

Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih  
jednadžbi. Metoda konačnih diferencija

Mladen Jurak

23. prosinca 2009.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod u metodu konačnih diferencija</b>	<b>5</b>
1.1	Prvi primjer . . . . .	5
1.2	Konzistentnost . . . . .	6
1.3	Generalizacije . . . . .	7
1.4	Diferencijalne jednačbe u dvije prostorne dimenzije . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Laxov teorem</b>	<b>15</b>
2.1	Konvergencija . . . . .	15
2.2	Konzistencija . . . . .	19
2.3	Stabilnost . . . . .	27
2.4	Laxov teorem ekvivalencije . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Analiza stabilnosti</b>	<b>35</b>
3.1	Diskretna Fourierova transformacija . . . . .	35
3.2	Von Neumannov kriterij . . . . .	36
3.3	Stabilnost inicijalno rubne zadaće . . . . .	42
<b>A</b>	<b>Spektar trodijagonalnih matrica</b>	<b>47</b>



# 1

## Uvod u metodu konačnih diferencija

U ovom poglavlju uvodimo metodu konačnih diferencija na primjeru jednodimenzionalne jednadžbe provođenja s konstantnim koeficijentim. Izlaganje slijedi [1].

### 1.1 Prvi primjer

Pogledajmo jednadžbu provođenja s Dirichletovim rubnim uvjetima u jednoj prostornoj dimenziji:

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$v(x, 0) = g(x) \quad x \in [0, 1] \quad (1.2)$$

$$v(0, t) = a(t), \quad v(1, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Diskretizacija. Domenu  $[0, 1]$  diskretiziramo uvođenjem brojeva  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta x = 1/M$  te niza točaka

$$x_k = k\Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

Broj  $\Delta x$  nazivamo prostornim korakom mreže. Analogno uvodimo vremenski korak  $\Delta t > 0$  i niz vremenskih točaka

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Time smo dobili mrežu točaka (eng. lattice)

$$(x_k, t^n) = (k\Delta x, n\Delta t), \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Metoda konačnih diferencija daje aproksimaciju točnog rješenja u točkama mreže:

$$u_k^n \approx v(x_k, t^n).$$

Aproksimacija se dobiva iz diferencijalne jednadžbe tako da se parcijalne derivacije zamijene s diferencijskim kvocijentima. Na primjer,

$$v_t \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}, \quad v_{xx} \approx \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2},$$

što daje

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = D \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Time dobivamo shemu

$$u_k^{n+1} = u_k^n + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) \quad (1.4)$$

$$n = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, M - 1$$

$$u_k^0 = g(k\Delta x) \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (1.5)$$

$$u_0^n = a(n\Delta t), \quad u_M^n = b(n\Delta t) \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

**Zadatak 1.1** Napišite kod koji nalazi rješenje zadaće (1.4)–(1.6). Uzmite  $g(x) = \sin 2\pi x$ ,  $a = b = 0$ ,  $M = 10$  i  $D = 1/6$ . Nadite rješenje u trenucima  $t = 0.06, 0.1, 0.9, 50.0$  koristeći  $\Delta t = 0.02$ . Koliko možete povećati  $\Delta t$ , a da dobijete približno isto rješenje?

## 1.2 Konzistentnost

Numerička se analiza diferencijskih shema bavi pitanjem koliko je aproksimativno rješenje precizno, odnosno, kolika je greška aproksimacije. Djelomičan odgovor na to pitanje možemo dati ako se zapitamo s kolikom točnošću rješenje diferencijalne jednadžbe zadovoljava diferencijsku jednadžbu. Odgovor na to pitanje dobivamo Taylorovim razvojem točnog rješenja  $v(x, t)$ .

Neka je

$$v_k^n = v(x_k, t^n)$$

i pretpostavimo da je funkcija  $v$  klase  $C^2([0, 1])$ . Tada je

$$\begin{aligned} \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} &= \frac{\partial v}{\partial t}(x_k, t^n) + O(\Delta t) \\ \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta x} &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t^n) + O(\Delta x) \\ \frac{v_k^n - v_{k-1}^n}{\Delta x} &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t^n) + O(\Delta x) \\ \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta x} &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_k, t^n) + O(\Delta x^2) \\ \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_k, t^n) + O(\Delta x^2), \end{aligned}$$

i stoga

$$v_t(x_k, t^n) - Dv_{xx}(x_k, t^n) = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - D \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2).$$

Konačno, budući da je funkcija  $v$  rješenje diferencijalne jednačbe imamo

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - D \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} = O(\Delta t) + O(\Delta x^2).$$

Dakle, točno rješenje zadovoljava diferencijsku shemu do na član  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ . Diferencijska shema aproksimira parcijalnu diferencijalnu jednačbu s prvim redom točnosti u  $\Delta t$  te drugim u  $\Delta x$ .

Svojsvo diferencijske sheme koje smo upravo izveli nazivamo *konzistentnost*. Ono nam neposredno ne govori ništa o tome kolika je razlika između točnih vrijednosti  $v_k^n$  i aproksimativnih vrijednosti  $u_k^n$  dobivenih diferencijskom shemom (greška aproksimacije). Konzistentnost nam samo osigurava da točno rješenje to bolje zadovoljava diferencijsku shemu što su  $\Delta t$  i  $\Delta x$  manji i daje nam način na koji možemo definirati red točnosti sheme. Na osnovi toga očekujemo da je i greška aproksimacije to bolja što su  $\Delta t$  i  $\Delta x$  manji, no za taj zaključak sama konzistentnost nije dovoljna.

Za kratko zapisivanje diferencijskih shema korisno je uvesti sljedeću notaciju:

$$\begin{aligned}\delta_+ u_k &= u_{k+1} - u_k \\ \delta_- u_k &= u_k - u_{k-1} \\ \delta_0 u_k &= u_{k+1} - u_{k-1} \\ \delta^2 u_k &= u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}.\end{aligned}$$

Shemu (1.4) možemo sada napisati u obliku

$$u_k^{n+1} = u_k^n + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \delta^2 u_k^n.$$

**Zadatak 1.2** Dokažite da se uz specijalan izbor  $\Delta t = 6\Delta x^2/D$  dobiva

$$v_t(x_k, t^n) - Dv_{xx}(x_k, t^n) = \frac{\delta_{t,+} v_k^n}{\Delta t} - D \frac{\delta^2 v_k^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4).$$

## 1.3 Generalizacije

Ideja metode konačnih diferencija vrlo je jednostavna i lako se primjenjuje i na složenije diferencijalne jednačbe te različite rubne uvjete. Pogledajmo nekoliko primjera.

*Zadaća konvekcije-difuzije:*

$$v_t + av_x = Dv_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.7)$$

$$v(x, 0) = g(x) \quad x \in [0, 1] \quad (1.8)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Pri diskretizaciji ove zadaće prirodno je član s prvom derivacijom diskretizirati centralnom diferencijom kako bi se zadržala konzistentnos drugog reda diferencijske sheme u varijabli  $x$ . To vodi na diferencijsku shemu

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n) \quad (1.10)$$

$$n = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, M - 1$$

$$u_k^0 = g(k\Delta x) \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (1.11)$$

$$u_0^n = 0, \quad u_M^n = 0 \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.12)$$

**Zadatak 1.3** Napišite kod koji nalazi rješenje zadaće (1.10)–(1.12). Uzmite  $g(x) = \sin 4\pi x$ ,  $M = 20$ ,  $a = 2$  i  $D = 1.0$ . Nađite rješenje u trenucima  $t = 0.06, 0.1, 0.9$  koristeći  $\Delta t = 0.001$ . Ponovite istu simulaciju s  $D = 0.01$ .

Ovakva diskretizacija jednadžbe konvekcije-difuzije, koja vodi računa samo o redu konzistentnosti metode, ne daje dobre rezultate kada je konvektivni član ( $av_v$ ) velik u odnosu na difuzijski ( $Dv_{xx}$ ). Vidjet ćemo da je u tom slučaju potrebno modificirati diskretizaciju kako bi se dobila robusna metoda.

*Neumannov rubni uvjet.* Treba diskretizirati zadaću:

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.13)$$

$$v(x, 0) = g(x) \quad x \in [0, 1] \quad (1.14)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.15)$$

$$v(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.16)$$

Ovdje na lijevom kraju imamo Neumannov, a na desnom Dirichletov rubni uvjet. Shema će kao i dosada imati oblik:

$$u_k^{n+1} = u_k^n + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \delta^2 u_k^n,$$

za  $k = 1, 2, \dots, M - 1$  i  $n = 0, 1, \dots$ . Početna vrijednost je dana s  $u_k^0 = g(x_k)$ , a Dirichletov rubni uvjet daje  $u_M^{n+1} = 0$ . Da bismo diskretizirali Neumannov rubni uvjet možemo iskoristiti aproksimaciju derivacije diferencijom unaprijed i tima dobivamo

$$\frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{\Delta x} = 0.$$

Taj se uvjet, naravno, svodi na  $u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$  i time dobivamo dobro definiranu metodu. Vrijednosti na  $n + 1$ -vom vremenskom sloju posve su određene vrijednostima na  $n$ -tom vremenskom sloju.

Nedostatak ovakvog rješenja je u tome što je diferencija unaprijed prvog reda točnosti i time se narušava drugi red konzistentnosti metode u varijabli  $x$ . Ako

se to želi izbjeći treba koristiti centralnu diferenciju za aproksimaciju derivacije u rubnom uvjetu, što vodi na

$$\frac{u_{-1}^{n+1} - u_1^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

Ovdje se pojavljuje vrijedno  $u_{-1}^{n+1}$  koja odgovara točki  $x_{-1} = -\Delta x$  koja je izvan domene rubne zadaće. Ako tu vrijednost uključimo u diferencijsku shemu dobivamo jednu nepoznicu više u odnosu na broj jednadžbi, pa je moguće rješenje da dodamo novu jednadžbu sustavu. Potrebna jednadžba je diferencijska jednadžba u točki  $x_0$ , koja glasi,

$$u_0^{n+1} = u_0^n + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n)$$

Sada možemo posve eliminirati nepoznicu  $u_{-1}^{n+1}$  i time dolazimo do jednadžbe

$$u_0^{n+1} = u_0^n + 2D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_1^n - u_0^n)$$

Time smo dobili shemu s  $M + 1$  nepoznanica i isto toliko jednadžbi koje su sve drugog reda točnosti.

**Zadatak 1.4** Napišite kod koji aproksimira rješenje zadaće (1.13)–(1.16) tretirajući Neumanov rubni uvjet metodom prvog i drugog reda točnosti te usporedite rezultate. Uzmite  $g(x) = \cos(\pi x/2)$ ,  $M = 10$ , i  $D = 1.0$ . Nađite rješenje u trenucima  $t = 0.06, 0.1, 0.9$  koristeći  $\Delta t = 0.004$ .

*Diferencijalna jednadžba s varijabilnim koeficijentima:*

$$v_t = (D(x)v_x)_x + f(x) \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.17)$$

$$v(x, 0) = g(x) \quad x \in [0, 1] \quad (1.18)$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.19)$$

Pri diskretizaciji bit će potrebno pored točaka  $x_k$  uvesti i polovišne točke

$$x_{k+1/2} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, M - 1.$$

U njima ćemo računati vrijednosti koeficijenata kako bismo sačuvali drugi red konzistentnosti prostorne diskretizacije. Stoga uvodimo oznake:

$$D_{k+1/2} = D(x_{k+1/2}), \quad f_k = f(x_k).$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right|_{x=x_k} \\
& \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ D_{k+1/2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_{k+1/2}} - D_{k-1/2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_{k-1/2}} \right] \\
& \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ D_{k+1/2} \frac{v(x_{k+1}) - v(x_k)}{\Delta x} - D_{k-1/2} \frac{v(x_k) - v(x_{k-1})}{\Delta x} \right] \\
& = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ D_{k+1/2} v(x_{k+1}) + D_{k-1/2} v(x_{k-1}) - (D_{k+1/2} + D_{k-1/2}) v(x_k) \right].
\end{aligned}$$

Stoga dobivamo

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[ D_{k+1/2} u_{k+1}^n + D_{k-1/2} u_{k-1}^n - (D_{k+1/2} + D_{k-1/2}) u_k^n \right] + \Delta t \Delta x^2 f_k^n$$

za  $k = 1, 2, \dots, M-1$  te  $u_0^{n+1} = u_M^{n+1} = 0$  i  $u_k^0 = g(k\Delta x)$  za  $k = 0, 1, \dots, M$ .

