymbol{\tau}^{n-j}.$$

Stabilnost diferencijske sheme implicira

$$\|\mathbf{Q}^j\| \leq K e^{\beta j \Delta t},$$

pa imamo

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{z}^{n+1}\| &\leq \Delta t \sum_{j=0}^{n} \|\mathbf{Q}^j\| \|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\| \\
&\leq \Delta t K \sum_{j=0}^{n} e^{\beta j \Delta t} \|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\| \\
&\leq \Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} \sum_{j=0}^{n} \|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\|.
\end{aligned}
$$

Po pretpostavci je

$$
\|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\| \leq C((n-j)\Delta t)(\Delta x^p + \Delta t^q)
$$

gdje smo istaknuli da konstanta C može ovisiti o vremenu. Uz oznaku $C^*(t) = \sup_{0\leq s\leq t} C(s)$ imamo

$$
\|\mathbf{z}^{n+1}\| \leq (n+1)\Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} C^*(t)(\Delta x^p + \Delta t^q).
$$

Promatramo li niz $(\Delta x, \Delta t) \to 0$ i niz n-ova za koji $(n+1)\Delta t \to t$, onda imamo da

$$
(n+1)\Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} C^*(t)(\Delta x^p + \Delta t^q) \to 0,
$$

što daje konvergenciju. Štoviše, na takvom nizu imamo

$$
\|\mathbf{z}^{n+1}\| \leq K(t)(\Delta x^p + \Delta t^q)
$$

za neku funkciju $K(t)$. Ukoliko imamo samo konzistentnost sheme, onda je ponovo evidentno da dobivamo konvergenciju. □

Potrebno je istaknuti da za dokaz konvergencije treba dokazati konzistentnost i stabilnost u istoj normi.

U slučaju inicijalno-rubne zadaće jedina razlika koja se pojavljuje u dokazu Laxovog teorema je ta što se mora raditi s nizom odabranih normi $\|\cdot\|_j$ na nizu prostora X_j. Pri tome konzistentnost i stabilnost moraju biti dokazane u istom nizu normi. Formulacija i dokaz teorema ostaju posve isti.

Bibliografija

[1] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Belmont, California, 1989.

3

Analiza stabilnosti

3.1 Diskretna Fourierova transformacija

Definicija 3.1 Diskretna Fourierova transformacija niza $\mathbf{u} \in l_2$ je funkcija $\hat{u} \in L^2(0,1)$ definirana formulom

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i m\xi} u_m, \tag{3.1}$$

za $\xi \in [0,1]$.

Zadatak 3.1 Pokažite da je niz parcijalnih suma reda (3.1) Cauchyjev u prostoru $L^2(0,1)$ te stoga konvergira i definira funkciju $\hat{u} \in L^2(0,1)$. Konvergenciju reda (3.1) treba stoga shvatiti u smislu norme prostora $L^2(0,1)$.

Propozicija 3.1 Neka je $\mathbf{u} \in l_2$ i $\hat{u}$ diskretna Fourierova transformacija od $\mathbf{u}$. Tada je za svako $m \in \mathbb{Z}$

$$u_m = \int_0^1 e^{2\pi i m\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{3.2}$$

Dokaz. Budući da poredak sumacije i integracije možemo zamijeniti

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{2\pi i m\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(k-m)\xi} u_k\, d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \int_0^1 e^{-2\pi i(k-m)\xi}\, d\xi \\
&= u_m. \ \square
\end{aligned}$$

budući da je

$$\int_0^1 e^{-2\pi i k\xi}\, d\xi = \delta_{k,0} = \begin{cases} 0 & \text{za } k \neq 0 \\ 1 & \text{za } k = 0 \end{cases}.$$

Zadatak 3.2 Opravdajte zamjenu poretka sumacije i integracije u gornjem dokazu.

Propozicija 3.2 (Diskretna Parsevalova jednakost) Neka je $\mathbf{u} \in l_2$ i $\hat{u}$ diskretna Fourierova transformacija od $\mathbf{u}$. Tada je

$$\|\hat{u}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2. \tag{3.3}$$

Dokaz. Ponovo koristimo činjenicu da možemo zamijeniti poredak sumacije i integracije.

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}\|_2^2 &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k\xi} u_k \overline{\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i m\xi} u_m}\, d\xi \\
&= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(k-m)\xi} u_k \overline{u_m}\, d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_k \overline{u_m} \int_0^1 e^{-2\pi i(k-m)\xi}\, d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_k \overline{u_m} \delta_{km} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2. \ \square
\end{aligned}$$

3.2 Von Neumannov kriterij

Diskretna Fourierova transformacija daje jednostavan kriterij za stabilnost u 2-normi diferencijske sheme za inicijalnu zadaću.

Prema definiciji stabilnosti diferencijske sheme moraju postojati brojevi $K > 0$ i $\beta \geq 0$ takvi da vrijedi

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{2,\Delta x} \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t} \|\mathbf{u}^0\|_{2,\Delta x},$$

za sve Δx i Δt dovoljno male i sve početne uvjete. Prema diskretnoj Parsevalovoj jednakosti vidimo da je taj uvjet ekvivalentan uvjetu

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t} \|\hat{u}^0\|_2, \tag{3.4}$$

koji mora vrijediti za sve Δx i Δt dovoljno male i sve početne uvjete. Pri tome smo diskretan Fourierov transformat mrežne funkcije $\mathbf{u}^{n+1}$ označili s $\hat{u}^{n+1}$. Evidentno imamo ekvivalenciju:

Propozicija 3.3 Niz $(\mathbf{u}^n)$ je stabilan u $l_{2,\Delta x}$ akko je niz $(\hat{u}^n)$ stabilan u $L^(0,1)$.

Stabilnost niza $(\hat{u}^n)$ znači da postoje konstante $K > 0$ i $\beta \geq 0$ takve da (3.4) vrijedi za sve Δx i Δt dovoljno male i sve početne uvjete.

Uvedimo oznaku za diskretnu Fourierovu transformaciju

$$\mathcal{F}(\mathbf{u})(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i m\xi} u_m$$

te operatore pomaka

$$\begin{aligned} S_+\mathbf{u} &= \mathbf{v}, \quad v_k = u_{k+1}, \\ S_-\mathbf{u} &= \mathbf{v}, \quad v_k = u_{k-1}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\mathcal{F}(S_+\mathbf{u}) = e^{2\pi i\xi}\mathcal{F}(\mathbf{u}), \quad \mathcal{F}(S_-\mathbf{u}) = e^{-2\pi i\xi}\mathcal{F}(\mathbf{u}). \tag{3.5}$$

Primjer 3.1 Analizirati stabilnost diferencijske sheme

$$u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad k\in\mathbb{Z}, \quad r = D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Rjesenje. Koristimo linearnost DFT i svojstva (3.5)

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1} &= (1-2r)\hat{u}^n + r(e^{2\pi i\xi}\hat{u}^n + e^{-2\pi i\xi}\hat{u}^n) \\ &= \left[(1-2r) + r(e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi}\right]\hat{u}^n \\ &= \rho(\xi)\hat{u}^n, \end{aligned}$$

gdje je

$$\rho(\xi) = 1 - 4r\sin^2(\pi\xi)$$

tzv. simbol diferencijske sheme. Lako se pokazuje da je

$$|u_k^{n+1}(\xi)| = |\rho(\xi)|^{n+1}|\hat{u}^0(\xi)| \quad \Rightarrow \quad \|u_k^{n+1}\|_2 \le (\max_{\xi\in[0,1]}|\rho(\xi)|)^{n+1}\|\hat{u}^0\|_2$$

Sad se vidi da je shema stabilna za

$$\max_{\xi\in[0,1]}|\rho(\xi)| \le 1,$$

što je ekvivalentno s $r \le 1/2$. □

Teorem 3.1 Diferencijska shema

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n$$

je stabilna u odnosu na $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$ normu akko postoje konstante $\Delta x_0 > 0$, $\Delta t_0 > 0$, i $C \ge 0$ takve da je

$$\|\rho(\xi)\| \le 1 + C\Delta t, \tag{3.6}$$

za sve $0 < \Delta x \le \Delta x_0$ i $0 < \Delta t \le \Delta t_0$, $\xi \in [0,1]$, gdje je ρ simbol diferencijske sheme.

4

ADI metode

5

Disipacija i disperzija

Jedan od jednostavnih i važnih načina proučavanja diferencijalnih jednadžbi i pripadnih diferencijskih shema je traženje rješenja u obliku putujućih valova. Metoda je primijenjiva na linearne parcijalne diferencijalne operatore s konstantnim koeficijentima, ali se dobivni rezultati često mogu proširiti i na jednadžbe s varijabilnim koeficijentima.

5.1 Disipacija i disperzija u diferencijalnim jednadžbama

Metoda se sastoji u tome da tražimo rješenje diferencijalne jednadžbe u obliku

$$v(x,t) = \hat{v}e^{i(\omega t + \beta x)}, \tag{5.1}$$

gdje je $\beta \in \mathbb{R}$ valni broj, a ω frekvencija vala, koja općenito može biti kompleksan broj. Pored valnog broja često se koristi valna duljina $\lambda = 2\pi/\beta$.

Uvrštavanjem rješenja (5.1) u diferencijanu jednadžbu (linearnu s konstantnim koeficijentima) dobivamo vezu između frekvencije ω i valnog broja β u obliku $\omega = \omega(\beta)$. Tu jednadžbu nazivamo disperzijsku relacijom. Na primjer, uvrštavanjem (5.1) u jednadžbu

$$v_t + av_x = 0$$

(transportna jednadžba) dobivamo disperzijsku relaciju $\omega = -a\beta$,koja daje rješenje oblika

$$v(x,t) = \hat{v}e^{i\beta(x-at)};$$

dobivamo, dakle, val val koji se giba brzinom a bez deformacije ili gušenja. Uvrštavanjem u jednadžbu provođenja

$$v_t = Dv_{xx}, \quad (D > 0)$$

dobivamo $\omega = iD\beta^2$. Pripadno rješenje je

$$v(x,t) = \hat{v}e^{-D\beta^2 t}e^{i\beta x}.$$

U ovom slučaju val ne putuje (ω je imaginaran) i eksponencijalno je gušen. Brzina gušenja raste s kvadratom valnog broja i jedino valovi s $\beta = 0$ (konstanta po x) nisu gušeni.

Vidimo da ss vrlo jednostavnim računom dobivamo zbačajne informacije o rješenjima diferencijalne jednadžbe. U sljedećoj tabeli navodimo nekoliko jednadžbi i pripadne disperzijske relacije.

	Jednadžba	Disperzijska relacija
(1)	$v_t = Dv_{xx}$	$\omega = iD\beta^2$
(2)	$v_t + av_x = 0$	$\omega = -a\beta$
(3)	$v_t + cv_{xxx} = 0$	$\omega = c\beta^3$
(4)	$v_t + dv_{xxxx} = 0$	$\omega = id\beta^4$
(5)	$v_{tt} = c^2 v_{xx}$	$\omega = \pm c\beta$
(6)	$v_t = iAv_{xx}$	$\omega = -A\beta^2$
(7)	$v_t + av_x - Dv_{xx} + cv_{xxx} = 0$	$\omega = -a\beta + c\beta^3 + iD\beta^2$

Jednadžbe (1) i (4) ($D, d > 0$) u kojima se pojavljuju parne derivacije po x imaju rješenja koja eksponencijalno trnu u nulu kada $t \to \infty$. Za takve jednadžbe kažemo da su disipativne. Jednadžbe (2) i (5) imaju rješenja u obliku putujućih valova koji se translatiraju konstantnim brzinama. Pri tome se rješenje jednadžbe (5) sastoji od dva vala koji se kreću brzinama c i $-c$. Veza između tih jednadžbi se lako uočava ako se diferencijalni operator (5) *faktorizira* na sljedeći način:

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = (\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})v,$$

što pokazuje da je valna jednažba ekvivalentna sustavu jednadžbi prvog reda

$$\begin{aligned} u_t - cu_x &= 0 \\ v_t + cv_x &= u. \end{aligned}$$

Rješenje jednadžbe (3) (Korteweg de Vriesova jednadžba ili kdV) uvodi novi moment. Zbog neparne derivacije po x dosperzijska relacija je ponovo realna te jednadžba nije disipativna. Ona ima rješenje u obliku putujećeg vala kao i transportna jednadžba (2). Oblik rješenja je

$$v(x,t) = \hat{v}e^{i\beta(x+c\beta^2 t)},$$

iz koje vidimo da val s valnim brojem β putuje brzinom $-c\beta^2$. Pojava da brzina širenja vala ovisi o valnom broju (valnoj duljini) naziva se disperzija. Ako je inicijalni podatak disperzivne jednadžbe superpozicija više valova različitih valnih duljina, onda će tokom gibanja doći do deformacije profila vala zbog različitih brzina gibanja pojedinih valova. Pojava je tipična za valove u (plitkoj) vodi.

Schredingerova jednadžba (6) je isto kao i Korteweg de Vriesova jednadžba disperzivna. Konačno, (7) je primjer jednadžbe koja sadrži transportni, disipativni i disperzivni član pa njeno rješenje

$$v(x,t) = \hat{v}e^{-D\beta^2 t}e^{i\beta(x-at+c\beta^2 t)}$$

pokazuje sva tri efekta.

Karakter rješenja diferencijalne jednadžbe ovosi o disperzijskoj relaciji. Ako $\omega(\beta)$ sadrži strogo pozitivan imaginarni dio, onda je jednadžba dispersivna; ako je imaginarni dio negativan, onda rješenje eksponencijalno raste kada $t \to \infty$ i Cauchyjev problem za takvu jednadžbu nije korektno postavljen.

Realan dio funkcije $\omega(\beta)$ daje valni dio rješenja. Brzina prostiranja vala je $-\mathrm{Re}\omega(\beta)/\beta$. Jednadžba je disperzivna ako ta brzina nije neovisna o β.

Gornjim postupkom dobivamo jedan niz specijalnih rješenja diferencijalne jednadžbe čijom superpozicijom možemo dobiti rješenje Cauchyjevog problema. Da bismo se uvjerili označimo s L linearan diferencijalan operator s konstantnim koeficijentima i s $\omega = \omega(\beta)$ pripadnu disperzijsku relaciju. Specijalna rješenja jednadžbe $Lv = 0$ su oblika

$$e^{i(\omega(\beta)t+\beta x)}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Uzmimo da je $\hat{v}_0 \in L^1(\mathbb{R})$ i formirajmo funkciju

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_0(\beta) e^{i(\omega(\beta)t+\beta x)}\, d\beta. \tag{5.2}$$

Kako je $Le^{i(\omega(\beta)t+\beta x)} = 0$ zaključujemo da je

$$Lv(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_0(\beta) L e^{i(\omega(\beta)t+\beta x)}\, d\beta = 0,$$

ukoliko su ispunjeni uvjeti za deriviranje ispod znaka integrala (provjerite). U trenutku $t = 0$ imamo

$$v(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_0(\beta) e^{i\beta x}\, d\beta = \mathcal{L}(\hat{v}_0),$$

što je inverzna Fourierova tranformacija funkcije $\hat{v}_0$. Ako dakle uzmemo

$$\hat{v}_0(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\beta x}\, dx = \mathcal{F}(f),$$

i ako je funkcija $f(x)$ takva da je $\mathcal{L}(\mathcal{F}(f)) = f$, onda je formulom (5.2) dano rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{aligned} Lv(x,t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.2 Disperzija i disipacija u diferencijskim shemama

Postupak ispitivanja diferencijske sheme je analogan postupku za diferencijalnu jednadžbu. Tražit ćemo specijalno rješenje diferencijske sheme u obliku

$$u_k^n = \hat{u} e^{i(\omega n \Delta t + \beta k \Delta x)}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Vidimo da se radi o diskretizaciji funkcije (5.1). Uvrštavanjem u diferencijsku shemu dobivamo **diskretnu disperzijsku relaciju**: $\omega = \omega(\beta)$, pri čemu će funkcija ω ovisiti i o Δt i Δx kao parametrima.

Frekvencija vala ω je općenito kompleksna pa ćemo pisati

$$\omega = \alpha + ib,$$

a rješenje ima oblik

$$u_k^n = \hat{u} \left(e^{-b\Delta t}\right)^n e^{i\beta(k\Delta x + (\alpha/\beta) n \Delta t)};$$

brzina širenja vala je $-\alpha/\beta$. Neposredno slijede ovi zaključci:

- $b > 0$: shema je disipativna;
- $b = 0$: shema je nedisipativna;
- $b < 0$: shema je nestabilna (rješenje neograničeno raste);
- $\alpha = 0$: nema valnog gibanja;
- $\alpha \neq 0$: val se giba brzinom $-\alpha/\beta$;
- α/β ovisi o β: shema je disperzivna;
- α/β ne ovisi o β: shema nije disperzivna.

Primjer 5.1 Zadana je diferencijska shema

$$u_k^{n+1} = u_k^n + r\delta^2 u_k^n, \quad r = D\frac{\Delta t}{\delta x^2},$$

za diferencijalnu jednadžbu $v_t = Dv_{xx}$. Treba proučiti njenu disperzijsku relaciju.

Neposrednim računom dobivamo disperzijsku relaciju:

$$e^{-b\Delta t} e^{i\alpha\Delta t} = e^{i\omega\Delta t} = 1 - 4r\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right),$$

što daje

$$e^{-b\Delta t} = |1 - 4r\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)|.$$

Uvjet stabilnosti $r \leq 1/2$ pojavljuje se i ovdje kao uvjet da je $b \geq 0$. Diferencijska jednadžba je stoga disipativna kao i diferencijalna jednadžba koju aproksimira. Koeficijent dicipacije je

$$b = -\frac{1}{\Delta t} \ln |1 - 4r \sin^2 \left(\frac{\beta \Delta x}{2}\right) | \approx D\beta^2,$$

što se može provjeriti Taylorovim razvojem. Nadalje, ako je $1 - 4r \sin^2 \left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \geq 0$, onda je $\alpha = 0$ kao i u diferencijalnoj jednadžbi. Za male valne duljine za koje je $1 - 4r \sin^2 \left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) < 0$, imamo $\alpha\Delta t = \pi$, pa se lako cidi da je pripadno rješenje oscilatorno *po* t. S druge strane, kratki valovi su jako gušeni pa to svojstvo ne utječe bitmo na ponašanje sheme.

Primjer 5.2 Treba proučiti disperzijsko i disipacijsko svojstvo sheme

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n), \quad R = a\frac{\Delta t}{\delta x},$$

za diferencijalnu jednadžbu $v_t + av_x = 0$, $a < 0$.

Disperzijska relacija se može zapisati u obliku

$$e^{-b\Delta t} e^{i\alpha\Delta t} = e^{i\omega\Delta t} = 1 + R - R(\cos(\beta\Delta x) + i \sin(\beta\Delta x)).$$

Uvjet stabilnosti je $-1 \leq R \leq 0$ i pretpostavit ćemo da je on ispunjen.

Disipacija.

$$e^{-b\Delta t} = \sqrt{(1 + R)^2 - 2(1 + R)R \cos(\beta\Delta x) + R^2}.$$

Shema je disipativana ako je $(1 + R)^2 - 2(1 + R)R \cos(\beta\Delta x) + R^2 < 1$, odakle slijedi da je shema disipativna za sve $-1 < R < 0$, dok a $R = -1$ nije disipativna. Jednako tako, shema nije disipativna za $\beta = 0$, što znači da konstanta *ne disipira*. Kako disipacija nije prisutna u diferencijalnoj jednadžbi, on je artificijelna i nepoželjna. Ipak, vidjet ćemo da je ona važna za stabilnost i *točnost* sheme.

Disperzija. Disperzivnost se dobiva iz jednadžbe

$$e^{i\alpha\Delta t} = \frac{(1 + R - R \cos(\beta\Delta x)) - iR \sin(\beta\Delta x)}{\sqrt{(1 + R)^2 - 2(1 + R)R \cos(\beta\Delta x) + R^2}}.$$

Pri tome moramo razlikovati slučaj velikih i malih valnih brojeva. Evidentno je dovoljno promatrati samo valne brojeve β za koje je $0 \leq \beta\Delta x \leq \pi$.

Male valne duljine: $\beta\Delta x \approx \pi$. Kako je

$$\cos(\alpha\Delta t) = \frac{1 + R - R \cos(\beta\Delta x)}{\sqrt{(1 + R)^2 - 2(1 + R)R \cos(\beta\Delta x) + R^2}} \approx \frac{1 + 2R}{|1 + 2R|}$$

$$\sin(\alpha\Delta t) = \frac{-R \sin(\beta\Delta x)}{\sqrt{(1 + R)^2 - 2(1 + R)R \cos(\beta\Delta x) + R^2}} \approx 0$$

pa imamo ovaj zaključak:

$$-\frac{1}{2} < R < 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha\Delta t) \approx 0, \ \cos(\alpha\Delta t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\Delta t \approx 0$$

$$-1 < R < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha\Delta t) \approx 0, \ \cos(\alpha\Delta t) < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\Delta t \approx \pi.$$

Stoga zaključujemo da se valovi belikih valnih brojeva kreću brzinom

$$-\frac{\alpha}{\beta} \approx \begin{cases} 0 & \text{za } -\frac{1}{2} < R < 0 \\ -a/R & \text{za } -1 < R < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dakle valovi velikih valnih brojeva kreću se pogrešnom brzinom, osim u slučaju $R = -1$.

Velike valne duljine: $\beta\Delta x \approx 0$. U ovom je slučaju

$$\sin(\alpha\Delta t) \approx 0, \quad \cos(\alpha\Delta t) \approx 1$$

pa je $\alpha\Delta t \approx 0$ i možemo uzeti glavnu granu arkus tangensa u formuli

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \frac{R\sin(\beta\Delta x)}{1 + 2R\sin^2(\beta\Delta x/2)}.$$

Pomoću Taylorovog razvoja dobivamo

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t}\left(R\beta\Delta x - \frac{R}{6}(1 + 3R + 2R^2)(\beta\Delta x)^3 + O((\beta\Delta x)^4)\right)$$

Zanemarujući članove višeg reda, sređivanjem izraza dobivamo

$$-\frac{\alpha}{\beta} \approx a\left(1 - \frac{1}{6}(1 + 2R)(1 + R)(\beta\Delta x)^2\right).$$

Odavdje možemo zaključiti da se diskretni val giba točnom brzinom a za $R = -1$ i $R = -1/2$. U slučaju $-1/2 < R < 0$ brzina diskretnog vala je po modulu manja od $|a|$, dok je u slučaju $-1 < R < -1/2$ veća. Shema je disperzivna i valovi male valne duljine gibaju se krivim brzinama. Taj nedostatak je ublažen disipativnošću sheme: valovi koji se gibaju krivim brzinama ujedno se i najbrže prigušuju.

Iz dosadašnjih primjera može se uočiti da je disperzijska relacija uvijek u obliku

$$e^{i\omega\Delta t} = \rho(\beta\Delta x),$$

gdje je ρ simbol diferencijske sheme, s tom razlikom da ovdje simbol treba računati bez faktora 2π (vidi fefiniciju simbola).

Primjer 5.3 Crank-Nicolsonova shema za transportnu jednadžbu

$$v_t + av_x = 0$$

glasi

$$u_k^{n+1} + \frac{R}{4}(u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}) = u_k^n - \frac{R}{4}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n), \quad R = a\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Treba proučiti disperziju i disipaciju.

Disperzijska relacija glasi

$$e^{i\omega\Delta t} = \frac{1 - \frac{iR}{2}\sin(\beta\Delta x)}{1 + \frac{iR}{2}\sin(\beta\Delta x)},$$

i evidentno je

$$|\rho(\beta\Delta x)| = \left|\frac{1 - \frac{iR}{2}\sin(\beta\Delta x)}{1 + \frac{iR}{2}\sin(\beta\Delta x)}\right| = 1$$

pa je shema nedisipativna. Nadalje se pokazuje da i za velike i za male vrijednosti valnog broja β imamo

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \frac{R\sin(\beta\Delta x)}{1 - (R^2/4)\sin^2(\beta\Delta x)}.$$

Greška između brzine gibanja vala i diskretne brzine gibanja je

$$a - (-\frac{\alpha}{\beta}) = a\left(1 + \frac{1}{R\beta\Delta x}\arctan\frac{4R\sin(\beta\Delta x)}{4 - R^2\sin^2(\beta\Delta x)}\right).$$

O kakvoj se grešci radi najlakše je vidjeti ako se grafički skicira funkcija ($\xi = \beta\Delta x \in [0, \pi]$):

$$e(\xi) = 1 + \frac{1}{R\xi}\arctan\frac{4R\sin(\xi)}{4 - R^2\sin^2(\xi)}.$$

Može se uočiti da se valovi iz čitavog spektra valnih duljina gibaju pogrešnim brzinama, a nema efekta disipacije koji bi ih prigušio. To objašnjava loše ponašanje sheme.

Ovi primjeri pokazuju da je analiza disipacije i disperzije naročito interesantna u slučaju transportne jednadžbe. Sama jednadžba nije niti disipativna niti disperzivna, ali diferencijske sheme imaju barem jedno od ta dva svojstva i njihovo ponašanje može se precizno objasniti pomoću njih.

U slučaju višekoračnih metoda primijenjenih na transportnu jednadžbu analiza je složenija. Relacija disperzije ima dva rješenja $\omega = \omega_+(\beta)$ i $\omega = \omega_-(\beta)$, koja generiraju dva vala koji se najčešće gibaju u suprotnim smjerovima. Jedno od ta dva rješenje giba se u pogrešnom smjeru i predstavlja tzv. parazitsko rješenje koje je odgovorno za nestabilnost metode. Detaljnije u tu analizu ovdje nećemo ulaziti.

5.3 Artificijelna disipacija

Disipacija koja postoji u diferencijskoj shemi za transportnu jednadžbu ima stabilizirajući karakter, kao što smo vidjeli u Primjeru 5.2. Ta se činjenica može iskoristiti za stabiliziranje nestabilnih shema dodavanjem artificijelne difuzije. Na primjer, pođimo od sheme

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n, \quad R = a\frac{\Delta t}{\Delta x},$$

za transportnu jednadžbu

$$v_t + av_x = 0.$$

Ta je shema nestabilna pa ćemo ju modificirati dodavanjem člana drugog reda

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n + \varepsilon\delta^2 u_k^n.$$

Pri tome ε mora biti dovoljno mali da ne narušimo točnost sheme. Iz analize stabilnosti koju smo proveli u Primjeru **??** znamo da će shema biti stabilna ako je

$$\frac{R^2}{2} \le \varepsilon \le \frac{1}{2}.$$

Tu se nameću tri mogućnosti:

$\boxed{\varepsilon = 1/2}$. U tom slučaju dobivamo Lax-Friedrichsovu shemu

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n). \tag{5.4}$$

Zadatak 5.1 Dokažite da je Lax-Friedrichsova shema stabilna za $|R| \leq 1$ te da je točna reda $O(\Delta t) + O(\Delta x^2/\Delta t)$.

$\boxed{\varepsilon = R^2/2}$. U tom slučaju dobivamo Lax-Wendroffovu shemu:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{R^2}{2}(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n). \tag{5.5}$$

Zadatak 5.2 Dokažite da je Lax-Wendroffova shema stabilna za $|R| \leq 1$ te da je točna reda $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$.

$\boxed{\varepsilon = R/2}$ ako je $a > 0$. U tom slučaju dobivamo upwind shemu:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_k^n - u_{k-1}^n). \tag{5.6}$$

Ako je $a < 0$, onda moramo uzeti $\varepsilon = -R/2$ pa ćemo dobiti

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n). \tag{5.7}$$

Analogno se mogu modoficirati Crank-Nicolsonova i leapfog shema.

