

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PMF - MATEMATIČKI ODJEL

Zorica Jelavić

**GALERKINOVE METODE ZA
DVOFAZNI TOK U POROZNOJ
SREDINI**

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, rujan 2010.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	2
1 Model dvofaznog toka fluida kroz poroznu sredinu	3
1.1 Uvodne napomene	3
1.2 Svojstva porozne sredine i fluida	4
1.3 Modeliranje dvofaznog toka	5
1.4 Različite formulacije diferencijalnih jednadžbi	11
1.5 Modeli kapilarnog tlaka i relativnih propusnosti	16
2 Varijacijska formulacija	21
2.1 Varijacijska formulacija matematičkog modela u formulaciji tlak-zasićenje	21
2.2 Varijacijska formulacija matematičkog modela u formulaciji s globalnim tlakom	25
3 Diskretizacija	29
3.1 Prostorna diskretizacija	29
3.2 Vremenska diskretizacija	39
4 Linearizacijske tehnike	43
4.1 Picardove iteracije	43
4.2 Newtonova metoda	45
5 Numerički primjeri	48
5.1 Skaliranje jednadžbi dvofaznog toka	48
5.2 Test primjeri	51
Bibliografija	63

Uvod

Za razne tehničke discipline kao što su hidrologija, naftno inženjerstvo, agronomija, kemijsko inženjerstvo, itd. veliki značaj ima gibanje fluida u poroznoj sredini. Ističemo važnost modeliranja toka vode iz razloga što je postojanje vode esencijalni uvjet za život ljudi, životinja i biljki. Ona je također važna i kao transportni medij za energiju, organizme i razne tvari.

Poroznu sredinu čini svaki materijal unutar kojeg su prisutne šupljine ili pukotine, kažemo da materijal odlikuje poroznost. Dio prostora koji zauzima fluid nazivamo pornim prostorom. Važno je napomenuti da ćemo pod poroznom sredinom podrazumijevati samo one materijale koji imaju povezan porni prostor, tj. one materijale koji dozvoljavaju gibanje fluida. Porni prostor može ispunjati više od jednog fluida. Ukoliko su fluidi međusobno separirani granicom tada fluide nazivamo fazama te govorimo o višefaznom toku u poroznoj sredini.

U ovom radu proučavamo dvofazni tok što znači da ćemo promatrati poroznu sredinu u kojoj dva različita fluida ispunjavaju čitav porni prostor. Najčešći primjeri parova fluida u dvofaznom toku su voda-zrak, voda-nafta te nafta-plin.

U I. poglavlju uvodimo veličine koje opisuju fluide i strukturu porozne sredine. Pri tom uvodimo određene pretpostavke pod kojima vršimo sva razmatranja unutar ovog rada. Naime, poroznu sredinu ispunjenu fluidima je vrlo teško precizno opisati matematički. Nadalje, koristeći se fizikalnim zakonima postavljamo matematički model koji opisuje dvofazni tok fluida u poroznoj sredini. Njega čine diferencijalne jednačbe kojima pridružujemo odgovarajući skup rubnih i početnih uvjeta.

Općenito, matematički model nije moguće riješiti bez upotrebe numeričkih metoda. S ciljem njegovog rješavanja u narednim poglavljima opisujemo postupak dolaženja do numeričkog modela. Pri tome se koristimo standardnom i mješovitom metodom konačnih elemenata kao i metodom konačnih volumena, koje se temelje na varijacijskoj formulaciji. Postupak dolaženja do varijacijske formulacije opisujemo u II. poglavlju dok njenu diskretizaciju opisujemo u III. poglavlju. Zbog potrebe numeričkog rješavanja nelinearnih sustava jednačbi u IV. poglavlju opisujemo najčešće korištene linearizacijske tehnike.

Numerički model možemo promatrati kao numerički algoritam čijom implementacijom dolazimo do programa koji se mogu upotrijebiti za simulaciju ponašanja fluida pod

određenim uvjetima. Simulacijski programi su implementirani korištenjem software-a FreeFem++ te ih u V. poglavlju testiramo na jednostavnim primjerima.

Poglavlje 1

Model dvofaznog toka fluida kroz poroznu sredinu

1.1 Uvodne napomene

Prvi problem na koji nailazimo prilikom opisa modela dvofaznog toka kroz poroznu sredinu proizlazi iz činjenice da se karakteristične dimenzije pornog prostora i domene u kojoj promatramo tok fluida veoma razlikuju. Stoga se uobičajeno govori o prisutnosti dviju različitih prostornih skala. *Mikroskopska skala* je prostorna skala određena karakterističnom dimenzijom pora pornog prostora. Matematički model postavljen na mikroskopskoj skali se naziva mikroskopskim modelom. *Makroskopska skala* je prostorna skala određena karakterističnom dimenzijom domene toka. Odgovarajući matematički model se naziva makroskopski model. Zbog praktičnih računa upotrebljivost mikroskopskog modela je vrlo mala pa stoga koristimo makroskopski model.

U makroskopskom modelu podrazumijevamo poroznu sredinu kontinuumom. Ovdje smo prešutno uveli pretpostavku na strukturu porozne sredine, tj. da bi poroznu sredinu uopće mogli modelirati kao kontinuum moramo pretpostaviti postojanje tzv. *reprezentativnog elementarnog volumena*, skraćeno, REVa.

Svaka točka u makroskopskom modelu predstavlja jedan reprezentativni elementarni volumen, dovoljno velik da sadrži i čvrstu fazu i fluide u pornom prostoru. Svakako je važno naglasiti kako sve veličine koje se pojavljuju u makroskopskom modelu imaju značenje srednje vrijednosti po reprezentativnom elementarnom volumenu.

Sljedeća pretpostavka koju uvodimo nam uvelike pojednostavljuje opis matematičkog modela. Naime, pretpostavljamo izoterman tok fluida što znači da je temperatura fluida konstantna. Takva situacija je u poroznoj sredini česta jer temperaturu fluida konstantnom održava okružujuća stijena. Stoga su sve veličine koje se pojavljuju u makroskopskom modelu neovisne o temperaturi.

Nadalje, pretpostavljamo nemješivost fluida što znači da unutar svake pore pornog prostora postoji dobro definirana granica koja separira fluide. Kao što smo naveli u uvodu, tada fluide nazivamo *fazama*. Primjetimo da smo posljednje razmatranje izveli na mikroskopskoj skali. Ostanimo na trenutak pri njoj. Granica koja separira fluide je zakrivljena ploha i nazivamo ju *separacijskom plohom*. Može se pokazati da ona ima minimalnu površinu, što je posljedica djelovanja sile površinske napetosti.

U točki u kojoj separacijska ploha dodiruje čvrstu fazu definira se *kut vlaženja*, u oznaci θ . To je kut između plohe čvrste faze i separacijske plohe mjereno kroz jedan od dva fluida. Fluid kroz koji mjerimo kut vlaženja nazivamo *vlažećim fluidom ili vlažećom fazom* (eng. wetting phase) ukoliko za njega vrijedi $\theta < 90^\circ$. U suprotnom slučaju, $\theta > 90^\circ$, fluid nazivamo *nevlažećim fluidom ili nevlažećom fazom* (eng. non wetting phase). Vlažeća faza stoga ima više afiniteta prema stijenci porozne sredine od nevlažeće faze.

Kod dvofaznog toka, što je upravo naš slučaj, uobičajeno je vlažeću fazu označavati indeksom w a nevlažeću fazu indeksom n . U daljnjem radu ćemo i mi vlažeću fazu označavati indeksom w dok ćemo nevlažeću fazu označavati indeksom g (eng. gas) kako ne bi došlo do eventualne kolizije oznaka.

Također pretpostavljamo da se fluidi sastoje od samo jedne komponente te da između fluida ne dolazi do izmjene mase.

1.2 Svojstva porozne sredine i fluida

Svojstva porozne sredine opisuju se pomoću nekoliko parametara od kojih su najvažniji poroznost i propusnost.

Poroznost predstavlja udio pornog prostora u jediničnom volumenu porozne sredine, stoga se definira kao volumen pora podijeljen s ukupnim volumenom porozne sredine. Preciznije, neka je $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ prostorna domena koja predstavlja REV u nekoj točki \mathbf{x} a $\mathcal{V}_p(\mathbf{x})$ podskup od $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ koji čini porni prostor. Neka su odgovarajući volumeni redom $V(\mathbf{x})$ i $V_p(\mathbf{x})$. Dakle, poroznost, u oznaci Φ , iznosi

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V_p(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x})}.$$

Primijetimo da poroznost ovisi o prostornoj varijabli \mathbf{x} što znači da općenito varira s položajem. Ona je bezdimenzionalna veličina koja poprima vrijednosti između 0 i 1. U praksi se određuje eksperimentalno.

Propusnost je mjera kojom se porozna sredina opire gibanju fluida. Općenito je u formi simetričnog, pozitivno definitnog tenzora te se označava sa \mathbf{K} .

Pretpostavit ćemo da je porozna sredina *inkompresibilna*, tj. pretpostavit ćemo krutost čvrste faze porozne sredine. To znači da varijacije tlaka fluida u poroznoj sredini

nemaju veliki utjecaj na geometriju pornog prostora. Matematički to opisujemo tako da nam poroznost i propusnost kao funkcije mogu ovisiti samo o prostornom položaju.

Od svojstava fluida ističemo gustoću mase i viskoznost fluida. *Gustoća mase* fluida je određena jednadžbom stanja fluida. Općenito, gustoća je funkcija tlaka, temperature i kompozicije fluida. U ovom radu pretpostavljamo da su gustoće fluida konstantne. Mjerna jedinica za gustoću mase je $kg \cdot m^{-3}$; uobičajeno ju označavamo sa ρ .

Viskoznost je mjera otpora fluida međusobnom kretanju njegovih slojeva. Kao i gustoća mase, viskoznost fluida je funkcija tlaka, temperature i kompozicije fluida. Također i njih u ovom radu smatramo konstantnim veličinama. Mjerna jedinica za viskoznost u MKS sustavu je $Pa \cdot s$, dok je u cgs sustavu to 1 *poise* [$1 poise = 1g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1}$]. Viskoznost fluida označavamo sa μ .

1.3 Modeliranje dvofaznog toka

Zasićenje i Darcyjeva brzina

Kao što smo već naveli, na mikroskopskoj skali postoji dobro definirana granica među fluidima. Prelaskom sa mikroskopske skale na makroskopsku skalu granice među fluidima se gube te su u svakoj točki prostora istovremeno prisutne sve tri faze, kruta stijenka i dva fluida. Sljedeći cilj nam je opisati količinu pojedine faze u nekoj točki makroskopskog modela. U skladu s prethodnima, uvodimo sljedeće oznake. Neka su \mathcal{V}_w i \mathcal{V}_g podskupovi pornog prostora \mathcal{V}_P , promatrani u nekoj makroskopskoj točki \mathbf{x} , te njima odgovarajući volumeni V_w i V_g . Očito vrijedi

$$V_P = V_w + V_g.$$

Zasićenje vlažeće faze, u oznaci S_w , definira se kao omjer volumena kojega zauzima vlažeća faza u pornom prostoru i ukupnog volumena pornog prostora

$$S_w = \frac{V_w}{V_P}.$$

Analogno se definira *zasićenje nevlažeće faze*, koje označavamo sa S_g

$$S_g = \frac{V_g}{V_P}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$S_w + S_g = 1.$$

Recimo nešto o brzini pojedinih faza na makroskopskoj razini. Označimo *stvarnu mikroskopsku brzinu* faze α sa \vec{v}_α , gdje je $\alpha \in \{w, g\}$. Tada je stvarna makroskopska brzina

faze α dana kao srednja vrijednost po reprezentativnom elementarnom volumenu,

$$\vec{v}_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\alpha} \int_{\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x})} \vec{v}_\alpha(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \alpha \in \{w, g\}.$$

Osim stvarne makroskopske brzine definira se i prividna makroskopska brzina, tzv. *Darcyjeva brzina*

$$\vec{q}_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x})} \vec{v}_\alpha(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \alpha \in \{w, g\}.$$

Iz navedenog proizlazi veza između stvarne i prividne makroskopske brzine fluida

$$\vec{q}_\alpha(\mathbf{x}) = \Phi \vec{v}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \alpha \in \{w, g\}.$$

Darcyjev zakon

Darcyjev zakon, zvan još i zakon filtracije, eksperimentalno je utvrdio francuski inženjer Henry Darcy, 1856. godine. To je zakon na makroskopskoj skali koji daje vezu između gradijenta tlaka i Darcyjeve brzine fluida

$$\vec{q} = -\frac{1}{\mu} \mathbb{K} (\nabla p - \rho \vec{g}),$$

pri čemu su:

- \vec{q} - Darcyjeva brzina fluida,
- μ - viskoznost fluida,
- \mathbb{K} - propusnost,
- p - tlak fluida,
- ρ - gustoća mase fluida,
- \vec{g} - vektor ubrzanja sile teže.

Eksperimentalno je pokazano da Darcyjev zakon ostaje vrijediti i u slučaju višefaznog toka u poroznoj sredini. Kako bi ga primijenili na dvofazni tok potrebno je uvesti nove veličine.

Prisutnost jedne faze spriječava u toku drugu fazu i stoga se propusnost sredine za prvu fazu mijenja u ovisnosti o prisutnosti druge faze. Funkcije koje karakteriziraju to relativno smanjenje propusnosti sredine nazivamo *relativnim propusnostima* faza te ih označavamo

sa kr_w i kr_g , respektivno za vlažeću i nevlažeću fazu. One su funkcije svog zasićenja, $kr_w(S_w)$, $kr_g(S_g)$, te su jednako kao i zasićenja bezdimenzionalne veličine koje poprimaju vrijednosti između 0 i 1. Obje funkcije su rastuće.

Za svaku fazu uvodimo i pojam *mobilnosti* kao omjer relativne propusnosti i viskoznosti

$$\lambda_\alpha(S_\alpha) = \frac{kr_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha}, \quad \alpha \in \{w, g\}.$$

Očito mobilnost faze ovisi proporcionalno o njezinoj relativnoj propusnosti i obrnuto proporcionalno o viskoznosti. Vidimo da je faza mobilnija što je prisutnija u poroznoj sredini i što je manje viskozna.

Poopćeni Darcyjev zakon se naziva *Darcy-Muskatov zakon*. Primijenjen na dvofazni tok poprima sljedeću formu:

$$\begin{aligned} \vec{q}_w &= -\lambda_w(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_w - \rho_w \vec{g}) \\ \vec{q}_g &= -\lambda_g(S_g) \mathbb{K} (\nabla p_g - \rho_g \vec{g}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Kapilarni tlak

Prisjetimo se kako smo na mikroskopskoj skali ustvrdili da unutar svake pore pornog prostora postoji dobro definirana granica koja separira fluide. Tu granicu smo nazvali separacijskom plohom. Tlak pri prolazu kroz separacijsku plohu dviju faza trpi skok koji je određen *Young-Laplaceovim zakonom*

$$p_g - p_w = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

pri čemu je:

- p_g - mikroskopski tlak na separacijskoj plohi s nevlažeće strane,
- p_w - mikroskopski tlak na separacijskoj plohi s vlažeće strane,
- σ - površinska napetost,
- R_1, R_2 - glavni radijusi zakrivljenosti plohe separacije.

Razlika tlakova p_g i p_w se naziva kapilarni tlak i u ovom slučaju predstavlja mikroskopski kapilarni tlak. Na makroskopskoj skali kapilarni tlak, u oznaci p_c , definira se kao razlika makroskopskih tlakova p_g i p_w . Zadajemo ga kao funkciju zasićenja jednom od faza. U ovom radu ga promatramo kao funkciju zasićenja vlažećom fazom

$$p_c(S_w) = p_g - p_w. \quad (1.2)$$

Općenito, makroskopski kapilarni tlak može ovisiti i o nekim drugim parametrima kao što su temperatura i kemijski sastav faza.

Navedimo nekoliko svojstava kapilarnog tlaka. Kapilarni tlak je uvijek pozitivan što proizlazi iz jednostavne činjenice da je tlak u nevlažećem fluidu uvijek veći nego u vlažećem. Ukoliko ga promatramo kao funkciju zasićenja vlažećom fazom tada ima svojstvo monotono padajuće funkcije, u suprotnom kada ga promatramo kao funkciju zasićenja nevlažećom fazom ima svojstvo monotono rastuće funkcije. Graf kapilarne funkcije - kapilarna krivulja je prirodno definirana na intervalu $(S_{wr}, 1 - S_{gr}]$, gdje su

- S_{wr} - rezidualno zasićenje vlažećom fazom,
- S_{gr} - rezidualno zasićenje nevlažećom fazom.

Naime, ukoliko provodimo proces ocjeđivanja, istiskivanje vlažeće faze nevlažećom, nikada ne ćemo moći u potpunosti istisnuti vlažeću fazu. Analogno, prilikom provođenja procesa vlaženja, istiskivanje nevlažeće faze vlažećom, ne ćemo moći u potpunosti istisnuti nevlažeću fazu. Ta krajnja zasićenja pojedinih faza nazivamo *rezidualnim zasićenjima*. Prilikom provođenja navedenih procesa općenito ćemo dobiti dvije različite krivulje kapilarnog tlaka. Tu pojavu nazivamo *histerezom*.

Uobičajeno se uvode *reducirana zasićenja* vlažećom odnosno nevlažećom fazom, u oznaci S_{we} i S_{ge} , koja se uvijek nalaze između 0 i 1. Zadana su sljedećim relacijama

$$\begin{aligned} S_{we} &= \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{gr}}, \\ S_{ge} &= \frac{S_g - S_{gr}}{1 - S_{wr} - S_{gr}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Uočimo da vrijedi $S_{we} + S_{ge} = 1$.

Jedno od važnih svojstava kapilarne krivulje je postojanje tzv. *ulaznog tlaka* (eng. *bubbling pressure*). U situaciji kada je porozna sredina u potpunosti zasićena vlažećom fazom, nevlažeća faza treba imati dovoljno veliki tlak (strogo veći od tlaka vlažeće faze) kako bi mogla ući u poroznu sredinu. Potrebni tlak je određen veličinom pora i njihovom distribucijom. Na krivulji kapilarnog tlaka ulazni tlak je određen s vrijednosti $p_c(S_w = 1) > 0$.