## 1.4 Diferencijalne jednačbe u dvije prostorne dimenzije

Metodu konačnih diferencija primijenit ćemo sada na diskretizaciju parcijalne diferencijalne jednačbe eliptičkog tipa u dvije prostorne dimenzije.

Neka je  $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$  (otvoreni) pravokutnik sa stranicama  $L_x$  i  $L_y$ ; rub pravokutnika označavamo s  $\partial\Omega$ . Zadane su glatke funkcije

$$k^1, k^2, c, f: \bar{\Omega} = [0, L_x] \times [0, L_y] \rightarrow \mathbb{R}$$

sa svojstvom da postoji konstanta  $k_0 > 0$  takva da je

$$k^1(x, y) \geq k_0 > 0, \quad k^2(x, y) \geq k_0 > 0, \quad c(x, y) \geq 0, \quad (1.20)$$

za sve  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ . Nadalje, neka je zadana glatka funkcija

$$u^0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Promatramo Dirichletovu rubnu zadaću

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k^1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + cu = f \quad \text{u } \Omega, \quad (1.21)$$

$$u = u^0 \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (1.22)$$

U (1.21), (1.22) treba odrediti nepoznatu funkciju  $u = u(x, y)$  koja zadovoljava diferencijalnu jednačbu (1.21) u domeni  $\Omega$  a na rubu domene prima poznatu vrijednost  $u^0$ , odn.  $u(x, y) = u^0(x, y)$  za sve  $(x, y) \in \partial\Omega$ .

Interval  $(0, L_x)$  podijelimo na  $n + 1$  jednakih podintervala uvođenjem točaka

$$x_i = ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1, \quad h_x = \frac{L_x}{n + 1}.$$

Isto tako, interval  $(0, L_y)$  podijelimo na  $m + 1$  podintervala

$$y_j = jh_y, \quad j = 0, 1, \dots, m + 1, \quad h_y = \frac{L_y}{m + 1}.$$

Točke  $(x_i, y_j)$  za  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ , te  $j = 0, 1, \dots, m + 1$  čine diskretizacijsku mrežu. Brojeve točaka  $n$  i  $m$  odabiremo tako da imamo  $h_x \approx h_y$ , ukoliko već ne možemo postići jednakost.

U svakoj unutarnjoj točki mreže diskretiziramo diferencijalni operator na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( k^1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} &\approx \frac{1}{h_x} \left[ k_{i+\frac{1}{2},j}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - k_{i-\frac{1}{2},j}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \right] \\ &\approx \frac{1}{h_x} \left[ k_{i+\frac{1}{2},j}^1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} - k_{i-\frac{1}{2},j}^1 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} \right] \\ &= \frac{1}{h_x^2} \left[ k_{i+\frac{1}{2},j}^1 u_{i+1,j} + k_{i-\frac{1}{2},j}^1 u_{i-1,j} - (k_{i+\frac{1}{2},j}^1 + k_{i-\frac{1}{2},j}^1) u_{i,j} \right]. \end{aligned}$$

U ovom računu i nadalje koristimo pokrate

$$k_{i+\frac{1}{2},j}^1 = k^1((i + \frac{1}{2})h_x, jh_y), \quad u_{i,j} = u(ih_x, jh_y) \text{ itd.}$$

Na posve isti način izvodimo formulu

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( k^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{i,j} \approx \frac{1}{h_y^2} \left[ k_{i,j+\frac{1}{2}}^2 u_{i,j+1} + k_{i,j-\frac{1}{2}}^2 u_{i,j-1} - (k_{i,j+\frac{1}{2}}^2 + k_{i,j-\frac{1}{2}}^2) u_{i,j} \right].$$

Time dolazimo do diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{h_x^2} \left[ k_{i+\frac{1}{2},j}^1 u_{i+1,j} + k_{i-\frac{1}{2},j}^1 u_{i-1,j} - (k_{i+\frac{1}{2},j}^1 + k_{i-\frac{1}{2},j}^1) u_{i,j} \right] \\ &-\frac{1}{h_y^2} \left[ k_{i,j+\frac{1}{2}}^2 u_{i,j+1} + k_{i,j-\frac{1}{2}}^2 u_{i,j-1} - (k_{i,j+\frac{1}{2}}^2 + k_{i,j-\frac{1}{2}}^2) u_{i,j} \right] \\ &+ c_{i,j} u_{i,j} = f_{i,j}. \end{aligned}$$

Da bismo pojednostavili zapis uvedimo oznake:

$$\lambda = \frac{h_x}{h_y}, \quad h = h_x \tag{1.23}$$

$$A_{i,j} = k_{i+\frac{1}{2},j}^1 + k_{i-\frac{1}{2},j}^1 + \lambda^2 (k_{i,j+\frac{1}{2}}^2 + k_{i,j-\frac{1}{2}}^2) + h^2 c_{i,j} \tag{1.24}$$

$$B_{i,j} = k_{i+\frac{1}{2},j}^1, \quad C_{i,j} = k_{i-\frac{1}{2},j}^1 \tag{1.25}$$

$$D_{i,j} = \lambda^2 k_{i,j+\frac{1}{2}}^2, \quad E_{i,j} = \lambda^2 k_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \tag{1.26}$$

$$F_{i,j} = h^2 f_{i,j}. \tag{1.27}$$

Sada imamo diferencijsku jednadžbu

$$A_{i,j}u_{i,j} - B_{i,j}u_{i+1,j} - C_{i,j}u_{i-1,j} - D_{i,j}u_{i,j+1} - E_{i,j}u_{i,j-1} = F_{i,j}$$

za  $i = 1, 2, \dots, n$  i  $j = 1, 2, \dots, m$ . U njoj treba još uvažiti rubne uvjete koji glase:

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= u_{0,j}^0, & u_{n+1,j} &= u_{n+1,j}^0 & \text{za } j &= 1, 2, \dots, m \\ u_{i,0} &= u_{i,0}^0, & u_{i,m+1} &= u_{i,m+1}^0 & \text{za } i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava  $(u_{i,j})$  je *mrežna funkcija*. Njene vrijednosti aproksimiraju točno rješenje u točkama mreže:  $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ .

Da bismo od diferencijskih jednadžbi došli do sustava linearnih jednadžbi moramo uvesti način indeksiranja čvorova mreže. O načinu indeksiranja ovisi matrica sustava.

Indeksirajmo mrežne točke u leksikografskom poretku:

$$\begin{aligned} k &= (j-1)n + i, & i &= 1, 2, \dots, n, & j &= 1, 2, \dots, m \\ v_k &= u_{i,j}, & a_k &= A_{i,j}, & b_k &= B_{i,j}, & c_k &= C_{i,j}, & d_k &= D_{i,j}, & e_k &= E_{i,j}, & f_k &= F_{i,j}. \end{aligned}$$

Uočimo da je tada

$$u_{i+1,j} = v_{k+1}, \quad u_{i-1,j} = v_{k-1}, \quad u_{i,j+1} = v_{k+n}, \quad u_{i,j-1} = v_{k-n}.$$

Uzimajući u obzir rubne uvjete dobivamo sljedeći niz jednadžbi:

1. redak,  $k = i$

$$\begin{aligned} a_1v_1 - b_1v_{k+1} - d_1v_{k+n} &= f_1 + c_1u_{0,1}^0 + e_1u_{1,0}^0 & (i = 1) \\ a_kv_k - b_kv_{k+1} - c_kv_{k-1} - d_kv_{k+n} &= f_k + e_kv_{k,0}^0 & (i = 2, \dots, n-1) \\ a_nv_n - c_nv_{n-1} - d_nv_{2n} &= f_n + b_nv_{n+1,1}^0 + e_nv_{n,0}^0 & (i = n) \end{aligned}$$

$j$ -ti redak za  $1 < j < m$ ,  $k = (j-1)n + i$

$$\begin{aligned} a_kv_k - b_kv_{k+1} - d_kv_{k+n} - e_kv_{k-n} &= f_k + c_kv_{0,j}^0 & (i = 1) \\ a_kv_k - b_kv_{k+1} - c_kv_{k-1} - d_kv_{k+n} - e_kv_{k-n} &= f_k & (i = 2, \dots, n-1) \\ a_kv_k - c_kv_{k-1} - d_kv_{k+n} - e_kv_{k-n} &= f_k + b_kv_{n+1,j}^0 & (i = n) \end{aligned}$$

$m$ -ti redak,  $k = (m-1)n + i$

$$\begin{aligned} a_kv_k - b_kv_{k+1} - e_kv_{k-n} &= f_k + c_kv_{0,m}^0 + d_kv_{1,m+1}^0 & (i = 1) \\ a_kv_k - b_kv_{k+1} - c_kv_{k-1} - e_kv_{k-n} &= f_k + d_kv_{i,m+1}^0 & (i = 2, \dots, n-1) \\ a_kv_k - c_kv_{k-1} - e_kv_{k-n} &= f_k + b_kv_{n+1,m}^0 + d_kv_{n,m+1}^0 & (i = n) \end{aligned}$$

**Primjer.**  $n = 3$ ,  $m = 4$ ,  $N = n * m = 12$ .

$$\begin{bmatrix}
 a_1 & -b_1 & 0 & -d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -c_2 & a_2 & -b_2 & 0 & -d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -c_3 & a_3 & 0 & 0 & -d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -e_4 & 0 & 0 & a_4 & -b_4 & 0 & -d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -e_5 & 0 & -c_5 & a_5 & -b_5 & 0 & -d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -e_6 & 0 & -c_6 & a_6 & 0 & 0 & -d_6 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -e_7 & 0 & 0 & a_7 & -b_7 & 0 & -d_7 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -e_8 & 0 & -c_8 & a_8 & -b_8 & 0 & -d_8 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_9 & 0 & -c_9 & a_9 & 0 & 0 & -d_9 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{10} & 0 & 0 & a_{10} & -b_{10} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{11} & 0 & -c_{11} & a_{11} & -b_{11} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{12} & 0 & -c_{12} & a_{12}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6 \\
 v_7 \\
 v_8 \\
 v_9 \\
 v_{10} \\
 v_{11} \\
 v_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_1 + c_1 u_{0,1}^0 + e_1 u_{1,0}^0 \\
 f_2 + e_2 u_{2,0}^0 \\
 f_3 + b_3 u_{4,1}^0 + e_3 u_{3,0}^0 \\
 f_4 + c_4 u_{0,2}^0 \\
 f_5 \\
 f_6 + b_6 u_{4,2}^0 \\
 f_7 + c_7 u_{0,3}^0 \\
 f_8 \\
 f_9 + b_9 u_{4,3}^0 \\
 f_{10} + c_{10} u_{0,4}^0 + d_{10} u_{1,5}^0 \\
 f_{11} + d_{11} u_{2,5}^0 \\
 f_{12} + d_{12} u_{3,5}^0 + b_{12} u_{4,4}^0
 \end{bmatrix}$$

## Bibliografija

- [1] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations*, volume 22 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 1995.



## 2

# Laxov teorem

U ovom poglavlju analiziramo konvergenciju metode konačnih diferencija za linearne parcijalne diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima. Uvodimo pojmove konvergencije, konzistencije i stabilnosti te Laxov teorem ekvivalencije koji kaže da su konzistencija i stabilnost ekvivalentni konvergenciji. Radi jednostavnosti promatrat ćemo diferencijalne jednačbe u jednoj prostornoj dimenziji.