5.4 Modificirana diferencijalna jednadžba

Alternativan način za proučavanje disipacije i disperzije diferencijske sheme je proučavanje svojstva tzv. modificirane diferencijalne jednadžbe. Diferencijska shema koja aproksimira npr. transportnu jednadžbu s određenom točnošću ujedno aproksimira s višom točnošću jednadžbu koja u sebi sadrži derivacije višeg reda. Takvu jednadžbu nazivamo modificirana PDJ i do nje dolazimo razvojem rješenja diferencijske jednadžbe u Taylorov red. Kako se to radi pokazat ćemo na jednom primjeru. Zatim se, umjesto disperzijske relacije za diferencijsku jednadžbu proučava disperzijska elacija za modificiranu PDJ. Vidjeli smo u prethodnim primjerima da je to često jedostavnije.

Za transportnu jednadžbu

$$v_t + av_x = 0, \quad (a < 0)$$

imamo shemu

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n).$$

Pretpostavit ćemo da je $u = u(x,t)$ glatka funkcija koja zadovoljava $u(k\Delta x, n\Delta t) = u_k^n$. Razvit ćemo tu funkciju u Taylorov red oko točke $(k\Delta x, n\Delta t)$ i razvoj uvrstiti u diferencijsku shemu. Dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} - a\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} \\ &= (u_t)_k^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_k^n + \frac{\Delta t^2}{6}(u_{ttt})_k^n + \cdots \\ &+ a(u_x)_k^n + \frac{a\Delta x}{2}(u_{xx})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(u_{xxx})_k^n + \cdots \end{aligned} \tag{5.8}$$

Vidimo dafunkcija $u(x,t)$ zadivoljava jednadžbu $u_t + au_x = 0$ s točnošću $O(\Delta t) + O(\Delta x)$. Ukoliko zadržimo više članova u gornjem razvoju doći ćemo do diferencijalne jednadžbe koju $u(x,t)$ zadovoljava s većom točnošću. Ta (modificirana) jednadžba onda može poslužiti za proučavanje svojstava diferencijske sheme. Na primjer, zadržat ćemo sve članove do uključivo kvadratnih po Δt i Δx, a ostale ćemo odbaciti. Time dolatimo do jednadžbe

$$(u_t)_k^n + a(u_x)_k^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_k^n + \frac{a\Delta x}{2}(u_{xx})_k^n + \frac{\Delta t^2}{6}(u_{ttt})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(u_{xxx})_k^n \approx 0.$$

Nevolja s ovom jednadžbom je što sadrži mješovite derivacije koje vode na vrlo kompliciranu disperzijsku relaciju (što pokušavamo izbjeći). Izlaz je u tome da eliminiramo sve mješovite derivacije zadržavajući isti red aproksimacije (pri čemu podrazumijevamo da je $\Delta x \approx \Delta t$).

Derivirajući (5.8) po t, tt dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= (u_{tt})_k^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{ttt})_k^n + \frac{\Delta t^2}{6}(u_{tttt})_k^n + \cdots \\ &+ a(u_{xt})_k^n + \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxt})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(u_{xxxt})_k^n + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (u_{ttt})_k^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{tttt})_k^n + \frac{\Delta t^2}{6}(u_{ttttt})_k^n + \cdots \\ &+ a(u_{xtt})_k^n + \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxtt})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(u_{xxxtt})_k^n + \cdots \end{aligned}$$

Iz ove dvije jednadžbe možemo izvršiti zamjene:

$$\begin{aligned} (u_{ttt})_k^n &\approx -a(u_{xtt})_k^n \\ (u_{tt})_k^n &\approx -a(u_{xt})_k^n - \frac{\Delta t}{2}(u_{ttt})_k^n - \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxt})_k^n \\ &\approx -a(u_{xt})_k^n + a\frac{\Delta t}{2}(u_{xtt})_k^n - \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxt})_k^n. \end{aligned}$$

Da bismo se riješili novih mješovitih derivacija deriviramo (5.8) po x, xx i xt te dobivamo:

$$\begin{aligned}0 = (u_{tx})_k^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{ttx})_k^n + \frac{\Delta t^2}{6}(u_{tttx})_k^n + \cdots \\ + a(u_{xx})_k^n + \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxx})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(u_{xxxx})_k^n + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = (u_{txx})_k^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{ttxx})_k^n + \frac{\Delta t^2}{6}(u_{tttxx})_k^n + \cdots \\ + a(u_{xxx})_k^n + \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxxx})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(u_{xxxxx})_k^n + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = (u_{txt})_k^n + \frac{\Delta t}{2}(u_{ttxt})_k^n + \frac{\Delta t^2}{6}(u_{tttxt})_k^n + \cdots \\ + a(u_{xxt})_k^n + \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxxt})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(u_{xxxxt})_k^n + \cdots\end{aligned}$$

Slobodni smo uzeti

$$(u_{xxt})_k^n \approx -a(u_{xxx})_k^n, \quad (u_{xtt})_k^n \approx -a(u_{xxt})_k^n \approx a^2(u_{xxx})_k^n$$

te

$$\begin{aligned}(u_{tx})_k^n &\approx -a(u_{xx})_k^n - \frac{\Delta t}{2}(u_{ttx})_k^n - \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxx})_k^n \\ &\approx -a(u_{xx})_k^n - \frac{\Delta t}{2}a^2(u_{xxx})_k^n - \frac{a\Delta x}{2}(u_{xxx})_k^n\end{aligned}$$

Time dolazimo do aproksimacija

$$\begin{aligned}(u_{ttt})_k^n &\approx -a^3(u_{xxx})_k^n \\ (u_{tt})_k^n &\approx a^2(u_{xx})_k^n + (a^3\Delta t + a^2\Delta x)(u_{xxx})_k^n\end{aligned}$$

što daje

$$(u_t)_k^n + a(u_x)_k^n + (a^2\frac{\Delta t}{2} + a\frac{\Delta x}{2})(u_{xx})_k^n + (\frac{a\Delta x^2}{6} + \frac{a^3\Delta t^2}{3} + \frac{a^2\Delta t\Delta x}{2})(u_{xxx})_k^n \approx 0.$$

Naša funkcija zadovoljava ovu jednadžbu s točnošću trećeg reda. Uvođenjem koeficijenta R modificiranu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(u_t)_k^n + a(u_x)_k^n + a\frac{\Delta x}{2}(1+R)(u_{xx})_k^n + \frac{a\Delta x^2}{6}(1+R)(1+2R)(u_{xxx})_k^n = 0.$$

Svojstva disipacije i disperzije sada proučavamo na modificiranoj diferencijalnoj jednadžbi. Uvrštavanjem

$$u(x,t) = e^{i(\omega t+\beta x)}$$

dobivamo

$$\omega = -a\beta + \frac{a\Delta x^2}{6}(1+R)(1+2R)\beta^3 - i\frac{a\Delta x}{2}(1+R)\beta^2.$$

Odavde ponovo dobivamo sve informacije o shemi. Prvo, iz $b = -a\Delta x(1+R)\beta^2/2$ zaključujemo da je shema nestabilna za $1+R<0$, što znači (a i R su negativni) za $R<-1$. Stabilnost dobivamo za $-1 \le R < 0$; shema je disipativna osim u slučaju $R=-1$. Greška u brzini širenja vala je

$$\begin{aligned} a - (-\frac{\alpha}{\beta}) &= a - \left(a - \frac{a\Delta x^2}{6}(1+R)(1+2R)\beta^2\right) \\ &= \frac{a\Delta x^2}{6}(1+R)(1+2R)\beta^2. \end{aligned}$$

Time smo došli do istog zaključka koji smo dobili asimptotičkom analizom u Primjeru 5.2.

6

Hiperbolički zakoni sačuvanja

U ovom poglavlju promatramo sustave zakona sačuvanja pri čemu posebnu pažnju posvećujemo skalarnoj jednadžbi. Izlaganje se bazira primarno ne [1] i [2] te na [4].

6.1 Integralna i diferencijalna forma zakona sačuvanja

Zakoni sačuvanja izražavaju svojstvo pojedinih fizikalnih polja da ostaju *sačuvana* tokom gibanja. Osnovni primjer je zakon sačuvanja mase. Razmotrimo gibanje fluida gustoće $\rho(\mathbf{x}, t)$ brzinom $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Volumen Ω koji se nalazi unutar fluida u nekom vremenskom intervalu $(t - a, t + a)$ nazvamo *kontrolni volumen*. Ukupna masa fluida u kontrolnom volumenu je jednaka

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

i pretpostavljamo da njena promjena dolazi jedino od ulaska i izlaska fluida iz kontrolnog volumena. Brzina ulaska/izlaska fluida kroz granicu kontrolnog volumena dana je plošnim integralom

$$-\int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS,$$

gdje je $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$ u točki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, pa stoga dobivamo jednadžbu

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS = 0, \tag{6.1}$$

To je integralna forma zakona sačuvanja. Jednadžba (6.1) mora vrijediti za svaki kontrolni volumen Ω. Ukoliko su polja ρ i $\mathbf{v}$ dovoljno glatka, iz integralne formulacije slijedi diferencijalna:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{6.2}$$

u domeni gibanja fluida. To je **jednadžba kontinuiteta** koja izražava zakon sačuvanja mase u diferencijalnoj formi. Važno je uočiti da je integralna forma zakona fundamentalnija od diferencijalne forme koju dobivamo tek u slučaju dovoljne glatkoće svih polja.

U onom što slijedi često ćemo promatrati jednodimenzionalno gibanje fluida kao najjedostavniji primjer gibanja. Jednodimenzionalno gibanje definiramo kao gibanje u trodimenzionalnom prostoru u kome sva implicirana polja ovise samo o jednoj prostornoj koordinati, recimo x_1 koju ćemo radi jednostavnosti označavati s x, i nema gibanja u smjerovima okomitim na os x_1. Brzina fluida stoga postaje skalar $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v(x, t)\mathbf{e_1}$, gdje je $\mathbf{e_1}$ jedinični vektor u smjeru gibanja.

Ponovimo gornji izvod integralne forme zakona sačuvanja u jednoj dimenziji. Gustoća fluida je sada gustoća po jedinici duljine duž osi x pa za masu fluida između presjeka $x = x_1$ i $x = x_2$ imamo

$$m(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)\, dx.$$

Brzina promjene mase u kontrolnom volumenu (x_1, x_2) iznosi

$$\rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t), \tag{6.3}$$

pri čemu smo predznak odredili tako da je izraz (6.3) pozitivan kad fluid ulazi u kontrolni volumen. Stoga je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)\, dx &= \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t), \\ &= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(\rho(x, t)v(x, t))\, dx, \end{aligned}$$

odakle ponovo lagano slijedi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0. \tag{6.4}$$

Brzina v koja ulazi u jednadžbu (6.4) (ili (6.2)) dobiva se kao rješenje jednadžbe gibanja, pa je stoga (6.4) tek dio sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju gibanje fluida. U nekim specijalnim slučajevima može se brzina v izraziti kao funkcija gustoće ρ, tako da se (6.4) svodi na jednu skalarnu jednadžbu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho) = 0, \tag{6.5}$$

gdje je $f(\rho) = \rho v(\rho)$. Posebno je jednostavan primjer gibanja s konstantnom brzinom: $f(\rho) = a\rho$, gdje je a brzina gibanja.

Primjer 6.1 (Protok vozila autocestom.) Označimo s $\rho(x,t)$ gustoću vozila na autocesti (broj vozila po kilometru) na promatranom mjestu x u danom trenutku t, a s $u(x,t)$ brzinu protoka vozila. Tada mora biti zadovoljen zakon sačuvanja

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0$$

koji kaže da se količina vozila u promatranoj dionici mijenja jedino zbog ulaska/izlaska vozila. Prirodno je pretpostaviti da postoji maksimalna moguća gustoća vozila pa je $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$, te da postoji maksimalna moguća brzina vozila $u_{\max}$.

Gustoća i brzina vozila su povezane: što je veća gustoća vozila brzina protoka postaje manja, dok pri maksimalnoj gustoći imamo zastoj – brzinu jednaku nuli. Ovisnost gustoće i brzine protoka može se dobiti eksperimentalno (mjerenjima), a najjednostavniji model ima oblik

$$u(\rho) = u_{\max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}).$$

Time se dobiva skalarni zakon sačuvanja $\rho_t + f(\rho)_x = 0$ s fluksom

$$f(\rho) = \rho u_{\max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}).$$

□

Primjer 6.2 (Buckley-Leverettova jednadžba) U naftnom inženjerstvu Buckley-Leverettova jednadžba predstavlja jednodimenzionalni model dvofaznog toka nemješivih fluida (npr. nafte i vode) kroz poroznu sredinu. Uzmemo li da je poroznost sredine konstantna i jednaka 1 te zanemrimo kapilarne sile, dobivamo jednadžbu oblika

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0,$$

gdje je

$$f(s) = \frac{kr_w(s)/\mu_w}{kr_w(s)/\mu_w + kr_o(s)/\mu_o}.$$

Indeksi w i o referiraju na vodu i naftu, μ označava viskoznost, a kr relativne propusnosti. Varijabla s ima značenje zasićenja (udio nafte u fluidu). Tipičan primjer relativnih propusnosti su funkcije

$$kr_w(s) = s^2, \quad kr_o(s) = (1-s)^2,$$

pa fluks dobiva oblik

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + (1-s)^2\mu_w/\mu_o}.$$

□

Sustav zakona sačuvanja u jednoj prostornoj dimeniji ima posve analognu formu:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0,$$

gdje je $\mathbf{u}\colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ nepoznata funkcija, a $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zadani fluks. Raspisano imamo

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f_i(u_1,\dots,u_m) = 0, \quad i = 1,\dots,m.$$

Početni uvjet ima oblik

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),$$

gdje je $\mathbf{u}_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ zadana vektorska funkcija.

U d prostornih dimenzija zakon sačuvanja ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = 0. \tag{6.6}$$

Pri tome su $\mathbf{f}_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zadani fluksevi, a $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, \ldots, x_d, t)$ je traženo rješenje. Početni uvjet ima oblik $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Za $m = 1$ dobivamo skalarni zakon sačuvanja u $\mathbb{R}^d$.

Napomena 6.1 Kod vektorskih zakona sačuvanja pojedine komponente često moraju zadovoljavati neke dodatne uvjete kao što je pozitivnost. Stoga u formulaciji općeg zakona sačuvanja uzimamo da su fluksevi $\mathbf{f}_i$ definirani na nekom konveksnom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ i rješenje mora zadovoljavati $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ za sve $(\mathbf{x}, t)$.

Sustav (6.6) možemo zapisati u obliku

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} D\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0. \tag{6.7}$$

gdje je $D\mathbf{f}_i$ matrica reda $m \times m$ čije su komponente

$$(D\mathbf{f}_i(\mathbf{u}))_{jk} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k}(\mathbf{u}),$$

pri čemu smo sa f_{ij} označili j-tu komponentu funkcije $\mathbf{f}_i$. Možemo zamisliti i općenitije sustave oblika

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} A_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0. \tag{6.8}$$

gdje matrične funkcije $A_i(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nisu nužno derivacije nekih vektorskih funkcija. Sustav oblika (6.7), odnosno (6.6), je u konzervativnoj formi.

Definicija 6.1 Sustav (6.8) je hiperbolički ako za svako $\mathbf{u} \in \Omega$ i svako $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$, $\omega \neq 0$ matrica

$$A(\mathbf{u}, \omega) = \sum_{i=1}^{d} \omega_i A_i(\mathbf{u})$$

ima m realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1(\omega, \mathbf{u}) \leq \lambda_2(\omega, \mathbf{u}) \leq \cdot \leq \lambda_m(\omega, \mathbf{u})$, i m linearno nezavisnih svojstvenih vektora $\mathbf{r}_1(\omega, \mathbf{u})$,..., $\mathbf{r}_m(\omega, \mathbf{u})$, tj.

$$A(\mathbf{u}, \omega)\mathbf{r}_i(\omega, \mathbf{u}) = \lambda_i(\omega, \mathbf{u})\mathbf{r}_i(\omega, \mathbf{u})$$

za $i = 1, \ldots, m$. Ako su svojstvene vrijednosti međusobno različite, onda kažemo da je sustav strogo hiperbolički.

Napomena 6.2 Definicija hiperboličnosti sustava je dobivena generalizacijom uvjeta korektnosti inicijalne zadaće za linearni sustav s konstantnim koeficijentima. Promotrimo sustav

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} A_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0$$

gdje su A_i konstantne matrice. Primijenimo li Fourierovu transformaciju po varijabli $\mathbf{x}$ (dualna varijabla neka bude ω) dobivamo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{u}}(\omega, t) + i \sum_{i=1}^{d} \omega_i A_i \hat{\mathbf{u}}(\omega, t) = 0,$$

u kome je ω parametar. Njegovo rješenje je eksponencijalna funkcija

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega, t) = e^{-iA(\omega)t}\hat{\mathbf{u}}_0(\omega), \quad A(\omega) = \sum_{i=1}^{d} \omega_i A_i,$$

gdje je $\hat{\mathbf{u}}_0(\omega)$ Fourierov transformat početnog uvjeta. Da bi zadaća bila korektno postavljena u L^2 prostoru mora vrijediti

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \|e^{-iA(\omega)t}\| \leq C < \infty.$$

Iz tog uvjeta prvo slijedi da sve svojstvene vrijednosti matrice $A(\omega)$ moraju biti realne. S druge strane, matrica mora biti dijagonalizabilna, jer bi postojanje netrivijalnog Jordanovog bloka vodilo na neograničeno (kada $t \to \infty$) partikularno rješenje. Izravnom generalizacijom na nelinearne sustave dobivamo definiciju hiperboličnosti.

Važnu podklasu hiperboličkih sustava čine simetrizabilni sustavi. Za sustav (6.8) ćemo reći da je simetrizabilan ako za svako $\mathbf{u} \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ postoji simetrična pozitivno definitna matrica $A_0(\mathbf{u})$, koja glatko ovisi o $\mathbf{u}$, takva da su matrice

$$A_0(\mathbf{u})A_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, d$$

simetrične.

Zadatak 6.1 Dokažite da je svaki simetrizabilni sustav hiperbolički.

Primjer 6.3 Važan primjer nelinearnog sustava su Eulerove jednažbe gibanja idealnog plina zapisane u Lagrangeovim koordinatama:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + p\delta_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}((\rho E + p)u_j) = 0.$$

U tim je jednadžbama ρ gustoća, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ brzina, p tlak, a E ukupna energija plina. Ukupna energija (po jedinici mase) je suma unutarnje energije e i kinetičke energije: $E =$

$e + |\mathbf{u}|^2/2$. Time imamo 5 jednadžbi ($m = 5$, $d = 3$) za nepoznanice ρ, $\mathbf{u}$, E. Izraz za tlak se dobiva iz termodinamičkih relacija. Kod politropnog plina (idealni plin s konstantnim specifičnim toplinama) imamo

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)(E - |\mathbf{u}|^2/2).$$

Ovdje je skup u kome se traži rješenje

$$\Omega = \{(\rho, \mathbf{u}, E) \colon \rho > 0, \quad E - |\mathbf{u}|^2/2 > 0\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Ako se nametnu jače pretpostavke na gibanje plina – na primjer da je gibanje izentropijsko (ima konstantnu entropiju) – onda se dobiva da je tlak p funkcija samo gustoće i tada se zadnja jednadžba separira od ostalih. Izentropijskom toku tlak je dan formulom oblika $p = C\rho^\gamma$, a ako je tok izoterman, onda jednadžba stanja daje $p = C\rho$.

U jednoj prostornoj dimenzije ove jednadžbe prelaze u

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}\big((\rho E + p)u\big) &= 0.
\end{aligned}$$

Eulerove jednadžbe čine strogo hiperbolički, simetrizabilan sustav ako tlak p zadovoljava određene termodinamičke nejednakosti. Kako račun nije posve direktan nećemo ovdje ulaziti u njega.

Primjer 6.4 Eulerove jednadžbe mogu se pojednostaviti ako se zapišu u Lagrangeovim koordinatama. U jednoj prostornoj dimenziji jednadžbe imaju oblik

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} &= 0, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m}(pu) &= 0.
\end{aligned}$$

gdje je $\tau = 1/\rho$, a m je masena koordinata definirana pomoću relacije $dm = \rho_0 s\xi$, gdje je ξ Lagrangeova koordinata, a ρ_0 inicijalna gustoća fluida. Sustav se ponovo bitno pojednostavljuje ako je tlak funkcija samo specifičnog volumena: $p = p(\tau)$. Zadnja jednadžba se tada separira, a prve dvije tvore tzv. p-sustav:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} &= 0.
\end{aligned}$$

p-sustav se može zapisati u obliku

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

gdje je

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau \\ u \end{bmatrix}, \quad A_(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{bmatrix}$$

pa je u slučaju $p'(\tau) < 0$ sustav strogo hiperbolički sa svojstvenim vrijednostima

$$\lambda_1(\tau) = -\sqrt{-p'(\tau)} < 0 < \lambda_2(\tau) = \sqrt{-p'(\tau)}.$$

Izračunajte svojstvene vektore.

Zadatak 6.2 Pokažite da se svaka nelinearna valna jednadžba oblika

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(\frac{\partial v}{\partial x})\right) = 0,$$

može napisati u obliku p-sustava.

6.2 Linearna jednadžba konvekcije

Kao najjednostavniji primjer zakona sačuvanja promatramo linearnu jednadžbu konvekcije

$$u_t + au_x = 0, \tag{6.9}$$

gdje je $a \in \mathbb{R}$ konstanta. Jednadžbu promatramo za sve $x \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ i pridružujemo joj počeni uvjet:

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{6.10}$$

Lako je vidjeti da je rješenje dano formulom

$$u(x, t) = u_0(x - at). \tag{6.11}$$

Rješenje evoluira tako da se translatira brzinom a (ulijevo za $a < 0$ i udesno za $a > 0$) ne mijenjajući inicijalni oblik. Uočimo da rješenje ostaje konstantno na pravcima $x = x_0 + at$ koje onda nazivamo *karakteristikama* ili karakterističnim krivuljama. Lako je uočiti da je karakteristika $x(t) = x_0 + at$ rješenje Cauchyjevog problema

$$\frac{dx}{dt} = a \tag{6.12}$$

$$x(0) = x_0. \tag{6.13}$$

Na karakteristici $x = x(t)$ imamo

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t) = 0,$$

pa je stoga rješenje $u(x, t)$ konstantno na karakteristikama.

Posve analogo se rješenje može naći u slučaju

$$u_t + a(x)u_x = 0, \tag{6.14}$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{6.15}$$

Jednadžba karakteristika će imati oblik

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \tag{6.16}$$
$$x(0) = x_0. \tag{6.17}$$

Ukoliko je funkcija $a(x)$ takva da problem (6.16), (6.16) ima jedinstveno globalno rješenje na $(0, \infty)$, onda se može zaključiti da se karakteristike na sijeku i da prekrivaju čitavu gornju (x, t)-pluravninu. Kako je rješenje konstantno na svakoj karakteristici dobivamo rješenje u čitavoj gornjoj poluravnini.

Zadatak 6.3 Riješiti i grafički prikazati rješenje (u Matlabu, Scilabu)

$$u_t + \cos^2(x)u_x = 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in (0,1) \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad \square$$

Metoda karakteristika može se primijeniti i na zadaću oblika

$$u_t + a(x)u_x = f(x,t),$$
$$u(x,0) = u_0(x),$$

gdje je f zadana funkcija. Jednadžba karakteristika je ponovo ista

$$\frac{dx}{dt} = a(x), \quad x(0) = x_0,$$

ali rješenje više nije konstantno na karakteristikama jer imamo

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = f(x(t),t). \tag{6.18}$$

Kako nam je $x(t)$ poznato iz (6.18) integracijom možemo odrediti rješenje duž karakteristike.

6.3 Jednadžba konvekcije-difuzije

U jednadžbi (6.4) polje ρ se transportira zadanom brzinom. U slučajevima kada ρ nije gustoća mase (ρ može biti temperatura fluida, koncentracija kemijske supstance u fluidu i slično) postoji i drugi mehanizam transporta koji dolazi od nasumičnog gibanja molekula fluida i koji ima tendenciju smanjiti sve razlike u koncentraciji. Taj se mehanizam modelira dodatnim fluksom oblika $-D\rho_x$, gdje je D pozitivna konstanta, tzv. koeficijent difuzije. To znači na će razlika u gustoći u dvije točke izazvati gibanje koje ima za cilj smanjiti tu razliku. Ukupan fluks će u tom slučaju biti jednak

$$f(\rho, \rho_x) = v\rho - D\rho_x$$

i zakon sačuvanja dobiva oblik

$$\rho_t + (v\rho - D\rho_x)_x = 0,$$

odnosno

$$\rho_t + (v\rho)_x = (D\rho_x)_x. \tag{6.19}$$

To je jednadžba konvekcije difuzije. U većini transportnih procesa prisutna je i difuzija (zakon sačuvanja mase je s tog stanovišta vrlo poseban) s koeficijentom difuzije D koji je redovito vrlo mali u odnosu na brzinu gibanja. Stoga se često difuzivni član $(D\rho_x)_x$ zanemaruje i hiperbolički zakon sačuvanja se promatra kao aproksimacija zakona sačuvanja tipa konvekcije-difuzije. Pri tome treba uočiti da zanemarivanje člana $(D\rho_x)_x$ predstavlja singularnu perturbaciju jednadžbe budući da se zanemaruje član s najvišom derivacijom. Pri tome jednadžba mijenja tip i od paraboličke postaje hiperbolička.

6.4 Nelinearni zakoni sačuvanja

Promatramo hiperbolički zakon sačuvanja u obliku:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{6.20}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.21}$$

Metodu karakteristika možemo pokušati primijeniti i u nelinearnom slučaju postupajući po analogiji s linearnim. Definirat ćemo jednadžbu karakteristike:

$$x'(t) = f'(u(x(t),t)) \tag{6.22}$$

$$x(0) = x_0. \tag{6.23}$$

Ova jednadžba na prvi pogled nije rješiva jer sadrži u sebi nepoznatu funkciju $u(x,t)$. Ipak, ako pogledamo kako evoluira rješenje duž karakteristike, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t),t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t)x'(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + f'(u(x(t),t)\frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t) = 0 \end{aligned}$$

i stoga zaključujemo da je $u(x,t)$ konstanta na karakterisitici. Posljedično, iz (6.22) slijedi da su karakteristike pravci i stoga ih je moguće izračunati poznajući samo inicijalni podatak: Karakteristika koja izlazi iz točke x_0 na x-osi ima jednadžbu

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0.$$

Sada se postavlja pitanje možemo li konstruirati rješenje zadaće kao u linearnom slučaju. U tu svrhu morale bi karakteristike koje polaze s osi x imati svojstvo da se nikad ne sijeku te da prekrivaju čitavu gornju poluravninu. Odgovor na to pitanje je negativan jer se lako vidi da se karakteristike mogu sijeći. Dovoljno je uzeti funkciju f i početni uvjet u_0 takve da je $x \mapsto f'(u_0(x))$ padajuća funkcija.

Zadatak 6.4 Za Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = 0$$

i početni uvjet

$$u_0(x) = \begin{cases} 1+x & \text{za } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{za } x \in [0,1] \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

nađite prvi trenutak u kome dolazi do presjecanja karakteristika. Kako izgleda rješenje u tom trenutku? □

Iz prethodnog primjera vidimo da je brzina prostiranja vala različita u različitim područjima i da stoga dolazi do deformacije početnog podatka. U trenutku kada dolazi do presjecanja karakteristika u rješenju se formira diskontinuitet (karakteristike koje se sjeku donose u istu točku različite *vrijednosti* rješenja). Nakon tog trenutka nije više moguće konstruirati rješenje metodom karakteristika. Tradicionalno diskontinuitete u rješenju nazivamo šokovima. Zbog nelinearnosti moguće je da se šokovi stvore iako je inicijalni podatak potpuno gladak. To nije moguće u linearnoj jednadžbi, gdje diskontinuiteti mogu egzistirati jedino ako postoje u početnom uvjetu i tada se transportiraju po karakteristikama.