Zakon sačuvanja mase

Mikroskopski zakon sačuvanja mase u diferencijalnom obliku daje jednadžbu kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

S obzirom da promatramo tok fluida u poroznoj sredini, potreban nam je makroskopski zakon sačuvanja mase

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi \rho) + \operatorname{div} (\rho \vec{q}) = 0. \quad (1.4)$$

Makroskopski zakon sačuvanja mase primjenjujemo na svaku fazu α , $\alpha \in \{w, g\}$, pri čemu uzimamo u obzir da faza α ne ispunjava čitav porni prostor. Stoga u jednadžbi (1.4) poroznost Φ množimo sa zasićenjem odgovarajuće faze. Ukoliko u jednadžbe uključimo još i sumu izvora i ponora pojedinih faza, r_w i r_g , dobivamo sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi S_w \rho_w) + \operatorname{div} (\rho_w \vec{q}_w) &= \rho_w r_w, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi S_g \rho_g) + \operatorname{div} (\rho_g \vec{q}_g) &= \rho_g r_g. \end{aligned}$$

Jer su gustoće fluida i poroznost po pretpostavci konstantne veličine imamo

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_w &= r_w, \\ \Phi \frac{\partial S_g}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_g &= r_g. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Diferencijalne jednadžbe matematičkog modela

Matematički modeli, koji trebaju opisati gibanje fluida u poroznoj sredini, imaju zadaću predvidjeti transport mase i energije unutar sustava pod zadanim vanjskim uvjetima. Formiraju se pomoću zakona sačuvanja mase, impulsa, momenta impulsa i energije koji se nadopunjuju konstitutivnim zakonima svojstava materijala. Konstitutivni zakoni, kao što je Darcyjev zakon, su zakoni dobiveni eksperimentalnim putem te su uvijek aproksimativnog karaktera.

Za postavljanje matematičkog modela, u našem slučaju, bit će dovoljno primijeniti zakon sačuvanja mase i Darcy-Muskatov zakon za dvofazni tok. Dakle, koristimo sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_w &= r_w, \\ \Phi \frac{\partial S_g}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_g &= r_g, \\ \vec{q}_w &= -\lambda_w(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_w - \rho_w \vec{g}), \\ \vec{q}_g &= -\lambda_g(S_g) \mathbb{K} (\nabla p_g - \rho_g \vec{g}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Prisjetimo se i dvaju algebarskih uvjeta

$$\begin{aligned} S_w + S_g &= 1, \\ p_c(S_w) &= p_g - p_w. \end{aligned} \quad (1.7)$$

U navedenih šest jednažbi imamo ukupno šest nepoznanica, $p_\alpha, S_\alpha, \vec{q}_\alpha, \alpha \in \{w, g\}$.

Ukoliko u jednažbe zakona sačuvanja mase uvrstimo poopćeni Darcyjev zakon dobivamo sljedeći sustav diferencijalnih jednažbi

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} [\lambda_w(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_w - \rho_w \vec{g})] = r_w, \\ \Phi \frac{\partial S_g}{\partial t} - \operatorname{div} [\lambda_g(S_g) \mathbb{K} (\nabla p_g - \rho_g \vec{g})] = r_g. \end{cases} \quad (1.8)$$

Došli smo do sustava od dvije diferencijalne jednažbe s četiri varijable, $p_\alpha, S_\alpha, \alpha \in \{w, g\}$. Zahtjevi (1.7)₁ i (1.7)₂ nam omogućuju odabir dviju od mogućih četiri varijable čime možemo zatvoriti sustav. Odabrane varijable nazivamo *primarnim varijablama*. Dakle, uz zahtjeve (1.7) jednažbe (1.8) predstavljaju spregnuti sustav parcijalnih diferencijalnih jednažbi koje opisuju tok dvaju nemješivih fluida u poroznoj sredini. Ponašanje sustava jednažbi je strogo nelinearno zbog nelinearne ovisnosti kapilarnog tlaka i relativne propusnosti o zasićenju.

Rubni i početni uvjeti

Kako bi matematički model bio u potpunosti određen trebamo zadati rubne i početne uvjete. Neka je domena toka $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ograničena te neka ima glatku granicu Γ .

Kada je tlak faze $\alpha, \alpha \in \{w, g\}$ određen nekom poznatom funkcijom $g(\mathbf{x}, t)$ na granici Γ tada rubni uvjet za tlak dotične faze α dolazi u obliku

$$p_\alpha = g \quad \text{na } \Gamma. \quad (1.9)$$

Navedeni rubni uvjet se u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednažbi naziva *Dirichletovim rubnim uvjetom ili rubnim uvjetom prve vrste*. Također je moguće zadati i Dirichletov rubni uvjet za zasićenje faze α

$$S_\alpha = g \quad \text{na } \Gamma, \quad (1.10)$$

no u primjenama se rijetko kad pojavljuje. Ipak, moguće ga je susresti i to za funkciju $g = 1$, tj.

$$S_\alpha = 1 \quad \text{na } \Gamma. \quad (1.11)$$

Ukoliko je poznat protok faze $\alpha, \alpha \in \{w, g\}$ na granici Γ , rubni uvjet se zadaje na sljedeći način

$$\rho_\alpha \vec{q}_\alpha \cdot \vec{n} = g \quad \text{na } \Gamma, \quad (1.12)$$

gdje \vec{n} predstavlja jediničnu vanjsku normalu na Γ a g je poznata funkcija prostora i vremena. U slučaju kada je granica nepropusna za fazu α vrijedi $g = 0$. Opisani rubni uvjet se naziva *Neumannov rubni uvjet ili rubni uvjet druge vrste*.

Postoji još i *mješoviti rubni uvjet ili rubni uvjet treće vrste*. Pojavljuje se u slučaju polupropusne granice Γ a dolazi u obliku

$$g_1 p_\alpha + g_2 \rho_\alpha \vec{q}_\alpha \cdot \vec{n} = g_3 \quad \text{na } \Gamma, \quad (1.13)$$

gdje su g_1, g_2 i g_3 zadane poznate funkcije.

Često se na različitim dijelovima granice zadaju različiti rubni uvjeti. Npr., moguće je granicu podijeliti na dva disjunktna podskupa Γ_D i Γ_N , tj. tako da vrijedi

$$\Gamma_D, \Gamma_N \subset \Gamma, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset, \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma.$$

Tada na Γ_D možemo definirati Dirichletov a na Γ_N Neumannov rubni uvjet.

Početni ili inicijalni uvjeti određuju vrijednosti nepoznanica u nekom početnom trenutku t_0 na cijeloj domeni Ω :

$$\begin{aligned} p_\alpha(\mathbf{x}, t_0) &= p_{\alpha,0}(\mathbf{x}), & \alpha \in \{w, g\} \\ S_\alpha(\mathbf{x}, t_0) &= S_{\alpha,0}(\mathbf{x}), & \alpha \in \{w, g\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Za početni trenutak t_0 se uvijek može uzeti $t_0 = 0$.

1.4 Različite formulacije diferencijalnih jednadžbi

Razvijene su različite formulacije diferencijalnih jednadžbi matematičkog modela dvo-faznog toka ovisno o problemu koji se promatra i o efikasnosti numeričke metode koja će biti upotrebljena za njegovo rješavanje. Općenito se unutar njih na različite načine modeliraju određeni aspekti problema što vodi k sustavima jednadžbi koji imaju različita svojstva i dimenzije. U ovom radu razlikujemo fazne formulacije, formulaciju djelomičnog toka te formulaciju pomoću globalnog tlaka. Pri rješavanju problema trebamo uvidjeti koja nam formulacija donosi najviše prednosti.

Dva su ključna aspekta u formiranju diferencijalnih jednadžbi matematičkog modela: odabir primarnih varijabli i algebarske manipulacije diferencijalnim jednadžbama modela.

Izbor varijabli

Postoji više mogućnosti za odabir primarnih varijabli. Ovdje navodimo najčešće korištene.

- *tlak-zasićenje*

Odabiremo tlak jedne od fluidnih faza te zasićenje preostale fluidne faze. Od dviju mogućnosti češće se odabire kombinacija tlaka nevlažeće faze p_g i zasićenja vlažećom fazom S_w .

- *tlak-tlak*
Primarne varijable čine tlakovi obiju fluidnih faza, p_w i p_g .
- *kapilarni tlak-tlak*
Moguće je za jednu od primarnih varijabli odabrati kapilarni tlak $u = p_c(S_w)$. Tada se za drugu primarnu varijablu najčešće koristi tlak nevlažeće faze, p_g .

Postoje formulacije diferencijalnih jednadžbi koje za jednu od primarnih varijabli imaju tzv. globalni tlak kojeg ćemo definirati nešto kasnije. Uz globalni tlak za drugu primarnu varijablu se najčešće koristi zasićenje vlažećom fazom no postoji i mogućnost odabira kapilarnog tlaka.

- *globalni tlak-zasićenje*,
- *globalni tlak-kapilarni tlak*

Formulacija tlak-tlak

Kod matematičkog modela u formulaciji tlak-tlak, primarne varijable su tlakovi vlažeće odnosno nevlažeće faze. Uz pomoć relacija (1.7) ćemo eliminirati zasićenja pojedinim fazama iz sustava jednadžbi (1.8).

Kapilarni tlak smo zadali kao funkciju zasićenja vlažećom fazom. Budući da standardno vrijedi $\frac{dp_c}{dS_w} \neq 0$ tada je funkcija $p_c(S_w)$ strogo monotona. Posljednje je preduvjet za postojanje inverzne funkcije kapilarnog tlaka p_c . Uobičajeno je kapilarni tlak promatrati kao funkciju reduciranog zasićenja, u našem slučaju reduciranog zasićenja vlažećom fazom. Tada je kapilarni tlak definiran na intervalu $(0, 1]$. Njegov inverz $p_c^{-1} : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ dan je sa

$$p_c^{-1}(p_g - p_w) = S_w. \quad (1.15)$$

Proširenje funkcije p_c^{-1} na čitavi \mathbb{R} označavamo sa $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ te ja dano sa

$$f|_{(-\infty, 0]} = 1. \quad (1.16)$$

Imamo

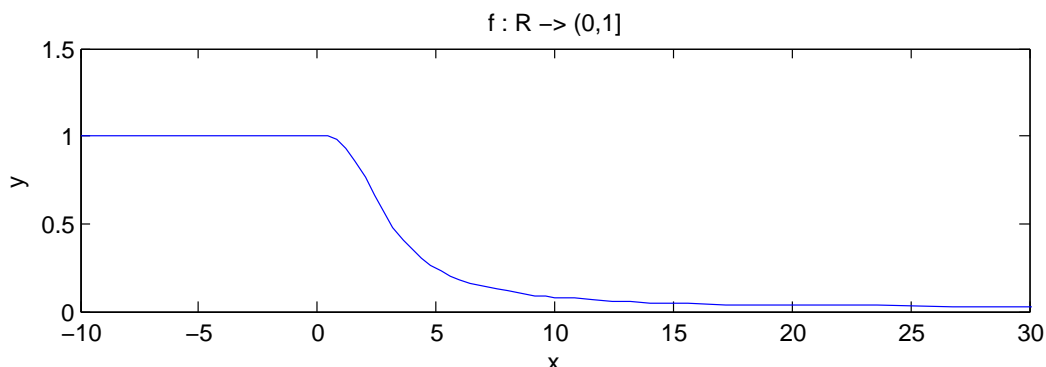
$$S_w = f^{-1}(u), \quad u = p_g - p_w. \quad (1.17)$$

Iz (1.7)₁ slijedi

$$S_g = 1 - f^{-1}(u). \quad (1.18)$$

Ukoliko uvrstimo (1.17) i (1.18) u (1.8) dobit ćemo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial f(u)}{\partial t} - \operatorname{div} [\lambda_w(p_w, p_g) \mathbb{K}(\nabla p_w - \rho_w \vec{g})] = r_w, \\ -\Phi \frac{\partial f(u)}{\partial t} - \operatorname{div} [\lambda_g(p_w, p_g) \mathbb{K}(\nabla p_g - \rho_g \vec{g})] = r_g. \end{cases} \quad (1.19)$$

Slika 1.1: Funkcija f

Dobili smo nelinearni sustav jednažbi koji je strogo spregnut i to kroz odnos relativne permeabilnosti i veze između kapilarnog tlaka i zasićenja. Prednost ove formulacije je u tome što izbjegava zasićenje kao varijablu koja je u slučaju diskontinuirane porozne sredine (različite krivulje kapilarnog tlaka u različitim poddomenama) diskontinuirana.

Formulacija tlak-zasićenje

Kod formulacije tlak-zasićenje za primarne varijable koristimo tlak nevlažeće faze p_g i zasićenje vlažeće faze S_w . Koristeći jednažbe (1.7) željenu formulaciju možemo lagano postići. Iz (1.7)₁ slijedi

$$\frac{\partial S_g}{\partial t} = -\frac{\partial S_w}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Iz (1.7)₂ slijedi

$$\nabla p_c(S_w) = \nabla p_g - \nabla p_w,$$

odnosno

$$\nabla p_w = \nabla p_g - \nabla p_c(S_w). \quad (1.21)$$

Uvrstimo li (1.20) i (1.21) u (1.8) dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} [\lambda_w(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g})] = r_w, \\ -\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} [\lambda_g(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_g - \rho_g \vec{g})] = r_g. \end{cases} \quad (1.22)$$

Dobiveni sustav jednažbi je strogo spregnuti parabolički sustav. Ova je formulacija jednostavnija od tlak-tlak formulacije.

Formulacija djelomičnog toka

Za razliku od prethodnih faznih formulacija dobivanje formulacije djelomičnog toka zahtjeva nešto složenije manipulacije diferencijalnim jednadžbama. Polazimo od zakona sačuvanja mase

$$\begin{aligned}\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_w &= r_w, \\ \Phi \frac{\partial S_g}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_g &= r_g\end{aligned}\tag{1.23}$$

Zbrajanjem jednadžbi (1.23) i korištenjem (1.7)₁ dolazimo do relacije

$$\operatorname{div} (\vec{q}_w + \vec{q}_g) = r_w + r_g.\tag{1.24}$$

Definiramo *totalnu brzinu*, u oznaci \vec{q}_t , sa

$$\vec{q}_t = \vec{q}_w + \vec{q}_g.\tag{1.25}$$

Primjenom Darcy-Muskatovog zakona, jednadžba (1.24) postaje

$$\begin{aligned}-\operatorname{div} \left[(\lambda_w(S_w) + \lambda_g(S_w)) \mathbb{K} \nabla p_g - \lambda_w(S_w) \mathbb{K} \nabla p_c(S_w) - (\lambda_w(S_w) \rho_w + \lambda_g(S_w) \rho_g) \mathbb{K} \vec{g} \right] \\ = r_w + r_g.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Uvodimo još nekoliko veličina. *Ukupna mobilnost* $\lambda(S_w)$ je dana sa

$$\lambda(S_w) = \lambda_w(S_w) + \lambda_g(S_w)\tag{1.27}$$

dok je *srednja gustoća* $\rho(S_w)$ dana sa

$$\rho(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w) \rho_w + \lambda_g(S_w) \rho_g}{\lambda(S_w)}.\tag{1.28}$$

Funkcije djelomičnog toka (eng. fractional flow) su dane sljedećim izrazima:

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda(S_w)}, \quad f_g(S_w) = \frac{\lambda_g(S_w)}{\lambda(S_w)}.\tag{1.29}$$

Može se pokazati da je $f_w(S_w)$ rastuća funkcija dok je $f_g(S_w)$ padajuća funkcija. Korištenjem posljednjih relacija jednadžba (1.26) prelazi u

$$-\operatorname{div} \left[\lambda(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_g - f_w(S_w) \nabla p_c(S_w) - \rho(S_w) \vec{g}) \right] = r_w + r_g.\tag{1.30}$$

Time smo ujedno dobili

$$\vec{q}_t = -\lambda(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_g - f_w(S_w) \nabla p_c(S_w) - \rho(S_w) \vec{g}).\tag{1.31}$$

Sljedeći cilj nam je izraziti Darcyjevu brzinu pojedinih faza korištenjem totalne brzine \vec{q}_t . Krenimo od

$$\begin{aligned} f_w(S_w) \vec{q}_t &= -\lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - f_w(S_w) \nabla p_c(S_w) - \rho(S_w) \vec{g} \right) \\ &= \vec{q}_w + \lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(f_w(S_w) \nabla p_c(S_w) - \nabla p_c(S_w) + \rho(S_w) \vec{g} - \rho_w \vec{g} \right), \end{aligned} \quad (1.32)$$

nadalje slijedi

$$\vec{q}_w = f_w(S_w) \vec{q}_t + \lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(f_g(S_w) \nabla p_c(S_w) + (\rho_w - \rho(S_w)) \vec{g} \right). \quad (1.33)$$

Radi jednostavnije notacije uvodimo funkcije

$$\begin{aligned} a(S_w) &= -\frac{\lambda_w(S_w) \lambda_g(S_w)}{\lambda(S_w)} p'_c(S_w), \\ b_g(S_w) &= \frac{\lambda_w(S_w) \lambda_g(S_w)}{\lambda(S_w)} (\rho_w - \rho_g). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Darcyjeva brzina vlažeće faze poprima oblik

$$\vec{q}_w = f_w(S_w) \vec{q}_t - a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}. \quad (1.35)$$

Analognim bi postupkom za Darcyjevu brzinu nevlažeće faze dobili

$$\vec{q}_g = f_g(S_w) \vec{q}_t + a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w - b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}. \quad (1.36)$$

Uvrštavanjem (1.35) u (1.23)₁ dobivamo

$$\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g} \right) = \operatorname{div} \left(a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w \right) + r_w. \quad (1.37)$$

Konačno, model u formulaciji djelomičnog toka čini sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\lambda(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - f_w(S_w) \nabla p_c(S_w) - \rho(S_w) \vec{g} \right) \right] = r_w + r_g \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g} \right) = \operatorname{div} \left(a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w \right) + r_w. \end{cases} \quad (1.38)$$

Formulacija globalni tlak-zasićenje

Izvod formulacije diferencijalnih jednadžbi pomoću globalnog tlaka se nastavlja na formulaciju djelomičnog toka. U prethodnim razmatranjima smo došli do sljedećeg izraza za totalnu brzinu \vec{q}_t

$$\vec{q}_t = -\lambda(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - f_w(S_w) \nabla p_c(S_w) - \rho(S_w) \vec{g} \right). \quad (1.39)$$

Cilj nam je totalnu brzinu \vec{q}_t izraziti kao Darcyjevu brzinu nekog srednjeg tlaka p . Promatrajući izraz za \vec{q}_t dolazimo do zaključka da novi tlak p treba zadovoljavati

$$\nabla p = \nabla p_g - f_w(S_w) \nabla p_c(S_w) = \nabla p_g - f_w(S_w) \nabla p'_c(S_w \nabla S_w). \quad (1.40)$$

Očito je (1.40) zadovoljeno ukoliko za p uzmemo

$$p = p_g - \int_{S_*}^{S_w} f_w(s) p'_c(s) ds, \quad S_* \in [0, 1]. \quad (1.41)$$

Posljednjom relacijom smo definirali tlak p . Sljedeći cilj nam je postići da tlak p u relaciji (1.41) predstavlja određenu srednju vrijednost između tlakova p_g i p_w . Navedeno ćemo ostvariti pažljivim odabirom konstante S_* . Uzmimo $S_* = S_c$, gdje S_c zadovoljava

$$p_c(S_c) = 0. \quad (1.42)$$

Primijenimo li (1.42) na (1.41) te iskoristimo (1.7) dobit ćemo izraz

$$p = \frac{1}{2} (p_g + p_w) - \int_{S_c}^{S_w} \left(f_w(s) - \frac{1}{2} \right) p'_c(s) ds. \quad (1.43)$$

Tlak dan sa (1.43) nazivamo *globalnim tlakom*. Dakle, formulaciju globalni tlak-zasićenje čine jednadžbe

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [\lambda(S_w) \mathbb{K} (\nabla p - \rho(S_w) \vec{g})] = r_w + r_g \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} (f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}) = \operatorname{div} (a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w) + r_w, \end{cases} \quad (1.44)$$

gdje je

$$\vec{q}_t = -\lambda(S_w) \mathbb{K} (\nabla p - \rho(S_w) \vec{g}). \quad (1.45)$$

Uočimo da smo ovom transformacijom smanjili zavisnost jednadžbi (1.44)₁ i (1.44)₂. Jednadžba (1.44)₁ ovisi o (1.44)₂ samo kroz varijablu S_w a ne kroz S_w i ∇S_w kao u (1.38).