## 2.1 Konvergencija

Promatramo Cauchyjev problem za parcijalnu diferencijalnu jednačbu

$$\mathcal{L}v = F \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.1)$$

$$v(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

gdje smo diferencijalni operator označili s  $\mathcal{L}$ . Pretpostavljamo nadalje da smo odabrali neke konstantne parametre diskretizacije  $\Delta x$  i  $\Delta t$  i konstruirali diferencijski operator  $L_k^n$  koji aproksimira diferencijalni operator  $\mathcal{L}$ . Rješenje diferencijske sheme, kao i do sada, označavamo s  $u_k^n$ , pri čemu je  $u_k^0 = f(k\Delta x)$ .

**Definicija 2.1** Diferencijska shema  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  koja aproksimira diferencijalnu jednačbu  $\mathcal{L}v = F$  je konvergentna po točkama ako za svako  $(x, t)$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} (k\Delta x, n\Delta t) = (x, t) \quad \Rightarrow \quad \lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} u_k^n = v(x, t).$$

U ovoj definiciji  $k$  i  $n$  moraju težiti u  $+\infty$  kada  $\Delta x$  i  $\Delta t$  teže u nulu kao bismo imali  $(k\Delta x, n\Delta t) \rightarrow (x, t)$ .

**Primjer 2.1** Pokažimo da diferencijska shema

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) \\ u_k^0 &= f(k\Delta x), \end{aligned}$$

gdje je  $r = D\Delta t/\Delta x^2$ ,  $0 < r \leq 1/2$  konvergira točkovo prema rješenju Cauchyjeve zadaće

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x) & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Rješenje: Neka je  $v(x, t)$  točno rješenje i uvedimo mrežnu funkciju  $v_k^n = v(k\Delta x, n\Delta t)$ , te grešku aproksimacije  $z_k^n = u_k^n - v_k^n$ . Za točno rješenje znamo da zadovoljava

$$v_k^{n+1} = (1 - 2r)v_k^n + r(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t\Delta x^2).$$

Tada je očito i

$$z_k^{n+1} = (1 - 2r)z_k^n + r(z_{k+1}^n + z_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t\Delta x^2).$$

Iz uvjeta  $0 < r \leq 1/2$  vidimo da na desnoj strani imamo konveksnu kombinaciju vrijednosti  $z_k^n$  pa možemo ocijeniti:

$$|z_k^{n+1}| \leq (1 - 2r)|z_k^n| + r(|z_{k+1}^n| + |z_{k-1}^n|) + A(\Delta t^2 + \Delta t\Delta x^2),$$

gdje je  $A$  konstanta iz definicije simbola  $O(\cdot)$ . Neka je  $Z^n = \sup_k |z_k^n|$ . Uzimajući supremum na desnoj strani, a zatim i na lijevoj, dobivamo

$$Z^{n+1} \leq Z^n + A(\Delta t^2 + \Delta t\Delta x^2).$$

Uočimo da smo u ovom koraku koristili uniformnost konstante  $A$  u odnosu na indeks  $k$  ( $A$  u principu ovisi o  $k$  no supremum po  $k$  pretpostavljamo da je konačan), što se svodi na uniformnu ograničenost po  $x$  odgovarajućih derivacija funkcije  $v(x, t)$ . Sada iteriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} Z^{n+1} &\leq Z^n + A(\Delta t^2 + \Delta t\Delta x^2) \\ &\leq Z^{n-1} + 2A(\Delta t^2 + \Delta t\Delta x^2) \\ &\vdots \\ &\leq Z^0 + (n+1)A(\Delta t^2 + \Delta t\Delta x^2). \end{aligned}$$

Kako je  $Z^0 = 0$  dobivamo

$$|u_k^n - v_k^n| \leq Z^n \leq n\Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \rightarrow 0$$

kada  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  i  $n\Delta t \rightarrow t$ .  $\square$

Konvergencija po točkama nije naročito korisna. Najčešće tražimo konvergenciju u nekoj normi. U tu svrhu uvedimo oznake

$$\mathbf{u}^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots), \quad \mathbf{v}^n = (\dots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \dots)$$

gdje je  $v_k^n = v(k\Delta x, n\Delta t)$ .  $\mathbf{u}^n$  i  $\mathbf{v}^n$  su beskonačni nizovi (mrežne funkcije). Skup svih beskonačnih nizova je evidentno linearan prostor u odnosu na uobičajeno zbrajanje i množenje skalarom. Da bismo uveli pojam konvergencije beskonačnih nizova moramo definirati neku normu na njima. Odabranu normu ćemo označiti s  $\|\cdot\|$ . Jedan primjer je sup-norma:

$$\|\mathbf{u}^n\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k^n|.$$

Imamo sljedeći, jaču definiciju konvergencije:

**Definicija 2.2** Diferencijska shema  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  koja aproksimira diferencijalnu jednadžbu  $\mathcal{L}v = F$  je konvergentna u trenutku  $t$  ako

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} n\Delta t = t \quad \Rightarrow \quad \lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\| = 0.$$

**Zadatak 2.1** Pokažite da diferencijska shema

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n$$

gdje je  $R = a\Delta t/\Delta x$  (Lax-Friedrichsova shema) konvergira prema rješenju parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$v_t + av_x = 0,$$

za  $|R| \leq 1$ .  $\square$

Brzinu konvergencije možemo precizirati kao u sljedećoj definiciji.

**Definicija 2.3** Diferencijska shema  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  koja aproksimira diferencijalnu jednadžbu  $\mathcal{L}v = F$  je konvergentna s redom  $(p, q)$  ako za svako  $t > 0$  vrijedi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} n\Delta t = t \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$$

kada  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ .

Ocjena iz ove definicije znači da postoji konstanta  $C$  takva da je

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\| \leq C(\Delta x^p + \Delta t^q).$$

Treba uočiti da  $C$  općenito ovisi o  $t$ .

Razlika između konvergencije diferencijskih shema za Cauchyjev i inicijalno-rubni problem leži u prostorima. Kod inicijalnog problema mrežna funkcija je predstavljena beskonačnim nizom vrijednosti te je prostor beskonačnih nizova osnovni prostor u koji uvodimo normu. Kod inicijalno-rubnog problema mrežna funkcija za zadani  $\Delta x$  ima konačno mnogo vrijednosti, recimo  $k$ , i kada  $\Delta x$  teži u nulu,  $k$  teži u  $\infty$ . Prema tome, nema jedinstvenog prostora u kome bismo mogli promatrati konvergenciju već moramo promatrati niz prostora čija dimenzija neograničeno raste kada  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Da bismo precizirali definiciju konvergencije odaberemo niz uniformnih particija prostorne domene (segmenta  $[0, 1]$  u našim primjerima), tj. niz prostornih koraka  $(\Delta x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  takav da  $\Delta x_j \rightarrow 0$  kada  $j \rightarrow \infty$ . Svakom  $j$  odgovara konanodimenzionalan prostor  $X_j$  u kome se nalazi mrežna funkcija. U prostor  $X_j$  uvodimo normu  $\|\cdot\|_j$  i konvergenciju definiramo na sljedeći način:

**Definicija 2.4** Diferencijska shema  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  koja aproksimira inicijalno-rubnu zadaću za diferencijalnu jednadžbu  $\mathcal{L}v = F$  je konvergentna u trenutku  $t$  ako za svaki niz particija  $(\Delta x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  vrijedi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} n\Delta t = t \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_j = 0.$$

**Primjer 2.2** Pokažite da za  $r = D\Delta t/\Delta x^2$ ,  $0 < r \leq 1/2$ , diferencijska shema

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad n \geq 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \\ u_0^{n+1} &= u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

konvergira u sup-normi prema rješenju inicijalno-rubne zadaće

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x) \quad x \in [0, 1] \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Rješenje: Dokaz konvergencije posve je isti kao u Primjeru 2.1. Uzmimo da  $\Delta x_j$  odgovara particiji segmenta  $[0, 1]$  na  $M_j + 1$  točaka. Pripadni prostor  $X_j$  je prostor vektora s  $M_j - 1$  komponenti i u njemu uvodimo sup-normu:

$$\|(u_1, \dots, u_{M_j-1})\|_j = \max_{1 \leq k \leq M_j-1} |u_k|.$$

Ponovo definiramo  $v_k^n = v(k\Delta x, n\Delta t)$ , te  $z_k^n = u_k^n - v_k^n$ . Kao i u Primjeru 2.1 imamo

$$z_k^{n+1} = (1 - 2r)z_k^n + r(z_{k+1}^n + z_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t \Delta x_j^2),$$

za  $k = 1, \dots, M_j - 1$  ( $z_0^n = z_{M_j}^n = 0$ ). Iz uvjeta  $0 < r \leq 1/2$  dobivamo

$$\begin{aligned} |z_k^{n+1}| &\leq (1 - 2r)|z_k^n| + r(|z_{k+1}^n| + |z_{k-1}^n|) + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x_j^2) \\ &\leq \|\mathbf{z}^n\|_j + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x_j^2), \end{aligned}$$

gdje je  $A$  konstanta iz definicije simbola  $O(\cdot)$  i  $\mathbf{z}^n = (z_1^n, \dots, z_{M_j-1}^n)^T$ . Odavdje je

$$\|\mathbf{z}^{n+1}\|_j \leq \|\mathbf{z}^n\|_j + \Delta t A(\Delta t + \Delta x_j^2),$$

te dobivamo

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_j \rightarrow 0$$

kada  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $n\Delta t \rightarrow t$  i  $j \rightarrow \infty$ .

U dokazu konvergencije važan je izbor norme. Kod linearnih problema uglavnom se koriste dvije norme. Na  $\mathbb{R}^N$  to su norme

$$\|\mathbf{u}\|_{2, \Delta x} = \sqrt{\sum_{k=1}^N |u_k|^2 \Delta x}, \quad \|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq N} |u_k|.$$

Te su norme diskretni analogoni sljedećih normi na prostorima funkcija:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

za neki segment  $[a, b]$ .

U prostoru svih beskonačnih nizova promatraju se normirani potprostori  $l_2$  i  $l_\infty$ :

$$l_2 = \{\mathbf{u} = (\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2 < \infty\},$$

s normom

$$\|\mathbf{u}\|_{2, \Delta x} = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2 \Delta x};$$

$$l_\infty = \{\mathbf{u} = (\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots) : \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| < \infty\},$$

s normom

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|.$$

U prostoru  $l_2$  se često koristi norma

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2};$$

Uočimo da je norma  $\|\mathbf{u}\|_{2, \Delta x}$  diskretna varijanta norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

## 2.2 Konzistencija

Kao i kod konvergencije dajemo prvo definiciju konzistencije po točkama.

**Definicija 2.5** Diferencijska shema  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  je točkovno konzistentna s diferencijalnom jednačkom  $\mathcal{L}v = F$  u točki  $(x, t)$  ako za svaku glatku funkciju vrijedi  $\phi = \phi(x, t)$

$$(\mathcal{L}\phi - F)|_k^n - [L_k^n \phi(k\Delta x, n\Delta t) - G_k^n] \rightarrow 0$$

kada  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  i  $(k\Delta x, n\Delta t) \rightarrow (x, t)$ .

U ovoj definiciji je uključena aproksimacija diferencijalnog operatora diferencijalnom shemom i aproksimacija desne strane diferencijalne jednačbe. Pri definiciji konzistentnosti te se dvije aproksimacije evidentno mogu promatrati i odvojeno. Ukoliko za  $G_k^n$  uzmemo  $F_k^n$  (što je čest slučaj premda ne i jedini mogući izbor) dobivamo jednostavniju definiciju konzistentnosti koja kaže da na rješenju  $v$  diferencijalne jednačbe  $\mathcal{L}v = F$  mora vrijediti

$$L_k^n v|_k^n - F_k^n \rightarrow 0$$

kada  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  i  $(k\Delta x, n\Delta t) \rightarrow (x, t)$ .