Zadatak 6.5 Neka su funkcije $f(u)$ i $u_0(x)$ glatke. Pokažite da je najmanje vrijeme u kojem će doći do presjecanja karakteristika dano formulom

$$T = -\frac{1}{\min_x f''(u_0(x))u_0'(x)}$$

pri čemu se uzima da nema presjecanja ako je T negativno. □

Primjer 6.5 Metodom karakteristika treba riješiti Cauchyjev problem

$$u_t + uu_x + au = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Uvedemo li karakteristiku $x = x(t)$, koja polazi iz točke $x = \xi$ u $t = 0$, jednadžbom $x'(t) = u(x(t), t)$, onda na njoj dobivamo

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + uu_x = -au(x(t),t).$$

Dakle,treba riješiti sustav $(u(t) = u(x(t),t))$

$$\frac{du}{dt} = -au, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

uz početne uvjete $u(0) = u_0(\xi)$, $x(0) = \xi$. Rješenje je

$$u(t) = u_0(\xi)e^{-at}, \quad x(t) = \xi + u_0(\xi)\frac{1-e^{-at}}{a}.$$

Odavdje vidimo da za $a > 0$ dobivamo eksponencijalno gušeni val. Za $a < 0$ dobivamo rješenje koje eksponencijalno raste i stoga taj problem nije korektno postavljen na $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Zadatak 6.6 Pokažite da je u prethodnom primjeru prvi tenutak u kome dolazi do presjecanja karakterisitka dan jednadžbom

$$u_0'(\xi) = -\frac{a}{1-e^{-at}}.$$

Za $a > 0$ zaključujemo da, osim što je val eksponencijalno gušen, do stvaranja šokova može doći samo ako početni podatak ima dovoljno veliki negativni nagib, $u_0'(\xi) < -a$. Član nižeg reda može dakle spriječiti nastajanje šoka.

Zadatak 6.7 Pokažite da jednadžba

$$u_t + uu_x = Du_{xx} \quad (D = \text{konstanta})$$

ima rješenje oblika

$$u = -2D\frac{\phi_x}{\phi} \quad \text{(Cole-Hopfova transformacija)}$$

gdje ϕ zadovoljava jedadžbu

$$\phi_t = D\phi_{xx}.$$

6.5 Slaba rješenja

Vidjeli smo da rješenje nelinearnog zakona sačuvanja ne mora nužno biti neprekidno, čak i kad je početni uvjet beskonačno gladak. Svojstvo rješenja da razvija šokove u konačnom vremenu čini difeencijalnu formulaciju problema neprikladnom; potrebno je stoga koristiti inegralnu formulaciju. S matematičkog stanovišta integralna formulacija ima svojih nedostataka zbog kojih se zamijenjuje ekvivalentinim ali pogodinijim zapisom tzv. varijacijskom jednadžbom. Varijacijska se jednadžba formira tako da se diferencijalna jednadžba pomnoži s odgovrajućom *test funkcijom* i da se sve parcijalne derivacije parcijalnom integracijom prebace na test funkciju.

Neka je ϕ glatka funkcija s kompaktnim nosačem u $\mathbb{R}^d \times [0,\infty)$, tzv. test funkcija. Da bismo specificirali glatkoću uzmimo da je ϕ ima neprekidne prve derivacije i označimo takav skup s $C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$. Tada iz

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u))\phi \, d\mathbf{x}dt = 0,$$

parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (u\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}) \, d\mathbf{x}dt = -\int_{\mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x},0)\, d\mathbf{x}. \tag{6.24}$$

Definicija 6.2 Neka je $u_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Svaka funkcija $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ koja zadovoljava (6.24) za sve $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ naziva se slabo rješenje Cauchyjevog problema (6.20), (6.21).

Za općenit sustav zakona sačuvanja

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = 0. \tag{6.25}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{6.26}$$

gdje su $\mathbf{f}_i \colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zadani fluksevi (Ω je konveksan skup), slabo rješenje se definira posve analogno. Potrebno je samo uzeti vektorsku test funkciju $\boldsymbol{\phi} \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))^m$ i parcijalno integrirati. Dobivamo

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i})\, d\mathbf{x}dt = -\int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x}. \tag{6.27}$$

Definicija 6.3 Neka je $\mathbf{u}_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^m$. Svaka funkcija $\mathbf{u} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))^m$ naziva se slabo rješenje Cauchyjevog problema (6.25), (6.26), ako je $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ za s.s. $(\mathbf{x}, t)$ i (6.27) je zadovoljeno za sve $\boldsymbol{\phi} \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))^m$.

Parcijalnom integracijom je lako pokazati sljedeći rezultat:

Propozicija 6.1 Ako je slabo rješenje zadaće (6.25), (6.26) glatko (ima neprekidne prve derivacije) u nekom otvorenom skupu $V \subset \mathbb{R} \times (0,\infty)$, onda ono u V zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (6.25). Ako je rješenje glatko i neprekidno sve do hiperravnine $t = 0$, onda ono zadovoljava početni uvjet po točkama.

Pretpostavimo nadalje da je slabo rješenje $u(x, t)$ jednodimenzionalnog zakona sačuvanja (6.20), (6.21) po dijelovima glatka funkcija u sljedećem smislu: $u(x, t)$ je funkcija klase C^1 u gornjoj poluravnini svugdje osim na konačno mnogo po dijelovima glatkih krivulja, na kojima ima skokove prve vrste (sa svake strane krivulje ima konačne limese). Krivulju prekida ćemo parametrizirati s vremenom: $\Sigma = \{(x(t), t) \colon t \in I\}$, gdje je I neki vremenski interval. Vrijednosti funkcije $u(x, t)$ s lijeva i zdesna na krivulji skoka označavamo s u_- i u_+. Pri tome je lijevo i desno moguće definirati kad se uvede orijentacija krivulje.

Teorem 6.1 Neka je $u(x, t)$ po dijelovima glatko slabo rješenje Cauchyjevog problema (6.20), (6.21). Tada vrijedi:

(i) $u(x, t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu izvan krivulja prekida;

(ii) Na krivuljama prekida $u(x, t)$ zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet

$$s(u_+ - u_-) = f(u_+) - f(u_-),$$

gdje su u_- i u_+ vrijednosti funkcije u slijeva i zdesna u točki na krivulji prekida, te $s = x'(t)$.

Obratno, ako po dijelovima glatka funkcija zadovoljava (6.21), (i) i (ii), tada je ona slabo rješenje Cauchyjevog problema (6.20), (6.21).

Dokaz. Pokazat ćemo da svako po dijelovima glatko slabo rješenje $u(x,t)$ zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet na linijama diskontinuiteta. Dokaz da zadovoljava diferencijalnu jednadžbu u području glatkoće provodi se jednostavno parcijalnom integracijom.

Odaberimo točku $(\overline{x},\overline{t})$, $\overline{t}>0$ na krivulji diskontinuiteta Σ te uzmimo krug D s centrom u $(\overline{x},\overline{t})$, dovoljno malog radijusa, tako da ga krivulja Σ dijeli na dva dijela D^+ i D^-, na kojima je funkcija $u(x,t)$ glatka. Za $\phi\in C_c^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ imamo

$$0=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}(u\phi_t+f(u)\phi_x)\,dxdt=\int_{D^+}+\int_{D^-}$$

te parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\begin{aligned}0=&-\int_{D^+}(u_t+f(u)_x)\phi\,dxdt+\int_{D\cap\Sigma}(u^+n_t^++f(u^+)n_x^+)\phi\,ds\\&-\int_{D^-}(u_t+f(u)_x)\phi\,dxdt+\int_{D\cap\Sigma}(u^-n_t^-+f(u^-)n_x^-)\phi\,ds\end{aligned}$$

gdje smo vanjsku normalu na $D^\pm$ označili s $\mathbf{n}^\pm$ i analogno s $u^\pm$ označavamo limes funkcije u na Σ, uzet iz područja $D^\pm$. Kako je diferecijalna jednadžba zadovoljena u područjima glatkoće rješenja, imamo

$$\int_{D\cap\Sigma}(u^+n_t^++f(u^+)n_x^+)\phi\,ds+\int_{D\cap\Sigma}(u^-n_t^-+f(u^-)n_x^-)\phi\,ds=0,$$

odnosno

$$\int_{D\cap\Sigma}\big((u^+-u^-)n_t^++(f(u^+)-f(u^-))n_x^+\big)\phi\,ds=0.$$

Budući da to vrijedi za svaku test funkciju s nosačen u D zaključujemo da u točki $(\overline{x},\overline{t})$ mora vrijediti

$$(u^+-u^-)n_t^++(f(u^+)-f(u^-))n_x^+=0$$

Prametrizirajmo krivulju Σ u okolini točke $(\overline{x},\overline{t})$ sa $(x(t),t)$, za neku funkciju $x(t)$. Tada možemo uzeti $\mathbf{n}(t)=(1,-x'(t))=(1,-s)$ pa dobivamo[1]

$$s(u^+-u^-)=(f(u^+)-f(u^-)).$$

To je tražena relacija. Obrat se dokazuje analogno. □

Uočimo da se posve isti dokaz prenosi i na sustave jednodimenzionalnih zakona sačuvanja. Na linijama diskontinuiteta mora vrijediti Rankine-Hugoniotov uvjet

$$s(\mathbf{u}_+-\mathbf{u}_-)=\mathbf{f}(\mathbf{u}_+)-\mathbf{f}(\mathbf{u}_-).\tag{6.28}$$

[1] Uočimo da izbor orijentacije krivulje nije bitan.

U slučaju višedimenzionalnog zakona sačuvanja (6.25), (6.26) kažemo da je rješenje po dijelovima glatko ako je klase C^1 svugdje osim na konačnom broju glatkih orijentabilnih ploha, na kojima ima konačne limese *s lijeva* i *zdesna*, u odnosu na orijentiranu normalu. Na svakoj takvoj plohi mora biti zadovoljen Rankine-Hugoniotov uvjet

$$(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)n_t + \sum_{i=1}^{d}(\mathbf{f}_i(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}_i(\mathbf{u}_-))n_{x_i} = 0, \tag{6.29}$$

gdje je $\mathbf{n} = (n_{x_1}, \ldots, n_{x_d}, n_t)$ normala na plohi diskontinuiteta. Izbor orijentacije plohe nije bitan.

Zadatak 6.8 Dokažite (6.29).

6.6 Riemannov problem

Cauchyjevu zadaću oblika

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_- & \text{za } x < 0 \\ \mathbf{u}_+ & \text{za } x > 0. \end{cases}$$

nazivamo Riemannov problem. On je od velike važnosti kako za razumijevanje srukture rješenja Cauchyjeve zadaće, tako i za konstrukciju numeričkih metoda. Ovdje nas zanima prvenstveno Riemannov problem za skalarnu jednadžbu.

Riemannov problem je moguće riješiti pomoću *konstantnih stanja* kao što pokazuje sljedeći zadatak. Naime, prema Teoremu 6.1 rješenje koje se sastoji od konstantnih stanja, da bi bilo slabo rješenje zadaće, mora samo na linijama prekida zadovoljavati Rankine-Hugoniotov uvjet.

Zadatak 6.9 Neka je $u_l > u_r$. Pokažite da je funkcija

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{za } x < st \\ u_r & \text{za } x > st, \end{cases}$$

gdje je

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l},$$

slabo rješenje zadaće (6.20), (6.21). □

Rješenja koja možemo konstrirati pomoću konstantnih stanja nisu jedinstvena. Sljedeći zadatak pokazuje da možemo konstruirati beskonačno mnogo takvih rješenja, pa stoga zaključujemo da ona nisu *fizikalna*. Bit će nam potreban kriterij selekcioniranja *pravog* rješenja.

Zadatak 6.10 Zadan je Riemannov problem za Burgersovu jednadžba s podacima koji zadovoljavaju $u_l < 0 < u_r$. Pokažite da je za svako $0 < a < u_r$ funkcija

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{za } x < s_1 t \\ -a & \text{za } s_1 t < x < 0 \\ a & \text{za } 0 < x < s_2 t \\ u_r & \text{za } x > s_2 t, \end{cases}$$

gdje je $s_1 = (u_l - a)/2$, $s_2 = (u_r + a)/2$, slabo rješenje Riemannove zadaće. Ovaj primjer pokazuje da slabo rješenje nije jedinstveno.

Osim pomoću konstantnih stanja Riemannov problem možemo riješiti i na osnovu simetrije koja postoji u zakonu sačuvanja. S tim ciljem treb uočiti da je Riemannov problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{6.30}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_- & \text{za } x < 0 \\ u_+ & \text{za } x > 0 \end{cases} \tag{6.31}$$

invarijantan u odnosu na transformaciju

$$(x,t) \mapsto (ax, at), \quad a > 0.$$

Stoga problem mora imati rješenje koje ovisi samo o x/t. Da bismo to proverili, uvrstimo u (6.30) rješenje oblika $u(x,t) = v(x/t)$ i fobit ćemo jednadžbu

$$\xi = f'(v(\xi)),$$

gdje smo uveli novu varijablu $\xi = x/t$. Ako je funkcija $f'(u)$ strogo monotona, dakle ako je $f(u)$ strogo konveksan ili strogo konkavna funkcija, onda će $v(\xi)$ biti moguće izračunati kao inverz funkcije $f'(u)$.

Zadatak 6.11 Neka je $u_l < u_r$ i neka je funkcija $f(u) = u^2/2$ (Burgersova jednadžba). Pokažite da je funkcija

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{za } x < u_l t \\ x/t & \text{za } u_l t < x < u_r t \\ u_r & \text{za } x > u_r t, \end{cases}$$

slabo rješenje zadaće (6.30), (6.31). □

6.7 Viskozna perturbacija i entropijsko rješenje

Hiperbolički zakoni sačuvanja se u najvećem broju slučajeva dobivaju zanemarivanjem derivacija drugog reda uz koje stoji mali koeficijent, koji se interpretira kao viskoznost ili koeficijent difuzije. U skalarnom slučaju bismo mogli imati

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i(u^\varepsilon)}{\partial x_i} = \varepsilon \Delta u^\varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \tag{6.32}$$

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_{0\varepsilon}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{6.33}$$

gdje na dsnoj strani umjesto Laplaceovog operatora može stajati bilo koji eliptički operator drugog reda. Zanima nas pod kojim će uvjetima rješenje u^ε problema (6.32), (6.33) konvergirati prema rješenju problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \tag{6.34}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{6.35}$$

Pri tome prirodno pretpostavljamo da

$$u_{0\varepsilon}(\mathbf{x}) \to u_0(\mathbf{x}) \quad \text{kada } \varepsilon \to 0 \text{ za s.s. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{6.36}$$

Jednadžba (6.32) je paraboličkog tipa i u teoriji paraboličkih diferencijalnih jednadžbi se pokazuje da Cauchyjev problem (6.32), (6.33) ima jedinstveno rješenje koje je glatko. S druge strane, vidjeli smo da hiperbolička jednadžba (6.34) može imati slaba rješenja koja nisu neprekidna te da takva rješenja nisu nužno jedinstveno određena početnim uvjetom. Stoga dodavanje Laplaceovog operatora na desnu stranu jednadžbe (6.34) možemo promatrati kao postupak *regularizacije* modela. Prijelazom na limes kada $\varepsilon \to 0$ selektirat ćemo jedno rješenje problema (6.34), (6.35) koje je granični slučaj regulariziranih rješenja.

Teorem 6.2 Neka je zadovoljen uvjet (6.36) i pretpostavimo da niz glatkih rješenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ zadaće (6.32), (6.33) zadovoljava

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))} \le C$$
$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \to v(\mathbf{x}, t) \quad \text{kada } \varepsilon \to 0 \text{ za s.s. } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty).$$

Tada je $v = u$ slabo rješenje zadaće (6.34), (6.35).

Dokaz. Za svaku test funkciju $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ rješenje u^ε zadovoljava

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (u^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \varepsilon u^\varepsilon \Delta \phi)\, d\mathbf{x} dt = -\int_{\mathbb{R}^d} u_{0\varepsilon}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x}.$$

Sada je lako vidjeti da korištenjem Lebesguevog teorema o dominiranoj konvergenciji možemo prijeći na limes u svim članovima i dobivamo

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (v \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(v) \frac{\partial \phi}{\partial x_i})\, d\mathbf{x} dt = -\int_{\mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x}.$$

Drugim riječima, v je slabo rješenje zadaće (6.34), (6.35). $\square$

Zadatak 6.12 Formulirajte i dokažite teorem analogan Teoremu 6.2 u slučaju sustava

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t > 0; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \square$$

Slabo rješenje zadaće (6.34), (6.35) koje je dobiveno kao limes rješenja zadaće (6.32), (6.33) nazivamo **viskoznim rješenjem**. Može se pokazati da je viskozno rješenje jedinstveno (Kružkovljev teorem). Bez tog rezultata jedinstvenosti različiti podnizovi rješenja viskoznog problema bi mogli konvergirati prema općenito različitim limesima.

Primjer 6.6 Promatramo viskoznu Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$$

i tražimo rješenje u obliku $u(x,t) = w(x - st)$. Pri tome želimo rješenje koje spaja dva asimptotska stanja, u_l i u_r:

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = u_l, \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = u_r. \tag{6.37}$$

Uvođenjem nove varijable $y = x - st$ vidimo da w mora zadovoljavati običnu diferencijalnu jednadžbu

$$-sw' + ww' = \varepsilon w''.$$

Jednom integracijom dobivamo

$$-sw + \frac{1}{2}w^2 = \varepsilon w' + C.$$

Iz uvjeta (6.37) zaključujeo da mora vrijediti

$$C = -su_l + \frac{1}{2}u_l^2 = -su_r + \frac{1}{2}u_r^2$$

i odatle je $s = 0.5(u_r^2 - u_l^2)/(u_r - u_l) = 0.5(u_r + u_l)$ što je brzina gibanja šoka. Diferencijalna jednadžba sada prelazi u

$$\varepsilon w' = -s(w - u_l) + \frac{1}{2}(w^2 - u_l^2) = (w - u_l)\big[-s + \frac{1}{2}(w + u_l)\big] = \frac{1}{2}(w - u_l)(w - u_r).$$

Ovdje vidimo da u oba slučaja $u_l > u_r$ i $u_r > u_l$ dobivamo negativnu derivaciju. Stoga samo u slučaju $u_l > u_r$ dobivamo rješenje w koje zadovoljava $u_r < w < u_l$. Nadalje pretpostavljamo taj slučaj:

$$\int \frac{dw}{(w - u_l)(w - u_r)} = \frac{1}{2\varepsilon}y + E,$$

gdje je E integracijska konstanta koju možemo zanemariti stoga što odgovara translaciji duž osi x. Izlazi

$$\frac{1}{u_l - u_r}\ln\left|\frac{w - u_l}{w - u_r}\right| = \frac{1}{2\varepsilon}y \quad \Rightarrow \quad w = u_r + \frac{1}{2}(u_l - u_r)(1 - \tanh\frac{(u_l - u_r)y}{4\varepsilon})$$

Od zakona sačuvanja (6.34) možemo formirati nove zakone sačuvanja na sljedeći način. Pomnožimo jednadžbu (6.34) s funkcijom $U'(u)$, pri čemu je $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Dobivamo

$$U'(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} U'(u)f_i'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Definiramo funkcije F_i pomoću relacija ($i = 1, 2, \dots, d$)

$$F_i'(u) = U'(u) f_i'(u) \tag{6.38}$$

i time dobivamo novi zakon sačuvanja

$$\frac{\partial U(u)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_i(u)}{\partial x_i} = 0.$$

Primjer 6.7 Ako u 1D uzmemo $U(u) = u^2/2$ dobit ćemo $F(u) = uf(u) - \int f(u)\,du$.

Definicija 6.4 Par funkcija $(U, \mathbf{F})$ koji se sastoji od konveksne funkcije $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i vektorske funkcije $\mathbf{F} = (F_i)_{i=1}^d$, gdje je F_j definirano s (6.38), naziva se entropijski par. Funkciju U nazivamo entropijska funkcija, a $\mathbf{F}$ entropijski flux.

Na primjer, ako Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = 0$$

pomnožimo s $2u$ dobivamo

$$(u^2)_t + (\frac{2}{3}u^3)_x = 0, \tag{6.39}$$

($U(u) = u^2$, $F(u) = 2u^3/3$). Uočimo da su te dvije jednadžbe ekivalentne samo na glatkim rješejima. Naime, iz Rankine-Hugoniotove relacije se vidi da je u Burgersovoj jednadžbi brzina šoka jednaka $s = (u_l + u_r)/2$, dok se za (6.39) dobiva

$$s = \frac{2}{3}\frac{u_r^3 - u_l^3}{u_r^2 - u_l^2}.$$

Zaključak je stoga da za entropijski par $(U, \mathbf{F})$ funkcija $U(u)$ neće nužno zadovoljavati zakon sačuvanja ako sadrži diskontinuitete.

Teorem 6.3 Neka su zadovoljeni uvjeti Teorema 6.2 i neke je $(U, \mathbf{F})$ proizvoljan entropijski par za zakon sačuvanja (6.34). Tada svako viskozno rješenje problema (6.34), (6.35) zadovoljava entropijsku nejednakost

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}F_i(u) \le 0 \tag{6.40}$$

u smislu distribucija na $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$.

Dokaz. Budući da je $u(x, t)$ viskozno rješenje hiperboličke zadaće znamo da postoji niz $u^\varepsilon(x, t)$ rješenja zadaće (6.32), (6.33) koji konvergira prema $u(x, t)$ kada $\varepsilon \to 0$, kao u Teoremu 6.2.

Pomnožimo li jednadžbu (6.32) sa $U'(u^\varepsilon)$ i primijenimo definiciju entropijskog fluksa (6.38) dobit ćemo

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u^\varepsilon) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(u^\varepsilon) = \varepsilon U'(u^\varepsilon)\Delta u^\varepsilon.$$

Desnu stranu možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}\varepsilon U'(u^\varepsilon)\Delta u^\varepsilon &= \varepsilon \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U'(u^\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right) - \varepsilon U''(u^\varepsilon)\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U'(u^\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \Delta U(u^\varepsilon),\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili konveksnost funkcije U, koja daje $U'' \geq 0$. Time smo dobili nejednakost

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u^\varepsilon) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(u^\varepsilon) \leq \varepsilon \Delta U(u^\varepsilon).$$

Uzmimo pozitivnu test funkciju $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$, $\phi \geq 0$; iz

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial}{\partial t}U(u^\varepsilon) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(u^\varepsilon) - \varepsilon \Delta U(u^\varepsilon)\right)\phi \, d\mathbf{x}dt \leq 0$$

parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(U(u^\varepsilon)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} F_i(u^\varepsilon)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \varepsilon U(u^\varepsilon)\Delta\phi\right) d\mathbf{x}dt \geq 0$$

Prijelazom nalimes kada $\varepsilon \to 0$, na isti način kao i u Teoremu 6.2 dobivamo da viskozno rješenje $u(x,t)$ na limesu zadovoljava

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(U(u)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} F_i(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) d\mathbf{x}dt \geq 0. \tag{6.41}$$

Smisao tvrdnje da je nejednakost (6.40) zadovoljena u smislu distribucija je da nejednakost (6.41) vrijedi ta svaku funkciju $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$, $\phi \geq 0$. □

Zadatak 6.13 Formulirajte i dokažite Teoreme 6.2 i 6.3 u slučaju hiperboličkog sustava. Na desnoj strani perturbiranog problema uzmite $\varepsilon\Delta\mathbf{u}$, gdje je $(\Delta\mathbf{u})_i = \Delta u_i$.

Zadatak 6.14 Dokažite Teorem 6.3 u slučaju perturbacije općim eliptičkim diferencijalnim operatorom drugog reda. Preciznije, neka je $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(x))$ simetrična i pozitivno definitna glatka matrična funkcija te neka je viskozno rješenje definirano kao limes rješenja paraboličke jednadžbe

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i(u^\varepsilon)}{\partial x_i} = \varepsilon \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t > 0.$$

Dokažite da Teorem 6.3 vrijedi i u tom slučaju.

Definicija 6.5 Slabo rješenje problema (6.34), (6.35) se naziva entropijsko rješenje Ako za svaki entropijski par $(U, \mathbf{F})$ i svaku pozitivnu test funkciju $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$, $\phi \geq 0$, vrijedi:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(U(u)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d F_i(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbb{R}^d} U(u_0(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x}dt \geq 0. \quad (6.42)$$

Uzimajući u Teoremu 6.3 test funkcije koje se ne poništavaju pri $t = 0$ dobili bismo nejednakost (6.42) umjesto (6.40). Drugim riječima, viskozno rješenje je ujedno entropijsko. Stoga se očekuje da je niz dodatnih nejednakosti koje entropijsko rješenje mora zadovoljavati dovoljan za selektiranje jedinstvenog rješenja.

Neka je $u(x, t)$ entropijsko rješenje problema (6.34), (6.35) i pretpostavimo da je ono glatko. Tada se lako pokazuje da u području glatkoće rješenja mora vrijediti entropijska nejednakost u diferencijalnoj formi, tj.

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}F_i(u) \leq 0,$$

dok na plohama diskontinuiteta imamo

$$n_t[U(u)] + \sum_{i=1}^d n_{x_i}[F_i(u)] \leq 0, \quad (6.43)$$

gdje je $\mathbf{n} = (n_{x_1}, \dots, n_{x_d}, n_t)$ jedinična normala na orijentabilnu plohu diskontinuiteta, a $[\cdot]$ je oznaka za skok polja: $[u] = u_+ - u_-$. U jednodimenzionalnom slučaju imamo

$$s[U(u)] \geq [F(u)], \quad (6.44)$$

gdje je $s = x'(t)$ i $x = x(t)$ je parametrizacija linije diskontinuiteta. Te su nejednakosti dovoljne da se eliminiraju nefizikalni šokovi.

Entropijski par koji je vrlo koristan kod skalarnog zakona sačuvanja je dan formulama

$$U(u) = |u - k|, \quad F_j(u) = \operatorname{sgn}(u - k)(f_j(u) - f_j(k)). \quad (6.45)$$

Radi se o familiji entropijskih parova s realnim parametrom k. Kako funkcije F_j nisu glatke potrebno je provjeriti da $(U, \mathbf{F})$ zaista možemo uzeti kao entropijski par. U tu svrhu izgladimo funkciju $|x|$, tako da uzmemo funkciju $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ koja zadovoljava $G(x) = |x|$ za sve $|x| \geq 1$. Tada je funkcija

$$G^\varepsilon(x) = \varepsilon G(\frac{x - k}{\varepsilon}),$$

glatka aproksimacija funkcije $U(x) = |x - k|$. Definiramo

$$F_j^\varepsilon(x) = \int_k^x G_\varepsilon'(z) f_j(z)\, dz,$$

i $(G^\varepsilon, \mathbf{F}^\varepsilon)$ je gladak entropijski par.

Zadatak 6.15 Dokažite da za svako x, osim (eventualno) $x = k$, vrijedi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G^\varepsilon(x) = U(x), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} F_j^\varepsilon(x) = F_j(x)$$

gdje su $U(x)$ i $F_j(x)$ dani s (6.45).