1.5 Modeli kapilarnog tlaka i relativnih propusnosti

Analitičko određivanje kapilarnog tlaka u poroznom mediju je gotovo nemoguće zbog neregularne geometrije pornog prostora. Stoga se koriste eksperimentalne tehnike pri čemu jedno mjerenje obično daje jednu točku $(S_w, p_c(S_w))$ na krivulji kapilarnog tlaka. Da bi se smanjio broj potrebnih mjerenja koriste se razne teorijski izvedene formule, s malim brojem parametara. Najpoznatiji modeli dvofaznih sustava gdje faze čine zrak i voda su:

- *Brooks - Coreyev model,*
- *Van Genuchtenov model.*

Navedeni modeli sadržavaju parametre koji nastoje uvažiti različitosti geometrije pornog prostora kao što su distribucija pora i povezanost pornog prostora. Uobičajeno se koriste za prilagođavanje modela eksperimentalnim podacima.

Modeli kapilarnog tlaka

Kod Brooks - Coreyevog modela kapilarni tlak je dan formulom

$$p_c(S_w) = P_i (S_{we})^{-\frac{1}{\lambda}}, \quad (1.46)$$

gdje su

- P_i - ulazni tlak,
- λ - parametar.

Parametar λ uobičajeno poprima vrijednosti između 0.2 i 3.0. Veoma male vrijednosti parametra λ opisuju materijal koji se sastoji od zrnaca približno jednake veličine dok velike vrijednosti parametra λ opisuju materijal kod kojeg su prisutna zrnca izrazito različitih veličina.

U Van Genuchtenovom modelu kapilarni tlak je dan formulom

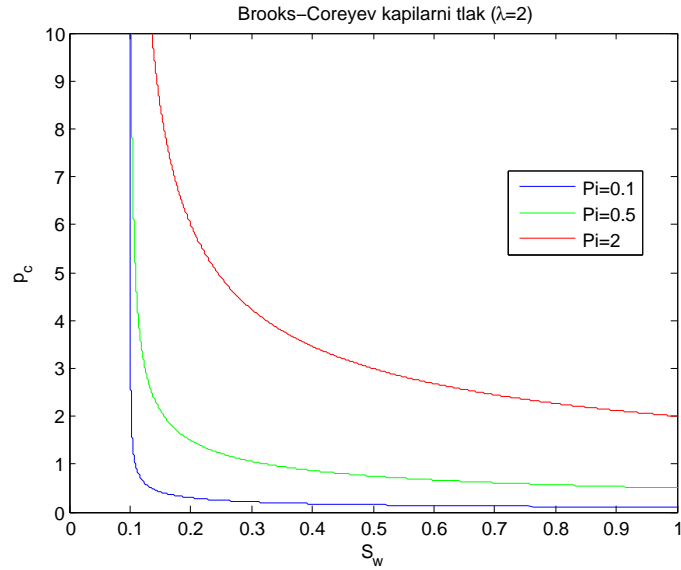
$$p_c(S_w) = \frac{1}{\alpha} \left(S_{we}^{-\frac{1}{m}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1.47)$$

gdje su

- α, n, m - parametri.

Parametri α i n se zadaju direktno dok se parametar m definira na sljedeći način:

$$m = 1 - \frac{1}{n}.$$



Slika 1.2: Primjer Brooks-Coreyevih kapilarnih krivulja

Modeli relativnih propusnosti

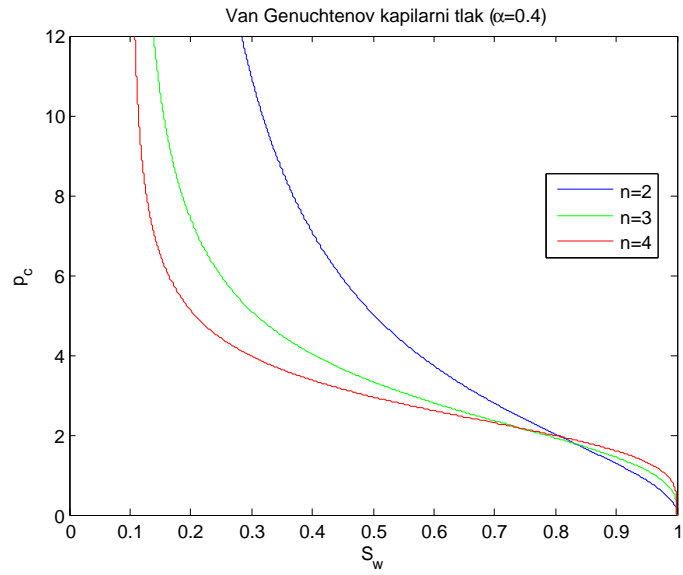
Osim funkcija kapilarnog tlaka unutar modela Brooks-Coreya i Van Genutchena definirane su i funkcije relativnih propusnosti. One su također zadane kao funkcije reduciranog zasićenja, u našem slučaju vlažeće faze. U Brooks - Coreyevom modelu relativne propusnosti su zadane sa

$$\begin{aligned} kr_w(S_w) &= S_{we}^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}}, \\ kr_g(S_w) &= (1 - S_{we})^2 \left(1 - S_{we}^{\frac{2+\lambda}{\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

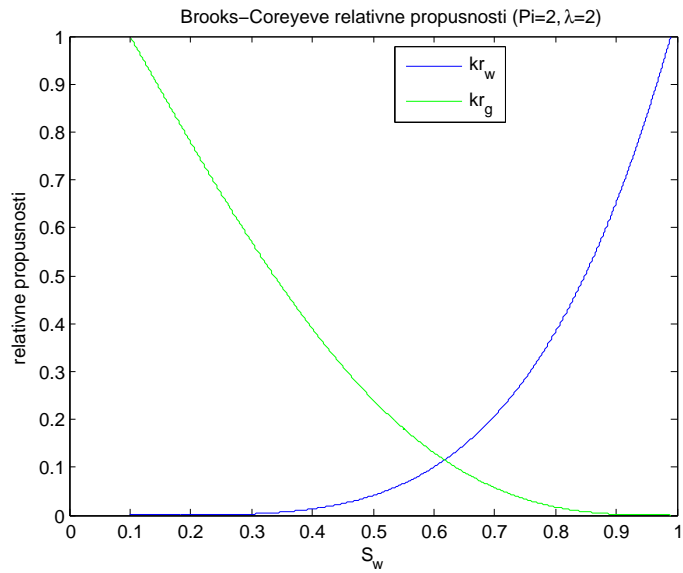
Kod Van Genuchtenovog modela vrijede sljedeće relacije

$$\begin{aligned} kr_w(S_w) &= S_{we}^\epsilon \left[1 - \left(1 - S_{we}^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^2, \\ kr_g(S_w) &= (1 - S_{we})^\gamma \left[1 - S_{we}^{\frac{1}{m}}\right]^{2m}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

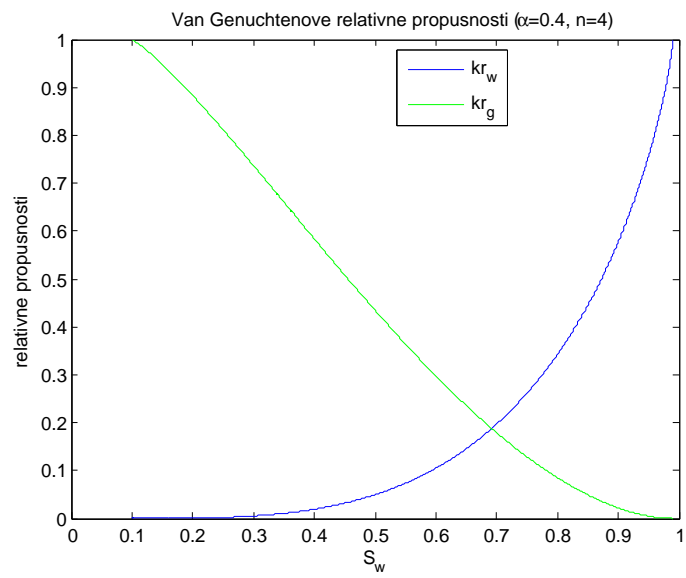
Parametri ϵ i γ opisuju povezanost pora. Općenito, oni iznose $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.



Slika 1.3: Primjer Van Genuchtenovih kapilarnih krivulja



Slika 1.4: Primjer Brooks-Coreyevih relativnih propusnosti



Slika 1.5: Primjer Van Genuchtenovih relativnih propusnosti

Poglavlje 2

Varijacijska formulacija

U prethodnom poglavlju smo postavili matematički model za dvofazni tok fluida u poroznoj sredini. Izveli smo nekoliko njegovih formulacija. Kako bi matematički model bio potpuno određen potrebno je dodati rubne i početne uvjete. Rješenje tako postavljene zadaće nije moguće izračunati bez upotrebe neke od numeričkih metoda. U nastavku rada ćemo ilustrirati postupak dobivanja numeričkog modela iz matematičkog i to za njegovu faznu formulaciju tlak-zasićenje kao i za formulaciju s globalnim tlakom. Pri tome ćemo se koristiti standardnom metodom konačnih elemenata, mješovitom metodom konačnih elemenata te metodom konačnih volumena. Kao polazna točka standardne i mješovite metode konačnih elemenata koristi se *varijacijska formulacija*.

2.1 Varijacijska formulacija matematičkog modela u formulaciji tlak-zasićenje

Promatramo matematički model toka dvaju nemješivih fluida u poroznoj sredini u formulaciji tlak-zasićenje

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_w(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g}) \right] = r_w \\ -\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_g(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_g - \rho_g \vec{g}) \right] = r_g. \end{cases} \quad (2.1)$$

Upotpunjujemo ga rubnim i početnim uvjetima čime dolazimo do sljedeće početno - rubne zadaće

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g} \right) \right] = r_w & \text{u } \Omega \\
 - \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_g(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \rho_g \vec{g} \right) \right] = r_g & \text{u } \Omega \\
 p_g = p_{g,bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\
 S_w = S_{w,bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\
 - \lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g} \right) \cdot \vec{n} = F_{wu} & \text{na } \Gamma_{N1} \times (0, T) \\
 - \lambda_g(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \rho_g \vec{g} \right) \cdot \vec{n} = F_{gu} & \text{na } \Gamma_{N1} \times (0, T) \\
 - \lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g} \right) \cdot \vec{n} = F_w & \text{na } \Gamma_{N2} \times (0, T) \\
 - \lambda_g(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \rho_g \vec{g} \right) \cdot \vec{n} = F_g & \text{na } \Gamma_{N2} \times (0, T) \\
 p_g|_{t=0} = p_{g0} & \text{u } \Omega \\
 S_w|_{t=0} = S_{w0} & \text{u } \Omega
 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ograničena domena a $\partial\Omega$ njegova granica za koju vrijedi

$$\Gamma_D, \Gamma_{N1}, \Gamma_{N2} \subset \partial\Omega, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_{N1} \cap \Gamma_{N2} = \emptyset, \quad \Gamma_D \cup \Gamma_{N1} \cup \Gamma_{N2} = \partial\Omega. \quad (2.3)$$

Cilj nam je doći do varijacijske formulacije zadaće (2.2). Za ilustraciju, postupak izvođenja varijacijskih jednadžbi za parcijalne diferencijalne jednadžbe (2.2)₁ i (2.2)₂ provest ćemo samo za jednadžbu (2.2)₁.

Za početak, pomnožimo (2.2)₁ s odgovarajućom *test funkcijom* $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.d. $\varphi|_{\Gamma_D} = 0$ a potom prointegriramo dobiveni izraz po cijeloj domeni Ω

$$\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[\lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g} \right) \right] \varphi dx = \int_{\Omega} r_w \varphi dx.$$

Primjenom formule parcijalne integracije i Teorema o divergenciji dolazimo do sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g} \right) \cdot \vec{n} \varphi d\sigma \\
 + \int_{\Omega} \lambda_w(S_w) \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g} \right) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} r_w \varphi dx.
 \end{aligned}$$

Zbog (2.3), činjenice da se φ poništava na dijelu ruba domene Γ_D te uvažavanjem Neumannovih rubnih uvjeta (2.2)₅ i (2.2)₇, dolazimo do varijacijske jednadžbe za jednadžbu (2.2)₁.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx + \int_{\Omega} \lambda_w(S_w) \mathbb{K}(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g}) \cdot \nabla \varphi dx \\ = \int_{\Omega} r_w \varphi dx - \int_{\Gamma_{M1}} F_{wu} \varphi d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_w \varphi d\sigma. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Analognim postupkom bi za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (2.2)₂ došli do sljedeće varijacijske jednadžbe

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx + \int_{\Omega} \lambda_g(S_w) \mathbb{K}(\nabla p_g - \rho_g \vec{g}) \cdot \nabla \varphi dx \\ = \int_{\Omega} r_g \varphi dx - \int_{\Gamma_{M1}} F_{gu} \varphi d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_g \varphi d\sigma. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dakle, ako su $p_g(x, t)$ i $S_w(x, t)$ klasična rješenja zadatice (2.2) onda $p_g(x, t)$ i $S_w(x, t)$ zadovoljavaju (2.4) i (2.5) $\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ t.d. $\varphi|_{\Gamma_D} = 0$ i $\forall t \in [0, T]$.

Označimo prostor test funkcija sa V ,

$$V = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (2.6)$$

Funkcije $p_g(\mathbf{x}, t)$ i $S_w(\mathbf{x}, t)$ ne promatramo kao funkcije varijabli \mathbf{x} i t već kao preslikavanja $t \mapsto p_g(\mathbf{x}, t)$ odnosno $t \mapsto S_w(\mathbf{x}, t)$ iz $(0, T]$ u prostor $H^1(\Omega)$. Zbog nehomogenih Dirichletovih rubnih uvjeta rješenja $p_g(\cdot, t)$ i $S_w(\cdot, t)$ ne tražimo u prostoru test funkcija već u linearnim mnogostrukostima:

$$\begin{aligned} V_g &= p_{g,bd} + V, \\ V_w &= S_{w,bd} + V, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\forall t \in (0, T)$.

Od navedenih preslikavanja se zahtjeva da budu (apsolutno) kvadratno integrabilna po varijabli t . Skupove svih takvih preslikavanja ćemo označavati sa $L^2(0, T; V_g)$, odnosno sa $L^2(0, T; V_w)$. Funkcije desne strane, F_α i r_α , također promatramo kao preslikavanja $t \mapsto F_\alpha(\mathbf{x}, t)$ iz $[0, T]$ u $L^2(\Gamma_N)$, odnosno $t \mapsto r_\alpha(\mathbf{x}, t)$ iz $[0, T]$ u $L^2(\Omega)$, gdje je $\alpha \in \{w, g\}$. Za početne uvjete pretpostavljamo $p_{g0}, S_{w0} \in L^2(\Omega)$, gdje na S_{w0} imamo i uvjet

$$0 \leq S_{w0} \leq 1.$$

Kako bi početni uvjeti bili zadovoljeni rješenja trebaju biti neprekidna po varijabli t , tj. $p_g, S_w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Uvedimo sljedeće oznake

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1(p_g, S_w, \varphi) &= \int_{\Omega} \lambda_w(S_w) \mathbb{K} (\nabla p_g - \nabla p_c(S_w)) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda_w(S_w) \rho_w \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \varphi dx, \\
 \mathcal{A}_2(p_g, S_w, \varphi) &= \int_{\Omega} \lambda_g(S_w) \mathbb{K} \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda_g(S_w) \rho_g \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \varphi dx, \\
 \mathcal{F}_1(\varphi) &= \int_{\Omega} r_w \varphi dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{wu} \varphi d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_w \varphi d\sigma, \\
 \mathcal{F}_2(\varphi) &= \int_{\Omega} r_g \varphi dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{gu} \varphi d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_g \varphi d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Varijacijska zadaća početno-rubne zadaće (2.2) glasi:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Naći } p_g \in L^2(0, T; V_g) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), S_w \in L^2(0, T; V_w), \frac{\partial S_w}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \\
 \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx + \mathcal{A}_1(p_g, S_w, \varphi) = \mathcal{F}_1(\varphi), \quad \forall \varphi \in V \\
 - \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx + \mathcal{A}_2(p_g, S_w, \varphi) = \mathcal{F}_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in V \\
 p_g|_{t=0} = p_{g0}, \quad S_w|_{t=0} = S_{w0}
 \end{array} \right. \tag{2.9}$$

U varijacijskoj formulaciji se pretpostavlja da derivacija $\frac{dS_w}{dt}$ postoji kao preslikavanje sa $(0, T)$ u V' , dual od prostora V . Integrale $\int_{\Omega} \Phi \frac{dS_w}{dt} \varphi dx$ treba shvatiti kao dualnost između prostora V i V' . Pokazuje se da je funkcija S_w iz $L^2(0, T; V_w)$, koja ima vremensku derivaciju iz $L^2(0, T; V')$ ujedno i neprekidna po t , odnosno $S_g \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ (vidi [3]). Da bi se izbjegla navedena komplikacija moguće je izvršiti parcijalnu derivaciju u vremenskom članu i samo tražiti da je $S_g \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Te dvije formulacije su ekvivalentne. Egzistencija i jedinstvenost ove zadaće se može naći u [2].

2.2 Varijacijska formulacija matematičkog modela u formulaciji s globalnim tlakom

Matematički model toka dvaju nemješivih fluida u poroznoj sredini postavljen u formulaciji s globalnim tlakom ima sljedeći oblik:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [\lambda(S_w) \mathbb{K} (\nabla p - \rho(S_w) \vec{g})] = r_w + r_g \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} (f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}) = \operatorname{div} (a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w) + r_w, \end{cases} \quad (2.10)$$

gdje je

$$\vec{q}_t = -\lambda(S_w) \mathbb{K} (\nabla p - \rho(S_w) \vec{g}). \quad (2.11)$$

Prva jednačba u (2.10) predstavlja jednačbu za tlak dok druga jednačba predstavlja jednačbu za zasićenje.