Nadalje ćemo se koncentrirati na jednokoračne sheme. Njih je moguće zapisati u obliku

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{G}^n, \quad (2.3)$$

gdje je

$$\mathbf{u}^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots), \quad \mathbf{G}^n = (\dots, G_{-1}^n, G_0^n, G_1^n, \dots).$$

$\mathbf{Q}$  predstavlja operator koji djeluje s prostora beskonačnih nizova u prostor beskonačnih nizova i koji je zadan diferencijskom formulom.

**Definicija 2.6** Diferencijska shema (2.3) je konzistentna s parcijalnom diferencijalnom jednačbom u normi  $\|\cdot\|$  ako rješenje  $v$  parcijalne diferencijalne jednačbe zadovoljava

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{G}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n, \quad \|\boldsymbol{\tau}^n\| \rightarrow 0$$

kada  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , a  $\mathbf{v}^n$  je vektor s komponentama  $v(k\Delta x, n\Delta t)$ .

Vektor  $\boldsymbol{\tau}^n$  (odnosno njegove komponente ili njegova norma  $\|\boldsymbol{\tau}^n\|$ ) nazivamo greškom diskretizacije. Točnost metode mjerimo uspoređujući grešku diskretizacije s parametrima  $\Delta t$  i  $\Delta x$ :

**Definicija 2.7** Diferencijska shema (2.3) ima točnost reda  $(p, q)$  u odnosu na danu parcijalnu diferencijalnu jednačbu ako je

$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q),$$

kada  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ .

**Primjer 2.3** Treba diskutirati konzistentnost diferencijske sheme

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = D \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}$$

s diferencijalnom jednačbom

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Rješenje: Neka je  $v(x, t)$  točno rješenje. Pomoću Taylorovog razvoja lako se pokazuje

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - D \frac{v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n}{\Delta x^2} = O(\Delta t) + O(\Delta x^2).$$

Takva ocjena nije dovoljno precizna ako želimo vidjeti pod kojim uvjetima imamo preciznost reda  $(2, 1)$  u odabranoj normi. Stoga je potrebno pretpostaviti dovoljnu glatkoću točnog rješenja i iskoristiti Taylorov razvoj rješenja do uključivo četvrtog reda po  $x$  i drugog reda po  $t$ . Tada, uz oznaku  $r = D\Delta t/\Delta x^2$  imamo:

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_k^n &= v_k^{n+1} - v_k^n - r(v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) \\ &= (v_t)_k^n \Delta t + v_{tt}(k\Delta x, \eta_1) \frac{\Delta t^2}{2} \\ &\quad - r \left[ (v_{xx})_k^n \Delta x^2 + v_{xxx}(\xi_1, n\Delta t) \frac{\Delta x^4}{4!} + v_{xxxx}(\xi_2, n\Delta t) \frac{\Delta x^4}{4!} \right] \end{aligned}$$

gdje je  $t^n < \eta_1 < t^{n+1}$ ,  $x_k < \xi_1, \xi_2 < x_{k+1}$ . Koristeći neprekidnost četvrte prostorne derivacije i definiciju broja  $r$ , dobivamo:

$$\begin{aligned}\Delta t \tau_k^n &= (v_t - Dv_{xx})_k^n \Delta t + v_{tt}(k\Delta x, t_1) \frac{\Delta t^2}{2} - Dv_{xxxx}(\xi_3, n\Delta t) \Delta t \frac{\Delta x^2}{12} \\ &= v_{tt}(k\Delta x, t_1) \frac{\Delta t^2}{2} - Dv_{xxxx}(\xi_3, n\Delta t) \Delta t \frac{\Delta x^2}{12},\end{aligned}$$

za neki  $x_k < \xi_3 < x_{k+1}$ . Ako želimo točnost reda (2, 1) u  $l_{2, \Delta x}$  normi, onda moramo pretpostaviti da je

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} [(v_{tt})_k^n]^2 \Delta x \leq A < \infty, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} [(v_{xxxx})_k^n]^2 \Delta x \leq B < \infty.$$

**Primjer 2.4** Treba diskutirati konzistentnost implicitne diferencijske sheme

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = D \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + F_k^{n+1}$$

s diferencijalnom jednadžbom

$$v_t = Dv_{xx} + F \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Rješenje: Za točkovnu konzistentnost razvit ćemo rješenje u Taylorov red oko točke  $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ :

$$\begin{aligned}L_k^n v_k^n - F_k^{n+1} &= \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - D \frac{v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - F_k^{n+1} \\ &= (v_t)_k^{n+1} - v_{tt}(k\Delta x, \eta_1) \frac{\Delta t}{2} \\ &\quad - D \left[ (v_{xx})_k^{n+1} + v_{xxxx}(\xi_1, t^{n+1}) \frac{\Delta x^2}{4!} + v_{xxxx}(\xi_2, t^{n+1}) \frac{\Delta x^2}{4!} \right] \\ &= -v_{tt}(k\Delta x, t_1) \frac{\Delta t}{2} - 2Dv_{xxxx}(\xi_3, t^{n+1}) \frac{\Delta x^2}{4!}\end{aligned}\tag{2.4}$$

gdje se brojevi  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  i  $\eta_1$  nalaze u istim intervalima kao u Primjeru 2.3. Time smo dobili

$$L_k^n v_k^n - F_k^{n+1} = O(\Delta x^2) + O(\Delta t).$$

Da bismo pokazali konzistentnost u nekoj normi morali bismo zapisati shemu u obliku (2.3) jer je ona zadana u obliku

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{F}^{n+1},$$

gdje je  $\mathbf{Q}_1$  operator koji se može prikazati beskonačnom matricom

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \cdots & -r & 1+2r & -r & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -r & 1+2r & -r & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

Tada  $\mathbf{v}$  zadovoljava

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{F}^{n+1} + \Delta t \mathbf{r}^n,$$

gdje je  $\mathbf{r}^n$  residual koji smo procijenili u (2.4),

$$r_k^n = -v_{tt}(k\Delta x, t_1) \frac{\Delta t}{2} - 2Dv_{xxxx}(\xi_3, t^{n+1}) \frac{\Delta x^2}{4!}.$$

Da bismo došli do izraza u obliku (2.3) trebamo pokazati da je operator  $\mathbf{Q}_1$  invertibilan i zatim slijedi

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{v}^n + \Delta t\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{F}^{n+1} + \Delta t\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{r}^n.$$

Sada vidimo da je  $\boldsymbol{\tau}^n = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{r}^n$  te nam stoga treba ocjena oblika

$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| \leq \|\mathbf{Q}_1^{-1}\| \|\mathbf{r}^n\|$$

iz koje vidimo da ćemo imati točnost koju daje račun reziduala, ako imamo uniformnu ocjenu norme  $\|\mathbf{Q}_1^{-1}\|$  (uniformnu obzirom na  $\Delta t$  i  $\Delta x$ ).

Takvu ocjenu najlakše je dobiti u sup-normi. Uzmimo stoga da su derivacije  $v_{tt}$  i  $v_{xxxx}$  uniformno ograničene tako da imamo  $\|\mathbf{r}^n\|_\infty = O(\Delta x^2) + O(\Delta t)$ . Operator  $\mathbf{Q}_1: l_\infty \rightarrow l_\infty$  djeluje na sljedeći način:

$$\mathbf{Q}_1(\alpha_k) = (\beta_k), \quad \beta_k = -r\alpha_{k-1} + (1+2r)\alpha_k - r\alpha_{k+1}.$$

Kako je

$$|\beta_k| \geq -r|\alpha_{k-1}| + (1+2r)|\alpha_k| - r|\alpha_{k+1}|$$

slijedi

$$|\beta_k| \geq (1+2r)|\alpha_k| - 2r\|(\alpha_k)\|_\infty$$

pa uzimanje supremuma na lijevoj strani izlazi

$$\|(\beta_k)\|_\infty \geq (1+2r)\|(\alpha_k)\|_\infty - 2r\|(\alpha_k)\|_\infty = \|(\alpha_k)\|_\infty.$$

Time smo dokazali da je za svako  $\mathbf{u} \in l_\infty$ ,  $\|\mathbf{Q}_1\mathbf{u}\|_\infty \geq \|\mathbf{u}\|_\infty$ , pa je operator injektivan (i ima zatvorenu sliku). Pretpostavimo nadalje da je operator  $\mathbf{Q}_1$  i surjektivan (to se može dokazati na dovoljno malom potprostoru od  $l_\infty$  ili se jednostavno može promatrati  $\mathbf{Q}_1: \mathcal{R}(\mathbf{Q}_1) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$ , gdje je  $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_1)$  slika operatora  $\mathbf{Q}_1$ ), onda evidentno inverzno preslikavanje zadovoljava  $\|\mathbf{Q}_1^{-1}\|_\infty \leq 1$ . Time dolazimo do (2, 1) točnosti sheme u sup-normi.

Uniformna ograničenost inverznog operatora može se dokazati i u  $l_{2,\Delta x}$  normi, no dokaz nije tako jednostavan kao u sup-normi.

**Zadatak 2.2** Odredite točnost slijedećih diferencijskih shema za Cauchyjev problem za jednažbu:

$$v_t + av_x = Dv_{xx}.$$

(a) Eksplicitna:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_0 u_k^n + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_k^n;$$

(b) Implicitna:

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_0 u_k^{n+1} + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_k^{n+1}.$$

Precizirajte uvjete na egzaktno rješenje uz koje se dobiva odgovarajuća točnost.

**Zadatak 2.3** Odrediti točnost Crank-Nicolsonove sheme

$$u_k^{n+1} - D\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\delta^2 u_k^{n+1} = u_k^n + D\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\delta^2 u_k^n$$

za diferencijalnu jednažbu  $v_t = Dv_{xx}$ . Zašto je logično promatrati konzistentnost sheme u točki  $(k\Delta x, (n+1/2)\Delta t)$ , a ne u točkama  $(k\Delta x, n\Delta t)$  ili  $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ ?

**Zadatak 2.4** Ispitati konzistentnost Dufort-Frankelove sheme

$$u_k^{n+1} = \frac{2r}{1+2r}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) + \frac{1-2r}{1+2r}u_k^{n-1},$$

gdje je  $r = \Delta t / \Delta x^2$ , s jednadžbom  $v_t = v_{xx}$ .

**Zadatak 2.5** (a) Pokažite da je diferencijaska shema

$$u_k^{n+1} = u_k^n + r\left(-\frac{1}{12}u_{k-2}^n + \frac{4}{3}u_{k-1}^n - \frac{5}{2}u_k^n + \frac{4}{3}u_{k+1}^n - \frac{1}{12}u_{k+2}^n\right)$$

$O(\Delta t) + O(\Delta x^4)$  aproksimacija jednadžbe  $v_t = Dv_{xx}$  ( $r = D\Delta t / \Delta x^2$ ). Uz koje uvjete na derivacije rješenja to vrijedi?

(b) Pokažite da je diferencijaska shema (Što je  $\delta_0^2$ !!!)

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n + \frac{R}{12}\delta^2 \delta_0 u_k^n + \frac{R^2}{2}\left(\frac{4}{3} + R^2\right)\delta^2 u_k^n - \frac{R^2}{8}\left(\frac{1}{3} + R^2\right)\delta_0^2 u_k^n,$$

gdje je  $R = a\Delta t / \Delta x$ ,  $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$  aproksimacija jednadžbe  $v_t + av_x = 0$ . Uz koje uvjete na derivacije rješenja to vrijedi?