Budući da entropijsko rješenje $u(x,t)$ problema (6.34), (6.35) za svaku pozitivnu test funkciju zadovoljava

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(G^\varepsilon(u)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d F_i^\varepsilon(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbb{R}^d} G^\varepsilon(u_0(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x},0)\, d\mathbf{x}dt \geq 0,$$

prijelazom na limes kada $\varepsilon \to 0$ dobivamo

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(U(u)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d F_i(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbb{R}^d} U(u_0(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x},0)\, d\mathbf{x}dt \geq 0.$$

Time je dokazano da je (6.45) dobar entropijski par.

Zadatak 6.16 Dokažite tu tvrdnju pomoću Legesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Napomena 6.3 Koristeći rezultate konveksne analize moguće je pokazati da je slabo rješenje zadaće (6.34), (6.35) entropijsko akko zadovoljava entropijsku nejednakost (??) na entropijskim parovima oblika (6.45) za sve $k \in \mathbb{R}$.

U slučaju jednodimenzionalnog zakona sačuvanja i strogo konveksnog fluksa imamo ovaj rezultat (vidi Godlewski, Raviart [1]):

Teorem 6.4 Neka je $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ strogo konveksna funkcija i neka je $u\colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to (a,b)$ po dijelovima glatko slabo rješenje zadaće

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R},\ t > 0$$
$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R},$$

i pretpostavimo da, u smislu distribucija, vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial t}U(u) + \frac{\partial}{\partial x}F(u) \leq 0 \tag{6.46}$$

za barem jednu strogo konveksnu entropiju $U = U_0$. Tada je (6.46) zadovoljena za sve entropije U.

6.8 Entropija hiperboličkih sustava

U slučaju skalarnog zakona sačuvanja svaka konveksna funkcija generira jedan enropijski par, koji pak generira jedan uvjet tipa nejednakosti koji mora biti zadovoljen na svakom diskontinuitetu. U slučaju sustava takvo bogatstvo entropija ne postoji.

Ako imamo sustav parcijalnih diferencijslnih jednadžbi

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = 0, \tag{6.47}$$

($\mathbf{u}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$) onda pomoću njega možemo konstruirati novi (skalarni) zakon sačuvanja na sljedeći način: Uzmimo konveksnu funkciju $U\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ i pomnožimo sustav skalarno sa $DU(\mathbf{u})$:

$$DU(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} DU(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = 0,$$

Prvi član u jednadžbi možemo zapisati u obliku

$$DU(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial u_j} U(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{u}).$$

Drugi član ima oblik

$$DU(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = DU(\mathbf{u}) \cdot D\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = D\mathbf{f}_i(\mathbf{u})^{\tau} DU(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}.$$

Ako postoji funkcija $F_i\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ takva da je

$$DF_i(\mathbf{u}) = D\mathbf{f}_i(\mathbf{u})^{\tau} DU(\mathbf{u}), \tag{6.48}$$

za sve $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, onda je

$$DU(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(\mathbf{u}),$$

i dobivamo novi skalarni zakon sačuvanja

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(\mathbf{u}) = 0.$$

Prema tome, par $(U, \mathbf{F})$ koji se sastoji konveksne funkcije U i vektorske funkcije $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_d)$, čija svaka komponenta F_i zadovoljava (6.48) nazivamo **entropijski par**; Funkcija U se naziva (matematička) **entropija**, a vektorska funkcija $\mathbf{F}$ **entropijski fluks**.

Napomena 6.4 Najčešće rješenje jednadžbe (6.47) prima vrijednosti u nekom konveksnom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ tako da enropijski par mora biti definiran sao na Ω umjesto na čitavom $\mathbb{R}^p$.

Vidimo da je definicija entropijskog para direktna generalizacija skalarnog slučaja, no za razliku od skalarnog slučaja jednadžba (6.48) predstavlja netrivijalan sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje treba riješiti. Egzistencija entropijskog para je specijalno svojstvo sustava i ona generira dodatne uvjete koje treba zadovoljiti fizikalno dopustivi šokovi, posve analogno kao u skalarnom slučaju.

Primjer 6.8 Ako u p-sustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} &= 0. \end{aligned}$$

pomnožimo prvu jednadžbu s $-p(\tau)$, a drugu s u te zbrojimo, dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}u^2 - P(\tau)) + \frac{\partial}{\partial m}(up(\tau)) = 0,$$

gdje je P primitivna funkcija za p. To je novi zakon sačuvanja pa je stoga $U(\tau, u) = u^2/2 - P(\tau)$ entropija, a $F(\tau, u) = up(\tau)$ entropijski fluks. Druga derivacija entropije je

$$D^2U(\tau, u) = \begin{bmatrix} -p'(\tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa vidimo da je U strogo konveksna funkcija ako je $p'(\tau) < 0$. To je bio i uvjet stroge hiperboličnosti.

Zadatak 6.17 Neka su matrice $D\mathbf{f}_i(\mathbf{u})$ simetrične, tj.

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_j}.$$

Tada postoje skalarne funkcije $g_i(\mathbf{u})$ takve da je

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_j} = f_{ij}.$$

(Zašto?) Pokažite da je tada funkcija

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} u_i^2$$

strogo konveksna entropija s entropijskim fluksom

$$F_i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{p} u_j f_{ji}(\mathbf{u}) - g_i(\mathbf{u}).$$

Teorem 6.5 Neka je $U\colon \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ strogo konveksna funkcija. Nužan i dovoljan uvjet da bi U bila entropija za sustav (6.47) je da su matrice $D^2U(\mathbf{u})\mathbf{f}_i(\mathbf{u})$, $1 \le i \le d$ simetrične.

Zadatak 6.18 Dokažite Teorem 6.5. (Vidi [2]).

Metoda koju smo primijenili na račun entropijskog para p-sustava sastoji se u tome da manipulacijama sustva dođemo do novog skalarnog zakona sačuvanja, umjesto da neposrdno rješavamo sustav (6.48). Isti postupak nam pomaže i kod Eulerovih jednadžbi.

Primjer 6.9 (Entropija za sustav Eulerovih jednadžbi) Promatramo Eulerove jednadžbe gibanja idealnog plina:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + p\delta_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\big((\rho E + p)u_j\big) = 0.$$

Pretpostavljamo da je plin politropan (ima konstantne specifične topline) pa je stoga $e = c_v T$ (c_v=konstanta, T je temperatura) te $p = (\gamma - 1)\rho e$, a $E = e + u^2/2$.

Fizikalna entropija s se definira sa

$$TdS = de + pd(\frac{1}{\rho}) = de - \frac{p}{\rho^2}d\rho.$$

Množeći jednadžbu sačuvanja količine gibanja s u_i dobivamo

$$u_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{j=1}^{3} u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + p\delta_{ij}) = 0.$$

Uvlačenjem komponente u_i pod znak derivacije dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i^2\right) + \frac{1}{2}u_i^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho u_i^2 u_j) + \frac{1}{2}u_i^2 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0,$$

što zbog jednadžbe kontinuiteta prelazi u

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i^2\right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho u_i^2 u_j) + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0.$$

Oduzimajući dobiveni izraz od jednadžbe sačuvanja ukupne energija dobivamo jednadžbu "sačuvanja" mehaničke energije

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\big((\rho e + p)u_i\big) - \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) &= S\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial S}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \\
&= S\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2 T}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(ST - \frac{p}{\rho} - e\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}(\rho e).
\end{aligned}$$

(Funkcija $h = e+p/\rho$ je (specifična) entalpija, a $g = e+p/\rho-ST$ Gibbsova energija ili slobodna entalpija). Analogno dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i S) &= S\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) + (\rho u_i)\left(\frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial x_i} - \frac{p}{\rho^2 T}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right)\\ &= \frac{1}{T}\left(ST - \frac{p}{\rho} - e\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) + \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i e) + \frac{p}{T\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) - \frac{p u_i}{T\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\\ &= \frac{1}{T}\left(ST - \frac{p}{\rho} - e\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) + \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial x_i}((\rho e + p)u_i) - \frac{1}{T}u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti i uvažavanjem jednadžbe kontiniteta te zakona mehaničke energije dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i S) = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}((\rho e + p)u_i) - \sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = 0.$$

Time je dobiven skalarni zakon sačuvanja za fizikalnu entropiju. Nadalje, funkciju S možemo izračunati eksplicitno u slučaju politropnog plina. Jednostabn račun daje

$$S = S_0 + c_v \ln(\frac{p}{\rho^\gamma}), \quad (S_0 = \text{konstanta}),$$

gdje je $\gamma = c_p/c_v = 1 + R/c_v > 1$, a R je konstanta iz Boyle-Mariotteovog zakona. Ako S promatramo kao funkciju konzervativnih varijabli $(\rho, \mathbf{q} = \rho\mathbf{v}, E)$, iz

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)(\rho E - \rho|\mathbf{v}|^2/2)$$

dobivamo

$$S = S_0 + c_v\left(\ln(\rho E - \frac{|\mathbf{q}|^2}{2\rho}) - \gamma \ln \rho\right).$$

Neposredan ali dugačak račun pokazuje da je funkcija

$$(\rho, \mathbf{q}, E) \mapsto -\rho S(\rho, \mathbf{q}, E)$$

strogo konveksna i stoga predstavlja (matematičku) entropiju s entropijskom fluksom $F_i = -\rho u_i S$ (provjerite neposredno). Stoga zaključujemo da na rješenjima koja nisu glatka vrijedi nejednakost

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i S) \geq 0.$$

Na svako šoku mora vrijediti entropijska nejednakost

$$[\rho S]n_t + \sum_{i=1}^{3}[\rho u_i S]n_{x_i} \geq 0. \quad \square$$

6.9 Jednodimenzionalni Riemannov problem

Entropijske nejednakosti nam omogućavaju da u slučaju skalarnog jednodimenzionalnog zakona sačuvanja konstruiramo entropijsko rješenje Riemannovog problema. Vidjeli smo da takvo rješenje možemo konstruirati pomoću šokova koji povezuju konstantna stanja i *lepeza*, rješenja koja ovise o varijabli x/t. Problem je bio u tome što je pomoću šokova moguće konstruirati rješenja koja nisu viskozna, tj. koja ne zadovoljavaju entropijsku nejednakost (6.44) za svaki entropijski par.

Zadatak 6.19 Pokažite da slaba rješenja konstrirana u Primjeru 6.10 nisu entropijska. Koristite entropiju $U(u) = u^2/2$. □

Podsjetimo se da u jednodimenzionalnom slučaju svako po dijelovima glatko slabo rješenje zadaće

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

na svakom šoku mora zadovoljavati Rankine-Hugoniotov uvjet

$$s[u] = [f(u)], \tag{6.49}$$

a da entropijsko rješenje mora k tome zadovoljavati entropijsku nejednakost

$$s[U(u)] \geq [F(u)], \tag{6.50}$$

Napomena 6.5 Svaka afina funkcija je konveksna (mada ne i strogo konveksna) pa možemo promatrati *entropijske parove* $(u, f(u))$ i $(-u, -f(u))$. Primijenjujući entropijsku nejednakost na njih vidimo da (6.50) sadrži u sebi Rankine-Hugoniotov uvjet (6.49).

Propozicija 6.2 Neka po dijelovima glatka funkcija $u(x,t)$ zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet (6.49) na nekoj liniji prekida (šoku). Na tom prekidu ona zadovoljava entropijsku nejednakost (6.50), za svaki entropijski par (U, F), akko vrijedi jedan od ova tri uvjeta:

$$s \geq \frac{f(u_+) - f(k)}{u_+ - k} \quad \text{za sve } k \in \mathbb{R} \text{ između } u_- \text{ i } u_+ \tag{6.51}$$

$$s \leq \frac{f(u_-) - f(k)}{u_- - k} \quad \text{za sve } k \in \mathbb{R} \text{ između } u_- \text{ i } u_+ \tag{6.52}$$

$$\begin{cases} \text{(i) } f(\alpha u_- + (1-\alpha)u_+) \geq \alpha f(u_-) + (1-\alpha) f(u_+) & \text{za } u_+ > u_- \\ \text{(ii) } f(\alpha u_- + (1-\alpha)u_+) \leq \alpha f(u_-) + (1-\alpha) f(u_+) & \text{za } u_+ < u_- \end{cases} \tag{6.53}$$

za $0 \leq \alpha \leq 1$.

Dokaz. Promatrat ćemo samo enropijske parove oblika

$$U(u) = |u - k|, \quad F(u) = \operatorname{sgn}(u-k)(f(u) - f(k))$$

što je prema Napomenu 6.3 ekvivalentno promatranju svih mogućih entropijskih parova. Nejednakost (6.50) sada glasi

$$s(|u_+ - k| - |u_- - k|) \geq (u_+ - k)(f(u_+) - f(k)) - (u_- - k)(f(u_-) - f(k)). \tag{6.54}$$

Promatrat ćemo samo slučaj $\boxed{u_+ > u_-}$; suprotan slučaj se dokazuje analogno.
Za $k \geq u_+ > u_-$ entropijska nejednakost prelazi u

$$s(u_- - u_+) \geq f(u_-) - f(u_+)$$

dok za $u_+ > u_- \geq k$ prelazi u

$$s(u_+ - u_-) \geq f(u_+) - f(u_-)$$

što je zajedno ekvivalentno s Rankine-Hugoniotovim uvjetom (6.49). Stoga je dovoljno promtrati slučaj $u_+ > k > u_-$.

Za $u_+ > k > u_-$ (6.54) prelazi u

$$s(u_+ + u_- - 2k) \geq f(u_+) + f(u_-) - 2f(k). \tag{6.55}$$

Pribrajajući Rankine-Hugoniotov uvjet (6.49) dobivamo

$$2s(u_+ - k) \geq 2(f(u_+) - f(k))$$

što je (6.51). Analogno, oduzimanjem dobivamo (6.52).

Uzmimo $k = \alpha u_- + (1-\alpha)u_+$ za $\alpha \in [0,1]$; Uvrštavnjem u (6.55) dobivamo

$$(1-2\alpha)(u_- - u_+) \geq f(u_+) + f(u_-) - 2f(\alpha u_- + (1-\alpha)u_+)$$

odnosno, prema RH-uvjetu

$$(2\alpha - 1)(f(u_+) - f(u_-)) \geq f(u_+) + f(u_-) - 2f(\alpha u_- + (1-\alpha)u_+)$$

što je (6.53) (i). Obratne tvrdnje slijede lagano. Time je ekvivalencija dokazana u slučaju $u_+ > u_-$. Slučaj $u_+ < u_-$ tretira se analogno. □

Iz Propozicije 6.2 dobivamo geometrijske informacije o dopustivim šokovima. Ako je $u_- < u_+$, onda je šok dopustiv ako graf funkcije $f(u)$ leži iznad spojnice točaka $(u_-, f(u_-))$ i $(u_+, f(u_+))$. Za diskontinuitet $u_- > u_+$ graf funkcije mora ležati ispod spojnice. Posebno, odavde dobivamo da su kod konveksnog fluksa dopustivi jedino šokovi oblika $u_- > u_+$, dok je za konkavni fluks obratno.

Nadalje, iz (6.51) i (6.52) slijedi

$$f'(u_+) \leq s \leq f'(u_-).$$

Taj uvjet u nekim slučajevima vrijedi u jačoj formi

$$f'(u_+) < s < f'(u_-)$$

(na primjer kod strogo konveksnog ili konkavnog fluksa) i kao takav se generalizira na sustave (Laxov uvjet entropije). Geometrijski on kaže da brzina šoka mora biti između karakterističnih brzina s lijeva i zdesna te da karakteristike moraju *ulaziti* u šok.

Konačno, pomoću šokova i rezrjeđenja možemo konstruirati entropijsko rješenje Riemannovog problema. Uzmimo da je na primjer $u_- < u_+$. Početni diskontinuiet može evoluirati u val razrjeđenja ili šok, ovisno o položaju spojnice točaka $(u_-, f(u_-))$ i $(u_+, f(u_+))$ u odnosu na graf funkcije. Ako graf funkcije leži iznad spojnice, onda je dozvoljiv šok, dok u suprotnom moramo koristiti razrjeđenje. Rješenje oblika vala razrjeđenja može se konstruirati samo na dijelovima grafa funkcije $f(u)$ na kojima je ona konveksna pa stoga trebamo promatrati donju konveksnu ovojnicu f_c funkcije f. Interval (u_-, u_+) bit će podjeljen na intervale *razrjeđenja* – tamo gdje je fluks strogo konveksan i gdje imamo rješenje u obliku vala razrjeđenja, i afine dijelove koji odgovaraju entropijskim šokovima. U slučaju $u_- > u_+$ treba promatrati gornju konkavnu ovojnicu.

6.10 Linearni sustavi

Promatramo linearan sustav

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x &= 0 \\ \mathbf{u}(x,0) &= \mathbf{u}_0(x), \end{aligned} \tag{6.56}$$

gdje je $\mathbf{u}\colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

Definicija 6.6 Sustav (6.56) je hiperbolički ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalizabilna i ima realne svojstvene vrijednosti. Sustav je strogo hiperbolički ako su sve svojstvene vrijednosti međusobno različite.

U slučaju hiperboličkog sustava možemo naći realnu i regularnu matricu $\mathbf{R}$ takvu da je

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1},$$

gdje je $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ matrica svojstvenih vrijednosti. Iz $\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}$ vidimo da su stupci matrice $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_m]$ svojstveni vektori matreice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i.$$

Sustav ćemo riješiti tako da ga svedemo na dijagonalni. U tu svrhu uvodimo novu varijablu

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}.$$

Množenjem (6.56) s $\mathbf{R}$ dobivamo

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{v}_x = 0.$$

Time smo dobili m neovisnih jednadžbi

$$(v_p)_t + \lambda_p (v_p)_x = 0, \quad p = 1, \dots, m,$$

koje imaju rješenja $v_p(x,t) = v_p(x - \lambda_p t, 0)$; pri tome je $v_p(x,0) = (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_0(x))_p$. Rješenje se može zapisati u obliku

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{p=1}^{m} v_p(x - \lambda_p t, 0)\mathbf{r}_p.$$

Krivilje (pravce) $x = x_0 + \lambda_p t$ nazivamo karakteristikama (p-ta karakteristika). U rastavu rješenja po svojstvenim vektorima matrice $\mathbf{A}$ koeficijent $v_p(x,t)$ koji stoji uz $\mathbf{r}_p$ je konstantan na p-toj karakteristici.

Rješenje može biti promatrano kao superpozicija m nezavisnih valova oblika $v_p(x,0)\mathbf{r}_p$, koji propagiraju brzinom λ_p, neovisno jedan o drugome, bez promjene oblika. Rješenje je naročito jednostavno ako je $v_p(x,0)$ konstanta za sve p-ove osim jednog: $v_p(x,0) = c_p$ za $p \neq i$. Tada je rješenje

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{p\neq i}^{m} c_p\mathbf{r}_p + v_i(x - \lambda_p t, 0)\mathbf{r}_i = \mathbf{u}_0(x - \lambda_p t).$$

Rješenja ovog oblika nazivaju se **jednostavni valovi** i mogu se pojaviti i u nelinearnom slučaju.

Primjer 6.10 Treba riješiti valnu jednadžbu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

s početnim uvjetima

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x).$$

Jednadžba se može zapisati u obliku sustava ako se uvedu varijable $v_1 = u_x$ i $v_2 = u_t$. Tada dobivamo sustav

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_x = 0.$$

Gornjim postupkom dolazimo do rješenja

$$v_1(x,t) = \frac{1}{2}\big[u_0'(x+ct) + \frac{1}{c}u_1(x+ct) + u_0'(x-ct) - \frac{1}{c}u_1(x-ct)\big] \tag{6.57}$$

$$v_2(x,t) = \frac{1}{2}\big[cu_0'(x+ct) + u_1(x+ct) - cu_0'(x-ct) + u_1(x-ct)\big]. \tag{6.58}$$

Zadatak 6.20 Izvedite formule (6.57), (6.58). Izračunajte $u(x,t)$.

Zadatak 6.21 Riješite linearizirane jednadžbe plitke vode

$$\begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \overline{u} & 1 \\ \overline{\phi} & \overline{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix}_x = 0.$$

gdje su $\overline{u}$ i $\overline{\phi} > 0$ neke konstante, s nekim zadanim početnim uvjetima.

Pokažimo sada kako se rješaa Riemannov problem za sustav (6.56). Pri tome ćemo pretpostaviti da je sustav strogo hiperbolički i svojstvene rijednosti ćemo poredati uzlazno:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m.$$

Početni uvjet

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & x < 0 \\ \mathbf{u}_r & x > 0 \end{cases}$$

rastavimo po svojstvenim vektorima matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{u}_l = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \mathbf{r}_p, \quad \mathbf{u}_r = \sum_{p=1}^{m} \beta_p \mathbf{r}_p.$$

Tada je

$$v_p(x,0) = \begin{cases} \alpha_p & x < 0 \\ \beta_p & x > 0 \end{cases}$$

i stoga

$$v_p(x,t) = \begin{cases} \alpha_p & x - \lambda_p t < 0 \\ \beta_p & x - \lambda_p t > 0 \end{cases}$$

Označimo s $P(x,t)$ maksimalan indeks p za koji je $x - \lambda_p t > 0$, tada je

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{p=1}^{P(x,t)} \beta_p \mathbf{r}_p + \sum_{p=P(x,t)+1}^{m} \alpha_p \mathbf{r}_p.$$

m karakteristika $x = \lambda_p t$, $p = 1, \ldots, m$ dijele gornju (x,t) poluravninu na $m+1$ dijelova u kojima je rješenje konstantno. Prilikom prijelaza p-te karakteristike dolazi do skoka rješenja

$$[\mathbf{u}] = (\beta_p - \alpha_p)\mathbf{r}_p.$$

Budući da svaki diskontinuitet mora zadovoljavati Rankine-Hugoniotov uvjet, kako je $f(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ imamo

$$\begin{aligned} [f] = \mathbf{A}[\mathbf{u}] &= (\beta_p - \alpha_p)\mathbf{A}\mathbf{r}_p \\ &= (\beta_p - \alpha_p)\lambda_p \mathbf{r}_p = \lambda_p[\mathbf{u}] \end{aligned}$$

i stoga vidimo da diskontinuiteti propagiraju karakterističnim brzinama.

Rješenje možemo zapisati u obliku skokova na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,t) &= \mathbf{u}_l + \sum_{\lambda_p < x/t} (\beta_p - \alpha_p)\mathbf{r}_p \\ &= \mathbf{u}_r - \sum_{\lambda_p \geq x/t} (\beta_p - \alpha_p)\mathbf{r}_p. \end{aligned}$$

Posebno je jednostavan slučaj kada je $\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l$ svojstveni vektor matrice sustava. Tada je $\beta_p = \alpha_p$ za sve p osim jednog, npr. $p = i$. Tada diskontinuitet jednostavno propagira brzinom λ_i. U općem slučaju treba razliku $\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l$ razviti po svojstvenim vektorima

$$\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{r}_1 + \cdots + (\beta_m - \alpha_m)\mathbf{r}_m$$

i tada svaki pojedini skok $(\beta_p - \alpha_p)\mathbf{r}_p$ propagira svojstvenom brzinom λ_p.

6.11 Teorem egzistencije i jedinstvenosti za skalarni zakon sačuvanja

U ovoj sekciji formuliramo opći teorem egzistencije i jedinstvenosti slabog enropijskog rješenja za Cauchyjev problem za skalarni zakon sačuvanja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \tag{6.59}$$

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{6.60}$$

Definicija 6.7 Totalna varijacija funkcije $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ je broj

$$TV(u) = \sup\{\int_\Omega u \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}\, dx \colon \phi_i \in C_c^1(\Omega),\ \|\phi_i\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1,\ i = 1,\dots,d\}.$$

Funkcije iz $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sa svojstvom da im je totalna varijacija konačna nazivamo funkcije ograničene varijacije i linearan prostor svih takvih funkcija označavamo s $BV(\Omega)$.

U prostor $BV(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ uvodimo normu

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + TV(u),$$

s kojom je on Banachov prostor.

Derivacije u smislu distribucija funkcija iz $BV(\Omega)$ nisu općenito funkcije već Radonove mjere. Naime, prema Rieszovom teoremu reprezentacije (vidi C. Evans, F. Gariepy [3]) postoji (pozitivna) Radonova mjera μ i μ izmjeriva funkcija $\sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ takve da je

$$\int_\Omega u \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \phi_i \sigma_i \, d\mu,$$

za sve $\phi_i \in C_c^1(\Omega)$, $i = 1,\dots,d$.

Teorem 6.6 Neka je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Tada problem (6.59), (6.60) ima jedinstveno entropijsko rješenje $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ koje ima ova svojstva:

- Za svako $t \in [0, T)$ vrijedi

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)};$$

- Ako su u i v dva entropijska rješenja koja odgovaraju početnim uvjetima u_0 i v_0 respektivno, onda za svako $t \in [0, T)$ vrijedi

$$u_0 \geq v_0 \quad \Rightarrow \quad u(\cdot, t) \geq v(\cdot, t);$$

- Ako je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap BV(\mathbb{R}^d)$, onda je $u(\cdot, t) \in BV(\mathbb{R}^d)$ za sve $t \in [0, T)$ i vrijedi

$$TV(u(\cdot, t)) \leq TV(u_0);$$

- Ako je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$, onda je za sve $t \in [0, T)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Bibliografija

[1] Pierre-Arnaud Raviart Edwige Godlewski. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Mathématiques et Applications. Ellipses Publications, Paris, 1991.

[2] Pierre-Arnaud Raviart Edwige Godlewski. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[3] Ronald F. Gariepy Lawrence C. Evans. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 1999.

[4] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, 1990.

7

Konačne diferencije za skalarne zakone sačuvanja

U ovom poglavlju promatramo metodu konačnih diferencija za Cauchyjevu zadaću

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{7.1}$$

$$v(x,0) = v^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

gdje je f funkcija klase C^2 i $v^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zanimat će nas klasa eksplicitnih jednokoračnih metoda čija je upotreba najjednostavnija. U izlaganju slijedimo [1].

7.1 Diferencijske sheme u konzervativnoj formi

Diskretizacija je zadana na uniformnoj mreži s prostornim korakom Δx i vremenskim korakom Δt. Samu mrežu i funkcije definirane na mreži označavat ćemo, kad je to zgodno, simbolom Δ. Kada promatrama familiju mreža uvijek pretpostavljamo da je parametar

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

konstanta (isti za svaku mrežu).

Općenito eksplicitnu diferencijsku shemu s $2k+1$ točaka možemo zapisati u obliku

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \ldots, u_{j+k}^n), \quad n \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}, \tag{7.3}$$

gdje je $H\colon \mathbb{R}^{2k+1} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, a u_j^n aproksimacija točnog rješenja $v(x,t)$ u točki $(x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t)$.

Funkcija H definira operator H_Δ koji djeluje na beskonačnim nizovima po formuli

$$u = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}}, \quad H_\Delta(u)_j = H(u_{j-k}, \dots, u_{j+k}).$$

S tom notacijom shemu (7.3) možemo zapisati kao operatorsku jednadžbu na beskonačnim nizovima:

$$u^{n+1} = H_\Delta(u^n).$$

Prostor svih apsolutno sumabilnih nizova označavamo kao i do sada s l_1.