Jednačbu za tlak (2.10)₁, koja je drugog reda, možemo zapisati kao sustav jednačbi prvog reda

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{q}_t = r_w + r_g \\ \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t = -\lambda(S_w) (\nabla p - \rho(S_w) \vec{g}). \end{cases} \quad (2.12)$$

Primijetimo da je u (2.12)₂ \mathbb{K}^{-1} dobro definiran jer je \mathbb{K} pozitivno definitan tenzor. Primarne varijable sustava (2.12) su totalna brzina \vec{q}_t i globalni tlak p . Dakle, ukoliko primijenimo transformaciju (2.12) jednačbe za tlak na (2.10) te tako dobivenom problemu pridružimo rubne i početne uvjete dobit ćemo sljedeću početno-rubnu zadaću kod koje su primarne varijable \vec{q}_t , p i S_w

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{q}_t = r_w + r_g & \text{u } \Omega \\ \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t = -\lambda(S_w) (\nabla p - \rho(S_w) \vec{g}) & \text{u } \Omega \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} (f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}) = \operatorname{div} (a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w) + r_w & \text{u } \Omega \\ p = p_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ S_w = S_{w,bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \vec{q}_w \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{q}_g \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ p|_{t=0} = p_0, \quad S_w|_{t=0} = S_{w0} & \text{u } \Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

Kao i prije, vrijedi $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ograničena domena a $\partial\Omega$ njena granica sa svojstvom

$$\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset, \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega. \quad (2.14)$$

Za rješavanje (2.13) koristit ćemo i mješovitu i standardnu metodu konačnih elemenata. Mješovita metoda konačnih elemenata se koristi tzv. mješovitom varijacijskom formulacijom, u našem slučaju jednažbe za tlak, a omogućuje nam izbor različitih aproksimacijskih prostora za \vec{q}_t i p . Prije izvoda mješovite varijacijske formulacije jednažbe za tlak uvedimo sljedeće prostore funkcija

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}; \Omega) &= \{ \vec{\psi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{\psi} \in L^2(\Omega)^d, \operatorname{div} \vec{\psi} \in L^2(\Omega) \} \\ H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}; \Omega) &= \{ \vec{\psi} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \vec{\psi} \cdot \vec{n} = 0 \text{ na } \Gamma_N \}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

U prostoru $H(\operatorname{div}; \Omega)$ zahtjevamo da divergencija $\operatorname{div} \vec{\psi}$, definirana u smislu distribucija, leži u prostoru $L^2(\Omega)$. Pri tome se može pokazati (vidi [4]) da je za funkciju $\vec{\psi} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ izraz $\vec{\psi} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}$ dobro definiran u odgovarajućem Soboljevjevom prostoru s negativnim eksponentom. Također, preslikavanje $\vec{\psi} \mapsto \vec{\psi} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}$ je neprekidno. Očito vrijedi $H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}; \Omega) \subset H(\operatorname{div}; \Omega)$.

Polazimo od

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{q}_t = r_w + r_g & \text{u } \Omega \\ \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t = -\lambda(S_w)(\nabla p - \rho(S_w) \vec{g}) & \text{u } \Omega \\ p = p_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \vec{q}_w \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{q}_g \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \end{cases} \quad (2.16)$$

Množimo prvu jednažbu u (2.16) sa proizvoljnom funkcijom $\varphi \in L^2(\Omega)$ te dobiveni izraz prointegriramo po cijeloj domeni Ω

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_t \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (r_w + r_g) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (2.17)$$

Drugu jednažbu u (2.16) množimo sa proizvoljnom funkcijom $\vec{\psi} \in H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}; \Omega)$, zatim dobiveni izraz prointegriramo po Ω . Nakon primjene formule parcijalne integracije i Teorema o divergenciji te uzimanjem u obzir Dirichletovog rubnog uvjeta u (2.16) dobivamo da za svako $\vec{\psi} \in H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}; \Omega)$ vrijedi

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\lambda(S_w)} \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{\psi} dx = \int_{\Omega} \rho(S_w) \vec{g} \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Gamma_D} p_{bd} \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (2.18)$$

Napomenimo da je Dirichletov rubni uvjet ovdje zadovoljen varijacijski i nije ugrađen u

prostor. Dakle, mješovita varijacijska formulacija jednadžbe za tlak, $\forall t \in (0, T)$, glasi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Naći } \vec{q}_t \in H_{\Gamma_N}(\text{div}; \Omega), p \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \text{div } \vec{q}_t \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (r_w + r_g) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda(S_w)} \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Omega} p \text{div } \vec{\psi} dx \\ = \int_{\Omega} \rho(S_w) \vec{g} \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Gamma_D} p_{bd} \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad \forall \vec{\psi} \in H_{\Gamma_N}(\text{div}; \Omega). \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Preostaje nam još izvesti varijacijsku formulaciju jednadžbe za zasićenje

$$\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \text{div} (f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}) = \text{div} (a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w) + r_w. \quad (2.20)$$

Prostor test funkcija V je zadan sa

$$V = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \eta|_{\Gamma_D} = 0 \}. \quad (2.21)$$

Slično prethodnom, množimo ju sa proizvoljnom funkcijom $\eta \in V$, zatim prointegriramo po domeni Ω te korištenjem formule parcijalne integracije i Teorema o divergenciji dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \eta dx + \int_{\Omega} (f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}) \cdot \nabla \eta dx + \int_{\Omega} a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w \cdot \nabla \eta dx \\ = \int_{\Omega} r_w \eta dx, \quad \forall \eta \in V. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Zbog nehomogenog Dirichletovog rubnog uvjeta rješenje $S_w(\mathbf{x}, t)$ tražimo u linearnoj mnogostrukosti

$$V_w = S_{w,bd} + V, \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.23)$$

Konačno, varijacijska zadaća početno-rubne zadaće (2.13) glasi

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Naći } \vec{q}_t \in H_{\Gamma_N}(\text{div}; \Omega), p \in L^2(\Omega), S_w \in L^2(0, T; V_w), \frac{\partial S_w}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \\
 \int_{\Omega} \text{div } \vec{q}_t \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (r_w + r_g) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega) \\
 \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda(S_w)} \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Omega} p \text{div } \vec{\psi} dx \\
 = \int_{\Omega} \rho(S_w) \vec{g} \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Gamma_D} p_{bd} \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad \forall \vec{\psi} \in H_{\Gamma_N}(\text{div}; \Omega) \\
 \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \eta dx + \int_{\Omega} (f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \mathbb{K} \vec{g}) \cdot \nabla \eta dx + \int_{\Omega} a(S_w) \mathbb{K} \nabla S_w \cdot \nabla \eta dx \\
 = \int_{\Omega} r_w \eta dx, \quad \forall \eta \in V \\
 p|_{t=0} = p_0, \quad S_w|_{t=0} = S_{w0}.
 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Poglavlje 3

Diskretizacija

Kao što smo prethodno naveli, varijacijska formulacija predstavlja temelj za metode konačnih elemenata. Do nje smo došli u prethodnom poglavlju. Ovdje ćemo provesti njenu diskretizaciju i to u dva koraka, prvo ćemo diskretizirati prostorni dio domene a potom i vremenski dio.

3.1 Prostorna diskretizacija

Provodimo postupak koji nazivamo *varijacijska aproksimacija*. Postupak se sastoji od zamjene beskonačnodimenzionalnog prostora V konačnodimenzionalnim prostorom V^h , $V^h \subset V$, te formiranja nove varijacijske zadaće, tzv. *aproksimativne varijacijske zadaće*.

Prostor konačnih elemenata

Konstruiramo prostor V^h kao prostor po dijelovima polinomijalnih funkcija, dovoljno glatkih kako bi imali $V^h \subset V$.

Za početak konstrukcije prostora V^h trebamo izvršiti triangulaciju domene Ω . Općenito je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$ i za Ω zbog jednostavnosti pretpostavljamo da je poliedarski skup u \mathbb{R}^d . *Triangulacija* od Ω je svaka konačna familija \mathcal{T}_h podskupova od $\bar{\Omega}$ koja ima sljedeća svojstva

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$,
- Svaki $T \in \mathcal{T}_h$ je zatvoren poliedarski skup u \mathbb{R}^d i $Int(T) \neq \emptyset$,
- Za svaka dva različita elementa $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ vrijedi $Int(T_1) \cap Int(T_2) = \emptyset$,

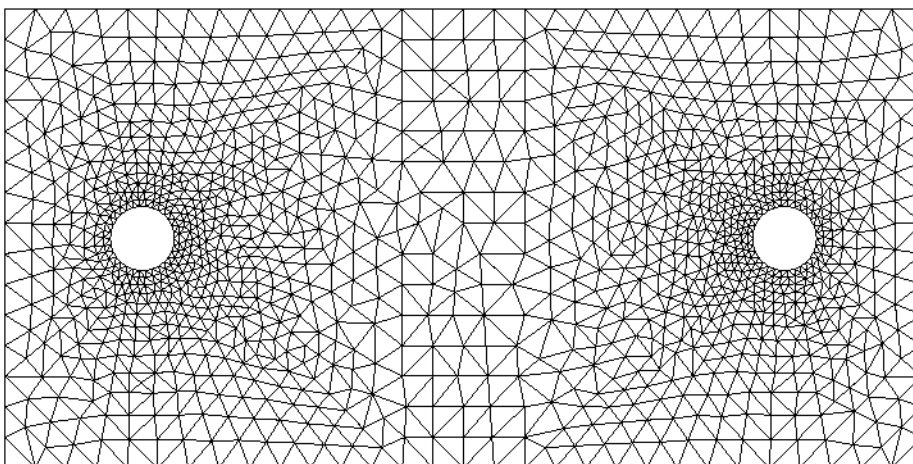
- Svaka dva elementa $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ za koje je $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ imaju ili zajedničku stranicu, ili zajednički brid ili zajednički vrh.

Za $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ konačni elementi su najčešće tetraedri, paralelepipedi i prizme dok su za $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ to najčešće trokuti i četverokuti. U ovom radu se ograničavamo na $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ te za skupove $T \in \mathcal{T}_h$ koristimo trokute. Označimo skup svih vrhova triangulacije (čvorove) sa \mathcal{N} a skup svih bridova triangulacije sa \mathcal{E}

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{a_1, a_2, \dots, a_N\}, \\ \mathcal{E} &= \{e_1, e_2, \dots, e_M\}.\end{aligned}$$

Prikladno je označiti skup susjednih vrhova vrha a_i sa η_i

$$\eta_i = \{a_j : a_j \in \mathcal{N}, a_j \text{ je susjedni čvor od } a_i\}. \quad (3.1)$$



Slika 3.1: Triangulacija domene

Sljedeći korak u konstrukciji prostora konačnih elemenata je pridruživanje linearnog konačnodimenzionalnog prostora funkcija svakom elementu $T \in \mathcal{T}_h$. Pridruženi prostor elementu T označavamo sa V_T . Od prostora V_T zahtjevamo da sadrži polinome ili funkcije bliske polinomima.

Nadalje, definiramo prostor

$$\mathcal{X}^h = \{v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v|_T \in V_T, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Funkcije iz \mathcal{X}^h općenito imaju skokove na granicama susjednih elemenata. Stoga promatramo podskup $V^h \subset \mathcal{X}^h$ koji se sastoji od neprekidnih funkcija, $V^h = \mathcal{X}^h \cap C(\overline{\Omega})$.

Neprekidnost funkcija iz V^h je moguće postići jedino uz određenu usklađenost prostora V_T što dovodi do novih ograničenja na T i V_T .

Naposljetku se od prostora V^h zahtjeva postojanje baze s malim nosačem koju je jednostavno numerički konstruirati. Ovako konstruirani prostor V_h nazivamo *prostorom konačnih elemenata*.

Konačni element se strogo definira kao uređena trojka (T, V_T, Σ_T) gdje je T skup, V_T konačnodimenzionalan prostor funkcija na T a Σ_T skup stupnjeva slobode. *Stupnjevi slobode* se općenito definiraju kao funkcionali na prostoru funkcija V_T . Osnovno svojstvo konačnih elemenata je *unisolvencija*, tj. stupnjevi slobode u Σ_T moraju na jedinstven način određivati funkciju iz V_T .

Prostor V^h se može uspješno konstruirati pomoću različito definiranih konačnih elemenata. U ovom radu se koristimo Lagrangeovim P1 konačnim elementima i Raviart-Thomasovim konačnim elementima.

Konstrukcija prostora konačnih elemenata V^h pomoću P1 elemenata na trokutima

Pretpostavimo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena, poligonalna domena te \mathcal{T}_h jedna njena tringulacija trokutima. Označimo sa \mathbb{P}_k prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog k u \mathbb{R}^2 . Sa $\mathbb{P}_k(T)$ ćemo označiti prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog k na T , tj.

$$\mathbb{P}_k(T) = \{p|_T : p \in \mathbb{P}_k\}. \quad (3.2)$$

Za definiranje P1 konačnog elementa (T, V_T, Σ_T) na trokutu dovoljno je definirati V_T i Σ_T

$$\begin{aligned} V_T &= \mathbb{P}_1(T), \quad \dim(V_T) = 3 \\ \Sigma_T &= \{p(a_i) : 1 \leq i \leq 3\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdje u izrazu za Σ_T a_i predstavljaju vrhove trokuta T .

Primijetimo da je prostor konačnih elemenata definiran sa

$$V^h = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v|_T \in V_T, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

dobro definiran, tj. funkcije $v \in V^h$ su globalno neprekidne. Naime, definiranjem vrijednosti funkcije u svim vrhovima triangulacije ona postaje jedinstveno određena na svakom trokutu i neprekidna na stranicama u kojima se susjedni trokuti dodiruju. Može se pokazati da tada vrijedi $V^h \subset H^1(\Omega)$. Iz navedenog je očito kako je dimenzija prostora V^h jednaka broju vrhova u triangulaciji, $\dim V^h = N$.

Preostaje nam još pokazati postojanje baze na V^h . Jedan logičan odabir baze je tzv. *nodalna baza*, koja je pridružena vrhovima triangulacije. Svakom vrhu a_i pridružujemo baznu funkciju $\phi_i \in V^h$ definiranu na sljedeći način

$$\phi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad \phi_i \in V^h.$$

Bazna funkcija ϕ_i je afina na svakom trokutu i određena je svojim vrijednostima u vrhovima trokuta. Iz definicije je očito da je ona različita od nule samo na onim trokutima koji imaju a_i kao jedan svoj vrh pa stoga ima mali nosač. Dakle, u prostoru V^h imamo bazu $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ te se stoga svaka funkcija $v^h \in V^h$ može prikazati kao

$$v^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N v_j^h \phi_j(\mathbf{x}),$$

gdje v_j^h predstavlja vrijednost funkcije v^h u a_j -tom čvoru triangulacije. Također vrijedi

$$\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.4)$$

Recimo još da parametar h predstavlja dijаметar najvećeg elementa triangulacije i naziva se *finoća triangulacije*.

Prostorna diskretizacija zadaće (2.9)

Funkcije $p_g \in L^2(0, T; V_g)$, $S_w \in L^2(0, T; V_w)$ te početne uvjete $p_{g0}, S_{w0} \in L^2(\Omega)$ možemo aproksimirati respektivno funkcijama $p_g^h \in C^1([0, T]; V_g^h)$, $S_w^h \in C^1([0, T]; V_w^h)$ te $p_{g0}^h \in V_g^h$, $S_{w0}^h \in V_w^h$ koje se mogu prikazati na sljedeći način

$$\begin{aligned} p_g^h(x, t) &= \sum_{j=1}^N p_{g,j}^h(t) \phi_j(x), & S_w^h(x, t) &= \sum_{j=1}^N S_{w,j}^h(t) \phi_j(x) \\ p_{g0}^h(\cdot, 0) &= \sum_{j=1}^N p_{g0,j}^h \phi_j(x), & S_{w0}^h(\cdot, 0) &= \sum_{j=1}^N S_{w0,j}^h \phi_j(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdje su koeficijenti $p_{g0,j}^h$ i $S_{w0,j}^h$ poznati. Isto tako, vrijednosti $S_{w,j}^h(t)$ i $p_{g,j}^h(t)$ koje odgovaraju točkama $a_j \in \Gamma_D$ definirane su rubnim uvjetom. Na analogan način aproksimiramo i preostale funkcije iz zadaće (2.9).

Formuliramo aproksimativnu varijacijsku zadaću

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Naći } p_g^h \in C^1([0, T]; V_g^h), S_w^h \in C^1([0, T]; V_w^h) \\ \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w^h}{\partial t} \varphi dx + \mathcal{A}_1(p_g^h, S_w^h, \varphi) = \mathcal{F}_1(\varphi), \quad \forall \varphi \in V^h \\ - \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w^h}{\partial t} \varphi dx + \mathcal{A}_2(p_g^h, S_w^h, \varphi) = \mathcal{F}_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in V^h \\ p_g^h|_{t=0} = p_{g0}^h, \quad S_w^h|_{t=0} = S_{w0}^h. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Standardna Galerkinova metoda Uzimajući aproksimativne prostore V^h kao prostore konačnih elemenata došli smo do metode konačnih elemenata. Metoda konačnih elemenata koju ćemo primijeniti u ovom slučaju je *Standardna Galerkinova metoda*. Ideja navedene metode je korištenje istih funkcija za bazne i test funkcije unutar aproksimativne varijacijske zadaće. Dakle, za φ u (3.6) uzimamo ϕ_i .

Završimo prostornu diskretizaciju zadaće (2.9) primjenom Standardne Galerkinove metode na aproksimativne varijacijske jednačbe u (3.6). Za jednačbu vlažeće faze dobivamo

$$\begin{aligned} \Phi \sum_{j \in \eta_i} \frac{dS_{w,j}^h}{dt} \mathcal{M}_{ij} + \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^h) \mathbb{K} (\nabla p_g^h - \nabla p_c(S_w^h)) \cdot \nabla \phi_i dx - \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^h) \rho_w^h \mathbb{K} \vec{g}^h \cdot \nabla \phi_i dx \\ = \int_{\Omega} r_w^h \phi_i dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{wu}^h \phi_i d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_w^h \phi_i d\sigma, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

dok za jednačbu nevlažeće faze vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} -\Phi \sum_{j \in \eta_i} \frac{dS_{w,j}^h}{dt} \mathcal{M}_{ij} + \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^h) \mathbb{K} \nabla p_g^h \cdot \nabla \phi_i dx - \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^h) \rho_g^h \mathbb{K} \vec{g}^h \cdot \nabla \phi_i dx \\ = \int_{\Omega} r_g^h \phi_i dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{gu}^h \phi_i d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_g^h \phi_i d\sigma, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdje je

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx.$$

Matrica $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij})$ se naziva *konzistentna matrica mase*. Primjetimo, svaka od jednačbi (3.7), (3.8) predstavlja jedan sustav običnih diferencijalnih jednačbi.