**Zadatak 2.6** Odredite red točnosti sljedećih diferencijaskih shema za jednadžbu

$$v_t + av_x = 0.$$

- (a)  $u_k^{n+1} = u_k^n - R(u_{k+1}^n - u_k^n)$ .  
 (b) Leapfrog shema:  $u_k^{n+1} = u_k^n - R\delta_0 u_k^n$ .  
 (c)  $u_k^{n+1} = u_k^n - R\delta_0 u_k^n + \frac{R}{6}\delta^2 \delta_0 u_k^n - \frac{R}{30}\delta^4 \delta_0 u_k^n$ , gdje je  $\delta^4 = \delta^2 \delta^2$ .  
 (d)  $u_k^{n+2} = u_k^{n-2} - \frac{2R}{3}\left(1 - \frac{1}{6}\delta^2\right)\delta_0(2u_k^{n+1} - u_k^n + 2u_k^{n-1})$ .

Definicija točkovne konzistentnosti je primijenjiva i na inicijalno-rubne zadaće, s time da treba posebno analizirati rubne uvjete.

Definicije konzistentnosti i točnosti dane u Definiciji 2.6 i Definiciji 2.7 prenose se i na slučaj inicijalno-rubne zadaće s time da je nužno odabrati odgovarajući niz normi  $\|\cdot\|_j$ . Pokažimo to na jednom primjeru.

**Primjer 2.5** Treba diskutirati konzistentnost diferecijske sheme

$$u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad n \geq 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \quad (2.5)$$

$$u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \quad (2.6)$$

$$u_0^{n+1} = (1-2r)u_0^n + 2ru_1^n, \quad n \geq 0 \quad (2.7)$$

$$u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0, \quad (2.8)$$

s inicijalno-rubnom zadaćom

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \quad (2.9)$$

$$v(x, 0) = f(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.10)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.11)$$

$$v(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.12)$$

Rješenje: Diferencijska jednadžba (2.5) aproksimira diferencijalnu jednadžbu (2.9) s greškom  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ . Rubni uvjet (2.11) je aproksimiran centralnom diferencijom

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\Delta x} = 0,$$

pa možemo zaključiti da je shema (2.5) – (2.8)  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$  aproksimacija po točkama inicijalno-rubne zadaće (2.9)–(2.12).

Da bismo odredili konzistenciju u normi moramo zapisati našu jednadžbu u obliku

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n$$

i zatim izračunati grešku diskretizacije  $\boldsymbol{\tau}^n$  iz jednadžbe

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^n + \Delta t\boldsymbol{\tau}^n.$$

Prvo zapišemo (2.5) – (2.8) u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \dots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & 2r & \dots & & \\ r & 1-2r & r & \dots & \\ 0 & r & 1-2r & r & \dots \\ & & \dots & & \\ \dots & & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ \dots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}.$$

Neumannov rubni uvjet je reprezentiran promjenom u prvom redu matrice gdje je  $r$  postao  $2r$ .

U analizi točnosti metode potrebno je samo računati  $\tau_0^n$  budući da za  $\tau_k^n$ ,  $1 \leq k \leq M-1$ , znamo da je reda  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ .

Jednostavna analiza na bazi Taylorovog razvoja daje

$$\begin{aligned} \Delta t\tau_0^n &= v_0^{n+1} - (1-2r)v_0^n - 2rv_1^n \\ &= [(v_t)_0^n - D(v_{xx})_0^n]\Delta t - 2r(v_x)_0^n\Delta x + (v_{tt})_0^n\Delta t^2/2 - D(v_{xxx})_0^n\Delta t\Delta x/3 + \dots \end{aligned}$$

pa je stoga

$$\tau_0^n = (v_{tt})_0^n\Delta t/2 - D(v_{xxx})_0^n\Delta x/3 + \dots$$

Vidimo da za  $k=0$  shema ima samo točnost  $O(\Delta t) + O(\Delta x)$  što je posljedica načina na koji se rubni uvjet slaže s diferencijalnom jednadžbom.

Oдавde slijedi da je točnost metode u sup-normi jednaka  $O(\Delta t) + O(\Delta x)$ . Kolika je točnost u  $l_{2,\Delta x}$  normi?

U sljedećem primjeru analiziramo istu metodu ali s aproksimacijom Neumannovog rubnog uvjeta prvog reda.

**Primjer 2.6** Treba diskutirati konzistentnost diferencijske sheme

$$u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad n \geq 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \quad (2.13)$$

$$u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \quad (2.14)$$

$$u_0^n = u_1^n, \quad n \geq 0 \quad (2.15)$$

$$u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0, \quad (2.16)$$

s inicijalno-rubnom zadaćom

$$v_t = Dv_{xx} \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \quad (2.17)$$

$$v(x, 0) = f(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.18)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.19)$$

$$v(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.20)$$

**Rješenje:** Aproksimacija diferencijalne jednadžbe je reda  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$  dok je Neumannov rubni uvjet aproksimiran diferencijom unaprijed

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = 0,$$

pa možemo zaključiti da je shema  $O(\Delta t) + O(\Delta x)$  aproksimacija po točkama inicijalno-rubne zadaće. U matricnoj formi shema ima zapis

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \dots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & r & 0 & \dots & \\ r & 1-2r & r & \dots & \\ 0 & r & 1-2r & r & \dots \\ & & \dots & & \\ \dots & & & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \dots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}.$$

Potrebno je samo računati  $\tau_1^n$ :

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_1^n &= v_1^{n+1} - (1-r)v_1^n - r v_2^n \\ &= (v_t)_1^n \Delta t - r(v_x)_1^n \Delta x - r(v_{xx})_1^n \Delta x^2/2 + (v_{tt})_1^n \Delta t^2/2 - r(v_{xxx})_1^n \Delta x^3/6 + \dots \end{aligned}$$

Kako je

$$0 = (v_x)_0^n = (v_x)_1^n + (v_{xx})_1^n(-\Delta x) + (v_{xxx})_1^n \Delta x^2/2 + \dots$$

eliminacijom  $(v_x)_1^n$  dobivamo

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_1^n &= \left[ v_t - D \frac{3}{2} v_{xx} \right]_1^n + O(\Delta t \Delta x) + O(\Delta t^2) \\ &= -\frac{D}{2} (v_{xx})_1^n \Delta t + O(\Delta t \Delta x) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je  $r = D\Delta t/\Delta x^2$  i jednadžbu  $v_t = Dv_{xx}$ . Time smo dobili

$$\tau_1^n = -\frac{D}{2} (v_{xx})_1^n + O(\Delta x) + O(\Delta t)$$

i shema nije konzistentna u sup-normi.

Konačno pokažimo primjer implicitne sheme za inicijalno-rubnu zadaću.

**Primjer 2.7** Treba diskutirati konzistentnost implicitne diferencijske sheme

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} &= D \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad n \geq 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \\ u_0^{n+1} &= u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

s inicijalno-rubnom zadaćom

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x) \quad x \in (0, 1) \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0 \quad t > 0. \end{aligned}$$

**Rješenje:** Točkovna konzistentnost se pokazuje kao i u slučaju inicijalne zadaće. Da bismo pokazali konzistentnost u normi shemu zapisujemo u obliku

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n.$$

gdje je  $\mathbf{Q}_1$  matrica

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & & \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \cdots & 0 & -r & 1+2r & -r \\ & & \cdots & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}_{M-1 \times M-1}$$

Tada  $\mathbf{v}$  zadovoljava

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{r}^n,$$

gdje je  $\mathbf{r}^n$  residual za koji se kao i ranije pokaže da vrijedi:  $\|\mathbf{r}^n\| = O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$  bilo u  $l_{2,\Delta x}$  bilo u sup-normi, ovisno o pretpostavkama na derivacije. Kako je

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{r}^n.$$

trebamo samo ocijeniti normu  $\|\mathbf{Q}_1^{-1}\|$  (uniformnu obzirom na  $\Delta t$  i  $\Delta x$ ).

Ocijent ćemo  $l_{2,\Delta x}$ -normu matrice  $\mathbf{Q}_1^{-1}$ . To znači da ćemo promatrati operatorsku normu matrice pridružene  $l_{2,\Delta x}$  vektorskoj normi. No iz definicije operatorske norme odmah se vidi da se radi o matricnoj normi pridruženoj običnoj 2-vektorskoj normi, pa budući da je matrica simetrična znamo da je ta norma jednaka spektralnom radijusu matrice. Time dobivamo

$$\|\mathbf{Q}_1^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_{\min}}$$

gdje je  $\lambda_{\min}$  najmanja svojstena vrijednost matrice  $\mathbf{Q}_1$ . Prema Dodatku A znamo da su svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}_1$  jednake

$$\lambda_j = 1 + 2r(1 - \cos \frac{j\pi}{M}) = 1 + 4r \sin^2 \frac{j\pi}{M},$$

$j = 1, \dots, M-1$ . Stoga je

$$\|\mathbf{Q}_1^{-1}\| = \frac{1}{\min_j (1 + 4r \sin^2 \frac{j\pi}{M})} \leq 1.$$

**Zadatak 2.7** Odredite red točnosti diferencijske sheme

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \delta_0 u_k^{n+1} - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \delta^2 u_k^{n+1} &= u_k^n, \quad k = 0, \dots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x) \quad k = 0, \dots, M \\ u_M^{n+1} &= 0 \\ \frac{u_1^{n+1} - u_{-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= \alpha((n+1)\Delta t) \end{aligned}$$

za inicijalno rubnu zadaću

$$\begin{aligned} v_t + av_x &= Dv_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, 1] \\ v(1, t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ v_x(0, t) &= \alpha(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

**Zadatak 2.8** Odredite red točnosti diferencijske sheme

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\delta_0 u_k^{n+1} - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\delta^2 u_k^{n+1} &= u_k^n, \quad k = 1, \dots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x) \quad k = 0, \dots, M \\ u_M^{n+1} &= 0 \\ \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{2\Delta x} &= \alpha((n+1)\Delta t) \end{aligned}$$

za inicijalno rubnu zadaću iz Zadatka 2.7.

## 2.3 Stabilnost

Kontinuirane zadaće koje aproksimiramo numerički moraju biti korektno postavljene da bi diskretizacija zadaće davala dobru aproksimaciju. Korektnost inicijalne ili inicijalno-rubne zadaće znači da (1) zadaća ima jedno i samo jedno rješenje i (2) da rješenje ovisi neprekidno o zadanim podacima (desnoj strani, inicijalnim i rubnim uvjetima). Oba su ova zahtjeva prirodna kada se promatra problem numeričke aproksimacije. Ako problem ima više rješenja, onda se postavlja pitanje koje od rješenja naša diferencijska shema aproksimira. Ako pak rješenje ne ovisi neprekidno o zadanim podacima ne možemo očekivati korektnu numeričku aproksimaciju, budući da ulazne podatke redovito znamo samo aproksimativno (u najboljem slučaju do na greške zaokruživanja). Zbog svih tih razloga u analizi numeričkih postupaka uvijek pretpostavljamo da je kontinuirana zadaća koju aproksimiramo korektno postavljena. Nekorektne zadaće traže specijalne tehnike aproksimacije.

Stabilnost diskretne zadaće predstavlja na određen način korektnost diskretnog problema budući da zahtijeva da rješenje diskretnog problema ovisi neprekidno o zadanim podacima. Preciznu definiciju stabilnosti dajemo u slučaju jednokoračne sheme.

Promatramo diferencijsku shemu oblika

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n, \quad n \geq 0 \tag{2.21}$$

što predstavlja općenit oblik jednokoračne sheme za homogenu inicijalnu zadaću za paraboličku jednadžbu ili hiperboličku jednadžbu prvog reda. Sam diferencijski operator  $\mathbf{Q}$  ovisi o parametrima diskretizacije te bismo ga preciznije trebali pisati  $\mathbf{Q}_{\Delta x, \Delta t}$ . Pri tome, kod pitanja konvergencije uvijek možemo pretpostaviti da su parametri diskretizacije “mali”, tj da promatramo  $\Delta x \in (0, \Delta x_0)$  i  $\Delta t \in (0, \Delta t_0)$  za neke fiksirane  $\Delta x_0$  i  $\Delta t_0$ . Konvergenciju, pa onda i stabilnost, možemo postići samo za određene kombinacije parametara diskretizacije. Kod paraboličke jednadžbe, na primjer, vidjeli smo da parametar  $r = \Delta t / \Delta x^2$  mora biti manji od jedne polovine ako želimo imati konvergenciju. Stoga, prirodno diferencijsku shemu promatramo u za  $(\Delta x, \Delta t)$  iz određenog podskupa  $\mathcal{S}$  kvadrata

$(0, \Delta x_0) \times (0, \Delta t_0)$ . Taj podskup obično ne zadajemo eksplicitno već u shemu ulazi parametar, poput parametra  $r$ , koji smatramo konstantnim. Time se podskup  $\mathcal{S}$  svodi na krivulju u ravnini – u paraboličkom slučaju parabolu.