Definicija 7.1 Diferencijska shema (7.3) ima konzervativnu formu ako postoji neprekidna funkcija $g\colon \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju je

$$H(u_{-k}, \dots, u_k) = u_0 - \lambda\left(g(u_{-k+1}, \dots, u_k) - g(u_{-k}, \dots, u_{k-1})\right). \tag{7.4}$$

Funkcija g je očito određena samo do na aditivnu konstantu. Shema u konzervativnoj formi ima oblik

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(g(u_{j-k+1}^n, \dots, u_{j+k}^n) - g(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k-1}^n)), \tag{7.5}$$

ili, ako uvedemo pokratu

$$g_{j+1/2}^n = g(u_{j-k+1}^n, \dots, u_{j+k}^n),$$

onda dobivamo

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n). \tag{7.6}$$

Propozicija 7.1 Diferencijska shema (7.3) ima konzervativnu formu ako i samo ako za svaki niz $u = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l_1$ za koji je $H_\Delta(u) \in l_1$ vrijedi

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} H(u_{j-k}, \dots, u_{j+k}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j. \tag{7.7}$$

Dokaz. □

Svaka se shema u konzervativnoj formi može napisati u obliku

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{g(u_{j-k+1}^n, \dots, u_{j+k}^n) - g(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k-1}^n)}{\Delta x} = 0.$$

Odavde prirodno imamo sljedeću definiciju konzistentnosti:

Definicija 7.2 Diferencijska shema (7.5) je konzistentna s jednadžbom (7.1) ako vrijedi

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g(u, \dots, u) = f(u). \tag{7.8}$$

Pri analizi konvergencije diferencijske sheme mrežnoj funkciji (u_j^n) ćemo pridružiti po dijelovima konstantnu funkciju $u_\Delta(x,t)$, definiranu na $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ formulom:

$$u_\Delta(x,t) = u_j^n \quad \text{za } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2},\ t^n \le t < t^{n+1}, \tag{7.9}$$

gdje je $x_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta x$. Početni uvjet za diferencijsku shemu (u_j^0) dobivamo iz početnog uvjeta $v^0(x)$ uzimanjem srednjih vrijednosti

$$u_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v^0(x)\,dx. \tag{7.10}$$

Teorem 7.1 (Lax-Wendroff) Neka je (7.5) diferencijska shema u konzervativnoj formi konzistentna s jednadžbom (7.1) i neka je početni podatak za shemu dan formulom (7.10).

Pretpostavimo da postoji niz $(\Delta_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da

$$\Delta_k x \to 0 \quad k\to\infty, \quad \Delta_k t = \lambda\Delta_k x \quad (\lambda = \text{ konstanta})$$

te da na tom nizu vrijedi:

$$\|u_{\Delta_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))} \le C$$
$$u_{\Delta_k} \to u \quad \text{u } L^1_{loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \quad \text{i s.s.}$$

Tada je $u(x,t)$ slabo rješenje zadaće (7.1), (7.2).

Dokaz. □

Ako shema nije u konzervativnoj formi može se desiti da konvergira prema funkciji koja nije slabo rješenje jednadžbe (7.1), odnosno ne zadovoljava Rankine-Hugoniotove uvjete na šokovima.

Nakon Teorema 7.1 ostaje nam odrediti dovoljne uvjete konvergencije aproksimativnih rješenja, uvjete koji osiguravaju entropijske nejednakosti i red točnosti sheme. Počet ćemo s redom točnosti.

7.2 Red točnosti

Definicija 7.3 Red točnosti diferencijske sheme (7.3) je najveći broj $p\ge 1$ takav da za svako glatko rješenje $v(x,t)$ jednadžbe (7.1) i $\lambda = \Delta t/\Delta x$ konstantno vrijedi:

$$v(x,t+\Delta t) - H(v(x-k\Delta x,t),\dots,v(x+k\Delta x,t)) = O(\Delta t^{p+1}).$$

Lako je vidjeti da je ova definicija konzistentnosti u skladu s ranijim definicijama, danim za linearne sheme.

Propozicija 7.2 Neka se diferencijske sheme (7.3) može zapisati u konzervativnoj formi (7.5) i neka je konzistentna s jednadžbom (7.1). Pretpostavimo da je H funkcija klase C^3 i da je $\lambda = \Delta t/\Delta x$ konstantno. Tada za svako glatko rješenje $v(x,t)$ jednadžbe (7.1) vrijedi

$$v(x, t+\Delta t) - H(v(x-k\Delta x, t), \dots, v(x+k\Delta x, t)) = -\Delta t^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(v,\lambda)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right) + O(\Delta t^3),$$

gdje je

$$\beta(v,\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{j=-k}^{k} j^2 \frac{\partial H}{\partial v_j}(v,\dots,v) - \frac{1}{2}f'(v)^2. \tag{7.11}$$

Dokaz. □

Propozicija 7.2 nam kaže da je shema (7.3) samo prvog reda točnosti ukoliko $\beta(v,\lambda)$ nije identički jednako nuli. K tome, lako je pokazati da ako je $v(x,t)$ rješenje *modificirane diferencijalne jednadžbe*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = \Delta t^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(v,\lambda)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right),$$

onda je

$$v(x, t+\Delta t) - H(v(x-k\Delta x, t), \dots, v(x+k\Delta x, t)) = O(\Delta t^3).$$

Modificirana diferencijalna jednadžba, kao i u linearnom slučaju, može poslužiti za proučavanje svojstava diferencijske sheme.

7.3 Primjeri trotočkovnih shema

Primjer 1. Linearna diferencijska shema

$$u_j^{n+1} = c_{-1}u_{j-1}^n + c_0 u_j^n + c_1 u_{j+1}^n,$$

može poslužiti za aproksimaciju linearne transportne jednadžbe

$$v_t + a v_x = 0 \quad (a \text{ je kostanta}).$$

Lako se provjeravaju ovi uvjeti:

$$\begin{aligned} \text{konzervativnost:} &\quad c_{-1} + c_0 + c_1 = 1, \\ \text{konzistentnost:} &\quad c_{-1} - c_1 = \lambda, \\ \text{2. red točnosti:} &\quad c_{-1} + c_1 = \lambda^2 a^2. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da postoji samo jedna trotočkovna linearna shema koja je konzistentan, nonzervativna i drugog reda točnosti. To je Lax-Wendroffova shema

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\lambda a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\lambda^2 a^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Shema je L^2-stabilna uz uvjet $\lambda|a| \leq 1$.

Primjer 2. Lax-Friedrichsova shema za jednadžbu (7.1):

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)).$$

Numeričko fluks je

$$g^{LF}(u,v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) - \frac{1}{2\lambda}(v - u).$$

Shema je linearno L^2-stabilna za $\lambda|a| \leq 1$.

Primjer 3. Upwind shema. U linearnom slučaju shema ima oblik

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \lambda a(u_j^n - u_{j-1}^n) & a \geq 0 \\ u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n) & a \leq 0. \end{cases}$$

Neposredna generalizacija na nelinearnu jednadžbu (7.1) moguća je samo ako je fluks $f(v)$ monoton. U tom slučaju imamo:

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \lambda(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)) & f' \geq 0 \\ u_j^n - \lambda(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) & f' \leq 0. \end{cases}$$

Shema je linearno L^2-stabilna za $\lambda|a| \leq 1$.

Primjer 4. Godunovljeva shema. Princip na kome je shema izvedena je sljedeći: pretpostavimo da je rješenje diskretnog problema poznato na vremenskom sloju $t = t^n$ i pokažimo kako se definira za $t = t^{n+1}$. Za $t = t^n$ imamo definiranu po dijelovima konstantnu funkciju $u_\Delta(x, t^n)$,

$$u_\Delta(x, t^n) = u_j^n \quad \text{za } x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}).$$

Na sloju $t = t^{n+1}$ rješenje definiamo u dva koraka:

1) Riješimo problem

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}f(w) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (t^n, t^{n+1}) \tag{7.12}$$

$$w(x, t^n) = u_\Delta(x, t^n), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.13}$$

2) Definiramo vrijednosti na vremenskom sloju $t = t^{n+1}$ kao srednje vrijednosti rješenja $w(x, t^{n+1})$:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w(x, t^{n+1})\, dx. \tag{7.14}$$

Zatim se cijeli postupak iterira.

Da bi procedura bila izvediva potrebno je riješiti probleme (7.12), (7.13). Tu nam pomaže sljedeća primjedba: Problem (7.12), (7.13) je niz Riemannovih problema čije se rješenje može lokalno konstruirati pomoći šokova i razrjeđenja. Lokalno konstrirana rješenja daju globalno rješenje problema (7.12), (7.13) sve do trenutaka kada susjedni šokovi i valovi razrjeđenja ne kolidiraju. Lako je vidjeti da se to neće desiti sve do trenutka $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$ ako je zadovoljen uvjet

$$\lambda \max\{|f'(v)|\colon \min_j u_j^n \leq v \leq \max_j u_j^n\} \leq \frac{1}{2}. \tag{7.15}$$

(Taj uvjet kaže da u vremenu Δt karakteristike neće prijeći udaljenost veću od $\Delta x/2$.)

Ako uvedemo lokalni Riemannov problem

$$\frac{\partial w_R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w_R) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0, \Delta t) \tag{7.16}$$

$$w_R(x,0) = \begin{cases} u_j^n & x < 0 \\ u_{j+1}^n & x > 0 \end{cases}, \tag{7.17}$$

onda je

$$w(x, t^{n+1}) = w_R(\frac{x - x_{j+1/2}}{\Delta t}; u_j^n, u_{j+1}^n), \quad x \in (x_j, x_{j+1}). \tag{7.18}$$

Budući da je w točno rješenje Cauchyjeve zadaće (7.12), (7.13) možemo izvršiti sljedeću parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) \right) dxdt \\
&= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w(x, t^{n+1})\, dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w(x, t^n)\, dx \\
&\quad + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[f(w(x_{j+1/2} - 0, t)) - f(w(x_{j-1/2} + 0, t)) \right] dt \\
&= \Delta x (u_j^{n+1} - u_j^n) + \Delta t \left(f(w_R(0-; u_j^n, u_{j+1}^n)) - f(w_R(0+; u_{j-1}^n, u_j^n)) \right),
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili definiciju (7.14), formulu (7.18) te činjenicu da je

$$t \mapsto w(x_{j\pm 1/2} \pm 0, t)$$

konstanta sve do vremena kada susjedni Riemannovi problemi ne stupe u interakciju. Uočimo još da je funkcija

$$x \mapsto f(w_R(\frac{x}{t}; u_j^n, u_{j+1}^n)), \quad (t > 0 \text{ fiksirano})$$

neprekidna u nuli. Naime, funkcija w_R nije neprekidna u nuli ako ima stacionarni šok, no tada Rankine-Hugoniotov uvjet $(0[w_R] = 0 = [f(w_R)]$ daje neprekidnost kompozicije $f(w_R)$. Stoga imamo

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(f(w_R(0; u_j^n, u_{j+1}^n)) - f(w_R(0; u_{j-1}^n, u_j^n)) \right). \tag{7.19}$$

Numerički fluks je

$$g^G(u, v) = f(w_R(0; u, v)). \tag{7.20}$$

Da bismo izračunali Godunovljev fluks trebamo znati riješiti Riemannov problem. Preciznije, potrebno nam je samo poznavanje rješenja Riemannovog problema na osi $x = 0$. Iz tog možemo prvo zaključiti da uvjet stabilnosti (7.15) možemo oslabiti do uvjeta:

$$\lambda \max\{|f'(v)| \colon \min_j u_j^n \leq v \leq \max_j u_j^n\} \leq 1. \tag{7.21}$$

Naime, dovoljno je da krakteristike iz točke $x_{j-1/2}$ u vremenu Δt ne stignu do $x_{j+1/2}$ ili $x_{j-3/2}$.

Pogledajmo kako bismo izračunali Godunovljev fluks u slučaju strogo konveksne funkcije f $(f'' > 0)$. Tada su dva stanja u (lijevo) i v (desno) povezana šokom ako je $u > v$ ili lepezom ako je $u < v$.

U slučaju šoka $(u > v)$ evidento je

$$w_R(0; u, v) = \begin{cases} u & f' > 0 \\ v & f' < 0. \end{cases}$$

Stoga je

$$g(u, v) = f(w_R(0; u, v)) = \begin{cases} f(u) & f' > 0 \\ f(v) & f' < 0. \end{cases} = \max_{v \leq z \leq u} f(z).$$

U slučaju lepeze $(u < v)$ ponovo su jednostavne situacije $f' < 0$ i $f' > 0$. U prvom slučaju je lepeza lijevo od osi $x = 0$, a u drugom desno pa imamo isti zaključak:

$$w_R(0; u, v) = \begin{cases} u & f' > 0 \\ v & f' < 0. \end{cases}$$

Ako prva derivacija f' mijenja predznak na (u, v), onda zbog stroge konveksnosti ona to čini u jednoj točki $u < \overline{u} < v$, u kojoj funkcija f ima lokalni minimum. Rješenje w_R definirano je jednadžbom $\xi = f'(w_R(\xi))$, $\xi = x/t$, pa stavljajući $\xi = 0$ dobivamo $w_R(0; u, v) = \overline{u}$. Uzimajući u obzir sve slučajeve, vidimo da vrijedi

$$g(u, v) = f(w_R(0; u, v)) = \min_{u \leq z \leq v} f(z).$$

Time u slučaju strogo konveksnog fluksa dolazimo do formule:

$$g(u,v) = \begin{cases} \max_{v \le z \le u} f(z) & \text{za } u > v \\ \min_{u \le z \le v} f(z) & \text{za } u < v. \end{cases} \tag{7.22}$$

Formula (7.22) vrijedi i u slučaju proizvoljnog fluksa. Da bi se to vidjelo dovoljno je promatrati slučajeve $u < v$ u $u > v$ te konveksnu odnosno konkavnu ovojnicu funkcije f. Do zaključka se dolazi promatranjem različitih slučajeva, kao i za strogo konveksni fluks.

Primjer 5. Roe-Murmanova shema. Godunovljeva shema se teško generalizira na sustave i višedimenzionalne zakone sačuvanja stoga što u općenitijim situacijama rješenje Riemannovog problema postaje složenije. Stoga se nameće ideja da aproksimativnog rješavanja Riemannovog problema. Na primjer, problem (7.16), (7.17) mogli bismo zamijeniti linearnim problemom

$$\frac{\partial w_R}{\partial t} + a(u_j^n, u_{j+1}^n)\frac{\partial w_R}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0, \Delta t) \tag{7.23}$$

$$w_R(x,0) = \begin{cases} u_j^n & x < 0 \\ u_{j+1}^n & x > 0 \end{cases}, \tag{7.24}$$

čije je rješenje

$$w_R(\xi; u_j^n, u_{j+1}^n) = \begin{cases} u_j^n & \xi < a(u_j^n, u_{j+1}^n) \\ u_{j+1}^n & \xi > a(u_j^n, u_{j+1}^n). \end{cases}$$

Time dobivamo shemu

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(g^{RM}(u_j^n, u_{j+1}^n) - g^{RM}(u_{j-1}^n, u_j^n) \right)$$

gdje je numerički fluks

$$g^{RM}(u,v) = f(w_R(0; u, v)) = \begin{cases} f(u) & a(u,v) > 0 \\ f(v) & a(u,v) < 0. \end{cases}$$

To je Roe-Murmanov numerički fluks koji je moguće napisati i u obliku

$$g^{RM}(u,v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v) - |a(u,v)|(v-u)).$$

Ovakav način pojednostavljenja izvoda sheme vodi na shemu koja dozvoljava neentropijska rješenja. Da bismo se u to uvjerili dovoljno je promatrati Riemanov problem za strogo konveksni fluks (npr. Bourgersovu jednadžbu) s početnim vrijednostima u_l i u_r koje zadovoljavaju

$$u_l < u_r, \quad f(u_l) = f(u_r).$$

Lako se provjerava da Roe-Murmanova shema, s početnim uvjetom $u_j^0 = u_l$ za $j \leq 0$ i $u_j^0 = u_r$ za $j > 0$ daje rješenje $u_j^n = u_j^0$ za sve $n > 0$, odnosno stacionarni šok koji je zbog konveksnosti fluksa nefizikalan. Taj primjer pokazuje da je potreban oprez u konstrukciji aproksimativnog Riemannovog problema (odn. aproksimativnog Riemannovog rješavača).

Primjer 6. Engquist-Osherova shema.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(f(u_{j+1}^n) + f(u_{j-1}^n)\right) + \frac{\lambda}{2}\left[\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |f'(u)|\,du - \int_{u_{j-1}^n}^{u_j^n} |f'(u)|\,du\right], \tag{7.25}$$

a numerički fluks je jednak

$$g^{EO}(u,v) = \frac{1}{2}\left(f(u) + f(v) - \int_u^v |f'(\xi)|\,d\xi\right). \tag{7.26}$$

Ova se shema može interpretirati kao modifikacija Roe-Murmanove sheme koja daje fizikalno rješenje.

U specijalnom slučaju kada je fluks f strogo konveksan i postoji jedinstvena točka $\overline{u}$ za koju je $f'(\overline{u}) = 0$, lako se pokazuje da je

$$g^{EO}(u,v) = f^+(u) + f^-(v),$$

gdje je

$$f^+(u) = f(\max(u,\overline{u})), \quad f^-(u) = f(\min(u,\overline{u})).$$

Pokažite da na primjeru na kojem Roe-Murmanova shema daje nefizikalan šok, Engquist-Osherova shema daje entropijsko rješenje.

Primjer 7. Lax-Wendroffova shema može se generalizirati na nelinearan slučaj na različite načine. Na primjer,

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = u_j^n &- \frac{\lambda}{2}\left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right) \\ &+ \frac{\lambda^2}{2}\left[a_{j+1/2}^n(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) - a_{j-1/2}^n(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n))\right] \end{aligned}$$

gdje je

$$a_{j+1/2}^n = f'(\frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}) \tag{7.27}$$

ili

$$a_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f(u_j^n) - f(u_{j+1}^n)}{u_j^n - u_{j+1}^n} & u_{j+1}^n \neq u_j^n \\ f'(u_j^n) & u_{j+1}^n = u_j^n. \end{cases} \tag{7.28}$$

Lax-Wendroffov fluks je

$$g^{LW}(u,v) = \frac{1}{2}(f(u)+f(v)) - \frac{\lambda}{2}a(\frac{u+v}{2})(f(v)-f(u)) \tag{7.29}$$

gdje smo, na primjer, uzeli formulu (7.27).

Lax-Wendroffova shema je drugog reda točnosti na glatkim rješenjima i linearno je L^2-stabilna uz uvjet $\lambda \max_{j,n} |a^n_{j+1/2}| \leq 1$. Pokazuje se da je nelinearno nestabilna blizu stagnirajuće točke ($f'(u) = 0$) jer tamo prestaje biti disipativna.

Zadatak. Izvedite modificiranu diferencijalnu jednadžbu za nelinearnu Lax-Wendroffovu shemu. □

7.4 Monotone i TVD sheme

Definicija 7.4 Diferencijska shema

$$u_j^{n+1} = H(u^n_{j-k}, \dots, u^n_{j+k}), \quad n \geq 0,\, j \in \mathbb{Z},$$

je monotona ako je H monotono rastuća funkcija u svakom svom argumentu.

Ako je diferencijska shema monotona, onda je pripadni operator H_Δ monoton:

$$u \geq v \quad \Rightarrow \quad H_\Delta(u) \geq H_\Delta(v).$$

Za Lax-Friedrichsovu i Engquist-Osherovu shemu lako je neposredno pokazati da su monotone. Godunovljeva shema je monotona kao kompozicija dviju monotonih operacija: rješavanja Riemannovog problema i L^2-projekcije na po dijelovima konstantne funkcije.

Propozicija 7.3 Ako je trotočkovna shema konzervativna i monotona, onda je njen numerički fluks $g(u,v)$ rastuća funkcija u prvom argumentu, a padajuća u drugom.

Dokaz. □

Lako je pokazati da obrat propozicije vrijedi ukoliko je zadovoljen uvjet lipšicovosti:

$$\lambda \max_{w,z} (|g(u,w) - g(v,w)| + |g(z,u) - g(z,v)|) \leq |u-v|.$$

Sljedeći teorem kazuje da su monotone sheme samo prvog reda točnosti čak i kad koriste više od tri točke.

Teorem 7.2 Zadana je diferencijska shema (7.3) koja se dade zapisati u konzervativnoj formi (7.5), konzistentna s diferencijalnom jednadžbom (7.1) i čija je funkcija H klase C^3. Ako je shema monotona, onda je ona najviše prvog reda točnosti.

Za mrežnu funkciju $u = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ koristit ćemo sljedeće oznake:

$$\|u\|_1 = \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|,$$
$$\|u\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|,$$
$$TV(u) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1} - u_j|.$$

Definicija 7.5 Za shemu (7.3) kažemo da je padajuće totalne varijacije ili TVD (eng. *total variation dinishing*) ako vrijedi

$$TV(H_\Delta(u)) \leq TV(u),$$

Definicija 7.6 Za shemu (7.3) kažemo da je L^∞-stabilna ako postoji konstanta C, neovisna o n i Δt, takva da je

$$\|u^n\|_\infty \leq C \quad \forall n \geq 0.$$

Teorem 7.3 Monotona konzistentna i kozervativna shema je TVD i L^∞-stabilna. Štoviše,

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$$

i za svaka dva niza u, v vrijedi

$$\|H_\Delta(u) - H_\Delta(v)\|_1 \leq \|u - v\|_1. \tag{7.30}$$

Dokaz. 1. Iz monotonosti slijedi da H_Δ zadovoljava sljedeći *princip maksimuma*:

$$\min_{j-k\leq l\leq j+k} u_l \leq (H_\Delta(u))_j \leq \max_{j-k\leq l\leq j+k} u_l$$

Zaista, ako je $w = \max_{j-k\leq l\leq j+k} u_l$, onda možemo iz niza (u_j) konstruirati niz $v = (\ldots, u_{j-k+1}, w, w, \ldots, w, u_{j+k+1}, \ldots)$ i zbog monotonosti sheme iz $u \leq v$ slijedi $H_\Delta(u) \leq H_\Delta(v)$. Konzistentnost daje $(H_\Delta(v))_j = w$ i time je desna nejednakost dokazana. Lijeva se dokazuje analogno.

2. Iz 1 neposredno slijedi L^∞-stabilnost, a iteriranjem iz $u^{n+1} = H_\Delta(u^n)$ dobivamo

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^{n-1}\|_\infty \leq \|u^{n-2}\|_\infty \leq \cdots \leq \|u^0\|_\infty$$

3. Pokažimo da je $H_\Delta \colon l_1 \to l_1$. Zaista, iz

$$|(H_\Delta(u))_j| \leq \max_{j-k\leq l\leq j+k} |u_l| \leq \sum_{l=j-k}^{j+k} |u_l|,$$

za svako $u \in l_1$ dobivamo

$$\begin{aligned}\|H_\Delta(u)\|_1 = \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j| \leq \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l=j-k}^{j+k} |u_l| = \Delta x \sum_{l=j-k}^{j+k} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i| \\ = (2k+1)\Delta x \sum_{i\in\mathbb{Z}} |u_i| = (2k+1)\|u\|_1.\end{aligned}$$

Time, prema Propoziciji 7.1 dobivamo da za svako $u \in l_1$ vrijedi

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} H_\Delta(u)_j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j. \tag{7.31}$$

4. Uvedimo oznaku $u_+ = (u_{j+})$, gdje je $a_+ = \max(a,0)$ i pokažimo da za svako $u, v \in l_1$ vrijedi

$$\|(H_\Delta(u) - H_\Delta(v))_+\|_1 \leq \|(u-v)_+\|_1 \tag{7.32}$$

Iz jednakosti $\max(u,v) = v + (u-v)_+$ i monotonosti sheme slijedi

$$\begin{aligned}H_\Delta(\max(u,v)) &\geq H_\Delta(u) \\ H_\Delta(\max(u,v)) &\geq H_\Delta(v)\end{aligned}$$

Oduzimanjem $H_\Delta(v)$ dobivamo

$$H_\Delta(\max(u,v)) - H_\Delta(v) \geq \max(0, H_\Delta(u) - H_\Delta(v)) = (H_\Delta(u) - H_\Delta(v))_+.$$

Odavde zbog (7.31) i $\max(u,v) \in l_1$ slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} (H_\Delta(u) - H_\Delta(v))_{j+} &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} (H_\Delta(\max(u,v)) - H_\Delta(v))_j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\max(u,v)_j - v_j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (u_j - v_j)_+.\end{aligned}$$

Time je (7.32) dokazano.

5. Za svako $u, v \in l_1$ vrijedi (7.30). Naime, koristeći

$$|a-b| = (a-b)_+ + (b-a)_+$$

dobivamo

$$|H_\Delta(u)_j - H_\Delta(v)_j| = (H_\Delta(u)_j - H_\Delta(v)_j)_+ + (H_\Delta(v)_j - H_\Delta(u)_j)_+$$

i stoga

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|H_\Delta(u)_j - H_\Delta(v)_j| &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}(H_\Delta(u)_j - H_\Delta(v)_j)_+ + \sum_{j\in\mathbb{Z}}(H_\Delta(v)_j - H_\Delta(u)_j)_+ \\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}(u_j - v_j)_+ + \sum_{j\in\mathbb{Z}}(v_j - u_j)_+ \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}|u_j - v_j|.\end{aligned}$$

6. Svojstvo kontrakcije (7.30) vrijedi za svaka dva niza u i v. Da bismo to dokazali uočimo da možemo pretpostaviti da je $u-v \in l_1$, jer je inače nejednakost trivijalna. Za proizvoljan segment $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$ označimo

$$u_K = (\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l_1, \quad \tilde{u}_j = \begin{cases} u_j & \text{za } j\Delta x \in K \\ 0 & \text{za } j\Delta x \notin K. \end{cases}$$

Tada očito $\|u_K - v_K\|_1 \to \|u - v\|_1$ kada K raste prema $[-\infty, \infty]$. Nadalje, za fiksiran segment $S \subset \mathbb{R}$ i svaki dovoljno velik segment K, $S \subset K$, vrijedi ($u_k, v_K \in l_1$):

$$\|H_\Delta(u) - H_\Delta(v)\|_{1,S} \leq \|H_\Delta(u_K) - H_\Delta(v_K)\|_1 \leq \|u_K - v_K\|_1,$$

gdje je lokalna norma

$$\|u\|_{1,S} = \Delta x \sum_{j\Delta x\in S} |u_j|.$$

Prijelazom na limes $K \to [-\infty, \infty]$ dobivamo

$$\|H_\Delta(u) - H_\Delta(v)\|_{1,S} \leq \|u - v\|_1.$$

Kako to vrijedi za svako S zaključujemo da je red na desnoj strani konvergentan i vrijedi

$$\|H_\Delta(u) - H_\Delta(v)\|_1 \leq \|u - v\|_1.$$

7. Ako je funkcija u takva da je $TV(u) < \infty$, onda je $u - w \in l_1$, gdje je $w_j = u_{j+1}$. Tada prema dokazanom imamo:

$$\begin{aligned}TV(H_\Delta(u)) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}|H_\Delta(u)_{j+1} - H_\Delta(u)_j| = \sum_{j\in\mathbb{Z}}|H_\Delta(w)_j - H_\Delta(u)_j| \\ &= \frac{1}{\Delta x}\|H_\Delta(w) - H_\Delta(u)\|_1 \leq \frac{1}{\Delta x}\|w - u\|_1 = TV(u).\end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. □

Teorem 7.3 može se preformulirati u terminima po dijelovima konstantne funkcije $u_\Delta(x,t)$.

Posljedica 7.1 Monotona konzistentna i konzervativna shema zadovoljava za svako $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|u_\Delta(\cdot,t)\|_{L^\infty} &\leq \|u_\Delta(\cdot,0)\|_{L^\infty} \\ \|u_\Delta(\cdot,t)\|_{L^1} &\leq \|u_\Delta(\cdot,0)\|_{L^1} \\ TV(u_\Delta(\cdot,t)) &\leq TV(u_\Delta(\cdot,0)). \end{aligned}$$

Vidjeli smo da je monotonost vrlo jako svojstvo, pa ćemo stoga definirati slabiju verziju monotonosti.