”Mass lumping” Kod prostorne diskretizacije uveli smo pojam konzistentne matrice mase. Ovdje uvodimo pojam tzv. *”lumped” masene matrice* \mathcal{L} , koja se definira pomoću konzistentne matrice mase na sljedeći način

$$\mathcal{L}_{ij} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^N \mathcal{M}_{ik}. \quad (3.9)$$

Iz definicije je jasno kako je *”lumped”* masena matrica dijagonalna što je postignuto dodavanjem svih vrijednosti redka elementu na dijagonali u tom redku. Koristeći (3.4), za dijagonalne elemente *”lumped”* masene matrice dobivamo

$$\mathcal{L}_{ii} = \sum_k \mathcal{M}_{ik} = \sum_k \int_{\Omega} \phi_k \phi_i dx = \int_{\Omega} \sum_k \phi_k \phi_i dx = \int_{\Omega} \phi_i dx.$$

Pokazuje se da za nelinearne probleme primjena "lumped" masene matrice ima značajne računске prednosti u odnosu na primjenu konzistentne masene matrice. Zamjenimo li \mathcal{M} sa \mathcal{L} , izrazi (3.7) i (3.8) prelaze u

$$\begin{aligned} \Phi V_i \frac{dS_{w,i}^h}{dt} + \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^h) \mathbb{K}(\nabla p_g^h - \nabla p_c(S_w^h)) \cdot \nabla \phi_i dx - \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^h) \rho_w^h \mathbb{K} \vec{g}^h \cdot \nabla \phi_i dx \\ = \int_{\Omega} r_w^h \phi_i dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{wu}^h \phi_i d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_w^h \phi_i d\sigma, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} -\Phi V_i \frac{dS_{w,i}^h}{dt} + \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^h) \mathbb{K} \nabla p_g^h \cdot \nabla \phi_i dx - \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^h) \rho_g^h \mathbb{K} \vec{g}^h \cdot \nabla \phi_i dx \\ = \int_{\Omega} r_g^h \phi_i dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{gu}^h \phi_i d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_g^h \phi_i d\sigma, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdje je $V_i = \int_{\Omega} \phi_i dx$.

Konstrukcija prostora konačnih elemenata RT_0^h pomoću Raviart-Thomasovih elemenata RT_0 na trokutima

Ponovno pretpostavljamo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena, poligonalna domena te \mathcal{T}_h jedna njena triangulacija trokutima. Jednako kao i prije sa \mathbb{P}_k označavamo prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog k u \mathbb{R}^2 i $\mathbb{P}_k(T) = \{p|_T : p \in \mathbb{P}_k\}$. Uvodimo još i oznaku $\widetilde{\mathbb{P}}_k$ koja predstavlja prostor svih homogenih polinoma stupnja k .

Prije nego što definiramo Raviart-Thomasov konačni element uvodimo sljedeći prostor funkcija za $T \in \mathcal{T}_h$ i $k \in \mathbb{N}_0$

$$R_k(\partial T) = \left\{ \varphi \in L^2(\partial T) : \varphi|_e \in \mathbb{P}_k(e), e \in \mathcal{E}(T) \right\}. \quad (3.12)$$

Raviart-Thomasov konačni element $(T, RT_k(T), \Sigma_T)$ za trokut T je zadan sa

$$\begin{aligned} RT_k(T) = \mathbb{P}_k(T)^2 + \mathbf{x} \widetilde{\mathbb{P}}_k(T) \\ \Sigma_T = \left\{ \int_{\partial T} \vec{q} \cdot \vec{n} p_k d\sigma, \int_T \vec{q} \cdot p_{k-1} d\mathbf{x} : \vec{q} \in RT_k(T), p_k \in R_k(\partial T), p_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}(T)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdje \vec{n} predstavlja vanjsku normalu na $e \in \mathcal{E}(T)$. Vrijedi $\dim RT_k(T) = (k+1) + (k+3)$. Element $(T, RT_k(T), \Sigma_T)$ zadovoljava svojstvo unisolvantnosti. Također se može pokazati

da za svako $\vec{q} \in RT_k(T)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{q} &\in \mathbb{P}_k(T) \\ \vec{n} \cdot \vec{q}|_{\partial T} &\in R_k(\partial T). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sada možemo definirati prostor Raviart-Thomasovih konačnih elemenata RT^h ,

$$RT^h = \left\{ \vec{q} \in L^2(\Omega)^2 : \vec{q}|_T \in RT_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (3.15)$$

Ako za globalne stupnjeve slobode uzmemo uniju lokalnih stupnjeva slobode danih u (3.13) tada vrijedi $RT^h \subset H(\operatorname{div}; \Omega)$, (vidi [4]).

Pogledajmo slučaj kada je $k = 0$. Tada je za $T \in \mathcal{T}_h$

$$R_0(\partial T) = \left\{ \varphi \in L^2(\partial T) : \varphi|_e \in \mathbb{P}(e), e \in \mathcal{E}(T) \right\}. \quad (3.16)$$

Nadalje, Raviart-Thomasov konačni element $(T, RT_k(T), \Sigma_T)$ je dan sa

$$\begin{aligned} RT_0(T) &= \vec{a} + b\mathbf{x} \\ \Sigma_T &= \left\{ \int_{e_1} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma, \int_{e_2} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma, \int_{e_3} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma, \partial T = e_1 \cup e_2 \cup e_3 \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Odgovarajući prostor RT_0 elemenata je

$$RT_0^h = \left\{ \vec{q} \in L^2(\Omega)^2 : \vec{q}|_T \in RT_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (3.18)$$

Trebamo još odrediti bazu za prostor RT_0^h . Prirodno se nameće baza vektorskih funkcija $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_M \in RT_0^h$ sa svojstvom

$$\int_{e_i} \vec{r}_j \cdot \vec{n}_i d\sigma = \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

gdje je $e_i \in \mathcal{E}$ a \vec{n}_i jedinična normala na rub e_i . Ovako definirana baza je jedinstveno određena ako je za svaki brid $e_i \in \mathcal{E}$ smjer njegove normale \vec{n}_i zadan. Problem zadavanja normale možemo riješiti koristeći numeraciju vrhova triangulacije \mathcal{T}_h . Brid e_i se može interpretirati kao vektor \vec{e}_i koji ima smjer od vrha s manjim indeksom prema vrhu s većim indeksom i tada možemo staviti

$$\vec{n}_i = \frac{\vec{n}_i}{\|\vec{n}_i\|}, \quad \text{gdje je } \vec{n}_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{e}_j. \quad (3.20)$$

Primijetimo da je nosač bazne funkcije \vec{r}_j mali, sastoji se od najviše dva trokuta koji imaju jedan zajednički brid e_j . Dakle, u prostoru RT_0^h samo pronašli bazu $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_M\}$ te sada svaku funkciju $\vec{q}^h \in RT_0^h$ možemo prikazati kao

$$\vec{q}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M q_j^h \vec{r}_j(\mathbf{x}). \quad (3.21)$$

Prostorna diskretizacija zadaće (2.24)

Do sada smo uveli sljedeće prostore konačnih elemenata

$$\begin{aligned} V^h &= \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in V_T, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ RT_0^h &= \{\vec{q} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \vec{q}|_T \in RT_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \end{aligned}$$

koji su zadovoljavali $V^h \subset H^1(\Omega)$ i $RT_0^h \subset H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}; \Omega)$. Uvedimo još i prostor

$$W^h = \{w \in L^2(\Omega) : \exists \alpha_T \in \mathbb{R} \text{ t.d. } w|_T = \alpha_T, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Prostor W^h sačinjavaju funkcije koje su konstante po trokutima te imamo $W^h \subset L^2(\Omega)$.

Kombinacija mješovite i standardne metode konačnih elemenata

Jednadžbu za tlak zadaće (2.13) rješavamo mješovitom metodom konačnih elemenata a jednadžbu za zasićenje rješavamo standardnom metodom konačnih elemenata. Koristimo se već izvedenom varijacijskom zadaćom (2.24). Svaku funkciju $\vec{q}_t \in H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}; \Omega)$ možemo po volji točno aproksimirati funkcijom $\vec{q}_t^h \in RT_0^h$ na dovoljno finoj mreži. Nadalje, funkcije $p, p_0 \in L^2(\Omega)$ aproksimiramo funkcijama $p^h, p_0^h \in W^h$ dok funkcije $S_w, S_{w0} \in V_w$ aproksimiramo funkcijama $S_w^h, S_{w0}^h \in V_w^h$ jednako kao kod prostorne diskretizacije zadaće (2.9).

Za zadaću (2.24) odgovarajuća aproksimativna zadaća glasi

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Naći } \vec{q}_t^h \in RT_0^h, p^h \in W^h, S_w^h \in C^1([0, T]; V_w^h) \\
 \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_t^h \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (r_w^h + r_g^h) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W^h \\
 \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda(S_w^h)} \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t^h \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \vec{\psi} dx \\
 = \int_{\Omega} \rho(S_w^h) \vec{g} \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Gamma_D} p_{bd}^h \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad \forall \vec{\psi} \in RT_0^h \\
 \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial S_w^h}{\partial t} \eta dx + \int_{\Omega} (f_w(S_w^h) \vec{q}_t^h + b_g(S_w^h) \mathbb{K} \vec{g}) \cdot \nabla \eta dx + \int_{\Omega} a(S_w^h) \mathbb{K} \nabla S_w^h \cdot \nabla \eta dx \\
 = \int_{\Omega} r_w^h \eta dx, \quad \forall \eta \in V^h \\
 p^h|_{t=0} = p_0^h, \quad S_w^h|_{t=0} = S_{w0}^h.
 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Ukoliko se za rješavanje jednadžbe za zasićenje odlučimo za Standardnu Galerkinovu metodu, jednu od metoda konačnih elemenata, jednadžba (3.22)₃ prelazi u

$$\begin{aligned}
 & \Phi \sum_{j \in \eta_i} \frac{dS_{w,j}^h}{dt} \mathcal{M}_{ij} dx + \int_{\Omega} (f_w(S_w^h) \vec{q}_t^h + b_g(S_w^h) \mathbb{K} \vec{g}) \cdot \nabla \phi_i dx + \int_{\Omega} a(S_w^h) \mathbb{K} \nabla S_w^h \cdot \nabla \phi_i dx \\
 & = \int_{\Omega} r_w^h \phi_i dx, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdje je $\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx$. Primjenom "mass lumpinga" na (3.23) dobivamo

$$\begin{aligned}
 & \Phi V_i \frac{dS_{w,i}^h}{dt} + \int_{\Omega} (f_w(S_w^h) \vec{q}_t^h + b_g(S_w^h) \mathbb{K} \vec{g}) \cdot \nabla \phi_i dx + \int_{\Omega} a(S_w^h) \mathbb{K} \nabla S_w^h \cdot \nabla \phi_i dx \\
 & = \int_{\Omega} r_w^h \phi_i dx, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdje je $V_i = \int_{\Omega} \phi_i dx$. Prednosti ove metode su bolja aproksimacija totalne brzine i lakša separacija dviju jednadžbi. U zadanom trenutku t moguće je za poznati $S_w(t)$ riješiti zadaću (3.22)₁ i (3.22)₂, koja je sada linearna, te izračunati \vec{q}_t^h u trenutku t a potom prijeći na rješavanje zadaće (3.22)₃ koja postaje nelinearna jednadžba tipa konvekcije-difuzije za S_w .

Kombinacija mješovite metode konačnih elemenata i metode konačnih volumena

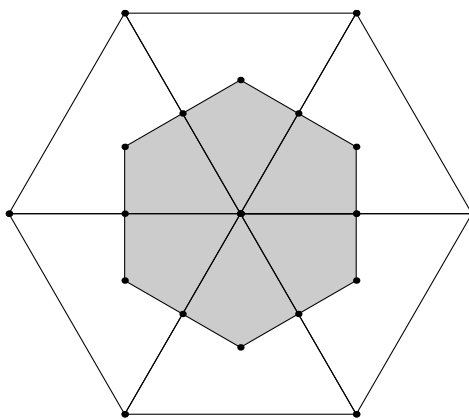
Ponekad se za rješavanje zadaće (2.13) ne koriste samo metode konačnih elemenata već se kombinira mješovita metoda konačnih elemenata sa metodom konačnih volumena. Dakle, jednačbu za tlak zadaće (2.13) rješavamo kao i prije mješovitom metodom konačnih elemenata dok ćemo za rješavanje jednačbe za zasićenje upotrijebiti metodu konačnih volumena. Opišimo ukratko metodu konačnih volumena.

Metoda konačnih volumena Za početak trebamo napraviti konačnu subdiviziju domene $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koja zadovoljava sljedeće uvjete

- $\bar{\Omega} = \bigcup_i V_i$,
- Svaki $V_i \subset \bar{\Omega}$ je zatvoren, ograničen i poligonalan skup,
- Za svaka dva različita $V_1, V_2 \subset \bar{\Omega}$ vrijedi $Int(V_1) \cap Int(V_2) = \emptyset$.

V_i nazivamo *kontrolnim volumenom*. Subdiviziju domene Ω je moguće načiniti na više načina što dovodi do različitih metoda. Ovdje promatramo metodu konačnih volumena centriranu u vrhovima.

U skladu s prethodno uvedenim oznakama, neka je \mathcal{T}_h triangulacija domene Ω trokutima, \mathcal{N} skup vrhova triangulacije \mathcal{T}_h , η_i skup susjednih vrhova vrha a_i te \mathcal{E} skup svih bridova triangulacije \mathcal{T}_h . Fiksirajmo $a_i \in \mathcal{N}$. Neka $\bar{a}_i a_j \in \mathcal{E}$ predstavlja stranicu trokuta s vrhovima a_i i a_j . Kontrolni volumen V_i oko vrha a_i konstruiramo tako da spojimo težišta trokuta, čiji je jedan vrh a_i , s polovištima bridova $\bar{a}_i a_j \in \mathcal{E}$, gdje je $a_j \in \eta_i$.



Slika 3.2: Kontrolni volumen

Ideju metode konačnih volumena prezentiramo na jednadžbi zakona sačuvanja veličine q , u općem obliku

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} \vec{F}(x, t) = f(x, t), \quad (3.25)$$

gdje je \vec{F} protok (flux) veličine q . Općenito, q može biti masa, energija i slično.

Jednadžbu (3.25) integriramo po proizvoljnom kontrolnom volumenu V_i

$$\int_{V_i} \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) dx + \int_{V_i} \operatorname{div} \vec{F}(x, t) dx = \int_{V_i} f(x, t) dx. \quad (3.26)$$

Sljedeći korak je primjena Teorema o divergenciji

$$\int_{V_i} \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\partial V_i} \vec{F}(x, t) \cdot \vec{n} dx = \int_{V_i} f(x, t) dx. \quad (3.27)$$

Integriranjem po svim kontrolnim volumenima dolazimo do sistema linearnih jednadžbi.

Opisanu metodu konačnih volumena primjenjujemo na jednadžbu za zasićenje

$$\Phi \frac{\partial S_w^h}{\partial t} + \operatorname{div} (f_w(S_w^h) \vec{q}_t^h + b_g(S_w^h) \mathbb{K} \vec{g}) = \operatorname{div} (a(S_w^h) \mathbb{K} \nabla S_w^h) + r_w, \quad (3.28)$$

čime dolazimo do

$$\int_{V_i} \Phi \frac{\partial S_w^h}{\partial t} dx + \int_{V_i} (f_w(S_w^h) \vec{q}_t^h + b_g(S_w^h) \mathbb{K} \vec{g} - a(S_w^h) \mathbb{K} \nabla S_w^h) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{V_i} r_w dx. \quad (3.29)$$

Varijable S_w^h i dalje uzimamo iz prostora P1 konačnih elemenata ali smo promijenili način na koji definiramo aproksimativni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi. Prednost korištenja metode konačnih volumena pred metodom konačnih elemenata se sastoji u sljedećem: metoda konačnih volumena neposredno izražava diskretan zakon sačuvanja mase na lokalnoj razini, dok metoda konačnih elemenata izražava zakon sačuvanja mase samo na globalnoj razini, tj. na čitavoj domeni Ω .

3.2 Vremenska diskretizacija

Promotrimo jednadžbu oblika

$$\frac{du}{dt} = f(u). \quad (3.30)$$

Primjenom metode konačnih diferencija na (3.30) doći ćemo do

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f(u^n). \quad (3.31)$$

Ukoliko uzmemo $m = n$ jednadžba (3.31) predstavlja *eksplicitnu Eulerovu metodu* dok za $m = n + 1$ predstavlja *implicitnu Eulerovu metodu*. Sa u^n i u^{n+1} smo označili rješenja na n -tom odnosno $(n + 1)$ -om vremenskom sloju a Δt predstavlja korak vremenske diskretizacije. Eksplicitna Eulerova metoda je uvjetno stabilna, za razliku od implicitne Eulerove metode koja je bezuvjetno stabilna.

Vremenska diskretizacija zadaće (3.6)

Zadaću (2.2) smo transformirali u aproksimativnu varijacijsku zadaću na koju smo primijenili Standardnu Galerkinovu metodu a zatim i "mass lumping" čime smo došli do sustava dviju običnih diferencijalnih jednadžbi po vremenskoj varijabli t :

$$\begin{aligned}
 & \Phi V_i \frac{dS_{w,i}^h}{dt} + \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^h) \mathbb{K} (\nabla p_g^h - \nabla p_c(S_w^h)) \cdot \nabla \phi_i dx - \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^h) \rho_w^h \mathbb{K} \vec{g}^h \cdot \nabla \phi_i dx \\
 & = \int_{\Omega} r_w^h \phi_i dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{wu}^h \phi_i d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_w^h \phi_i d\sigma, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
 & -\Phi V_i \frac{dS_{w,i}^h}{dt} + \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^h) \mathbb{K} \nabla p_g^h \cdot \nabla \phi_i dx - \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^h) \rho_g^h \mathbb{K} \vec{g}^h \cdot \nabla \phi_i dx \\
 & = \int_{\Omega} r_g^h \phi_i dx - \int_{\Gamma_{N1}} F_{gu}^h \phi_i d\sigma - \int_{\Gamma_{N2}} F_g^h \phi_i d\sigma, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Primjenom eksplicitne Eulerove metode na jednadžbe (3.32) uvjet stabilnosti je restriktivniji negoli primjenom implicitne Eulerove metode, stoga ćemo za njihovo rješavanje koristiti implicitnu Eulerovu metodu. U nastavku, zbog jednostavnijeg zapisa, ne naglašavamo pripadnost funkcija aproksimativnom prostoru V^h .