Skup  $\mathcal{S}$  u  $\Delta x, \Delta t$ - ravnini iz kojeg uzimamo parametre diskretizacije prirodno mora završavati (odnosno počinjati) u točki  $(0, 0)$  (preciznije  $(0, 0) \in \overline{\mathcal{S}}$ ) kako bismo mogli promatrati limes kada  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0, 0)$ .

**Definicija 2.8** Diferencijska shema (2.21) je stabilna u području  $\mathcal{S}$  u odnosu na normu  $\|\cdot\|$  ako postoje konstante  $K > 0$  i  $\beta \geq 0$  takve da je

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t} \|\mathbf{u}^0\|, \quad \forall n \geq 0, \quad (2.22)$$

za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$  i sve početne uvjete  $\mathbf{u}^0$ .

Stabilnost nam kaže da rješenje može rasti s vremenom, ali ne i sa brojem vremenskih koraka. Primijetimo još da je stabilnost definirana za homogenu zadaću stoga što ona predstavlja svojstvo diferencijske sheme i neovisna je o načinu diskretizacije "desne" strane.

Gornja definicija stabilnosti vrlo je općenita. U primjenama se često uvode dva ograničenja. Prvo, ne promatraju se sva vremena  $t > 0$ , već se korektnost zahtijeva samo za  $t \in (0, T)$ , ta neko zadano  $T > 0$ . Drugo, često se zahtijeva  $\beta = 0$ , odnosno

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq K \|\mathbf{u}^0\|. \quad (2.23)$$

Stabilnost je lako karakterizirati pomoću operatora  $\mathbf{Q}$ :

**Propozicija 2.1** Diferencijska shema (2.21) je stabilna u području  $\mathcal{S}$  u odnosu na normu  $\|\cdot\|$  ako i samo ako postoje konstante  $K > 0$  i  $\beta \geq 0$  takve da je

$$\|\mathbf{Q}^{n+1}\| \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t}, \quad (2.24)$$

za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$ .

**Napomena 2.1** Uočimo da je u (2.24)  $\|\cdot\|$  operatorska norma inducirana vektorskom normom iz (2.22).  $\square$

**Dokaz.** Imamo

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n = \mathbf{Q}^2\mathbf{u}^{n-1} = \dots = \mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{u}^0,$$

pa (2.22) možemo zapisati u obliku

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| = \|\mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{u}^0\| \leq K e^{\beta t} \|\mathbf{u}^0\|.$$

Time dobivamo

$$\frac{\|\mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{u}^0\|}{\|\mathbf{u}^0\|} \leq K e^{\beta t}$$

i kako to vrijedi za sve  $\mathbf{u}^0$ , slijedi (2.24). Obrat se dobiva na isti način.  $\square$

Stabilnost je teško dokazivati neposredno te ćemo stoga u sljedećem poglavlju pokazati način kako se taj zadatak može pojednostaviti. Ovdje dajemo dva primjera.

**Primjer 2.8** Treba pokazati da je diferencijska shema

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$$

stabilna u odnosu na sup-normu.

**Rješenje:** Za  $0 < r \leq 1/2$  imamo

$$|u_k^{n+1}| \leq (1 - 2r)|u_k^n| + r(|u_{k+1}^n| + |u_{k-1}^n|) \leq \|\mathbf{u}^n\|_\infty.$$

Uzimajući supremum po  $k$  na lijevoj strani izlazi

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{u}^n\|_\infty.$$

Prema tome, (2.22) je zadovoljeno s  $\beta = 0$ .

Uočimo da je ova shema iz prethodnog primjera **uvjetno stabilna**, jer je uvjet stabilnosti zadovoljen samo za  $0 < r \leq 1/2$ . (Dokažite nestabilnost za  $r > 1/2$ .) To je određen uvjet na odnos između  $\Delta x$  i  $\Delta t$  koji određuje područje stabilnosti  $\mathcal{S}$ . Ako takvog uvjeta nema onda kažemo da je shema **bezuovjetno stabilna**, a  $\mathcal{S} = (0, \Delta x_0) \times (0, \Delta t_0)$ .

**Primjer 2.9** Diskutirajte stabilnost diferencijske sheme

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k+1}^n - u_k^n).$$

u  $l_{2, \Delta x}$  normi.

**Rješenje:** Ova diferencijska shema aproksimira jednadžbu

$$v_t + av_x = 0.$$

Uvedimo prvo koeficijent  $R = a\Delta t/\Delta x$  i napišimo shemu u obliku

$$u_k^{n+1} = (1 + R)u_k^n - Ru_{k+1}^n.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x |u_k^{n+1}|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x |(1 + R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x (|1 + R|^2 |u_k^n|^2 + 2|1 + R||R||u_k^n||u_{k+1}^n| + |R|^2 |u_{k+1}^n|^2) \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x (|1 + R|^2 |u_k^n|^2 + |1 + R||R|(|u_k^n|^2 + |u_{k+1}^n|^2) + |R|^2 |u_{k+1}^n|^2) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x (|1 + R|^2 + 2|1 + R||R| + |R|^2) |u_k^n|^2 \\ &= (|1 + R| + |R|)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta x |u_k^n|^2. \end{aligned}$$

Time smo dobili

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_2 \leq (|1 + R| + |R|)\|\mathbf{u}^n\|_2,$$

ali jednako tako

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{2;\Delta x} \leq (|1 + R| + |R|)\|\mathbf{u}^n\|_{2;\Delta x}.$$

Iterirajući tu nejednakost dobivamo

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{2;\Delta x} \leq (|1 + R| + |R|)^{n+1}\|\mathbf{u}^0\|_{2;\Delta x}$$

i odavdje vidimo da je uvjet stabilnosti

$$|1 + R| + |R| \leq 1.$$

Time dolazimo do sljedećeg zaključka: ako je  $a < 0$ , onda je uvjet stabilnosti zadovoljen za  $-1 \leq R < 0$ . Ta je shema stoga uvjetno stabilna. Ako je pak  $a > 0$ , onda uvjet stabilnosti ne može biti ispunjen i shema je nestabilna (što ostaje za dokazati kontraprimjerom).

**Zadatak 2.9** Pokažite da je shema

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}\delta_0 u_k^n$$

stabilna u sup-normi za  $R \leq 1$ .

Stabilnost inicijalno rubne zadaće definira se posve analogno kao i za inicijalnu zadaću s tom razlikom da se umjesto jedne norme na prostoru bekonačnih nizova mora promatrati niz particija domene koje odgovaraju nizu  $(\Delta x_j)$ , njima pridružen niz konačnodimenzionalnih prostora  $X_j$  i niz pripadnih normi  $\|\cdot\|_j$ .

**Primjer 2.10** Treba pokazati stabilnost sheme

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} &= D \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} \quad n \geq 0, \quad k = 1, \dots, M-1 \\ u_k^0 &= f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \\ u_0^{n+1} &= u_M^{n+1} = 0, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

za inicijalno-rubnu zadaću

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x) \quad x \in (0, 1) \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0 \quad t > 0. \end{aligned}$$

Rješenje: Račun je esencijalno isti kao u Primjeru 2.1, trebamo samo odabrati normu s kojom ćemo raditi. Prostor  $X_j$  je prostor vektora duljine  $M_j - 1$ , gdje je  $M_j \Delta x_j = 1$ . Norma  $\|\cdot\|_j$  na  $X_j$  neka bude sup-norma. Tada za  $r = D\Delta t/\Delta x \leq 1/2$  imamo

$$\begin{aligned} |u_k^{n+1}| &= |(1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)| \\ &\leq (1 - 2r)|u_k^n| + r(|u_{k+1}^n| + |u_{k-1}^n|) \\ &\leq (1 - 2r)\|\mathbf{u}^n\|_j + 2r\|\mathbf{u}^n\|_j = \|\mathbf{u}^n\|_j \end{aligned}$$

i stoga

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_j \leq \|\mathbf{u}^n\|_j.$$

Odavdje slijedi stabilnost sa  $K = 1$  i  $\beta = 0$ .

**Zadatak 2.10** Zadana je inicijalno rubna zadaća:

$$\begin{aligned}v_t + av_x &= 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\v(x, 0) &= f(x), & x \in [0, 1] \\v(1, t) &= 0, & t > 0,\end{aligned}$$

gdje je  $a < 0$  i diferencijska shema

$$\begin{aligned}u_k^{n+1} &= (1 + R)u_k^n - Ru_{k+1}^n, & k = 0, \dots, M - 1 \\u_M^{n+1} &= 0 \\u_k^0 &= f(k\Delta x), & k = 0, \dots, M,\end{aligned}$$

gdje je  $R = a\Delta t/\Delta x$ . Pokažite da je shema stabilna za  $|R| \leq 1$ .

## 2.4 Laxov teorem ekvivalencije

**Teorem 2.1** (Laxov teorem ekvivalencije) Linearna jednokoračna diferencijska shema koja je konzistentna s korektno postavljenom linearnom inicijalnom zadaćom je konvergentna ako i samo ako je stabilna.

Može se dokazati i nešto jača verzija:

**Teorem 2.2** Linearna jednokoračna diferencijska shema

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^n + \Delta t\mathbf{F}^n$$

koja je konzistentna reda  $(p, q)$  u normi  $\|\cdot\|$  s korektno postavljenom linearnom inicijalnom zadaćom konvergentna je reda  $(p, q)$  ako i samo ako je stabilna u normi  $\|\cdot\|$ .

**Dokaz.** Pokazat ćemo samo jedan smjer, tj. da konzistentnost i stabilnost povlače konvergenciju. Za suprotan smjer vidi [1].

Neka je  $v(x, t)$  točno rješenje inicijalne zadaće. Ako je diferencijska shema točna reda  $(p, q)$ , onda je

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^n + \Delta t\mathbf{F}^n + \Delta t\boldsymbol{\tau}^n$$

pri čemu je  $\|\boldsymbol{\tau}^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q)$ . Tada razlika  $\mathbf{z}^j = \mathbf{v}^j - \mathbf{u}^j$  zadovoljava

$$\mathbf{z}^{n+1} = \mathbf{Q}\mathbf{z}^n + \Delta t\boldsymbol{\tau}^n.$$

Iteriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^{n+1} &= \mathbf{Q}\mathbf{z}^n + \Delta t\boldsymbol{\tau}^n \\&= \mathbf{Q}(\mathbf{Q}\mathbf{z}^{n-1} + \Delta t\boldsymbol{\tau}^{n-1}) + \Delta t\boldsymbol{\tau}^n \\&= \mathbf{Q}^2\mathbf{z}^{n-1} + \Delta t\mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}^{n-1} + \Delta t\boldsymbol{\tau}^n \\&= \mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{z}^0 + \Delta t \sum_{j=0}^n \mathbf{Q}^j\boldsymbol{\tau}^{n-j}.\end{aligned}$$

Zbog  $\mathbf{z}^0 = 0$  imamo

$$\mathbf{z}^{n+1} = \Delta t \sum_{j=0}^n \mathbf{Q}^j \boldsymbol{\tau}^{n-j}.$$

Stabilnost diferencijske sheme implicira

$$\|\mathbf{Q}^j\| \leq K e^{\beta j \Delta t},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}^{n+1}\| &\leq \Delta t \sum_{j=0}^n \|\mathbf{Q}^j\| \|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\| \\ &\leq \Delta t K \sum_{j=0}^n e^{\beta j \Delta t} \|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\| \\ &\leq \Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} \sum_{j=0}^n \|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\|. \end{aligned}$$

Po pretpostavci je

$$\|\boldsymbol{\tau}^{n-j}\| \leq C((n-j)\Delta t)(\Delta x^p + \Delta t^q)$$

gdje smo istaknuli da konstanta  $C$  može ovisiti o vremenu. Uz oznaku  $C^*(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} C(s)$  imamo

$$\|\mathbf{z}^{n+1}\| \leq (n+1)\Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} C^*(t)(\Delta x^p + \Delta t^q).$$

Promatramo li niz  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$  i niz  $n$ -ova za koji  $(n+1)\Delta t \rightarrow t$ , onda imamo da

$$(n+1)\Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} C^*(t)(\Delta x^p + \Delta t^q) \rightarrow 0,$$

što daje konvergenciju. Štoviše, na takvom nizu imamo

$$\|\mathbf{z}^{n+1}\| \leq K(t)(\Delta x^p + \Delta t^q)$$

za neku funkciju  $K(t)$ . Ukoliko imamo samo konzistentnost sheme, onda je ponovo evidentno da dobivamo konvergenciju.  $\square$

Potrebno je istaknuti da za dokaz konvergencije treba dokazati konzistentnost i stabilnost u istoj normi.