Definicija 7.7 Diferencijska shema

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k}^n), \quad n \geq 0,\, j \in \mathbb{Z},$$

čuva monotonost ako operator H_Δ preslikava monotone nizove u monotone nizove.

Ideja je da shema koja čuva monotonost ne može kreirati nove ekstreme pa su time nestabilnosti (oscilacije) isključene.

Propozicija 7.4 Svaka TVD shema čuva monotonost.

Dokaz. Uzmimo specijalan slučaj monotonog niza koji je stacionaran za dovoljno velike vrijednosti indeksa:

$$v_j = \begin{cases} v_- & j \leq J_- \\ \text{monotono} & J_- \leq j \leq J_+ \\ v_+ & J_+ \leq j \end{cases}$$

Tada je $TV(v) = v_+ - v_-$. Kao i uvijek pretpostavljamo da je $H(v, v, \dots, v) = v$ pa imamo $H(v_-, \dots, v_-) = v_-$ i $H(v_+, \dots, v_+) = v_+$. Kada niz $w = H_\Delta(v)$ ne bi bio monoton, imao bi barem jedan lokalni maksimum v_M i lokalni minimum v_m. To bi dalo

$$TV(w) \geq |v_+ - v_-| + |v_M - v_m| > TV(v).$$

To je kontradikcija. U općemo slučaju do zaključka se dolazi "odsjecanjem" niza za velike indekse i korištenjem ograničenosti totalne varijacije. □

Propozicija 7.5 Linearna shema s konstantnim koeficijentima

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-k}^{k} c_l u_{j+l}^n$$

čuva monotonosta ako i samo ako je $c_l \geq 0$ za sve l.

Dokaz. Jasno je da iz uvjeta $c_l \geq 0$ za sve l, slijedi da shema čuva monotonost. Obrat se dokazuje konstrukcijom specijalnog niza

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & j \leq 0 \\ 0 & j \geq 1 \end{cases}$$

Tada je za $-k \leq L \leq k$

$$u_{-L+1}^1 - u_{-L}^1 = \sum_{l=-k}^{k} c_l (u_{-L+l+1}^0 - u_{-L+l}^0) = c_L(u_1 - u_0) = -c_L \leq 0,$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz monotonosti. □

Iz Propozicije 7.5 vidimo da je linearna shema s konstantnim koeficijentima monotona ako i samo ako čuva monotonost. Ta dva pojma se u linearnom slučaju podudaraju. Iz toga slijedi da svaka linearna TVD shema jeste monotona pa onda i prvog reda točnosti. Ako želimo TVD shemu koja nije prvog reda točnosti morat će biti nelinearna, čak i za linearnu jednadžbu.

Može se pokazati da Lax-Wendroffova shema (drugog reda točnosti) ne čuva monotonost.

Lema 7.1 Neka je $u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k}^n)$ konzervativna TVD shema s Lipschitzovim fluksom g i pretpostavimo da je L^∞ stabilna. Tada postoji konstanta C takva da za sve $m \geq n \geq 0$ vrijedi

$$\|H_\Delta^m(u) - H_\Delta^n(u)\|_1 \leq C(m-n)\Delta t TV(u).$$

Dokaz. Iz

$$H_\Delta(u)_j = u_j - \lambda(g_{j+1/2} - g_{j-1/2})$$

zbog Lipschitzovosti slijedi ($C_1 = C_1(g, \|u\|_\infty)$)

$$|H_\Delta(u)_j - u_j| \leq \lambda C_1 \sum_{l=-k}^{k-1} |u_{j+l+1} - u_{j+l}|.$$

Sada je

$$\|H_\Delta(u) - u\|_1 \leq \lambda 2kC_1 \Delta x TV(u) = 2kC_1 \Delta t TV(u),$$

i stoga, budući da je shema TVD,

$$\|H_\Delta^{l+1}(u) - H_\Delta^l(u)\|_1 \leq 2kC_1 \Delta t TV(H_\Delta^l(u)) \leq 2kC_1 \Delta t TV(u).$$

Konačno,

$$\|H_\Delta^m(u) - H_\Delta^n(u)\|_1 \le \sum_{l=n}^{m-1} \|H_\Delta^{l+1}(u) - H_\Delta^l(u)\|_1 \le 2kC_1(m-n)\Delta t TV(u). \ \Box$$

Rezultate Leme 7.1 možemo izraziti pomoću po dijelovima konstantne funkcije u_Δ.

Teorem 7.4 Neka je $u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \ldots, u_{j+k}^n)$ konzervativna TVD shema s Lipschitzovim fluksom g i pretpostavimo da je L^∞ stabilna. Tada postoji konstanta $C = C(g, \|u\|_\infty)$ takva da za svako $T > 0$ i za svako $0 \le s, t \le T$ vrijedi

$$\|u_\Delta(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|u_\Delta(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} + CT\, TV(u_\Delta(\cdot, 0)) \tag{7.33}$$

$$\|u_\Delta(\cdot, t) - u_\Delta(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le C(|t-s| + \Delta t) TV(u_\Delta(\cdot, 0))) \tag{7.34}$$

$$TV(u_\Delta(\cdot, t)) \le TV(u_\Delta(\cdot, 0)). \tag{7.35}$$

Dokaz. Ocjena (7.35) slijedi iz pretpostavke da je metoda TVD. Uzimajući u Lemi 7.1 $n = 0$ dobivamo

$$\|H_\Delta^m(u)\|_1 \le \|u\|_1 + Cm\Delta t TV(u),$$

odakle direktno slijedi (7.33). Da bismo dokazali (7.34) za proizvoljne $0 \le s, t \le T$ nađimo T_m i t_n takve da je $t_m \le t < t_{m+1}$ i $t_n \le s < t_{n+1}$. Očito je

$$|t_m - t_n| \le |t - s| + \Delta t,$$

pa zbog

$$u_\Delta(\cdot, t) - u_\Delta(\cdot, s) = u_\Delta(\cdot, t_m) - u_\Delta(\cdot, t_n),$$

Lema 7.1 daje

$$\begin{aligned}\|u_\Delta(\cdot, t) - u_\Delta(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\le C(m-n)\Delta t TV(u_\Delta(\cdot, 0)) \\ &\le C(|t-s| + \Delta t) TV(u_\Delta(\cdot, 0)). \ \Box\end{aligned}$$

Napomena 7.1 Ako na lijevoj strani u Lemi 7.1 uzmemo samo konačnu sumu, onda dobivamo da za svaki ograničeni skup $K \subset \mathbb{R}$ i $0 \le t \le T$ vrijedi

$$\|u_\Delta(\cdot, t)\|_{L^1(K)} \le \|u_\Delta(\cdot, 0)\|_{L^1(K)} + CT\, TV(u_\Delta(\cdot, 0)) \tag{7.36}$$

Ta će nam ocjena poslužiti kada je $u_\Delta(\cdot, 0) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. $\Box$

Napomena 7.2 (L^∞-stabilnosti) L^∞-stabilnost se javlja kao pretpostavka u Teoremu 7.4, no ona može biti posljedica i "slabijih" pretpostavki.

1. Ako je shema TVD i početni podatak ima kompaktan nosač, onda će shema biti L^∞-stabilna. Naime, ako početni podatak ima kompaktan nosač, onda će i rješenje diferencijske sheme $u_\Delta(\cdot,t)$ imati kompaktan nosač za svako $t \geq 0$. Budući da je

$$u_i^n = \sum_{j=i}^{\infty}(u_j^n - u_{j+1}^n),$$

dobivamo $|u_i^n| \leq TV(u^n) \leq TV(u^0)$ i stoga

$$\|u_\Delta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq TV(u_\Delta(\cdot,0)).$$

2.Isti zaključak vrijedi ako je $v_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Za proizvoljne $i \leq j$ možemo napraviti ocjenu

$$|u_j^n| \leq |u_i^n| + |u_i^n - u_{i+1}^n| + \cdots + |u_{j-1}^n - u_j^n| \leq |u_i^n| + TV(u^n). \tag{7.37}$$

Fiksirajmo j. Tada točke na osi $t=0$ s indeksima $l < j-kn$ nemaju utjecaja na vrijednost u_j^n, pa ćemo modificirati početni podatak na sljedeći način: odaberemo m dovoljno velik negativan indeks, $m < j-kn$, i stavimo $u_l^0 = u_m^0$ za sve $l \leq m < j-kn$. Uz takvu modifikaciju rješenje diferencijske sheme na n-tom nivou postaje konstantno za $l \leq m-kn < j-2kn$: $u_l^n = u_m^0$ za $l < m-kn$. Stoga, uzimajući u (7.37) $i < m-kn$ izlazi

$$|u_j^n| \leq |u_m^0| + TV(u^n).$$

Zbog $\lim_{m\to-\infty} u_m^0 = 0$ dobivamo $|u_j^n| \leq TV(u^n)$ i odavde ponovo slijedi L^∞-stabilnosti. □

Teorem 7.5 Neka je $u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \ldots, u_{j+k}^n)$ konzervativna TVD i L^∞ stabilna shema s Lipschitzovim numeričkim fluksom g, konzistentan s diferencijalnom jednažbom (7.1). Pretpostavimo da je početni uvjet $v_0 \in BV(\mathbb{R})$ i da je početni uvjet diferencijske sheme u_j^0 definiran formulom (7.10). Tada postoji slabo rješenje zadaće (7.1), (7.2) i niz $\Delta_k x \to 0$ ($k \to \infty$) takav da uz $\Delta_k t = \lambda \Delta_k x$ (λ=konstanta) niz aproksimativnih rješenja $u_{\Delta_k}(x,t)$ konvergira prema $v(x,t)$ u $L^\infty(0,T;L^1_{loc}(\mathbb{R}))$, za svako $T>0$.

Dokaz. 1. Prema pretpostavci L^∞ stabilnosti imamo

$$\|u_\Delta(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C < \infty.$$

2. Budući da je shema TVD slijedi

$$\begin{aligned} TV(u_\Delta(\cdot,t)) \leq TV(u_\Delta(\cdot,0)) &= \sum_j |u_{j+1}^0 - u_j^0| \\ &= \frac{1}{\Delta x}\sum_j \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} |v_0(x+\Delta x) - v_0(x)|\,dx \leq TV(v_0). \end{aligned}$$

Time smo dobili ograničenost totalne vatijacije za svako $0 \leq t \leq T$.

3. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}$ ograničen skup. Tada prema (7.36) imamo

$$\begin{aligned}\|u_\Delta(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|u_\Delta(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)} + CT\,TV(u_\Delta(\cdot,0)) \\ &\leq 2\|v_0\|_{L^1(\Omega)} + CT\,TV(v_0),\end{aligned}$$

jer je

$$\|u_\Delta(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \sum_{j\Delta x\in\Omega} \left| \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v_0(x)\,dx \right| \leq 2\|v_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Time smo dobili uniformnu ograničenost niza $(u_\Delta(\cdot,t))$ u $L^1(\Omega)\cap BV(\Omega)$.

4. Koristeći kompaktnost ulaganja $L^1(\Omega)\cap BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ možemo naći podniz $(u_{\Delta_k}(\cdot,t))_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(u_\Delta(\cdot,t))$ koji konvergira u $L^1(\Omega)$ prema nekoj funkciji $v(\cdot,t)\in L^1(\Omega)$.

5. Podniz i točke 4 možemo izvući za svako pojedino t. Uzmimo stoga prebrojiv gusp podskup $\{s_l\}\subset[0,T]$, na primjer niz svih racionalnih brojeva u $[0,T]$. Cantorovim dijagonalnim postupkom možemo izvući jedan podniz $(u_{\Delta_k}(\cdot,t))_{k\in\mathbb{N}}$ takav da za sve $l\in\mathbb{N}$

$$u_{\Delta_k}(\cdot,s_l) \to v(\cdot,s_l) \quad \text{u } L^1(\Omega) \ \text{ kada } k\to\infty.$$

6. Pokažimo da niz $(u_{\Delta_k}(\cdot,t))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira u normi prostora $L^\infty([0,T];L^1(\Omega))$ prema nekoj funkciji $v\in L^\infty([0,T];L^1(\Omega))$. U tu svrhu, budući da je prostor $L^\infty([0,T];L^1(\Omega))$ potpun, dovoljno je pokazati je je niz $(u_{\Delta_k}(\cdot,t))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev. Treba dakle pokazati

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,m\geq N,\ \sup_{0\leq t\leq T}\int_\Omega |u_{\Delta_n}(x,t)-u_{\Delta_m}(x,t)|\,dx \leq \varepsilon.$$

7. Odaberimo $\varepsilon>0$. Tada možemo naći brojeve $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_r\leq T$ iz $\{s_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ i $N_0\in\mathbb{N}$ takve da za svako $t\in[0,T]$ postoji t_i takav da je

$$\forall k\geq N_0 \quad \|u_{\Delta_k}(\cdot,t)-u_{\Delta_k}(\cdot,t_i)\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.38}$$

Zaista, prema Teoremu 7.4, (7.34), treba brojeve t_i odabrati tako da bude

$$|t_{i+1}-t_i| < \frac{\varepsilon}{6CTV(v_0)}$$

a N_0 tako da bude

$$|\Delta_k t| < \frac{\varepsilon}{6CTV(v_0)}$$

Tada primjenom (7.34) izlazi (7.38).

8. Za proizvoljne $n, m \geq N_0$ i $t \in [0, T]$ postoji t_i takav da je

$$\begin{aligned}
\|u_{\Delta_n}(\cdot,t) - u_{\Delta_m}(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|u_{\Delta_n}(\cdot,t) - u_{\Delta_n}(\cdot,t_i)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&+ \|u_{\Delta_n}(\cdot,t_i) - u_{\Delta_m}(\cdot,t_i)\|_{L^1(\Omega)} \\
&+ \|u_{\Delta_m}(\cdot,t_i) - u_{\Delta_m}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \|u_{\Delta_n}(\cdot,t_i) - u_{\Delta_m}(\cdot,t_i)\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Budući da t_i-ova ima konačno mnogo, možemo naći $N_1 \in \mathbb{N}$ takav da za dano $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$\forall n, m \geq N_1, \quad \|u_{\Delta_n}(\cdot,t_i) - u_{\Delta_m}(\cdot,t_i)\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall i.$$

Time dolazimo do ocjene da za svako $t \in [0, T]$ vrijedi

$$\|u_{\Delta_n}(\cdot,t) - u_{\Delta_m}(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon,$$

i $(u_{\Delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u $L^\infty([0,T];L^1(\Omega))$ pa stoga konvergira prema nekoj funkciji $v \in L^\infty([0,T];L^1(\Omega))$.

9. Za svaki ograničen skup $\Omega \subset \mathbb{R}$ možemo naći neki podniz $(u_{\Delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira u $L^\infty([0,T];L^1(\Omega))$. Uzmimo niz rastućih skupova $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ koji iscrpljuju čitav $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \cup_n \Omega_n$. Za svaki takav skup možemo naći jedan konvergentan podniz, a Cantorovim dijagonalnim postupkom možemo naći jedan podniz koji konvergira u $L^\infty([0,T];L^1(\Omega_n))$, za svako n. Taj podniz tada konvergira u $L^\infty([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}))$.

10. Uočimo da konvergencija u $L^\infty([0,T];L^1(\Omega))$ povlači konvergenciju u $L^1([0,T]\times\Omega)$ i stoga još jednim prijelazom na podniz možemo dobiti konvergenciju skoro svuda. Primjenom Lax-Wendroffovog teorema slijedi da je funkcija ne limesu $v \in L^\infty([0,T]\times\Omega)$ slabo rješenje zadaće (7.1), (7.2). □

7.5 Inkrementalna forma i numerička viskoznost

Definicija 7.8 Za shemu (7.3) kažemo da se može zapisati u inkrementalnoj formi ako postoje funkcije C i D od $2k$ varijabli (inkrementalni koeficijenti) takvi da se shema može zapisati u obliku

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^n \Delta u_{j+1/2}^n - D_{j-1/2}^n \Delta u_{j-1/2}^n \tag{7.39}$$

gdje je $\Delta u_{j+1/2}^n = u_{j+1}^n - u_j^n$ i

$$C_{j+1/2}^n = C(u_{j-k+1}^n, \ldots, u_{j+k}^n), \quad D_{j+1/2}^n = D(u_{j-k+1}^n, \ldots, u_{j+k}^n).$$

Lako se dokazuje sljedeći rezultat:

Propozicija 7.6 Trotočkovna konzistentna i konzervativna shema (7.5) s Lipschitzovim numeričkim fluksom g ima jednistvenu inkrementalnu formu, a inkrementalni koeficijenti su dani formulama:

$$C_{j+1/2} = \lambda(f_j - g_{j+1/2})\Delta u_{j+1/2} \tag{7.40}$$

$$D_{j+1/2} = \lambda(f_{j+1} - g_{j+1/2})\Delta u_{j+1/2}. \tag{7.41}$$

Dokaz. Izjednačavajući inkrementalnu i konzervativnu formu dobivamo:

$$C_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2} - D_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2} = -\lambda(g_{j+1/2} - g_{j-1/2}). \tag{7.42}$$

Stavljajući $u_{j-1} = u_j$ dobivamo

$$C_{j+1/2} = C(u_j, u_{j+1}) = -\lambda(g(u_j, u_{j+1}) - f(u_j))/\Delta u_{j-1/2}.$$

Analogno se dobiva i druga formula, a jedinstvenost je evidentna. □

Uočimo da u slučaju trotočkovne sheme inkrementalni koeficijenti zadovoljavaju sljedeću relaciju konzistencije:

$$D_{j+1/2} - C_{j+1/2} = \frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}}.$$

Nadalje, numerički fluks se može rekonstruirati po formuli

$$g(u_j, u_{j+1}) = f_j - \frac{1}{\lambda} C_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2}.$$

Definicija 7.9 Konzervativna diferencijska shema (7.5) naziva se esencijalno trotočkovna ako njen numerički fluks zadovoljava

$$g(u_{-k+1}, \dots, u_{-1}, u, u, u_2, \dots, u_k) = f(u).$$

Definicija 7.10 Za shemu (7.3) kažemo da se može zapisati u viskoznoj formi ako postoji funkcija Q od $2k$ varijabli (viskozni koeficijent) takva da se shema može zapisati u obliku

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(Q_{j+1/2}^n \Delta u_{j+1/2}^n - Q_{j-1/2}^n \Delta u_{j-1/2}^n), \tag{7.43}$$

gdje je

$$Q_{j+1/2}^n = Q(u_{j-k+1}^n, \dots, u_{j+k}^n).$$

Ako je shema zapisana u viskoznoj formi (7.43) onda je njen numerički fluks jednak

$$g_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2\lambda} Q_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2},$$

pa je shema esencijalno trotočkovna.

Propozicija 7.7 Svaka esencijalno trotočkovna shema s Lipschitzovim numeričkim fluksom g ima jednistvenu viskoznu formu, a viskozni koeficijent je dan formulom:

$$Q_{j+1/2} = \lambda(f_j + f_{j+1} - 2g_{j+1/2})/\Delta u^n_{j+1/2}. \tag{7.44}$$

Štoviše, ako je shema trotočkovna, onda je veza s inkrementalnim koeficijentima dana formulom:

$$Q_{j+1/2} = C_{j+1/2} + D_{j+1/2}.$$

Napomena 7.3 Za esencijalno trotočkovnu shemu inkrementalni koeficijenti nisu jedinstveno određeni. Naime, ako se vratimo u jednakost (7.42), za $u_{j-1} = u_j$ dobivamo

$$C_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2} = -\lambda(g(u_{j-k+1}, \dots, u_j, u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{j+k}) - f_j).$$

Prema tome, inkrementalne koeficijente možeo definirati ponovo formulama (7.40), (7.41) ali taj izbor nije jedinstven. Uz izbor (7.40) i (7.41) te koeficijente možemo zapisati u obliku

$$C_{j+1/2} = -\frac{\lambda}{2}\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} + \frac{1}{2}Q_{j+1/2} \tag{7.45}$$

$$D_{j+1/2} = \frac{\lambda}{2}\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} + \frac{1}{2}Q_{j+1/2} \tag{7.46}$$

S druge strane, diferencijska shema u inkrementalnoj formi ne mora se nužno moći zapisati i u viskoznoj formi. To se vidi ako se izjednače inkrementalna i knzervativna forma. Nakon kraćenja i prebacivanja članova, dobivamo:

$$g_{j+1/2} + \frac{1}{\lambda}C_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2} = g_{j-1/2} + \frac{1}{\lambda}D_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2}$$

Stavljanjem $\Delta u_{j+1/2} = 0$ desna strana se neće nužno svesti na f_j. Ipak, odavde možemo definirati tzv. modificirani fluks

$$\tilde{f}_j = g_{j+1/2} + \frac{1}{\lambda}C_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2} = g_{j-1/2} + \frac{1}{\lambda}D_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2}.$$

U slučaju trotočkovne sheme dobivamo $\tilde{f}_j = f_j$. Sada definiramo modificirani viskozni fluks formulom

$$\tilde{Q}_{j+1/2} = C_{j+1/2} + D_{j+1/2}.$$

i dobivamo modificiranu viskoznu formu diferencijske sheme:

$$u^{n+1}_j = u^n_j - \frac{\lambda}{2}(\tilde{f}^n_{j+1} - \tilde{f}^n_{j-1}) + \frac{1}{2}(\tilde{Q}^n_{j+1/2}\Delta u^n_{j+1/2} - \tilde{Q}^n_{j-1/2}\Delta u^n_{j-1/2}), \tag{7.47}$$

U slučaju trotočkovne sheme modificirana viskozna forma svodi se na običnu viskoznu formu.

Propozicija 7.8 Zadana je diferencijska shema koja se može zapisati u inkrementalnoj formi (7.39). Ako inkrementalni koeficijenti zadovoljavaju

$$C_{j+1/2} \geq 0, \quad D_{j+1/2} \geq 0 \tag{7.48}$$

$$C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{7.49}$$

onda je shema TVD.

Dokaz. Stavimo $w = H_\Delta u$, odnosno

$$w_j = u_j + C_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2} - D_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2}.$$

Imamo

$$\Delta w_{j+1/2} = C_{j+3/2}\Delta u_{j+3/2} + (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})\Delta u_{j+1/2} + D_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2} \quad (7.50)$$

Po pretpostavci svi su koeficijenti pozitivni pa imamo

$$|\Delta w_{j+1/2}| \le C_{j+3/2}|\Delta u_{j+3/2}| + (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})|\Delta u_{j+1/2}| + D_{j-1/2}|\Delta u_{j-1/2}|$$

Uz pretostavku da je u ograničene totalne varijacije, sumiranjem i pomicanjem indeksa dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta w_{j+1/2}| &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} C_{j+3/2}|\Delta u_{j+3/2}| + \sum_{j\in\mathbb{Z}}(1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})|\Delta u_{j+1/2}| \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{Z}} D_{j-1/2}|\Delta u_{j-1/2}| \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} C_{j+1/2}|\Delta u_{j+1/2}| + \sum_{j\in\mathbb{Z}}(1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})|\Delta u_{j+1/2}| \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{Z}} D_{j+1/2}|\Delta u_{j+1/2}| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta u_{j+1/2}|. \; \square
\end{aligned}$$

Posljedica 7.2 Zadana je diferencijska shema koja se može zapisati u viskoznoj formi (7.43). Ako viskozni koeficijent zadovoljava

$$\lambda \left| \frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} \right| \le Q_{j+1/2} \le 1, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{7.51}$$

onda je shema TVD.

Dokaz. Neposredno iz (7.45) i (7.46) i Propozicije 7.8. $\square$

Koristeći inkrementalnu formu možemo pokazati da je kod trotočkovnih shema za TVD nužno i dovoljno čuvanje monotonosti.

Teorem 7.6 Trotočkovna shema koja može biti zapisana u inkrementalnoj formi je TVD ako i samo ako čuva monotonost.

Dokaz. U Propoziciji 7.4 smo vidjeli da TVD shema čuva monotonost. Sada ćemo pokazati da za shemu u inkrementalnoj formi (7.39) vrijedi (7.48) i (7.49). U tu svrhu uzmimo niz $u = (u_j)$

$$u_j = \begin{cases} u_l & j \le J \\ u_d & j > J, \end{cases}$$

za koji imamo

$$\begin{aligned} \Delta u_{j+1/2} &= 0 \quad \text{za } j \leq J-1 \text{ i } j \geq J+1 \\ \Delta u_{J+1/2} &= u_d - u_l. \end{aligned}$$

Prema (7.50) slijedi

$$\begin{aligned} \Delta w_{J+3/2} &= D_{J+1/2}(u_d - u_l) \\ \Delta w_{J+1/2} &= (1 - C_{J+1/2} - D_{J+1/2})(u_d - u_l) \\ \Delta w_{J-1/2} &= C_{J+1/2}(u_d - u_l). \end{aligned}$$

Iz čuvanja monotonosti slijede pozitivnosti sva tri koeficijenta. □

Posljedica 7.3 Za trotočkovne sheme s Lipschitzovim numeričkim fluksem uvjeti (7.48), (7.49) odnosno (7.51) su nužni i dovoljni da bi shema bila TVD.

Teorem 7.7 Neka je (7.3) esencijalno trotočkovna shema zapisana u viskoznoj formi (7.43) i neka njen koeficijent numeričke viskoznosti zadovoljava

$$\lambda \left| \frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} \right| \leq Q_{j+1/2} \leq \frac{1}{2}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{7.52}$$

Tada je shema TVD i L^∞ stabilna.

Dokaz. Već znamo da je shema TVD (Posljedica 7.2). Ostaje pokazati L^∞ stabilnost.

Kako je

$$w_j = H_\Delta(u)_j = C_{j+1/2}u_{j+1} + (1 - C_{j+1/2} - D_{j-1/2})u_j + D_{j-1/2}u_{j-1}$$

vidimo da je w_j konveksna kombinacija vrijednosti u_{j+1}, u_j i u_{j-1} ako vrijedi

$$\begin{aligned} 0 \leq C_{j+1/2}, D_{j+1/2} &\leq 1, \\ C_{j+1/2} + D_{j+1/2} &\leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

U tom slučaju vrijedi princip maksimuma

$$\min(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \leq w_j \leq \max(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}),$$

odakle L^∞ stabilnost lako slijedi.

Koristeći formule

$$C_{j+1/2} = -\frac{\lambda}{2}\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} + \frac{1}{2}Q_{j+1/2}, \quad D_{j+1/2} = \frac{\lambda}{2}\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} + \frac{1}{2}Q_{j+1/2}$$

iz uvjeta (7.52) dobivamo:

$$\frac{1}{2}\left(Q_{j+1/2}-\lambda\left|\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}}\right|\right)\le C_{j+1/2}\le\frac{1}{2}\left(Q_{j+1/2}+\lambda\left|\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}}\right|\right)\le\frac{1}{2},$$

i slično za D. □

Sada možemo dati i efektivnu konstrukciju trotočkovne diferencijske sheme koja je TVD i L^∞ stabilna. Uvedemo funkciju

$$a(u,v)=\begin{cases}\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} & \text{za } u\neq v\\ f'(u) & \text{za } u=v\end{cases}\tag{7.53}$$

i odaberemo neprekidnu funkciju $Q(x)$, takvu da je

$$|x|\le Q(x)\le 1 \quad \text{za } 0\le|x|\le\mu\le 1.$$

Shemu odabiremo u viskoznoj formi

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\lambda}{2}(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n)+\frac{1}{2}(Q_{j+1/2}^n\Delta u_{j+1/2}^n-Q_{j-1/2}^n\Delta u_{j-1/2}^n),$$

s koeficijentom numeričke viskoznosti

$$Q_{j+1/2}=Q(\lambda a(u_j,u_{j+1})).$$

Shema je TVD uz CFL uvjet

$$\lambda\max_{j,n}|a(u_j^n,u_{j+1}^n)|\le\mu.$$

L^∞ stabilnost možemo osigurati ako odaberemo funkciju za koju je

$$|x|\le Q(x)\le\frac{1}{2}\quad \text{za } 0\le|x|\le\mu\le 1.$$

Teorem 7.8 Esencijalno trotočkovna konzervativna shema koja zadovoljava TVD uvjet (7.51) je najviše prvog reda točnosti. Posebno, svaka trotočkovna TVD shema je najviše prvog reda točnosti.