Svedemo li prvo jednadžbe (3.32) na oblik (3.30) a zatim primijenimo metodu (3.31)

dobit ćemo

$$\begin{aligned}
 S_{w,i}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^{n+1}) \mathbb{K} (\nabla p_g^{n+1} - \nabla p_c(S_w^{n+1})) \cdot \nabla \phi_i dx - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^{n+1}) \rho_w^{n+1} \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \phi_i dx \\
 - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} r_w^{n+1} \phi_i dx + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N1}} F_{wu}^{n+1} \phi_i d\sigma + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N2}} F_w^{n+1} \phi_i d\sigma = S_{w,i}^n, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \\
 S_{w,i}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^{n+1}) \mathbb{K} \nabla p_g^{n+1} \cdot \nabla \phi_i dx + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^{n+1}) \rho_g^{n+1} \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \phi_i dx \\
 + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} r_g^{n+1} \phi_i dx - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N1}} F_{gu}^{n+1} \phi_i d\sigma - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N2}} F_g^{n+1} \phi_i d\sigma = S_{w,i}^n, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Vremenska diskretizacija zadaće (3.22)

U prvom poglavlju smo izveli matematički model u formulaciji s globalnim tlakom (1.44). Model se sastojao od dvije diferencijalne jednačbe, jedne za tlak i druge za zasićenje. Glavna prednost ovako formuliranog matematičkog modela je mogućnost sekvencijalnog rješavanja njegovih jednačbi. Uobičajeno se koristi IMPES metoda, (eng. IMplicit on Pressure, EXplicit on Saturation). Kao što samo ime metode govori, jednačbu za tlak formuliramo implicitno dok jednačbu za zasićenje formuliramo eksplicitno. Zadaća (3.22) je u pogodnom obliku za primjenu IMPES metode. Promatramo jednačbe za tlak

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_t^h \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (r_w^h + r_g^h) \varphi dx \\
 \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda(S_w^h)} \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t^h \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \vec{\psi} dx = \int_{\Omega} \rho(S_w^h) \vec{g} \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Gamma_D} p_{bd}^h \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Formuliramo ih implicitno s tim da se u njihovom zapisu zasićenje S_w smatra poznatim pa ga stoga uzimamo na prethodnom vremenskom nivou u odnosu na tlak p . Ponovno, zbog jednostavnijeg zapisa, ne naglašavamo pripadnost funkcija aproksimativnim prostorima. Dakle, jednačbe za tlak prelaze u

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_t^{n+1} \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (r_w^{n+1} + r_g^{n+1}) \varphi dx \\
 \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda(S_w^n)} \mathbb{K}^{-1} \vec{q}_t^{n+1} \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Omega} p^{n+1} \operatorname{div} \vec{\psi} dx = \int_{\Omega} \rho(S_w^n) \vec{g} \cdot \vec{\psi} dx - \int_{\Gamma_D} p_{bd}^{n+1} \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Nadalje, enačbo za nasičenje (3.24) formuliramo eksplicitno

$$\begin{aligned}
S_{w,i}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} (f_w(S_w^n) \vec{q}_t^{n+1} + b_g(S_w^n) \mathbb{K} \vec{g}) \cdot \nabla \phi_i dx + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} a(S_w^n) \mathbb{K} \nabla S_w^n \cdot \nabla \phi_i dx \\
- \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} r_w^{n+1} \phi_i dx = S_{w,i}^n, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Jednačbe (3.36) se obično modificirajo tako da se difuzijski član u (3.36) tretira implicitno s tim da se zadrži linearnost jednačbi:

$$\begin{aligned}
S_{w,i}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} (f_w(S_w^n) \vec{q}_t^{n+1} + b_g(S_w^n) \mathbb{K} \vec{g}) \cdot \nabla \phi_i dx + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} a(S_w^n) \mathbb{K} \nabla S_w^{n+1} \cdot \nabla \phi_i dx \\
- \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} r_w^{n+1} \phi_i dx = S_{w,i}^n, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Na posve isti način se provodi vremenska diskretizacija jednačbe (3.29) proizašle iz metode konačnih volumena.

Poglavlje 4

Linearizacijske tehnike

Najčešće korišteni algoritmi za numeričko rješavanje nelinearnih spregnutih sustava, kao što je npr. sustav jednadžbi (3.33) su Picardove iteracije i Newtonova metoda. Newtonova metoda ima prednost pred Picardovim iteracijama zbog brže konvergencije prema rješenju. Naime, Newtonova metoda konvergira kvadratično prema rješenju ako je početna iteracija dovoljno blizu rješenja dok Picardove iteracije konvergiraju linearno. U primjenama se ipak često koriste Picardove iteracije zbog znatno jednostavnije implementacije.

4.1 Picardove iteracije

Promotrimo nelinearni sustav jednadžbi oblika

$$\mathcal{K}(u)u = \mathcal{R}(u). \quad (4.1)$$

U gornjoj notaciji nelinearnost se očituje u ovisnosti matrice \mathcal{K} o vektoru nepoznanica u . *Picardove iteracije* ili *jednostavne iteracije* za rješavanje sustava (4.1) se sastoje u uzastopnom rješavanju sustava jednadžbi

$$\mathcal{K}(u^k)u^{k+1} = \mathcal{R}(u^k), \quad (4.2)$$

gdje k predstavlja iteracijski korak. Dakle, iz poznatih vrijednosti iz k -tog iteracijskog koraka se računaju vrijednosti u $(k + 1)$ -om iteracijskom koraku. Postupak se ponavlja sve dok se ne postigne odgovarajuća točnost rješenja.

Za primjenu Picardovih iteracija na jednadžbe (3.33) koristit ćemo

$$\nabla p_c(S_w^h) = p'_c(S_w^h) \nabla S_w^h. \quad (4.3)$$

Uvrstimo li relaciju (4.3) u jednadžbu (3.33)₁ $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ dobit ćemo

$$\begin{aligned}
 S_{w,i}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^{n+1}) \mathbb{K} (\nabla p_g^{n+1} - p'_c(S_w^{n+1}) \nabla S_w^{n+1}) \cdot \nabla \phi_i dx \\
 - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^{n+1}) \rho_w^{n+1} \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \phi_i dx - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} r_w^{n+1} \phi_i dx \\
 + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N1}} F_{wu}^{n+1} \phi_i d\sigma + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N2}} F_w^{n+1} \phi_i d\sigma = S_{w,i}^n.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Primjenom metode (4.2) na jednadžbe (3.33) $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
 S_{w,i}^{n+1,k+1} + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^{n+1,k}) \mathbb{K} (\nabla p_g^{n+1,k+1} - p'_c(S_w^{n+1,k}) \nabla S_w^{n+1,k+1}) \cdot \nabla \phi_i dx \\
 = S_{w,i}^n + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_w(S_w^{n+1,k}) \rho_w^{n+1,k} \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \phi_i dx \\
 + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} r_w^{n+1,k} \phi_i dx - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N1}} F_{wu}^{n+1,k} \phi_i d\sigma - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N2}} F_w^{n+1,k} \phi_i d\sigma \\
 S_{w,i}^{n+1,k+1} - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^{n+1,k}) \mathbb{K} \nabla p_g^{n+1,k+1} \cdot \nabla \phi_i dx \\
 = S_{w,i}^n - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} \lambda_g(S_w^{n+1,k}) \rho_g^{n+1,k} \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \phi_i dx \\
 - \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Omega} r_g^{n+1,k} \phi_i dx + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N1}} F_{gu}^{n+1,k} \phi_i d\sigma + \frac{\Delta t}{\Phi V_i} \int_{\Gamma_{N2}} F_g^{n+1,k} \phi_i d\sigma.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Uočimo kako su svi nelinearni članovi izračunati u prethodnoj iteraciji, stoga je sustav (4.5) linearan. Za početnu iteraciju se koristi početni uvjet dan u (3.6).

Kriterij zaustavljanja postupka jednostavnih iteracija je dvostruk, ($u^{n,k} = (S_w^{n,k}, p_g^{n,k})$):

1. promatramo promjenu varijabli u svakoj iteraciji i zaustavljamo se kada je promjena u relativnom iznosu dovoljno mala

$$\left\| u^{n+1,k+1} - u^{n+1,k} \right\| < \epsilon \|u^n\|. \tag{4.6}$$

2. promatramo rezidual $\left\| \mathcal{K}(u^{n+1,k+1}) u^{n+1,k+1} - \mathcal{R}(u^{n+1,k+1}) \right\|$ i zaustavljamo se kada njegova vrijednost padne ispod zadane tolerancije

$$\left\| u^{n+1,k+1} - u^{n+1,k} \right\| < \epsilon \max \{ \|\mathcal{R}(u^n)\|, \|\mathcal{K}(u^n) u^n\| \}. \tag{4.7}$$

4.2 Newtonova metoda

Promatramo nelinearni sustav jednažbi oblika

$$f(u) = 0. \quad (4.8)$$

Newtonova metoda se bazira na razvoju nelinearne funkcije f u Taylorov red oko u^k , gdje u^k predstavlja vektor nepoznanica dobiven u k -tom iteracijskom koraku. Zadržavanjem samo linearnih izraza iz Taylorovog razvoja dolazimo do relacije

$$f(u^k) + f'(u^k)(u^{k+1} - u^k) = 0, \quad (4.9)$$

odnosno

$$u^{k+1} = u^k - (f'(u^k))^{-1} f(u^k). \quad (4.10)$$

Definiranjem $w = u^{k+1} - u^k$, metodu možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} f'(u^k)w &= -f(u^k) \\ u^{k+1} &= u^k + w. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Navedenu metodu je najlakše provesti na varijacijskoj formulaciji zadaće prije njene diskretizacije. Stoga se prisjetimo problema (2.9). Uvodimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(p_g, S_w) &= \Phi \int_{\Omega} \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx + \mathcal{A}_1(p_g, S_w, \varphi) - \mathcal{F}_1(\varphi), \quad \forall \varphi \in V \\ \mathcal{G}_2(p_g, S_w) &= -\Phi \int_{\Omega} \frac{\partial S_w}{\partial t} \varphi dx + \mathcal{A}_2(p_g, S_w, \varphi) - \mathcal{F}_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in V \end{aligned} \quad (4.12)$$

Kao i prije, za vremensku diskretizaciju koristimo implicitnu Eulerovu metodu (3.31) čime dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(p_g^{n+1}, S_w^{n+1}) &= \frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} S_w^{n+1} \varphi dx + \mathcal{A}_1(p_g^{n+1}, S_w^{n+1}, \varphi) - \mathcal{F}_1(\varphi) - \frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} S_w^n \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V^h \\ \mathcal{G}_2(p_g^{n+1}, S_w^{n+1}) &= -\frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} S_w^{n+1} \varphi dx + \mathcal{A}_2(p_g^{n+1}, S_w^{n+1}, \varphi) - \mathcal{F}_2(\varphi) + \frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} S_w^n \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V^h \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ovdje uzimamo da je test funkcija φ fiksirana a kasnije ćemo zaključak primijeniti na bazne funkcije iz prostora V^h . Na svakom vremenskom sloju trebamo riješiti sustav nelinearnih jednažbi. Promatramo rješenje na proizvoljnom vremenskom sloju, stoga uvodimo oznake $S = S_w^{n+1}$, $p = p_g^{n+1}$, $S_{old} = S_w^n$.

Neka je $[p^k, S^k]$ poznata aproksimacija rješenja jednadžbi

$$\mathcal{G}_i(p, S) = 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.14)$$

Sljedeću aproksimaciju tražimo u obliku

$$[p^{k+1}, S^{k+1}] = [p^k, S^k] + [\delta p, \delta S] = [p^k + \delta p, S^k + \delta S]. \quad (4.15)$$

Primijenom (4.11)₁ slijedi

$$\mathcal{G}_i(p^k, S^k) + \mathcal{D}\mathcal{G}_i(p^k, S^k)[\delta p, \delta S] \approx 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.16)$$

Definirajmo funkcije

$$g_i(r) := \mathcal{G}_i(p^k + r\delta p, S^k + r\delta S), \quad i \in \{1, 2\}, \quad (4.17)$$

te ih razvijmo u Taylorov red oko 0

$$g_i(1) \approx g_i(0) + g'_i(0), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.18)$$

Usporedbom sa (4.16) dolazimo do zaključka

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{G}_i(p^k, S^k)[\delta p, \delta S] &= g'_i(0) \\ &= \frac{d}{dr}\mathcal{G}_i(p^k + r\delta p, S^k + r\delta S)\Big|_{r=0}, \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dakle, korekciju $[\delta p, \delta S]$ možemo dobiti računanjem

$$\mathcal{G}_i(p^k, S^k) + \frac{d}{dr}\mathcal{G}_i(p^k + r\delta p, S^k + r\delta S)\Big|_{r=0} = 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.20)$$

Raspisivanjem (4.20) te koristeći (2.8) dobivamo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} \delta S \varphi dx + \int_{\Omega} \lambda'_w(S^k) \delta S \mathbb{K}(\nabla p^k - \nabla p_c(S^k)) \cdot \nabla \varphi dx \\ & + \int_{\Omega} \lambda_w(S^k) \mathbb{K}(\nabla \delta p - \nabla p'_c(S^k) \delta S - p'_c(S^k) \nabla \delta S) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda'_w(S^k) \rho_w \delta S \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \varphi dx \\ & = \frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} (S_{old} - S^k) \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda_w(S^k) \mathbb{K}(\nabla p^k - \nabla p_c(S^k)) \cdot \nabla \varphi dx \\ & + \int_{\Omega} \lambda_w(S^k) \rho_w \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \varphi dx + \mathcal{F}_1(\varphi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} \delta S \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda'_g(S^k) \delta S \mathbb{K} \nabla p^k \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda_g(S^k) \mathbb{K} \nabla \delta p \cdot \nabla \varphi dx \\
& + \int_{\Omega} \lambda'_g(S^k) \rho_g \delta S \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \varphi dx = \frac{\Phi}{\Delta t} \int_{\Omega} (S_{old} - S^k) \varphi dx + \int_{\Omega} \lambda_g(S^k) \mathbb{K} \nabla p^k \cdot \nabla \varphi dx \quad (4.22) \\
& - \int_{\Omega} \lambda_g(S^k) \rho_g \mathbb{K} \vec{g} \cdot \nabla \varphi dx - \mathcal{F}_2(\varphi).
\end{aligned}$$

Kako je $[p^k, S^k]$ poznata aproksimacija rješenja ona zadovoljava sljedeće rubne uvjete

$$p^k = p_{bd} \quad \text{na } \Gamma_D, \quad S^k = S_{bd} \quad \text{na } \Gamma_D. \quad (4.23)$$

Kako te iste rubne uvjete treba zadovoljavati i sljedeća aproksimacija rješenja $[p^{k+1}, S^{k+1}]$ iz (4.15) slijedi da korekcija $[\delta p, \delta S]$ treba zadovoljavati

$$\delta p = 0 \quad \text{na } \Gamma_D, \quad \delta S = 0 \quad \text{na } \Gamma_D. \quad (4.24)$$

Kao i kod Picardovih iteracija, iteracije zaustavljamo kada postignemo željenu točnost ϵ . Najčešće korišteni kriteriji zaustavljanja su

$$\|\delta p\| + \|\delta S\| < \epsilon \quad (4.25)$$

ili

$$\|\mathcal{G}_i(p, S)\| < \epsilon. \quad (4.26)$$

Poglavlje 5

Numerički primjeri

U ovom poglavlju ćemo primijeniti metode dobivene u prethodnim poglavljima na odabrane test probleme. Simulacijski programi su napisani pomoću software-a *FreeFem++*, verzija 3.8. Općenito, *FreeFem++* je software sa vlastitim programskim jezikom visoke razine za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi a bazira se na metodama konačnih elemenata. Za vizualizaciju je korišten program *ParaView*.

5.1 Skaliranje jednačbi dvofaznog toka

Kako ne bismo provodili račun s izuzetno malim veličinama potrebno je skalirati diferencijalne jednačbe. Postupak skaliranja ćemo provesti na diferencijalnim jednačbama u formulaciji tlak-zasićenje i globalni tlak-zasićenje. Obje formulacije su zapisane u konzistentnom sustavu jedinica. Pretpostavimo da je to MKS sustav. Korištene veličine su stoga izražene u mjernim jedinicama prikazanim u Tablici 5.1. Prisjetimo se da su zasićenje S i propusnost Φ bezdimenzionalne veličine.

x	t	\vec{q}_t	p	\vec{g}	\mathbb{K}	μ	ρ	r
$[m]$	$[s]$	$[m/s]$	$[Pa]$	$[m/s^2]$	$[m^2]$	$[Pas]$	$[kg/m^3]$	$[1/s]$

Tablica 5.1: Mjerne jedinice, MKS sustav

Diferencijalne jednačbe unutar navedenih formulacija želimo zapisati u praktičnom sustavu mjernih jedinica. Kako on nije konzistentan pojavit će se određeni faktor u jednačbama.

Skaliranje se provodi uvođenjem bezdimenzionalnih varijabli koje povezuju vrijednosti u starom sustavu sa vrijednostima u novom sustavu. Vrijednosti u starom sustavu, u našem

x	t	\vec{q}_t	p	\vec{g}	\mathbb{K}	μ	ρ	r
[m]	[dan]	[m/dan]	[MPa]	[m/s ²]	[mD]	[cP]	[kg/m ³]	[1/dan]

Tablica 5.2: Mjerne jedinice, praktični sustav

slučaju MKS sustavu, ćemo označiti sa crticom. Uvodimo sljedeće bezdimenzionalne varijable:

$$t_0 = \frac{t'}{t}, \quad q_0 = \frac{q'}{q}, \quad p_0 = \frac{p'}{p}, \quad k_0 = \frac{\mathbb{K}'}{\mathbb{K}}, \quad \mu_0 = \frac{\mu'}{\mu}, \quad r_0 = \frac{r'}{r}. \quad (5.1)$$

Uz odabir praktičnog sustava mjernih jedinica kao u Tablici 5.2 vrijedi

$$q_0 t_0 = 1, \quad r_0 t_0 = 1.$$

Formulacija tlak-zasićenje

Poštujući prethodno uvedene oznake polazimo od sljedećih jednažbi zapisanih u MKS sustavu.