U slučaju inicijalno-rubne zadaće jedina razlika koja se pojavljuje u dokazu Laxovog teorema je ta što se mora raditi s nizom odabranih normi  $\|\cdot\|_j$  na nizu prostora  $X_j$ . Pri tome konzistentnost i stabilnost moraju biti dokazane u istom nizu normi. Formulacija i dokaz teorema ostaju posve isti.

## Bibliografija

- [1] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Belmont, California, 1989.



# 3

## Analiza stabilnosti

Ovdje ćemo analizirati stabilnost linearnih diferencijskih shema s konstantnim koeficijentima. Na takve sheme možemo primijeni Fourierovu transformaciju i dobiti jednostavan analitički kriterij stabilnosti.

Analiza stabilnosti linearnih shema s konstantnim koeficijentima daje važnu informaciju o stabilnosti diferencijskih shema primijenjenih na nelinearne jednadžbe te jednadžbe s s varijabilnim koeficijentima. U takvim shemama koeficijenti sheme se “zamrznu”, tj. zamijene se svojom vrijednošću u jednoj fiksnoj točki, i na taj način se dobiva linearna shema s konstantnim koeficijentima. Dobiveni rezultat stabilnosti može se primijeniti lokalno oko točke u kojoj su koeficijenti “zamrznuti”.

### 3.1 Diskretna Fourierova transformacija

**Definicija 3.1** Diskretna Fourierova transformacija niza  $\mathbf{u} \in l_2$  je funkcija  $\hat{u} \in L^2(0, 1)$  definirana formulom

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi im\xi} u_m, \quad (3.1)$$

za  $\xi \in [0, 1]$ .

**Zadatak 3.1** Pokažite da je niz parcijalnih suma reda (3.1) Cauchyjev u prostoru  $L^2(0, 1)$  te stoga konvergira i definira funkciju  $\hat{u} \in L^2(0, 1)$ . Konvergenciju reda (3.1) treba stoga shvatiti u smislu norme prostora  $L^2(0, 1)$ .

**Propozicija 3.1** Neka je  $\mathbf{u} \in l_2$  i  $\hat{u}$  diskretna Fourierova transformacija od  $\mathbf{u}$ . Tada je za svako  $m \in \mathbb{Z}$

$$u_m = \int_0^1 e^{2\pi im\xi} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (3.2)$$

**Dokaz.** Budući da poredak sumacije i integracije možemo zamijeniti

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{2\pi im\xi} \hat{u}(\xi) d\xi &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(k-m)\xi} u_k d\xi \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \int_0^1 e^{-2\pi i(k-m)\xi} d\xi \\ &= u_m. \quad \square \end{aligned}$$

budući da je

$$\int_0^1 e^{-2\pi ik\xi} d\xi = \delta_{k,0} = \begin{cases} 0 & \text{za } k \neq 0 \\ 1 & \text{za } k = 0 \end{cases}.$$

**Zadatak 3.2** Opravdajte zamjenu poretka sumacije i integracije u gornjem dokazu.

**Propozicija 3.2** (Diskretna Parsevalova jednakost) Neka je  $\mathbf{u} \in l_2$  i  $\hat{u}$  diskretna Fourierova transformacija od  $\mathbf{u}$ . Tada je

$$\|\hat{u}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2. \quad (3.3)$$

**Dokaz.** Ponovo koristimo činjenicu da možemo zamijeniti poredak sumacije i integracije.

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_2^2 &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ik\xi} u_k \overline{\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi im\xi} u_m} d\xi \\ &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(k-m)\xi} u_k \overline{u_m} d\xi \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_k \overline{u_m} \int_0^1 e^{-2\pi i(k-m)\xi} d\xi \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_k \overline{u_m} \delta_{km} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2. \quad \square \end{aligned}$$

## 3.2 Von Neumannov kriterij

Diskretna Fourierova transformacija daje jednostavan kriterij za stabilnost u 2-normi diferencijske sheme za inicijalnu zadaću.

Prema definiciji stabilnosti diferencijske sheme moraju postojati brojevi  $K > 0$  i  $\beta \geq 0$  takvi da vrijedi

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{2,\Delta x} \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t} \|\mathbf{u}^0\|_{2,\Delta x},$$

za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$ , gdje je  $\mathcal{S}$  područje stabilnosti, i sve početne uvjete. Prema diskretnoj Parsevalovoj jednakosti vidimo da je taj uvjet ekvivalentan uvjetu

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t} \|\hat{u}^0\|_2, \quad (3.4)$$

koji mora vrijediti za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$  i sve početne uvjete. Pri tome smo diskretni Fourierov transformat mrežne funkcije  $\mathbf{u}^{n+1}$  označili s  $\hat{u}^{n+1}$ . Evidentno imamo ekvivalenciju:

**Propozicija 3.3** Niz  $(\mathbf{u}^n)$  je stabilan u  $l_{2,\Delta x}$  akko je niz  $(\hat{u}^n)$  stabilan u  $L^2(0, 1)$ .

Stabilnost niza  $(\hat{u}^n)$  u  $L^2(0, 1)$  znači da postoje konstante  $K > 0$  i  $\beta \geq 0$  takve da (3.4) vrijedi za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$  i sve početne uvjete.

Uvedimo oznaku za diskretnu Fourierovu transformaciju

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(\mathbf{u})(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i m \xi} u_m$$

te operatore pomaka

$$\begin{aligned} S_+ \mathbf{u} &= \mathbf{v}, & v_k &= u_{k+1}, \\ S_- \mathbf{u} &= \mathbf{v}, & v_k &= u_{k-1}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\mathcal{F}(S_+ \mathbf{u}) = e^{2\pi i \xi} \mathcal{F}(\mathbf{u}), \quad \mathcal{F}(S_- \mathbf{u}) = e^{-2\pi i \xi} \mathcal{F}(\mathbf{u}). \quad (3.5)$$

**Primjer 3.1** Analizirati stabilnost diferencijske sheme

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Rjesenje. Koristimo linearnost DFT i svojstva (3.5)

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1} &= (1 - 2r)\hat{u}^n + r(e^{2\pi i \xi} \hat{u}^n + e^{-2\pi i \xi} \hat{u}^n) \\ &= [(1 - 2r) + r(e^{2\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi})] \hat{u}^n \\ &= \rho(\xi) \hat{u}^n, \end{aligned}$$

gdje je

$$\rho(\xi) = 1 - 4r \sin^2(\pi \xi)$$

tzv. simbol diferencijske sheme. Lako se pokazuje da je

$$|\hat{u}^{n+1}(\xi)| = |\rho(\xi)|^{n+1} |\hat{u}^0(\xi)| \quad \Rightarrow \quad \|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq \left( \max_{\xi \in [0,1]} |\rho(\xi)| \right)^{n+1} \|\hat{u}^0\|_2$$

Sad se vidi da je shema stabilna za

$$\max_{\xi \in [0,1]} |\rho(\xi)| \leq 1,$$

što je ekvivalentno s  $r \leq 1/2$ .

Da je ovaj uvjet stabilnosti i nužan lako se vidi ako se pretpostavi da postoji  $\xi_0 \in [0, 1]$  za koji je  $|\rho(\xi_0)| \geq 1 + \eta > 1$ . Tada postoji interval  $J$  oko  $\xi_0$  na kojem je  $|\rho(\xi)| \geq 1 + \eta/2 > 1$ . Uzmemo li sada  $\hat{u}^0(\xi)$  s nosačem unutar intervala  $J$ , onda lako vidimo da je

$$|\hat{u}^{n+1}(\xi)| = |\rho(\xi)|^{n+1} |\hat{u}^0(\xi)| \geq (1 + \eta/2)^{n+1} |\hat{u}^0(\xi)|,$$

pa je stoga

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \geq (1 + \eta/2)^{n+1} \|\hat{u}^0\|_2 \rightarrow +\infty.$$

Shema, dakle, nije stabilna.  $\square$

Prethodni primjer nam pokazuje da primjenom diskretne Fourierove transformacije na linearnu diferencijsku shemu s konstantnim koeficijentima oblika  $\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n$  dobivamo jednadžbu  $\hat{u}^{n+1}(\xi) = \rho(\xi)\hat{u}^n(\xi)$  u kojoj funkciju  $\rho$  nazivamo simbol diferencijske sheme. Simbol, općenito, ovisi o  $\Delta x$  i  $\Delta t$  te bismo ga morali označavati  $\rho_{\Delta x, \Delta t}$ . Jedna važna situacija u kojoj simbol ne ovisi o parametrima diskretizacije je ona u kojoj se neka kombinacija tih parametara drži stalnom (npr.  $r = \Delta t / \Delta x^2$ ), a koeficijenti diferencijske jednadžbe ovise jedino o toj kombinaciji parametara. Područje stabilnosti  $\mathcal{S}$  se tada svodi na krivulju.

**Teorem 3.1** (Von Neumannov kriterij stabilnosti) Linearna diferencijska shema s konstantnim koeficijentima

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n$$

je stabilna u području  $\mathcal{S}$  u odnosu na  $\|\cdot\|_{2, \Delta x}$  normu ako postoji konstanta  $\beta \geq 0$  takva da je

$$\max_{\xi \in [0, 1]} |\rho(\xi)| \leq 1 + \beta \Delta t, \quad (3.6)$$

za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$ , gdje je  $\rho$  simbol diferencijske sheme.

**Dokaz.** Primjenom diskretne Fourierove transformacije na diferencijsku shemu dobivamo

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \rho(\xi)\hat{u}^n(\xi) = \rho(\xi)^{n+1}\hat{u}^0(\xi),$$

gdje je  $\rho$  simbol sheme. Iz (3.6) slijedi

$$\|\hat{u}^{n+1}(\xi)\|_2 = \|\rho(\xi)^{n+1}\hat{u}^0(\xi)\|_2 \leq (1 + \beta \Delta t)^{n+1} \|\hat{u}^0(\xi)\|_2 \leq e^{\beta(n+1)\Delta t} \|\hat{u}^0(\xi)\|_2.$$

Time je stabilnost pokazana.  $\square$

Dobiveni rezultat je strogi uvjet stabilnosti, odnosno shema je nestabilna ako taj uvjet nije zadovoljen. To ćemo pokazati u slučaju da vrijedi sljedeća pretpostavka koja je često zadovoljena:

- (H) Diferencijska shema je neovisna o  $\Delta x$  i  $\Delta t$ , odnosno ovisi samo o jednoj njihovoj kombinaciji koju držimo konstantnom. Skup  $\mathcal{S}$  svodi se tada na krivulju u  $\Delta x, \Delta t$  ravnini.