Dokaz. Dokaz baziramo na činjenici da je Lax-Wendroffova shema drugog reda točnosti. Stoga razlika između numeričkog fluksa zadane sheme i Lax-Wendroffove mora biti reda veličine Δx^2.

Numerički fluks esencijalno trotočkovne konzervativne sheme može se zapisati u obliku (prema Propoziciji 7.7)

$$g(u_{-k+1},\dots,u_k)=\frac{1}{2}(f(u_0)+f(u_1))-\frac{1}{2\lambda}Q(u_{-k+1},\dots,u_k)(u_1-u_0).$$

Lax-Wendroffov fluks ima oblik ($a(u,v)$ biramo kao u (7.53))

$$g^{LW}(u_0,u_1) = \frac{1}{2}(f(u_0)+f(u_1)) - \frac{\lambda}{2}a(u_0,u_1)(f(u_1)-f(u_0))$$

Sada je

$$|g-g^{LW}| = \Big|\frac{1}{2\lambda}Q(u_{-k+1},\dots,u_k) - \frac{\lambda}{2}a(u_0,u_1)^2\Big||u_1-u_0|.$$

Kako je po pretpostavci

$$\lambda\,|a(u_0,u_1)| \leq Q(u_{-k+1},\dots,u_k) \leq 1$$

imamo

$$\begin{aligned}|g-g^{LW}| &\geq \frac{1}{2}\Big||a(u_0,u_1)| - \lambda a(u_0,u_1)^2\Big||u_1-u_0| \\ &= |a(u_0,u_1)|(1-\lambda|a(u_0,u_1)|)|u_1-u_0|.\end{aligned}$$

Odavde vidimo da je općenito

$$\begin{aligned}&|g(u(x-(k-1)\Delta x,t),\dots,u(x+k\Delta x,t)) \\ &\quad - g^{LW}(u(x-(k-1)\Delta x,t),\dots,u(x+k\Delta x,t))| \geq O(\Delta x).\end{aligned}$$

osim tamo gdje je $|a(u(x,t),u(x+\Delta x,t))| = O(\Delta x)$ ili $1-\lambda|a(u(x,t),u(x+\Delta x,t))| = O(\Delta x)$. □

Primjer 7.1 Pogledajmo koeficijent numeričke viskoznosti za neke klasične sheme. Za Lax-Friedrichsovu je $Q^{LF}_{j+1/2} = 1$, pa je ona TVD uz uvjet

$$\lambda\left|\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}}\right| \leq 1. \tag{7.54}$$

Za Roe-Murmanovu shemu je

$$Q^{RM}_{j+1/2} = \lambda\left|\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}}\right|$$

pa je i ona TVD uz uvjet (7.54). Za Engquis-Osherovu shemu je

$$Q^{EO}_{j+1/2} = \lambda\int_{u_j}^{u_{j+1}} |f'(u)|\,du.$$

Lax-Wendroffova shema ima koeficijent numeričke viskoznosti

$$Q^{LW}_{j+1/2} = \left(\lambda\frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}}\right)^2$$

i ne zadovoljava TVD uvjetu. Jednostavnim primjerom se pokazuje da ne čuva monotonost.

7.6 Uvjet entropije

Neka je U konveksna entropija za skalarni zakon sačuvanja (7.2), a F pripadni entropijski fluks. Tada svako entropijski rješenje zadovoljava (u smislu distribucija) entropijsku nejednakost

$$\frac{\partial U(v)}{\partial t} + \frac{\partial F(v)}{\partial x} \leq 0 \tag{7.55}$$

Numerička shema treba zadovoljavati diskretnu verziju te nejednakosti pa stoga imamo ovu definiciju:

Definicija 7.11 Diferencijska shema (7.3) je konzistentna s enropijskim uvjetom (7.55) ako postoji neprekidna funkcija $G\colon \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}$ koja ima sljedeća svojstva:

(i) Konzistentnost s entropijskim fluksom F:

$$G(u, \ldots, u) = F(u); \tag{7.56}$$

(ii) Diskretna entropijska nejednakost:

$$\frac{1}{\Delta t}(U(u_j^{n+1}) - U(u_j^n)) + \frac{1}{\Delta x}(G(u_{j-k+1}^n, \ldots, u_{j+k}^n) - G(u_{j-k}^n, \ldots, u_{j+k-}^n)) \leq 0. \tag{7.57}$$

Funkciju G nazivamo numeričkim entropijskim fluksom.

Ako uvedemo oznake

$$U_j^n = U(u_j^n), \quad G_{j+1/2}^n = G(u_{j-k+1}^n, \ldots, u_{j+k}^n),$$

onda imamo

$$U_j^{n+1} \leq U_j^n - \lambda(G_{j+1/2}^n - G_{j-1/2}^n). \tag{7.58}$$

Entropijska je ona shema koja je konsistentna sa svakim entropijskim uvjetom. Imamo prvo ovaj "negativan rezultat".

Propozicija 7.9 Neka je (7.3) trotočkovna diferencijska shema s numeričkim fluksom klase C^2, konzisentna s bar jednim entropijskim uvjetom. Tada je ona najviše prvog reda točnosti.

Istom tehnikom kojom je dokazan Lax-Wendroffov teorem (Teorem 7.1) dokazujemo sljedeći teorem:

Teorem 7.9 Neka su ispunjene hipoteze Teorema 7.1 i neka je diferencijska shema konzistentna sa svakim entropijskim uvjetom. Tada je funkcija na limesu iz Teorema 7.1 jedinstveno entropijsko rješenje zadaće (7.1), (7.2).

Umjesto provjere da je shema konzistentna sa svakim entropijskim uvjetom dovoljno je pokazati da je konzistentna s familijom uvjeta koju generiraju entropijski parovi

$$U(u) = |u - l|, \quad F(u) = \operatorname{sign}(u - l)(f(u) - f(l)),$$

za svako $l \in \mathbb{R}$. Pripadni numerički entropijski fluks, lako se provjerava, može se definirati na sljedeći način:

$$G(u_{-k+1}, \dots, u_k) = g(u_{-k+1} \vee l, \dots, u_k \vee l) - g(u_{-k+1} \wedge l, \dots, u_k \wedge l)$$

gdje je

$$a \vee b = \max(a, b), \quad a \wedge b = \min(a, b).$$

Izravnim računom dobivamo

$$|u_j - l| - \lambda(G_{j+1/2} - G_{j-1/2}) = H(u_{j-k} \vee l, \dots, u_{j+k} \vee l) - H(u_{j-k} \wedge l, \dots, u_{j+k} \wedge l)$$

Ako je shema monotona i konzistentna ($H(u, \dots, u) = u$), onda se lako pokazuje da vrijedi:

$$H(u^n_{j-k} \vee l, \dots, u^n_{j+k} \vee l) \geq u^{n+1}_{j-k} \vee l, \quad H(u^n_{j-k} \wedge l, \dots, u^n_{j+k} \wedge l) \leq u^{n+1}_{j-k} \wedge l,$$

što daje

$$|u^{n+1}_j - l| - |u^n_j - l| + \lambda(G^n_{j+1/2} - G^n_{j-1/2}) \leq 0.$$

Time smo dokazali sljedeći rezultat:

Teorem 7.10 Svaka monotona konzistentna shema je entropijska.

Jednu širu klasu entropijskih shema dobivamo sljedećom definicijom:

Definicija 7.12 Konzistentna entropijska shema se naziva E-shema ako njen numerički fluks g zadovoljava

$$\operatorname{sign}(u_{j+1} - u_j)(g_{j+1/2} - f(u)) \leq 0, \tag{7.59}$$

za sve u između u_{j+1} i u_j.

Lako se pokazuje da je svaka E-shema esencijalno trotočkovna. Nadalje, na osnovu Propozicije 7.3 dobivamo da je svaka trotočkovna monotona shema ujedno E-shema. Zaista, kako je fluks $g(u, v)$ rastuća funkcija u prvom argumentu, a padajuća u drugom, imamo za $u_j \leq u \leq u_{j+1}$:

$$g_{j+1/2} = g(u_j, u_{j+1}) \leq g(u, u_{j+1}) \leq g(u, u) = f(u)$$

i posve analogno za $u_{j+1} \le u \le u_j$

$$g_{j+1/2} = g(u_j, u_{j+1}) \ge g(u, u_{j+1}) \ge g(u,u) = f(u)$$

što daje (7.59). Prisjetimo se Godunovljevog fluksa. Uz uvjet

$$\lambda \max |f'(u)| \le 1$$

imamo formulu:

$$g^G_{j+1/2} = \begin{cases} \max\limits_{u_{j+1} \le u \le u_j} f(u) & \text{za } u_j > u_{j+1} \\ \min\limits_{u_j \le u \le u_{j+1}} f(u) & \text{za } u_j < u_{j+1}. \end{cases}$$

Sada se lako uočava da je E-shema karakterizirana na sljedeći način:

$$\begin{cases} g_{j+1/2} \le g^G_{j+1/2} & \text{za } u_j < u_{j+1}, \\ g_{j+1/2} \ge g^G_{j+1/2} & \text{za } u_j > u_{j+1}. \end{cases}$$

Nadalje, po definiciji koeficijenta numeričke viskoznosti za esencijalno trotočkovnu shemu imamo

$$Q_{j+1/2} = \lambda(f_j + f_{j+1} - 2g_{j+1/2})/\Delta u^n_{j+1/2},$$

pa stoga lako zaključujemo da je esencijalno trotočkovna shema jedna E-shema ako i samo ako vrijedi

$$Q^G_{j+1/2} \le Q_{j+1/2}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{7.60}$$

gdje je $Q^G_{j+1/2}$ koeficijent numeričke viskoznosti Godunovljeve sheme. Može se dokazati i više.

Teorem 7.11 Neka je zadovoljen CFL-uvjet

$$\lambda \max |f'(u)| \le \frac{1}{2}. \tag{7.61}$$

Shema čiji koeficijent numeričke viskoznosti zadovoljava

$$Q^G_{j+1/2} \le Q_{j+1/2} \le \frac{1}{2} \tag{7.62}$$

je TVD i L^∞ stabilna te konzistentna sa svakim entropijskim uvjetom.

S druge strane imamo ovaj negativni rezultat:

Propozicija 7.10 Svaka E-shema s diferencijabilnim numeričkim fluksom je najviše prvog reda točnosti.

7.7 O shemama višeg reda

Vidjeli smo da viskozna forma sheme nije dobra za konstrukciju metode drugog reda (Teorem 7.8) pa se stoga konstrukcija najčešće bazira na inkrementalnoj formi. Kod inkrementalne forme lako je zaključiti da inkrementalni koeficijenti ne smiju biti glatki. Naime,

$$H(u_{-k},\dots,u_k) = u_0 + C(u_{-k+1},\dots,u_k)(u_1-u_0) - D(u_{-k},\dots,u_{k-1})(u_0-u_{-1})$$

pa deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_{-1}}(u,\dots,u) &= D(u,\dots,u)\\
\frac{\partial H}{\partial u_0}(u,\dots,u) &= 1 - C(u,\dots,u) - D(u,\dots,u)\\
\frac{\partial H}{\partial u_1}(u,\dots,u) &= C(u,\dots,u)\\
\frac{\partial H}{\partial u_j}(u,\dots,u) &= 0, \quad \text{za } j \neq -1,0,1.
\end{aligned}$$

Kako je (vidi Propoziciju 7.2)

$$\begin{aligned}
\beta(u,\lambda) &= \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{j=-k}^{k} j^2 \frac{\partial H}{\partial u_j}(u,\dots,u) - \frac{1}{2}f'(u)^2\\
&= \frac{1}{2\lambda^2}(C(u,\dots,u) + D(u,\dots,u)) - \frac{1}{2}f'(u)^2
\end{aligned}$$

Ako je shema TVD, onda su sve parcijalne derivacije funkcije H nenegativne i shema je monotona, pa prema tome i prvog reda. Stoga zaključujemo da inkrementalni koeficijenti ne smiju biti glatki.

Za metodu s neglatkim koeficijentima nije moguće definirati red metode na standardan način, pa ćemo stog kazati da je metoda s numeričkim fluksom g drugog reda točnosti ako je

$$g_{j+1/2} - g^{LW}_{j+1/2} = O(\Delta u_{j+1/2})^2,$$

ili

$$Q_{j+1/2} - Q^{LW}_{j+1/2} = O(\Delta u_{j+1/2}).$$

Pokazuje se dalje da TVD shema ne može biti u potpunosti drugog reda točnosti. Naime u ekstremima rješenja koji *nisu sonički*, odnosno derivacija fluksa u njima ne iščezava, lokalno je moguće postići samo točnost prvog reda. Stoga su takve metode nazvane metodama s rezolucijom drugog reda (eng. *second order resolution schemes*).

Postoji više načina konstrukcija kvadratno rezolutnih shema. U Hartenovom pristupu se modificira trotočkovna TVD shema tako da se primjenom na modificirani fluks pretvori u 5-točkovnu. Druga mogućnost je da se korigira koeficijent numeričke viskoznosti (Sweby, Davis). Van Leerova shema dobiva se kao proširenje drugg reda Godunovljeve metode pri čemu se projiciranje vrši na po dijeovima afine funkcije (umjesto konstanti). Zatim se moraju upotrebiti tzv. fluks-limiteri kako bi se shema stabilizirala. Spomenimo još ENO metode (*essentially non-oscillatory*) i PPM metode (*piecewise parabolic methods*). Za detalje vidite[1].

Bibliografija

[1] Pierre-Arnaud Raviart Edwige Godlewski. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Mathématiques et Applications. Ellipses Publications, Paris, 1991.

Dodatak A

Spektar trodijagonalnih matrica

$$T = Tr(a,b,c) = \begin{bmatrix} b & c & \cdots & \\ a & b & c & \cdots \\ & \cdots & \cdots & \\ \cdots & a & b & c \\ & \cdots & a & b \end{bmatrix}_{N\times N}$$

Svojstvene vrijednosti:

$$\lambda_j = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}}\cos\frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1,\dots,N,$$

Svojstveni vektori:

$$\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \\ \cdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad u_k = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^k \sin\frac{kj\pi}{N+1}, \quad k = 1,\dots,N,$$

za $j = 1,\dots,N$.

Zadatak A.1 Za matricu

$$T_{N_1D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

izračunati:

$$\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{(2j-1)\pi}{2N+1}, \quad j = 1,\dots,N,$$

Svojstveni vektori:

$$u_k = \cos\frac{(2j-1)\pi x_k}{2}, \quad k = 1,\dots,N, \quad j = 1,\dots,N,$$

gdje je $x_k = (2k-1)\Delta x/2$, $k = 1,\dots,N$, $\Delta x = 2/(2N+1)$.

Zadatak A.2 Za matricu

$$T_{N_2D} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

izračunati:

$$\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{(2j-1)\pi}{2N}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

Svojstveni vektori:

$$u_k = \cos\frac{(2j-1)\pi x_k}{2}, \quad k = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, N,$$

gdje je $x_k = (k-1)\Delta x$, $k = 1, \ldots, N$, $\Delta x = 1/N$.

Zadatak A.3 Za matricu

$$T_{N_1N_2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

izračunati:

$$\lambda_j = 2 - 2\cos\frac{(j-1)\pi}{N-1}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

Svojstveni vektori:

$$u_k = \cos{(j-1)\pi x_k}, \quad k = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, N,$$

gdje je $x_k = (k-1)\Delta x$, $k = 1, \ldots, N$, $\Delta x = 1/(N-1)$.

Dodatak B

Fourierova transformacija

U ovom poglavlju dajem pregled teorije Fourierovih redova i Fourierove transformacije. Literatura o tim temama je vrlo bogata no mi spominjemo ovdje samo dvije reference, jednu elementarniju, [1], i jednu naprednìju, [2].

B.1 Fourierovi redovi

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija: Ako je $T > 0$ i $k, n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi

$$\int_0^T \cos(\frac{2\pi k}{T}x)\,dx = \int_0^T \sin(\frac{2\pi k}{T}x)\,dx = 0,$$

$$\int_0^T \cos(\frac{2\pi k}{T}x)\sin(\frac{2\pi n}{T}x)\,dx = 0$$

$$\int_0^T \cos(\frac{2\pi k}{T}x)\cos(\frac{2\pi n}{T}x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{za } k \neq n \\ T/2 & \text{za } k = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(\frac{2\pi k}{T}x)\sin(\frac{2\pi n}{T}x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{za } k \neq n \\ T/2 & \text{za } k = n \end{cases}$$

Za periodičku funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiramo Fourierov trigonometrijski red:

$$F.R.(f) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi k}{T}x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x), \tag{B.1}$$

gdje je

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi k}{T}x)\,dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi k}{T}x)\,dt$$

Evidentno, parna funkcija ima razvoj samo po kosinusima, a neparna po sinusima.

Neka je H Hilbertov prostor (realan ili kompleksan) i $(\cdot,\cdot)$ skalarni produkt u H. Norma elementa $h \in H$ definira se uobičajeno s

$$\|h\| = \sqrt{(h,h)}.$$

Niz funkcija $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ iz H je ortogonalan ako za svaka dva različita indeksa $k,n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(\phi_k,\phi_n) = 0.$$

Za svako $h \in H$ definiramo Fourierov red u odnosu na niz $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ formulom

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k, \quad \text{gdje je } \; c_k = \frac{(h,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}.$$

Primjer B.1 Neka je $H = L^2(0,T)$ prostor svih kvadratno integrabilnih *realnih* funkcija na $(0,T)$. Niz funkcija

$$1, \cos(\frac{2\pi}{T}x), \sin(\frac{2\pi}{T}x), \cos(\frac{4\pi}{T}x), \sin(\frac{4\pi}{T}x), \cos(\frac{6\pi}{T}x), \sin(\frac{6\pi}{T}x), \ldots$$

je ortoonalan u skalarnom produktu

$$(f,g) = \int_0^T f(t)g(t)\,dt.$$

Primjer B.2 Neka je $H = L^2(0,T)$ prostor svih kvadratno integrabilnih *kompleksnih* funkcija na $(0,T)$. Niz funkcija $(e^{2\pi ikx/T})_{k\in\mathbb{Z}}$ je ortogonalan u skalarnom produktu

$$(f,g) = \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Pripadni Fourierov red je kompleksan eksponencijala Fourierov red:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx/T}, \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2\pi ikt/T}\,dt.$$

Propozicija B.1 (Besselova nejednakost) Neka je $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonalan niz u unitarnom prostoru H. Tada vrijedi

$$\forall h \in H, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|(h,\phi_k)|^2}{\|\phi_k\|^2} \le \|h\|^2.$$

Dokaz. Slijedi iz

$$\|h - \sum_{k=1}^{n} \frac{(h,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}\phi_k\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(h,\phi_k)|^2}{\|\phi_k\|^2}. \; \square$$

Niz $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je fundamentalan u H ako je skup razapet linearnim kombinacijama elemenata iz $\{\phi_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ gust u H.

Teorem B.1 Neka je H separabilan unitaran prostor i $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fundamentalan ortogonalan niz u H. Tada za svaki $h \in H$ vrijedi

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2} \phi_k.$$

Za svaka dva elementa $h, g \in H$ vrijedi Parsevalova jednakost:

$$(h, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \phi_k)(\phi_k, g)}{\|\phi_k\|^2}.$$

Za dokaz vidi Kurepa: Funkcionalna analiza, str. 49.

B.2 Fourierova transformacija

Fourierova transformacija se prirodno definira integralnom formulom na apsolutno integrabilnim funkcijama. Stoga ćemo uvesti oznaku za prostor svih apsolutno integrabilnih funkcija:

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \colon \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty\}. \tag{B.2}$$

Integral u formuli (B.2) treba uzeti u smisli Lebesgueovog integrala, što znači da je svaka funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ Lebesgue-izmjeriva i apsoluntno integrabilna na $\mathbb{R}$. ako je pokazati da $L^1(\mathbb{R})$ ima strukturu vektorskog prostora uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenje skalarom te da je u njemu formulom

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$$

dobro definirana norma (vidi []).

Za svaku funkciju $f \in L^1(\mathbb{R})$ dobro su definirane sljedeće dvije transformacije:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy \quad \text{Fourierova transformacija,} \tag{B.3}$$

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i x y}\, dy \quad \text{Fourierova inverzna transformacija,} \tag{B.4}$$

gdje i označava imagnarnu jedinicu.

U slučaju funkcije više varijabli, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, imamo analgne definicije:

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{y}) e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\, d\mathbf{y} \quad \mathcal{L}(f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{y}) e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\, d\mathbf{y},$$

gdje je

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$$

skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$.

Pored ovih moguće su i druge definicije Fourierove transformacije. Općenito ako Fourierovu transformaciju definiramo s

$$\mathcal{F}(f)(x) = B \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-Aixy}\, dy$$

za neke konstante A i B, onda Fourierovu inverznu transformaciju treba definirati formulom

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{A}{2\pi B} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{Aixy}\, dy.$$

Čest je izbor $A = 1$, $B = 1/\sqrt{2\pi}$ koji vodi ponovo do simetričnih formula

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy}\, dy, \quad \mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{ixy}\, dy.$$

Mi ćemo raditi s formulama (B.3), (B.4).

B.3 Osnovna svojstva Fourierove transformacije

Sljedeće tvrdnje lako se provjeravaju za svako $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Fourierov transformat i Fourierov inverzni transformat su ograničene funkcije: Za svako $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|\mathcal{F}(f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{B.5}$$

2. (Linearnost) Fourierova transformacija i Fourierova inverzna transformacija su linearna preslikavanja s $L^1(\mathbb{R})$ u prostor ograničenih funkcija.

3. Evidentno imamo

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{L}(f)(-x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{B.6}$$

4. Uvedimo operatore translacije i skaliranja:

$$\tau_h f(x) = f(x - h), \quad \lambda_h f(x) = f(x/h).$$

Tada zamjenom varijebli u integralu lako dobivamo:

$$\mathcal{F}(\tau_h f)(x) = e^{-2\pi ixh} \mathcal{F}(f)(x), \quad \mathcal{L}(\tau_h f)(x) = e^{2\pi ixh} \mathcal{L}(f)(x), \tag{B.7}$$

$$\mathcal{F}(\lambda_h f)(x) = |h| \mathcal{F}(f)(hx), \quad \mathcal{L}(\lambda_h f)(x) = |h| \mathcal{L}(f)(hx). \tag{B.8}$$

Iz (B.8) za $h = -1$ slijedi da je Fourierov transformat parne (neparne) funkcije ponovo parna (neparna) funkcija. Isto vrijedi i za Fourierov inverzni transformat. Iz (B.6) onda slijedi da za parnu funkciju f vrijedi $\mathcal{F}(f) = \mathcal{L}(f)$, dok za neparno f imamo $\mathcal{F}(f) = -\mathcal{L}(f)$.

5. Analogno, neka je $e_h = e^{2\pi i h x}$. Tada je

$$\mathcal{F}(e_h f)(x) = \mathcal{F}(f)(x-h) = \tau_h \mathcal{F}(f)(x), \tag{B.9}$$
$$\mathcal{L}(e_{-h} f)(x) = \mathcal{L}(f)(x-h) = \tau_h \mathcal{L}(f)(x). \tag{B.10}$$

6. U odnosu na kompleksno konjugiranje imamo sljedeće relacije:

$$\mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{L}(f)}, \quad \mathcal{L}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}. \tag{B.11}$$

Zadatak B.1 Neka je χ_A karakteristična funkcija skupa $A \subset \mathbb{R}$. Pokažite da je

$$\mathcal{F}(\chi_{(-a,a)})(x) = \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}. \ \square$$

Zadatak B.2 Neka je $a > 0$. Pokažite da je za $f(x) = \chi_{(-a,a)}(x) e^{-ax}$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{a + 2\pi i x},$$

i da $\mathcal{F}(f)$ nije apsolutno integrabilna.

Zadatak B.3 Neka je $c_h(x) = \cos(2\pi h x)$ i $s_h(x) = \sin(2\pi h x)$. Tada vrijede modulacijski identiteti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(s_h f)(x) &= \frac{i}{2}\left(\mathcal{F}(f)(x+h) - \mathcal{F}(f)(x-h)\right)\\
\mathcal{F}(c_h f)(x) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(f)(x+h) + \mathcal{F}(f)(x-h)\right)\\
\mathcal{L}(s_h f)(x) &= \frac{i}{2}\left(\mathcal{F}(f)(x-h) - \mathcal{F}(f)(x+h)\right)\\
\mathcal{L}(c_h f)(x) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(f)(x-h) + \mathcal{F}(f)(x+h)\right). \ \square
\end{aligned}$$

Koristit ćemo standardnu oznaku $C(\mathbb{R})$ za skup svih funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje su neprekidne u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$. Uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenja skalarom taj skup ima strukturu linearnog prostora. Podskup svih funkcija iz $C(\mathbb{R})$ koje su ograničene također ima strukturu vektorskog prostora i označava se s $C_B(\mathbb{R})$. U njega se uvodi norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Još manji potprostor je

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C_B(\mathbb{R})\colon \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\}.$$

Teorem B.2 Za $f \in L^1(\mathbb{R})$ vrijedi:

1. $\mathcal{F}(f), \mathcal{L}(f) \in C(\mathbb{R})$;
2. $\lim_{x \to \pm\infty} \mathcal{F}(f)(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

Napomena B.1 Drugi dio teorema je verzija Riemann-Lebesgueove leme. Teorem kaže da su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{L}$ linearni operatori s $L^1(\mathbb{R})$ u $C_0(\mathbb{R})$. Zadatak B.2 pokazuje da transformirana funkcija ne mora ležati u $L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Propozicija B.2 Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$ derivabilna funkcija i $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Tada je

$$\mathcal{F}(f')(x) = 2\pi i x \mathcal{F}(f)(x), \quad \mathcal{L}(f')(x) = -2\pi i x \mathcal{L}(f)(x). \tag{B.12}$$

Dokaz. Parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(x) &= \int_{\mathbb{R}} f'(y) e^{-2\pi i x y}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dy}(f(y)e^{-2\pi i x y}) + 2\pi i x f(y) e^{-2\pi i x y} \right) dy \\
&= (f(y)e^{-2\pi i x y})\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i x \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy \\
&= 2\pi i x \mathcal{F}(f)(x),
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Isto se tretira inverzna transformacija. $\square$

Propozicija B.3 Neka je zadana funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ i neka je $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, gdje je $f_1(x) = x f(x)$. Tad su $\mathcal{F}(f)$ i $\mathcal{L}(f)$ neprekidno derivabilne funkcije te vrijedi

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}(f) = -2\pi i \mathcal{F}(f_1), \quad \frac{d}{dx}\mathcal{L}(f) = 2\pi i \mathcal{L}(f_1).$$

Dokaz. Parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\mathcal{F}(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{d}{dx} e^{-2\pi i x y}\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)(-2\pi i y) e^{-2\pi i x y}\, dy \\
&= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} y f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy = -2\pi i \mathcal{F}(f_1)(x).
\end{aligned}$$

Integriranje pod znakom integrala opravdava se Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji. Za inverznu transformaciju je isto. $\square$

Tvrdnje iz Propozicija B.2 i B.3 izravno se poopćuju na više derivacije kada su za to ispunjeni potrebni uvjeti:

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(x) = (2\pi i x)^n \mathcal{F}(f)(x), \quad \mathcal{L}(f^{(n)})(x) = (-2\pi i x)^n \mathcal{L}(f)(x). \tag{B.13}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{F}(f)(x) = (-2\pi i)^n \mathcal{F}(y^n f), \quad \frac{d^n}{dx^n}\mathcal{L}(f)(x) = (2\pi i)^n \mathcal{L}(y^n f), \tag{B.14}$$

gdje u formuli (B.14) oznaka $\mathcal{F}(y^n f)$ predstavlja Fourierov transformat funkcije $y \mapsto y^n f(y)$.