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t'} - \operatorname{div} \left[\lambda'_w(S_w) \mathbb{K}' (\nabla p'_g - \nabla p'_c(S_w) - \rho_w \vec{g}) \right] = r'_w \\ -\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t'} - \operatorname{div} \left[\lambda'_g(S_w) \mathbb{K}' (\nabla p'_g - \rho_g \vec{g}) \right] = r'_g. \end{cases} \quad (5.2)$$

Vrijede sljedeće relacije

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_w}{\partial t'} &= \frac{1}{t_0} \frac{\partial S_w}{\partial t} \\ \lambda'_w(S_w) &= \frac{1}{\mu_0} \lambda_w(S_w), & \lambda'_g(S_w) &= \frac{1}{\mu_0} \lambda_g(S_w) \\ \nabla p'_g &= p_0 \nabla p_g, & \nabla p'_c(S_w) &= p_0 \nabla p_c(S_w) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Primijenimo (5.3) na sustav jednažbi (5.2):

$$\begin{cases} \frac{\Phi}{t_0} \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\frac{1}{\mu_0} \lambda_w(S_w) k_0 \mathbb{K} (p_0 \nabla p_g - p_0 \nabla p_c(S_w) - \rho_w \vec{g}) \right] = r_0 r_w \\ -\frac{\Phi}{t_0} \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\frac{1}{\mu_0} \lambda_g(S_w) k_0 \mathbb{K} (p_0 \nabla p_g - \rho_g \vec{g}) \right] = r_0 r_g. \end{cases} \quad (5.4)$$

Sređivanjem dolazimo do:

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_w(S_w) \frac{k_0 p_0 t_0}{\mu_0} \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \frac{1}{p_0} \vec{g} \right) \right] = r_w \\ -\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_g(S_w) \frac{k_0 p_0 t_0}{\mu_0} \mathbb{K} \left(\nabla p_g - \rho_g \frac{1}{p_0} \vec{g} \right) \right] = r_g. \end{cases} \quad (5.5)$$

U gornjim jednadžbama uočavamo faktor koji se pojavio uz propusnost \mathbb{K} . Nazivamo ga *Darcyjeva konstanta*

$$C_d = \frac{k_0 p_0 t_0}{\mu_0}. \quad (5.6)$$

Uvođenjem sljedećih veličina:

$$\tilde{\mathbb{K}} = C_d \mathbb{K}, \quad \tilde{\vec{g}} = \frac{1}{p_0} \vec{g} \quad (5.7)$$

dobivamo sustav u početnoj formi:

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_w(S_w) \tilde{\mathbb{K}} \left(\nabla p_g - \nabla p_c(S_w) - \rho_w \tilde{\vec{g}} \right) \right] = r_w \\ -\Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \operatorname{div} \left[\lambda_g(S_w) \tilde{\mathbb{K}} \left(\nabla p_g - \rho_g \tilde{\vec{g}} \right) \right] = r_g. \end{cases} \quad (5.8)$$

Formulacija globalni tlak-zasićenje

Polazimo od sljedećih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{q}'_t = r'_w + r'_g \\ \vec{q}'_t = -\lambda'(S_w) \mathbb{K}' (\nabla p' - \rho'(S_w) \vec{g}) \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t'} + \operatorname{div} (f'_w(S_w) \vec{q}'_t + b'_g(S_w) \mathbb{K}' \vec{g}) = \operatorname{div} (a'(S_w) \mathbb{K}' \nabla S_w) + r'_w \end{cases} \quad (5.9)$$

Koristeći (5.1) i (5.3) jednostavnim računom dobivamo sljedeće potrebne relacije:

$$\begin{aligned} \lambda'(S_w) &= \frac{1}{\mu_0} \lambda(S_w), \\ \rho'(S_w) &= \rho(S_w), \quad f'_w(S_w) = f_w(S_w), \\ b'_g(S_w) &= \frac{1}{\mu_0} b_g(S_w), \quad a'(S_w) = \frac{p_0}{\mu_0} a(S_w). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Uvrštavanjem izvedenih relacija dobivamo:

$$\begin{cases} \operatorname{div} q_0 \vec{q}_t = r_0 r_w + r_0 r_g \\ q_0 \vec{q}_t = -\frac{1}{\mu_0} \lambda(S_w) k_0 \mathbb{K} \left(p_0 \nabla p - \rho(S_w) \frac{1}{p_0} \vec{g} \right) \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f_w(S_w) q_0 \vec{q}_t + \frac{1}{\mu} b_g(S_w) k_0 \mathbb{K} \vec{g} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{p_0}{\mu_0} a(S_w) k_0 \mathbb{K} \nabla S_w \right) + r_0 r_w. \end{cases} \quad (5.11)$$

Sređivanjem jednažbi slijedi:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{q}_t = r_w + r_g \\ \vec{q}_t = -\lambda(S_w) \frac{k_0 p_0}{\mu_0 q_0} \mathbb{K} \left(\nabla p - \rho(S_w) \frac{1}{p_0} \vec{g} \right) \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \frac{k_0 p_0 t_0}{\mu_0} \mathbb{K} \frac{1}{p_0} \vec{g} \right) = \operatorname{div} \left(a(S_w) \frac{k_0 p_0 t_0}{\mu_0} \mathbb{K} \nabla S_w \right) + r_w. \end{cases} \quad (5.12)$$

Konačno, koristeći (5.6) i (5.7) vrijedi:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{q}_t = r_w + r_g \\ \vec{q}_t = -\lambda(S_w) \widetilde{\mathbb{K}} \left(\nabla p - \rho(S_w) \vec{g} \right) \\ \Phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f_w(S_w) \vec{q}_t + b_g(S_w) \widetilde{\mathbb{K}} \vec{g} \right) = \operatorname{div} \left(a(S_w) \widetilde{\mathbb{K}} \nabla S_w \right) + r_w. \end{cases} \quad (5.13)$$

5.2 Test primjeri

Izvedene metode primjenjujemo na dva test primjera. U oba testa fluidne faze su voda i nafta. Njihova svojstva su dana u Tablici 5.3. Očito, voda predstavlja vlažeću fazu dok nafta predstavlja nevlažeću fazu. Promatrat ćemo proces istiskivanja nevlažeće faze vlažećom, tj. istiskivanje nafte vodom. Pretpostavljamo da poroznu sredinu odlikuju ista svojstva u oba test primjera. Ona su dana u Tablici 5.4.

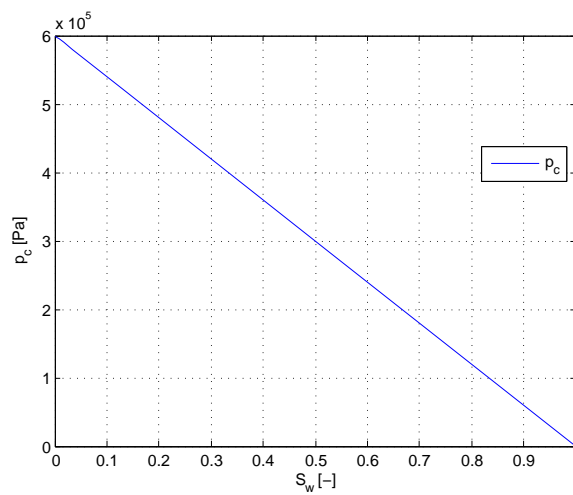
	voda	nafta
gustoća [kg/m^3]	$\rho_w = 996.1026$	$\rho_g = 856.0$
viskoznost [cP]	$\mu_w = 1.14$	$\mu_g = 0.9$

Tablica 5.3: Svojstva fluida

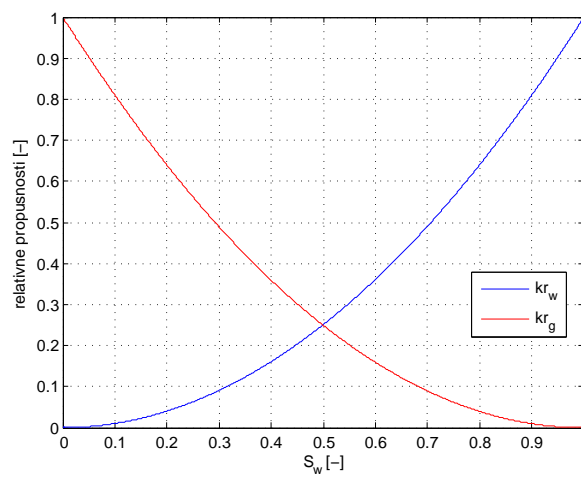
Funkcija kapilarnog tlaka koju ćemo koristiti je prikazana na Slici 5.1 dok su funkcije relativnih propusnosti prikazane na Slici 5.2. Gravitacijske efekte zanemarujemo.

poroznost	$\Phi = 0.3$
propusnost [mD]	$k = 10$

Tablica 5.4: Svojstva porozne sredine



Slika 5.1: Kapilarna krivulja



Slika 5.2: Relativne propusnosti

Test 1

Domena na kojoj rješavamo zadaću je kvadrat duljine stranice 100 m , $\Omega = (0, 100) \times (0, 100)$. U njegovom lijevom donjem kutu se nalazi ponor a u desnom gornjem kutu se nalazi izvor. Ponor predstavlja mjesto utiskivanja vode. Zadaću ćemo riješiti metodama opisanim u prethodnim poglavljima.

A) Prisjetimo se, matematičkom modelu u formulaciji tlak-zasićenje smo prvo pridružili početne i rubne uvjete. Za potrebe rješavanja ovog test primjera koristit ćemo početne i rubne uvjete dane u Tablici 5.5.

<i>početni tlak nevlažeće faze [MPa]</i>	$p_{g0} = 1.0$
<i>početno zasićenje vlažeće faze</i>	$S_{w0} = 0.6$
<i>ulazni tok nevlažeće faze</i>	$F_{gu} = -0.0$
<i>ulazni tok vlažeće faze</i>	$F_{wu} = -5.0$
<i>izlazni tlak nelažeće faze [MPa]</i>	$p_{g,bd} = 1.0$
<i>izlazno zasićenje vlažeće faze</i>	$S_{w,bd} = 0.6$

Tablica 5.5: Početni i rubni uvjeti

Zatim smo primijenili standardnu metodu konačnih elemenata. Za konstrukciju prostora konačnih elemenata koristili smo se Lagrangeovim P1 elementima na trokutima.

Postupak rješavanja dobivene zadaće u FreeFem++-u je sljedeći:

- Prvo definiramo ulazne podatke i potrebne funkcije, tj. relativne propusnosti, mobilnosti i kapilarni tlak.
- Zatim na domeni konstruiramo mrežu i definiramo prostore konačnih elemenata:

```
fespace Vh1(Th,P1);
fespace Vh2(Th,[P1,P1]);
```

- Definiramo varijacijsku formulaciju.

```
problem Prvi([p,S],[pt,St], solver=LU)
= int2d(Th, qft=qf1pTlump)(phi*S*pt/dt)
- int2d(Th, qft=qf1pTlump)(phi*Sold*pt/dt)
+ int2d(Th) ( lamw(Sk)*kt*( dx(p)*dx(pt)+dy(p)*dy(pt) )
- lamw(Sk)*kt*dpc(Sk)*( dx(S)*dx(pt)+dy(S)*dy(pt) ) )
+ int2d(Th) ( lamw(Sk)*row*kt*gt*dy(pt) )
```



```

+ int1d(Th,1)( Fwu*pt )

- int2d(Th, qft=qf1pTlump)(phi*S*St/dt)
+ int2d(Th, qft=qf1pTlump)(phi*Sold*St/dt)
+ int2d(Th)( lamg(Sk)*kt*( dx(p)*dx(St)+dy(p)*dy(St) ) )
+ int2d(Th)( lamg(Sk)*rog*kt*gt*dy(St) )
+ int1d(Th,1)( Fgu*St )

+ on(2, p=pbdi, S=Sbdi);

```

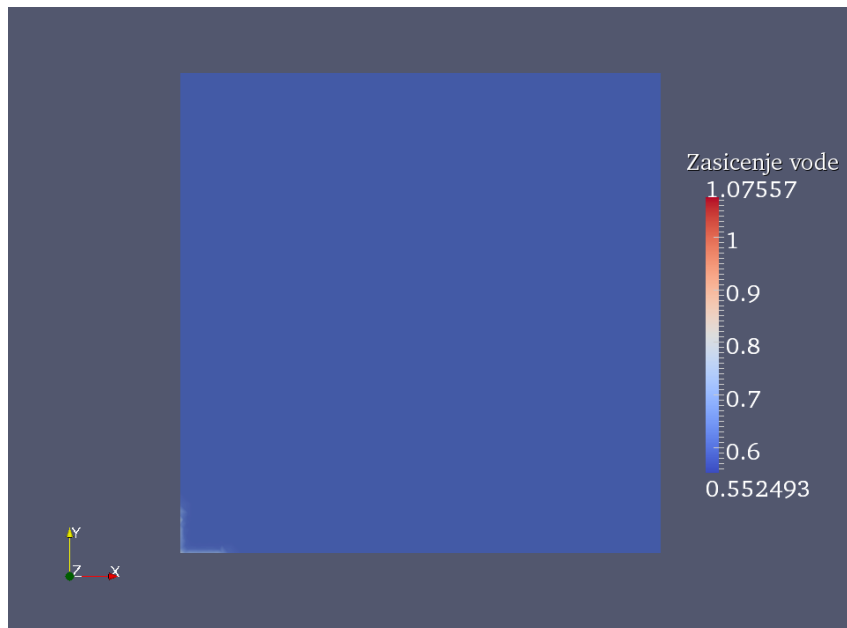
(Navedena varijacijska formulacija se dobiva u slučaju korištenja Picardovih iteracija kao linearizacijske tehnike.)

- Nadalje, na svakom vremenskom sloju rješavamo poviše definiranu zadaću.

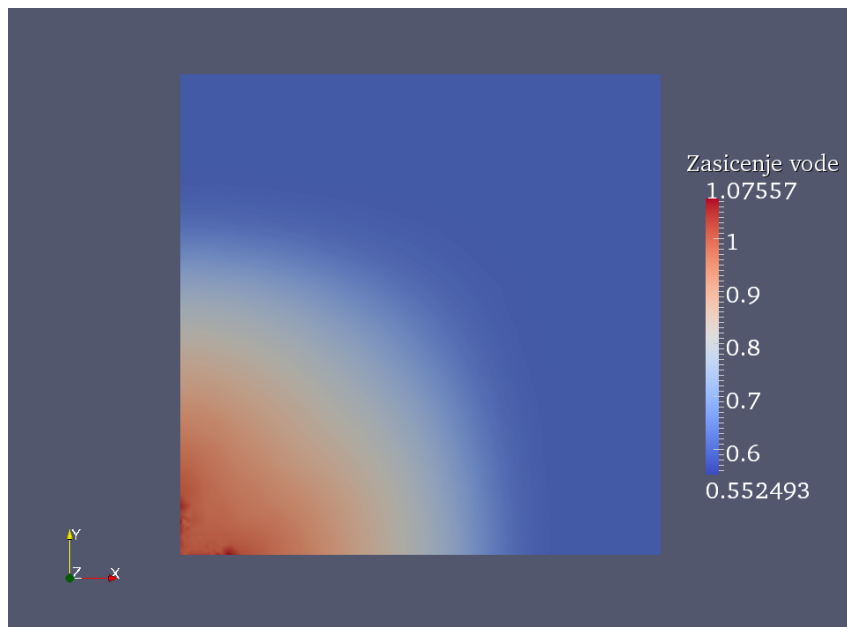
Zadaću smo rješavali koristeći obje linearizacijske tehnike opisane u Poglavlju 4. U slučaju korištenja Picardovih iteracija za dobivanje rješenja na nekom od vremenskih slojeva bilo je potrebno 6 do 8 iteracijskih koraka. Kod korištenja Newtonove metode za isto je bilo potrebno 2 do 3 iteracijska koraka. U oba slučaja dobiveni su jednaki rezultati.

Promatranja smo vršili u vremenskom periodu od $T = 200$ dana. Početni vremenski korak, do drugog dana, je 0.1 dan dok kasniji vremenski korak iznosi 0.2 dana.

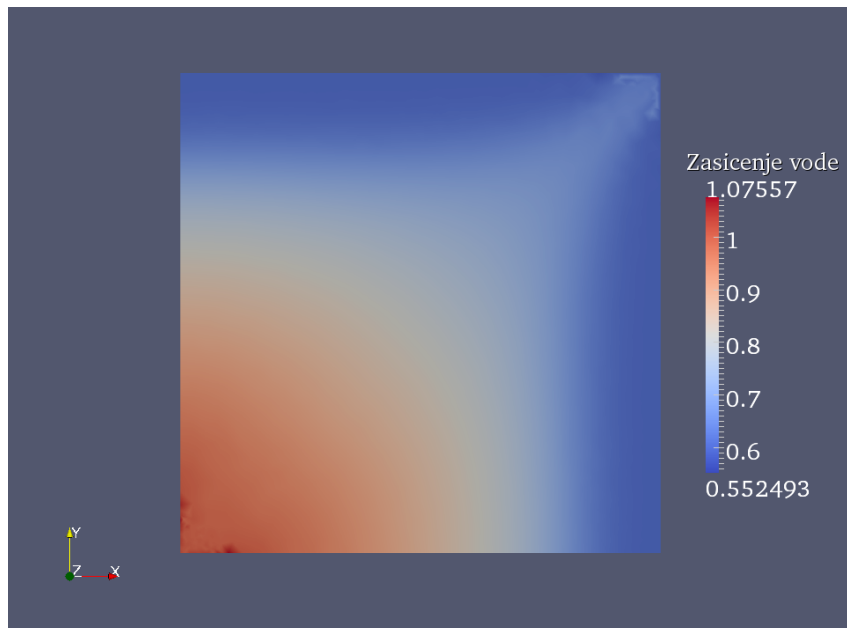
Za zasićenje vlažeće faze dobiveni su sljedeći rezultati:



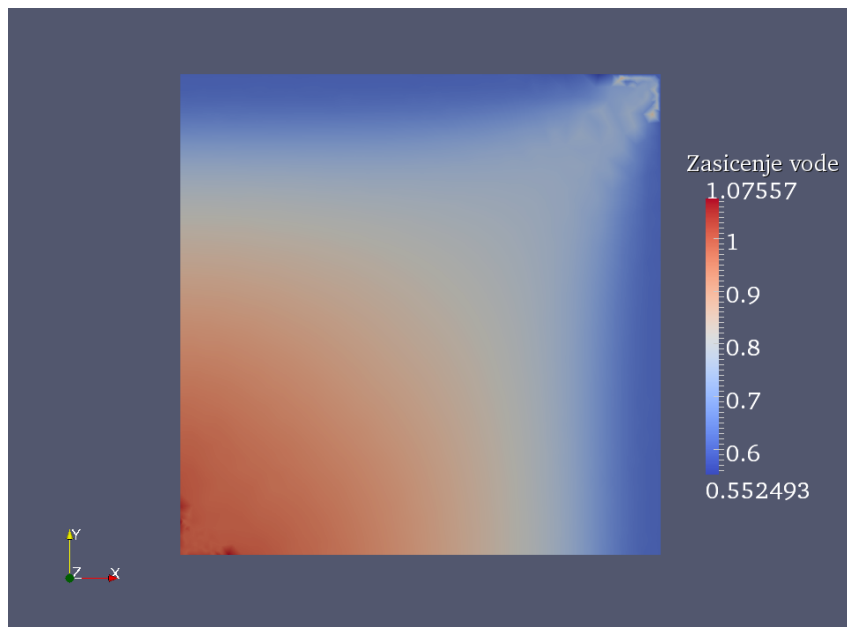
Slika 5.3: Zasićenje vode: T=0 dana



Slika 5.4: Zasićenje vode: T=75 dana



Slika 5.5: Zasićenje vode: T=150 dana

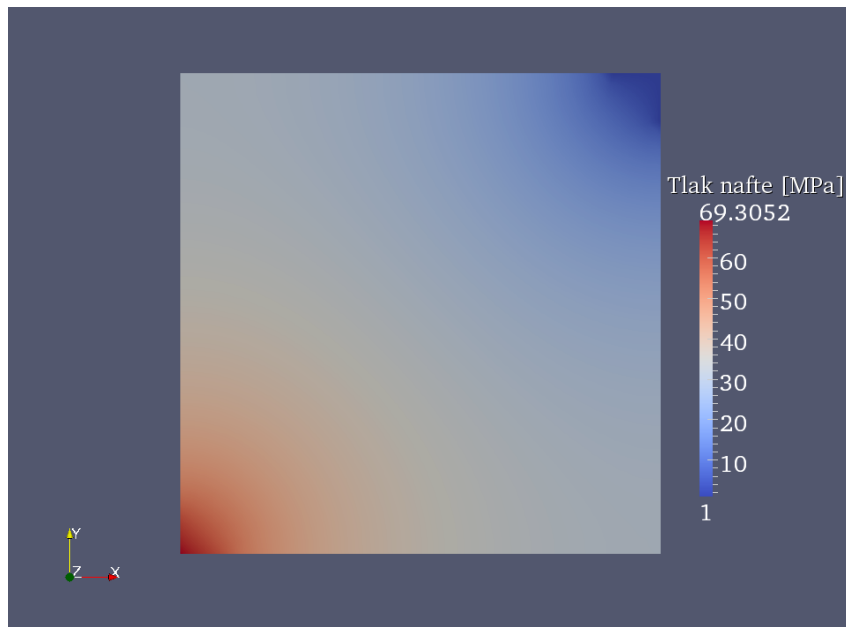


Slika 5.6: Zasićenje vode: T=200 dana

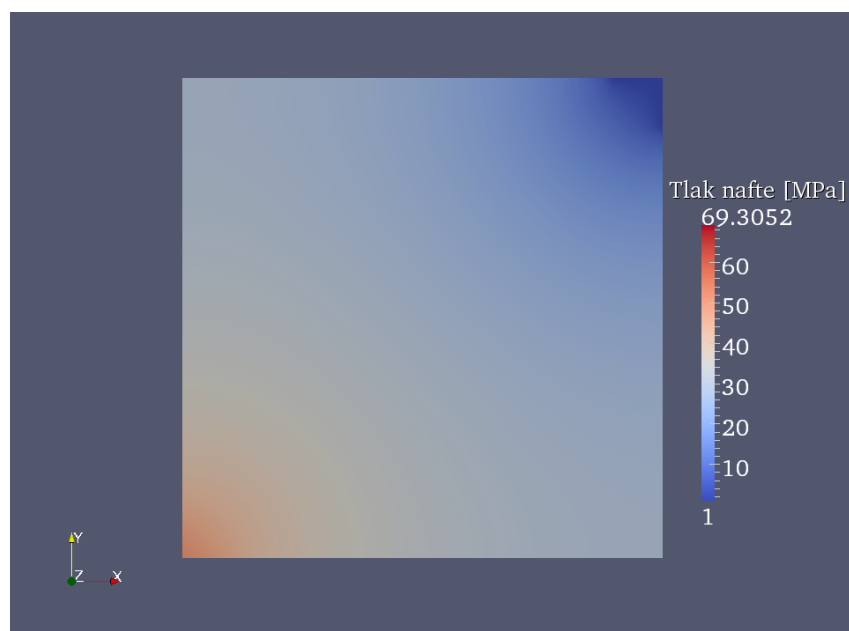
Na Slici 5.5 kao i na Slici 5.6 možemo uočiti male oscilacije u zasićenju na izlaznom dijelu granice. Te su oscilacije posljedica singulariteta u polju brzine \vec{q} u točkama promjene tipa rubnog uvjeta te činjenice da standardna metoda konačnih elemenata za zasićenje nije stabilizirana tzv. "upwind" tehnikom.

Stabilizacija "upwind" tehnikom je nužna pri velikim brzinama strujanja (u odnosu na veličine kapilarnog tlaka) jer je jednačba za zasićenje tipa konvekcije-difuzije, pri čemu difuzijski član dolazi od kapilarnog tlaka. Stabilizacija "upwind" tehnikom nije ovdje primijenjena budući da ju je teško implementirati u FreeFem++-u.

Tlak nevlažeće faze se tijekom vremena ne mijenja suviše. Stoga ga prikazujemo u početnom i krajnjem vremenskom trenutku našeg razmatranja.



Slika 5.7: Tlak nafte: T=0 dana



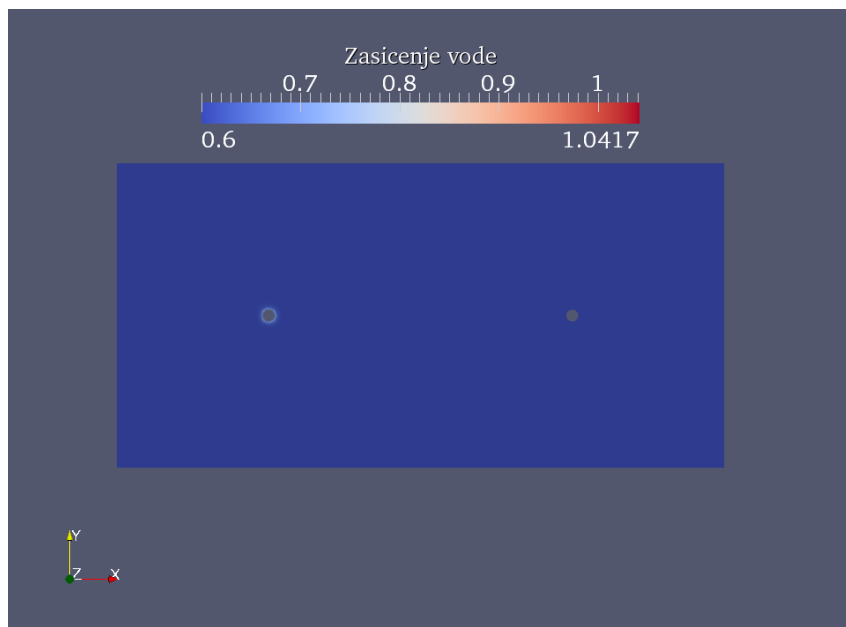
Slika 5.8: Tlak nafte: T=200 dana

Test 2

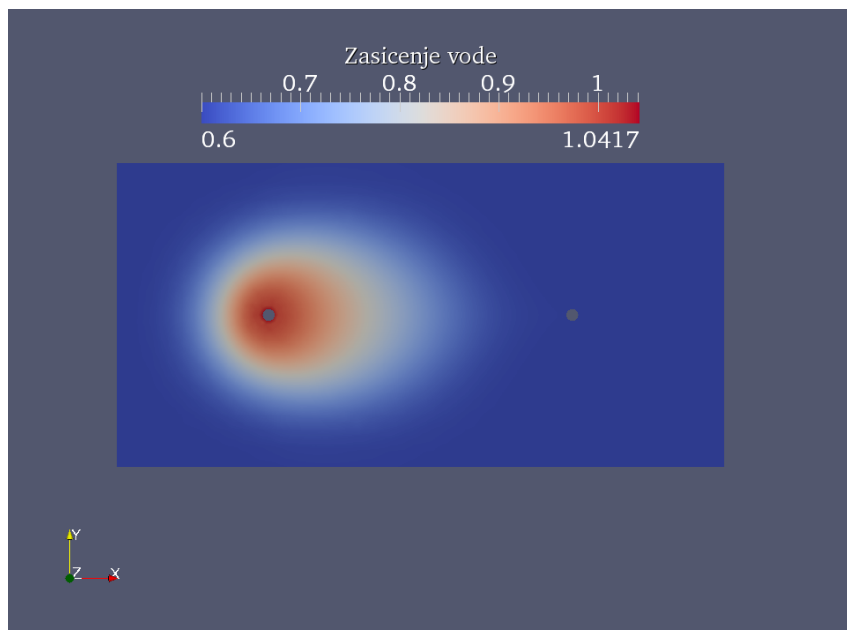
U ovom test primjeru domena je pravokutnik duljine stranica 100 m i 50 m , $\Omega = (0, 100) \times (0, 50)$. U unutrašnjosti se nalaze dvije bušotine, utisna i produkcijska. Kroz utisnu bušotinu utiskujemo vodu. Zadaću kao i prije rješavamo metodama izvedenim u prethodnim poglavljima.

A) Koristimo istu metodu rješavanja kao u A) kod Testa 1. Podatci za početne i rubne uvjete su dani u Tablici 5.5. Postupak rješavanja u FreeFem++-u je jednak.

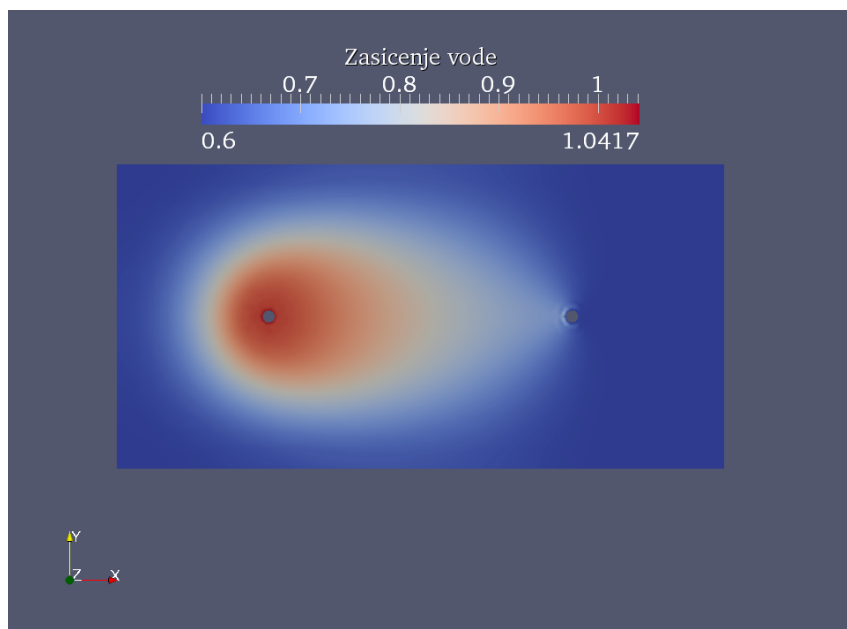
Dobiveni su sljedeći rezultati:



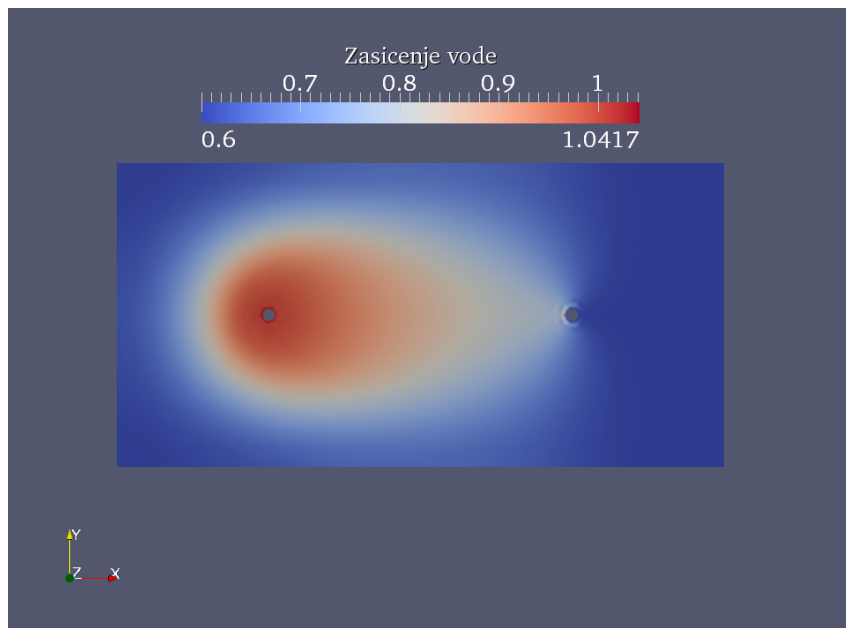
Slika 5.9: Zasićenje vode: T=0 dana



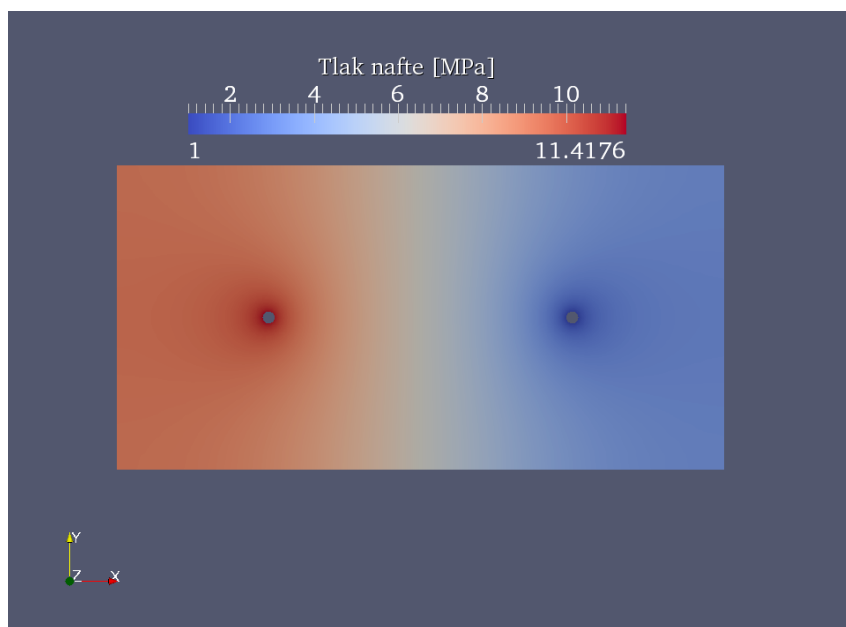
Slika 5.10: Zasićenje vode: T=75 dana



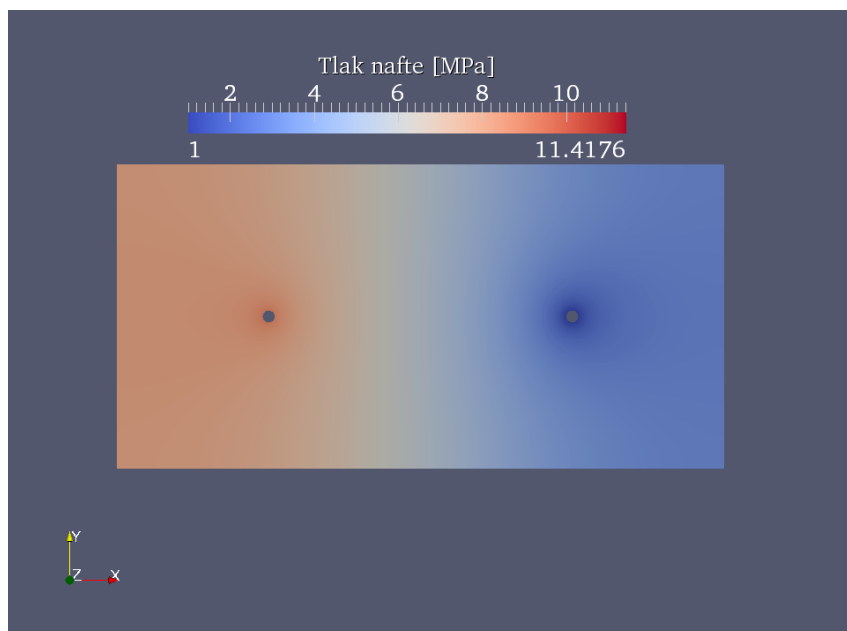
Slika 5.11: Zasićenje vode: T=150 dana



Slika 5.12: Zasićenje vode: T=200 dana



Slika 5.13: Tlak nafte: T=0 dana



Slika 5.14: Tlak nafte: T=200 dana

Bibliografija

- [1] Z. Chan, G. Huan, J. Ma: *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Siam, 2005.
- [2] G. Chavent, J. Jaffré: *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, -, 1986.
- [3] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [4] V. Girault, P.A. Raviart: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer, 1986.
- [5] R. Helmig: *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface*, Springer, 1997.
- [6] M. Jurak: *Matematički modeli transporta kroz poroznu sredinu: Dvofazni tok*,
http://web.math.hr/nastava/mmtkps/mm_dvofazni.pdf
- [7] M. Jurak: *Metoda konačnih elemenata*,
<http://web.math.hr/nastava/ppm2/ppm2.pdf>
- [8] FreeFem++ manual, Third Edition, Version 3.7-1

Sažetak

U ovom radu smo proučavali modeliranje dvofaznog toka fluida u poroznoj sredini. Sva razmatranja smo vršili pod pretpostavkama izotermnog, nemješivog toka inkompresibilnih fluida.

Matematički model uključuje zakon sačuvanja mase, Darcyjev zakon i zakon kapilarnog tlaka. Dva su ključna aspekta u njegovom formiranju, odabir primarnih varijabli i algebarske manipulacije diferencijalnim jednačbama. U konačnici, matematički model čini nelinearni sustav parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Promatrali smo matematički model u formulaciji tlak-zasićenje i u formulaciji s globalnim tlakom.

Za rješavanje matematičkog modela potrebno je koristiti numeričke metode. U ovom radu koristili smo standardnu metodu konačnih elemenata. Formulira se na osnovu varijacijske formulacije na koju se primijeni proces tzv. varijacijske aproksimacije a sastoji se od korištenja istih funkcija za bazne i test funkcije unutar aproksimativne varijacijske zadaće. Time se dolazi do sustava običnih diferencijalnih jednačbi po vremenskoj varijabli za čije rješavanje je korištena implicitna ili eksplicitna Eulerova metoda. U slučaju dobivanja nelinearnog sustava jednačbi koristi se jedna od linerizacijskih tehnika, Picardove iteracije ili Newtonova metoda. Pored standardne metode konačnih elemenata promatrana je i mješovita metoda s Raviart-Thomasovim elementima te metoda konačnih volumena.

Naposljetku je, u svrhu test primjera, promatran problem istiskivanja nevlažeće faze vlažećom, preciznije, istiskivanje nafte vodom.

Summary

In this diploma thesis we have studied modeling of two-phase flow in porous media. All considerations are performed under the assumptions of isothermal, immiscible and incompressible fluid flow.

We set up mathematical model using mass conservation law, Darcy's law and capillary pressure law. There are two key aspects in the formation of the model, the selection of primary variables and algebraic manipulation of differential equations. The mathematical model consists of a system of nonlinear partial differential equations. We have considered a mathematical model in pressure-saturation formulation and global formulation.

To solve the mathematical model it is necessary to use numerical approach. In this work we used standard finite element method. It is based on the variational formulation to which the process of variational approximation is applied. It consists of using the same basic function and test function within the variational approximation problem. This leads to a system of ordinary differential equations in time variable which can be solved by implicit or explicit Euler method. Since the discrete system is nonlinear we used one of linearization techniques, Picard iteration or Newton's method. Beside standard finite element method, mixed finite element method with Raviart-Thomas elements and finite volume method have been observed.

Finally, we show an example of displacement of nonwetting phase by wetting phase, more precisely, displacement of oil by water.

Životopis

Zorica Jelavić, rođena je 18. kolovoza 1986. godine u Splitu. Osnovnu školu je završila u Vrgorcu, dok je srednju školu, Prirodoslovno-matematičku gimnaziju, završila u Splitu. Školovanje je nastavila u Zagrebu gdje je završila Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Pri istom fakultetu je 2008. godine upisala Diplomski sveučilišni studij Primijenjene matematike.

Tijekom osnovnog i srednjeg školovanja sudjelovala je na natjecanjima iz matematike. 1999. godine osvojila je III. nagradu na Državnom natjecanju iz matematike u Malom Lošinj. Godinu dana poslije, 2000. godine, također je osvojila III. nagradu na Državnom natjecanju iz matematike održanom u Makarskoj.