Zadatak B.4 Neka je $g \in L^1(\mathbb{R})$ i neka je $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, $G \in L^1(\mathbb{R})$. Pokažite da je tada

$$\mathcal{F}(G)(x) = \frac{\mathcal{F}(g)(x)}{2\pi i x}.$$

Teorem B.3 Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tada je

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(g)(x)\,dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(f)(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{L}(g)(x)\,dx.$$

Dokaz. Primjenom Fubinijevog teorema izlazi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y}\,dy g(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x) e^{-2\pi i x y}\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i x y}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathcal{F}(g)(y)\,dy. \ \square\end{aligned}$$

B.4 Transformacija Gaussovih funkcija

Gaussove funkcije su oblika

$$g(x) = A e^{-\gamma(x-x_0)^2}, \tag{B.15}$$

gdje su A, γ i x_0 realne konstante te $\gamma > 0$.

Zadatak B.5

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Lema B.1 Neka je $g(x) = e^{-\gamma x^2}$. Tada je

$$\mathcal{F}(g)(x) = \mathcal{L}(g)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-\pi^2 x^2/\gamma}.$$

Dokaz. Uočimo da je funkcija $g(x)$ parna, pa je stoga $\mathcal{F}(g) = \mathcal{L}(g)$. Integral nećemo računati direktno već ćemo primijetiti da je

$$g'(x) = -2\gamma x g(x)$$

pa primjenom Fourierove transformacije dobivamo $\mathcal{F}(g') = -2\gamma\mathcal{F}(g_1)$, $g_1(x) = x g(x)$. Uvedimo oznaku $G = \mathcal{F}(g)$ i primijenimo Propoziciju B.2 i Propoziciju B.3 kako bismo dobili

$$G'(x) + 2\frac{\pi^2}{\gamma} x G(x) = 0.$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

$$G(x) = Ae^{-\pi^2 x^2/\gamma},$$

gdje konstantu A određujemo iz uvjeta (Zadatak B.5)

$$A = G(0) = \mathcal{F}(g)(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma y^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}. \quad \square$$

Koristeći svojstvo 4. (str. 110) dobivamo za $g(x) = e^{-\gamma(x-x_0)^2}$:

$$\mathcal{F}(g)(x) = e^{-2\pi i x x_0}\mathcal{F}(g)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-2\pi i x x_0} e^{-\pi^2 x^2/\gamma}, \tag{B.16}$$

$$\mathcal{L}(g)(x) = e^{2\pi i x x_0}\mathcal{L}(g)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{2\pi i x x_0} e^{-\pi^2 x^2/\gamma}. \tag{B.17}$$

Propozicija B.4 Za svaku Gaussovu funkciju (funkciju oblika (B.15) sa $\gamma > 0$ i $A, x_0 \in \mathbb{R}$) vrijedi

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(g)) = g, \quad \mathcal{L}(\mathcal{F}(g)) = g.$$

Dokaz. Koristeći (B.17), svojstvo 5 sa strane 111 i Lemu B.1 dobivamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{L}(g))(x) &= A\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\mathcal{F}(e^{2\pi i y x_0} e^{-\pi^2 y^2/\gamma})(x) = A\mathcal{F}(e^{-\pi^2 y^2/\gamma})(x - x_0) \\ &= A\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\sqrt{\frac{\pi}{\pi^2/\gamma}} e^{-\pi^2(x-x_0)^2/(\pi^2/\gamma)} = Ae^{-\gamma(x-x_0)^2} = g(x).\end{aligned}$$

Druga se jednakost dobiva posve analogno. $\square$

Napomena B.2 Gaussove funkcije su primjer *vrlo brzo padajućih funkcija*. To su funkcije $g(x)$ koje za svako $\alpha > 0$ zadovoljavaju

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\alpha|x|}|g(x)| = 0.$$

Lako se pokazuje da je za svako polinom $p(x)$ funkcija

$$\phi(x) = p(x)e^{-\gamma(x-x_0)^2}$$

vrlo brzo padajuća funkcija. To ujedno znači i da su sve derivacije Gaussove funkcije vrlo brzo padajuće funkcije. $\square$

Osnovna Gaussova funkcija je

$$g(x) = e^{-\pi x^2}. \tag{B.18}$$

Ona zadovoljava

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1.$$

Promatrat ćemo niz skaliranih funkcija $g_\gamma(x) = \gamma g(\gamma x)$, $\gamma > 0$, koje isto imaju svojstvo

$$\int_{\mathbb{R}} g_\gamma(x)\,dx = 1$$

za svako $\gamma > 0$.

Definicija B.1 Fukcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je eksponencijalno integrabilna ako postoji konstanta $\beta > 0$ takva da je $f(x)e^{-\beta x}$ apsolutno integrabilna (tj. nalazi se u $L^1(\mathbb{R})$).

Teorem B.4 Za niz Gaussovih funkcija $g_\gamma(x) = \gamma g(\gamma x)$, $\gamma > 0$, gdje je $g(x)$ definirano s (B.18), vrijedi:

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g_\gamma(x - x_0)\,dx = f(x_0),$$

za svaku eksponencijalno integrabilnu funkciju $f(x)$ i svako $x_0 \in \mathbb{R}$ u kome je $f(x)$ neprekidna.

Dokaz. Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tada zbog neprekdnosti funkcije f u točki $x = x_0$ možemo naći $\delta > 0$ takav da je

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{B.19}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f(x) g_\gamma(x - x_0)\,dx - f(x_0)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x_0)) g_\gamma(x - x_0)\,dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\,dx \\
&= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\,dx \\
&+ \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\,dx \\
&+ \int_{x_0+\delta}^{\infty} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\,dx
\end{aligned}$$

Kako je zbog (B.19)

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \int_{\mathbb{R}} g_\gamma(x - x_0)\,dx = \frac{\varepsilon}{3},$$

dovoljno je ocijeniti druga dva integrala na desnoj strani.

Zbog eksponencijalne integrabilnosti možemo naći $\beta > 0$ takvo da je

$$\begin{aligned}\int_{x_0+\delta}^{\infty} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\, dx &= \int_{x_0+\delta}^{\infty} |f(x) - f(x_0)| e^{-\beta(x-x_0)} h_\gamma(x - x_0)\, dx \\ &\leq \max_{s \geq \delta} h_\gamma(s) \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x_0)| e^{-\beta(x-x_0)}\, dx \\ &= A \max_{s \geq \delta} h_\gamma(s),\end{aligned}$$

gdje je

$$A = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x_0)| e^{-\beta(x-x_0)}\, dx < \infty,$$

te

$$h_\gamma(s) = e^{\beta s} g_\gamma(s) = \gamma e^{\beta s - \pi\gamma^2 s^2}.$$

Funkcija $h_\gamma(s)$ postiže svoj maksimum u točki $s = \beta/(2\pi\gamma^2)$, nakon koje monotono pada. Ako odaberemo γ iz uvjeta

$$\frac{\beta}{2\pi\gamma^2} < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} < \gamma^2,$$

dobivamo

$$\int_{x_0+\delta}^{\infty} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\, dx \leq A h_\gamma(\delta) = A\gamma e^{\beta\delta - \pi\gamma^2\delta^2} \to 0$$

kada $\gamma \to \infty$. Stoga možemo naći $\gamma_\varepsilon^+ > 0$ takav da za $\gamma > \gamma_\varepsilon^+$ imamo

$$\int_{x_0+\delta}^{\infty} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Na isti način nalazimo i $\gamma_\varepsilon^- > 0$ takav da za $\gamma > \gamma_\varepsilon^-$ imamo

$$\int_{-\infty}^{x_0-\delta} |f(x) - f(x_0)| g_\gamma(x - x_0)\, dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

pa za $\gamma > \max(\gamma_\varepsilon^-, \gamma_\varepsilon^+)$ dobivamo

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) g_\gamma(x - x_0)\, dx - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \ \square$$

Propozicija B.5 Neka su f i g dvije eksponencijalno integrabilne funkcije. Ako je

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\, dx$$

za svaku Gaussovu funkciju ϕ, onda je $f(x) = g(x)$ u svakoj točki neprekidnosti funkcija f i g.

Dokaz. Kao u prethodnom teoremu odaberimo Gaussovu funkciju oblika $g_\gamma(x - x_0)$. Tada je

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) g_\gamma(x - x_0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) g_\gamma(x - x_0)\, dx$$

i prijelazom na limes $\gamma \to \infty$, prema Teoremu B.4 dobivamo $f(x_0) = g(x_0)$, ako je x_0 točka neprekidnosti dviju funkcija. $\square$

Teorem B.5 Neka je $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ i $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Tada je

$$F = \mathcal{F}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f = \mathcal{L}(F).$$

Dokaz. Neka je $F = \mathcal{F}(f)$. Tada je prema Teoremu B.3

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(F)(x) g_\gamma(x - x_0)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} F(x) \mathcal{L}(g_\gamma(x - x_0))\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \mathcal{L}(g_\gamma(x - x_0))\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(\mathcal{L}(g_\gamma(x - x_0)))\, dx.
\end{aligned}$$

Prea Propoziciji B.4 slijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(F)(x) g_\gamma(x - x_0)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) g_\gamma(x - x_0)\, dx.$$

Prijelazom na limes $\gamma \to \infty$ dobivamo $\mathcal{L}(F) = f$. Drugi smjer se dokazuje analogno. $\square$

Prethodno teorem kaže da je

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(f)) = f \quad \text{i} \quad \mathcal{L}(\mathcal{F}(f)) = f$$

ukoliko je $f, \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Sve takve funkcije čine linearan prostor koji Fourierova transformacija preslikava u samog sebe i na kojem je $\mathcal{L}$ inverz preslikavanja $\mathcal{F}$. Jedan potprostor tog prostora, kojeg možemo eksplicitno opisati, je prostor brzo padajućih funkcija.

Napomena B.3 Prostor svih beskonačno mnogo puta neprekidno derivabilnih funkcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ označavamo s $C^\infty(\mathbb{R})$. Funkcije iz $C^\infty(\mathbb{R})$ karakterizirane su svojstvom da imaju neprekidne derivacije svakog reda.

Definicija B.2 Funkcija $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je brzo padajuća ako je $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ i ako za svaki par (m, n), $m, n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ postoji konstanta $C = C_{m,n}$ takva da je

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^m \phi^{(n)}(x)| \le C.$$

Skup svih brzo padajućih funkcija je linearan prostor koji označavamo sa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ili kraće $\mathcal{S}$.

Fourierova transformacija i inverzna Fourierova transformacija su evidentno dobro definirane na $\mathcal{S}$ budući da je $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$. Štoviše, ako je za $\phi \in \mathcal{S}$ ujedno $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}$, onda je $\mathcal{L}(\mathcal{F}(\phi)) = \phi$, jer su uvjeti Teorema B.5 zadovoljeni.

Teorem B.6 Fourierova transformacija $\mathcal{F}$ je bijekcija na $\mathcal{S}$; inverzno preslikavanje je $\mathcal{L}$.

Dokaz. Prostor $\mathcal{S}$ ima svojstvo da za svako (m, n), $m, n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ vrijedi $x^m\phi^{(n)} \in \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$. Neka je $\phi \in \mathcal{S}$, tada rekurzivnom primjenom Propozicije B.3 zaključujemo da je $\mathcal{F}(\phi) \in C^\infty(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{F}(\phi) = (-2\pi i)^n\mathcal{F}(y^n\phi).$$

Nadalje, uastopnom primjenom Propozicije B.2, odnosno formule (B.13) dobivamo

$$x^m\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{F}(\phi)(x) = (-1)^n(2\pi i)^{m-n}(2\pi ix)^n\mathcal{F}(y^n\phi) = (-1)^n(2\pi i)^{m-n}\mathcal{F}(\frac{d^m}{dy^m}(y^n\phi)).$$

Funkcija $\frac{d^m}{dy^m}(y^n\phi(y))$ leži u prostoru $\mathcal{S}$, stoga i u $L^1(\mathbb{R})$, pa imamo ocjenu

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^m\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{F}(\phi)(x)| \leq (2\pi)^{m-n}\|\frac{d^m}{dy^m}(y^n\phi)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Iz definicije brzo padaućih funkcija s lakoćom se dokazuje da je

$$\|\frac{d^m}{dy^m}(y^n\phi)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C(m, n) \tag{B.20}$$

gdje je $C(m, n)$ neka konstanta koja ovisi samo o m i n. Budući da su m i n proizvoljni zaključujemo da je $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}$. Za svako $\phi \in \mathcal{S}$ vrijedi $\mathcal{L}(\phi)(x) = \mathcal{F}(\phi)(-x)$ pa imamo da je $\mathcal{L}(\phi) \in \mathcal{S}$ za svako $\phi \in \mathcal{S}$. Gornje oznake pokazuju da je $\mathcal{S}$ podskup prostora na kome je $\mathcal{F}$ invertibilna i stoga zaključujemo da je $\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ bijekcija i da je $\mathcal{L}$ njen inverz. □

Napomena B.4 Kada se u prostor $\mathcal{S}$ na odgovarajući način uvede topologija (preko niza polunormi) može se pokazati da je $\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ izomorfizam (neprekidna bijekcija s neprekidnim inverzom). □

Zadatak B.6 Dokažite (B.20). □

B.5 Konvolucija i Fourierova transformacija

Definicija B.3 Neka su $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dvije funkcije. Izraz

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\, dy$$

naziva se konvolucija funkcija f i g ako integral na desnoj strani postoji za sve $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak B.7 Neka je $\check{f}(x) = f(-x)$. Pokažite da je

$$(\check{f} * \check{g})(x) = (f * g)(-x). \square \tag{B.21}$$

Propozicija B.6 1. Ako je $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ i $g \in L^1(\mathbb{R})$, onda je $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ i $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
2. Ako je $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, onda je $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ i $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz

$$|\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|\,dy \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Drugu tvrdnju dobivamo zamjenom poretka intehgracije:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy\,dx \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|\,dy|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx\,dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}. \square
\end{aligned}$$

Propozicija B.7 Ako je $f, g \in \mathcal{S}$, onda je $f * g \in \mathcal{S}$.

Konvolucija ima ova svojstva:
1. Komutativnost $f * g = g * f$.
2. Distributivnost prema zbrajanju:

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

3. Za svaku konstantu α vrijedi

$$(\alpha f) * g = f * (\alpha g) = \alpha(f * g).$$

Konvolucija nije uvijek asocijativna. Asocijativnost

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

će vrijediti samo onda kad u izrazu $(f * g) * h$ možemo primijeniti Fubinijev teorem i zamijeniti poredak integracije.

Zadatak B.8 Ako je $f(x) = e^{-2x}\chi_{(0,\infty)}(x)$, $g(x) = e^{5x}$ pokažite da je $(f * g)(x) = e^{5x}/7$. $\square$

Zadatak B.9 Ako je $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$, $g(x) = \sin x$ pokažite da je $(f * g)(x) = \cos(x-1) - \cos(x+1)$. $\square$

Zadatak B.10 Ako je $f(x) = 1$, $g(x) = xe^{-x^2}$ i $h(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ pokažite da je $(f * g) * h \neq f * (g * h)$. $\square$

Propozicija B.8 Ako je $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, onda je

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g), \quad \mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Dokaz. Dokazujemo samo prvu jednakost jer je se druga dokazuje posve analogno. Prema Propoziciji B.6 znamo da je $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, pa je Fourierova transformacija konvolucije dobro definirana. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(y) e^{-2\pi i x y}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(y - t)\, dt\, e^{-2\pi i x y}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} g(y - t) e^{-2\pi i x y}\, dy\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i x t} \int_{\mathbb{R}} g(y - t) e^{-2\pi i x (y - t)}\, dy\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i x t}\, dt \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i x z}\, dz = \mathcal{F}(f)(x)\mathcal{F}(g)(x). \square
\end{aligned}$$

Propozicija B.9 Ako je $f, g \in \mathcal{S}$, onda je

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g), \quad \mathcal{L}(fg) = \mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g).$$

Dokaz. Ako je $f, g \in \mathcal{S}$, onda je i $\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(g) \in \mathcal{S}$ pa možemo primijeniti Propoziciju B.8 s $\mathcal{L}(f)$ i $\mathcal{L}(g)$. Izlazi,

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g)) = \mathcal{F}(\mathcal{L}(f))\mathcal{F}(\mathcal{L}(g)) = fg,$$

gdje smo u drugom koraku iskoristili Teorem B.6. Sada je

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(fg)(x) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g)))(x) = \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g)))(-x) \\
&= (\mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g))(-x) = (\check{\mathcal{L}(f)} * \check{\mathcal{L}(g)})(x) = (\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))(x),
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili (B.21) i $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{F}$ ($\check{f}(x) = f(-x)$, vidi (B.6)). Analogno se pokazuje i druga jednakost. $\square$

B.6 Fourierova transformacija i kvadratno integrabilne funkcije

Fourierova transformacija nije dobro definirana na kvadratno integrabilnim funkcijama no na osnovu Plancherelovog teorema može se proširiti do preslikavanja s $L^2(\mathbb{R})$ u $L^2(\mathbb{R})$.

Teorem B.7 (Plancherelov teorem) Neka su $f, g \in \mathcal{S}$. Tada je

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)\overline{\mathcal{F}g(x)}\, dx.$$

Dokaz. Koristeći Teorem B.6 imamo

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x)\overline{g(-x)}\, dx.$$

Prema Teoremu B.3 slijedi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)\mathcal{F}(\check{\overline{g}})(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)\overline{\mathcal{F}g(x)}\, dx. \square$$

Kao posljedicu dobivamo da za svaku funkciju $f \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{B.22}$$

Teorem B.8 (Plancherelov teorem, druga verzija) Postoji jedinstveni ograničeni linearni operator $\mathcal{F}_2 \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ takav da je $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F}f$ za svako $f \in \mathcal{S}$. Operator $\mathcal{F}_2$ ima i sljedeća svojstva:

1. Operator $\mathcal{F}_2$ je unitaran.
2. $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F}f$ za svako $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz.

Bibliografija

[1] Kenneth B. Howell. *Principles of Fourier Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[2] Erwin Brüning Philippe Blanchard. *Mathematical Methods in Physics, Distributions, Hilbert Spaces Operators, and Variational Methods*, volume 26 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser, Boston, 2003.

Dodatak C

Eulerove jednadžbe

C.1 Newtonov fluid

Princip sačuvanja mase izražamo jednadžbom kontinuiteta (vidi sekciju 6.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{C.1}$$

Tenzor naprezanja Newtonovog fluida dan je formulom

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda \,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\;\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D},$$

gdje je $\mathbf{D}$ simetrizirani gradijent brzine:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T).$$

Koeficijenti λ i μ su volumna i dinamička viskoznost, a ovise o gustoći i temperaturi. Iz trećeg zakona termodinamike (vidi [1]) slijedi

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Koeficijent λ se obično piše u obliku

$$\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu,$$

gdje je κ tzv. dilatacijska viskoznost. Mi ćemo uzeti $\kappa = 0$, tako da dobivamo

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad \tau = -\frac{2}{3}\mu \,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T).$$

Jednadžba gibanja (vidi [1]) ima oblik

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}. \tag{C.2}$$

Za globalnu primjenu jednadžbe povoljniji je njen konzervativni oblik. On se dobiva tako da se, koristeći jednadžbu kontinuiteta, uoči da je

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla\,\mathbf{v})\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \mathbf{v}\,\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) + \rho(\nabla\,\mathbf{v})\mathbf{v}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})\end{aligned}$$

gdje smo uveli dijadski produkt $(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})_{i,j} = v_i v_j$. Time dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) = -\nabla\,p + \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g}.$$

Zadatak C.1 Dokažite da iz (C.2) slijedi (množenjem sa $\mathbf{v}$) zakon sačuvanja mehaničke energije:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right) + \mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right) = -\nabla\,p\cdot\mathbf{v} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}.\,\square \tag{C.3}$$

Zakon sačuvanja ukupne energije ima oblik (vidi [1], [2])

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e\right) + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e\right) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} + \mathrm{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{g} + r.$$

Kao i gore, primijenjujući zakon sačuvanja mase, dobivamo lijevu stranu u konzervativnoj formi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \rho e\right) + \mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e\right)\right] &= -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} + \mathrm{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{g} + r\\ &= -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} - \mathrm{div}(p\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{g} + r\end{aligned}$$

Na toplinski fluks $\mathbf{q}$ primijenjujemo Fourireov zakon

$$\mathbf{q} = -k\,\nabla\,\theta, \quad k \geq 0$$

gdje je θ apsolutna temperatura. (r je vanjsko volumno toplinsko djelovanje)

C.2 Neviskozni fluid

Pretpostavimo sada da je fluid Eulerov ($\mu = 0$ što povlači $\boldsymbol{\tau} = 0$), da je vanjsko toplinsko djelovanje $r = 0$, da gravitacijsku silu možemo zanemariti te da je toplinska vodljivost $k = 0$ (i stoga $\mathbf{q} = 0$). Tada se jednadžbe reduciraju na

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) &= 0\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + p\mathbf{I}) &= 0\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \mathrm{div}\left((\rho E + p)\mathbf{v}\right) &= 0\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednadžbi uveli novu varijblu

$$E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e$$

koja ima značenje ukupne energije (kinetička + unutarnja). Vidimo da imamo 5 jednadžbi za 6 arijebli ρ, $\mathbf{v}$, p i E. Šesta jednadžba se dobiva iz termodinamičkih relacija. U slučaju politropnog plina (specifične topline c_v i c_p konstantne, dobiva se

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad \gamma > 1$$

($\gamma = c_p/c_v$). Uočimo da je u ovom slučaju

$$p = p(\rho, e) = p(\rho, E - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}).$$

Ako je gibanje isentropijsko (entropija konstantna) onda imamo jednostavniju ovisnost

$$p = p(\rho) = C\rho^\gamma$$

($\gamma = c_p/c_v$).

Jednadžbe u jednoj prostornoj dimenziji:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}\big((\rho E + p)v\big) &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sustav možemo napisati u obliku zakona sačuvanja na sljedeći način:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \rho,\ u_2 = \rho v,\ u_3 = \rho E, \quad f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + p(\mathbf{u}) \\ (u_3 + p(\mathbf{u}))u_2/u_1. \end{bmatrix}$$

Tada imamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{u}) = 0.$$

Uz pretpostavku termodinamičke ravnoteže fluida (vidi sekciju C.3) imamo sljedeće modele:

$$p(\mathbf{u}) = (\gamma - 1)(u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1}) \text{ (politropan plin)}, \quad p(\mathbf{u}) = C u_1^\gamma \text{ (izentropijski tok)}.$$

U slučaju izentropijskog toka prve dvije jednadžbe su neovisne o trećoj, pa ih stga promatramo odvojeno:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + p(u_1) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial x} = 0.$$

C.3 Termodinamičke relacije

Unutarnja energija fluida e je funkcija stanja: $e = e(p, \rho)$. Dovedemo li fluidu infinitezimalnu količinu energije, ona će biti pretvorena dijelom u rad koji fluid obavi ekspanzijom, a dijelom u unutanju energiju fluida. Ukupna energija je dana izrazom

$$de + pd(\frac{1}{\rho}). \tag{C.4}$$

Ovdje se pretpostavlja da je svaka promjena termodinamičkog stanja fluida vrlo spora (fluid prolazi kroz niz ravnotežnih stanja) tako da je rad obavljen ekspanzijom fluida jednak $pd(1/\rho)$.

Budući da je $e = e(p, \rho)$, formulom (C.4) dana je diferencijalna forma u dvije varijable p i ρ. Prema Pfaffovom teoremu možemo naći integracijski faktor $T = T(p, \rho)$ takav da je

$$TdS = de + pd(\frac{1}{\rho}). \tag{C.5}$$

gdje je $S = S(p, \rho)$. Funkcija T je apsolutna temperatura, a S je entropija.

C.4 Idealan plin

Osnovna relacija idealnog plina je

$$p = R\rho T \tag{C.6}$$

gdje je R konstanta. Jednakost (C.5) prelazi u

$$dS = \frac{de}{T} - d(R \ln \rho).$$

Odavdje slijedi da de/T mora biti puni diferencijal pa zaključujemo da je

$$e = e(T). \tag{C.7}$$

Specifičnu toplinu pri konstantnom volumenu definiramo relacijom

$$de = c_v dT, \tag{C.8}$$

kojom je c_v definirano kao količina apsorbirane energije po jedinici temperature pri konstantnom volumenu. Analogno definiramo specifičnu toplinu pri konstantnom tlaku c_p:

$$d(e + p\frac{1}{\rho}) = c_p dT. \tag{C.9}$$

Funkcija $h = e + p/\rho$ naziva se entalpija. Kod idealnog plina imamo $e = e(T)$, $c_v = c_v(T)$, $c_p = c_p(T)$ i $h = h(T)$.

Politropan plin. Idealan plin je politropan ako su mu specifične topline konstantne. Tada se lako pokazuje da je

$$e = c_v T, \quad h = c_p T, \tag{C.10}$$

$c_p - c_v = R$, pa je stoga $\gamma = c_p/c_v > 1$ i imamo

$$e = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \quad T = \frac{1}{R}\frac{p}{\rho}. \tag{C.11}$$

Nadalje, koristeći te relacije dobivamo izraz za entropiju:

$$S = c_v \ln(\frac{p}{\rho^\gamma}) + const. \tag{C.12}$$

Možemo pisati

$$p = \kappa \rho^\gamma e^{S/c_v}, \quad (\kappa = const.) \quad \text{ili} \quad p = (\gamma - 1)\rho e. \tag{C.13}$$

Ako je tok politropnog plina takav da je entropija knstantna, onda dobivamo jednostavniji zakon za tlak:

$$p = C\rho^\gamma.$$

Još jednostavniji zakon slijedi u slučaju izotermnog toka. Tada je $p = C\rho$ ($C = RT$).

Zadatak C.2 Dokažite formule za politropan plin: (C.10), (C.11), (C.12) i (C.13).

Bibliografija

[1] Ibrahim Aganović. *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma.* Element, Zagreb, 2003.

[2] G. B. Witham. *Linear and nonlinear waves.* John Wiley & Sons, New York, 1974.

Bibliografija

[1] Ibrahim Aganović. *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma.* Element, Zagreb, 2003.

[2] Pierre-Arnaud Raviart Edwige Godlewski. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws.* Mathématiques et Applications. Ellipses Publications, Paris, 1991.

[3] Pierre-Arnaud Raviart Edwige Godlewski. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[4] Kenneth B. Howell. *Principles of Fourier Analysis.* Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[5] Ronald F. Gariepy Lawrence C. Evans. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 1999.

[6] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws.* Birkhäuser, 1990.

[7] Erwin Brüning Philippe Blanchard. *Mathematical Methods in Physics, Distributions, Hilbert Spaces Operators, and Variational Methods*, volume 26 of *Progress in Mathematical Physics.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[8] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Belmont, California, 1989.

[9] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations*, volume 22 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer, New York, 1995.

[10] G. B. Witham. *Linear and nonlinear waves.* John Wiley & Sons, New York, 1974.