Uočimo prvo da ukoliko je (H) zadovoljeno, onda možemo uzeti  $\beta = 0$  jer naprosto pustimo  $\Delta t \rightarrow 0$ , i kako simbol ne ovisi o  $\Delta t$  dobivamo uvjet

$$\max_{\xi \in [0,1]} |\rho(\xi)| \leq 1 \quad (3.7)$$

Pokažimo sada da je shema koja zadovoljava (H) nestabilna ako von Neumannov uvjet stabilnosti (3.7) nije zadovoljen. Po prepostavci je

$$\max_{\xi \in [0,1]} |\rho(\xi)| \geq 1 + \eta > 1$$

pa zbog neprekidnosti funkcije  $|\rho(\xi)|$  zaključujemo da postoji interval  $J \subset [0, 1]$  na kome je  $|\rho(\xi)| \geq 1 + \eta/2 > 1$ . Odaberimo početni podatak  $\hat{u}^0$  s kompaktnim nosačem u  $J$  pa dobivamo

$$\|\hat{u}^{n+1}(\xi)\|_2 = \|\rho(\xi)^{n+1} \hat{u}^0(\xi)\|_2 \geq (1 + \eta/2)^{n+1} \|\hat{u}^0(\xi)\|_2 \rightarrow +\infty,$$

kada  $n \rightarrow \infty$  pa shema nije stabilna. Time je tvrdnja dokazana.

**Primjer 3.2** Za Cauchyjevu zadaću za parboličku jednadžbu

$$v_t = Dv_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad v(x, 0) = f(x),$$

treba analizirati stabilnost  $\theta$ -metode koja je kombinacija implicitne i eksplicitne diskretizacije:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = D \left[ \theta \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \theta) \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} \right]$$

Parametar  $\theta$  se nalazi između 0 i 1: za  $\theta = 0$  imamo eksplicitnu metodu, a za  $\theta = 1$  implicitnu.

Shema se može zapisati u obliku

$$-\theta r u_{k-1}^{n+1} + (1 + 2r\theta) u_k^{n+1} - \theta r u_{k+1}^{n+1} = (1 - \theta) r u_{k-1}^n + (1 - 2r(1 - \theta)) u_k^n + (1 - \theta) r u_{k+1}^n,$$

gdje je  $r = D\Delta t/\Delta x^2$ . Simbol diferencijske sheme je

$$\rho(\xi) = \frac{1 - 4(1 - \theta)r \sin^2(\pi\xi)}{1 + 4r\theta \sin^2(\pi\xi)}.$$

Za  $\theta \geq 1/2$  shema je bezuvjetn stabilna; za  $\theta < 1/2$  shema je stabilna za

$$r \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}.$$

Za  $\theta = 1/2$  shema se naziva Crank-Nicolsonova.

**Primjer 3.3** Treba analizirati stabilnost metode centralnih diferencija za jednadžbu konvekcije difuzije:

$$v_t + av_x = Dv_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad u(x, 0) = f(x).$$

Metoda je oblika

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{2} \delta_0 u_k^n + r \delta^2 u_k^n, \quad r = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad R = a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Simbol diferencijske sheme je

$$\rho(\xi) = 1 - 2r + 2r \cos(2\pi\xi) - iR \sin(2\pi\xi).$$

Izlazi

$$|\rho(\xi)|^2 = (1 - 2r)^2 + 4r(1 - 2r) \cos(2\pi\xi) + 4r^2 \cos^2(2\pi\xi) + R^2 \sin^2(2\pi\xi).$$

Tražimo ekstreme računajući

$$\frac{d}{d\xi} |\rho(\xi)|^2 = 0,$$

što vodi na

$$[-2r(1 - 2r) + (R^2 - 4r^2) \cos(2\pi\xi)] \sin(2\pi\xi) = 0.$$

Nultočke su  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1/2$ ,  $\xi_3 = 1$  te  $\xi_4$  određen jednačbom:

$$\cos(2\pi\xi_4) = \frac{2r(1 - 2r)}{R^2 - 4r^2}.$$

Imamo

$$|\rho(0)| = |\rho(1)| = 1, \quad |\rho(1/2)| = (1 - 4r)^2.$$

Zadnji uvjet vodi na  $r \leq 1/2$ .

Analizirajmo sada zadnji ekstrem. Imamo dva slučaja koja treba nalizirati:

1.  $r \leq 1/2$  i  $R^2 - 4r^2 \leq 0$ ;
2.  $r \leq 1/2$  i  $R^2 - 4r^2 > 0$ .

Uvjet 1. Uz  $|R| \leq 2r$  i  $r \leq 1/2$  imamo  $|\rho(\xi_4)| \leq 1$ .

Uvjet 2. On se raspada na dva podslučaja:

1.  $2r(1 - 2r)/R^2 - 4r^2 \geq 1$ ;
2.  $2r(1 - 2r)/R^2 - 4r^2 < 1$ .

Prvi slučaj ne uvodi nova ograničenja jer nultočke ili nema  $(2r(1 - 2r)/R^2 - 4r^2 > 1$  ili se radi o  $\xi = 0, 1$ . Dakle, slučaj 1 je dozvoljen i on se svodi na

$$R^2 \leq 2r, \quad r \leq 1/2.$$

Drugi slučaj:  $R^2 > 2r$ . Tada je

$$|\rho(\xi_4)| = \frac{R^2}{R^2 - 4r^2} [R^2 - 4r + 1]$$

što nije nikad manje ili jednako 1.

Zaključak: Stabilnost imamo u slučaju

$$R^2 \leq 2r \leq 1,$$

koji se svodi na

$$D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad a^2 \Delta t \leq 2D.$$

Dodatni uvjet stabilnosti je tadovoljen samo za dovoljno male  $\Delta t$  ovisno o omjeru konvekcije i difuzije.

**Primjer 3.4** Zadana je Cauchyjeva zadaća za jednadžbu

$$v_t = Dv_{xx} + bv.$$

Iskoristimo standardnu diskretizaciju

$$u_k^{n+1} = u_k^n + r\delta^2 u_k^n + b\Delta t u_k^n, \quad r = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Tada je

$$\rho(\xi) = (1 - 4r \sin^2(\pi\xi)) + b\Delta t,$$

i za  $r \leq 1/2$ ,

$$|\rho(\xi)| \leq 1 + b\Delta t \leq e^{b\Delta t}.$$

Shema je dakle stabilna.

**Propozicija 3.4** Ako je diferencijska shema  $u^{n+1} = Qu^n$  stabilna, onda je i shema

$$u^{n+1} = (Q + b\Delta t I)u^n$$

stabilna za svako  $b \in \mathbb{R}$ .

**Dokaz.** Simbol nove sheme je  $\rho_1(\xi) = \rho(\xi) + b\Delta t$ , gdje je  $\rho(\xi)$  simbol pridružen operatoru  $Q$ . Zbog stabilnosti polazne sheme vrijedi  $|\rho(\xi)| \leq 1 + C\Delta t$ , pa je stoga  $|\rho_1(\xi)| \leq 1 + (C + |b|)\Delta t$ .  $\square$

**Propozicija 3.5** Neka je  $Q: l_{2,\Delta x} \rightarrow l_{2,\Delta x}$  linearan operator sa slikom gustom u  $l_{2,\Delta x}$  i simbolom  $\rho(\xi)$ . Ako postoji konstanta  $C > 0$  takva da je

$$\frac{1}{|\rho(\xi)|} \leq C, \quad \forall \xi \in [0, 1]$$

i za sve  $\Delta t, \Delta x$  iz promatranog područja, onda je operator  $Q$  inverzibilan i vrijedi  $\|Q^{-1}\| \leq C$ .

**Dokaz.**

$$\begin{aligned} \|Qu\|_{2,\Delta x} &= \sqrt{\delta x} \|Qu\|_2 = \sqrt{\delta x} \|\rho\hat{u}\|_2 \\ &\geq \frac{\sqrt{\delta x}}{C} \|\hat{u}\|_2 = \frac{1}{C} \|u\|_{2,\Delta x}. \end{aligned}$$

Odavdeslijedi da je operator  $Q$  injektivan i da ima zatvorenu sliku, pa je stoga i surjektivan. Inverz očito zadovoljava  $\|Q^{-1}u\|_{2,\Delta x} \leq C\|u\|_{2,\Delta x}$ .  $\square$

### 3.3 Stabilnost inicijalno rubne zadaće

Stabilnost inicijalno rubne zadaće s konstantnim koeficijentima je značajno kompleksnija za proučavanje. U praksi se koristi stoga sljedeći kriterij: *da bi inicijalno rubna zadaća bila stabilna nužno je da pripadna inicijalna zadaća bude stabilna.*

Dakle, za inicijalno-rubnu zadaću možemo naći uvjet stabilnosti von Neumannovim kriterijem – zanemarivanjem rubnih uvjeta – i zatim se nadati da će taj uvjet u praksi biti dovoljan za stabilnost sheme.

Do sada smo promatrali jednokoračne sheme za inicijalno-rubnu zadaću oblika  $u^{n+1} = Qu^n$  (eksplicitna) ili  $Q_1 u^{n+1} = Qu^n$  (implicitna), koja se opet svodi na isti oblik  $u^{n+1} = Q_1^{-1} Qu^n$ . Podsjetimo se definicije stabilnosti:

**Definicija 3.2** Diferencijska shema  $u^{n+1} = Qu^n$  je stabilna u području diskretizacijskih parametara  $\mathcal{S}$  u odnosu na normu  $\|\cdot\|_{\Delta x}$  ako postoje konstante  $K > 0$  i  $\beta \geq 0$  takve da je

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{\Delta x} \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t} \|\mathbf{u}^0\|_{\Delta x}, \quad \forall n \geq 0, \quad (3.8)$$

za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$  i sve početne uvjete  $\mathbf{u}^0$ .

Kada god odaberemo novi  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$  mijenja se dimenzija prostora u kojem se nalazi rješenje, pa stoga i njegova norma, koju smo označili s  $\|\cdot\|_{\Delta x}$ . Prirodna je pretpostavka da su ti prostori konzistentno normirani, odnosno da norma ovisi samo o parametru prostorne diskretizacije.

Stabilnost se, kao i ranije svodi na

$$\|Q^{n+1}\|_{\Delta x} \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t}, \quad \forall n \geq 0, \quad (3.9)$$

gdje je norma na lijevoj strani operatorska norma generirana pripadnom vektorskom normom.

Mi ćemo nadalje raditi s euklidskom normom (2-normom). Pri tome nećemo posebno označavati ovisnost norme o  $\Delta x$ .

Za stabilnost u 2-normi bitan je spektralni radijus matrice  $Q$ ,

$$\rho(Q) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ svojstvena vrijednost matrice } Q\}.$$

Prisjetimo se daje 2-norma matrice vezana sa spektralnim radijusom matrice na ovaj način:

$$\|Q\|_2 = \sqrt{\rho(Q^\tau Q)},$$

i stoga je za simetričnu matricu  $Q$ ,  $\|Q\|_2 = \rho(Q)$ .

**Propozicija 3.6** (Nužan uvjet stabilnosti sheme  $u^{n+1} = Qu^n$ ) Pretpostavimo da je shema  $u^{n+1} = Qu^n$  stabilna u 2-normi. Tada postoji konstanta  $C \geq 0$

$$\rho(Q) \leq 1 + C\Delta t, \quad (3.10)$$

za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$ .

**Dokaz.** Za spektralni radijus i svaku operatorsku normu, pa onda i 2-normu, vrijedi

$$\rho(Q) \leq \|Q\|_2.$$

Nadalje svojstvene vrijednosti od  $Q^n$  su  $n$ -te potencije svojstvenih vrijednosti od  $Q$ , pa je stoga  $\rho(Q^n) = \rho(Q)^n$ . Time dobivamo

$$\rho(Q)^{n+1} \leq \|Q^{n+1}\|_2 \leq Ke^{\beta(n+1)\Delta t},$$

te

$$\rho(Q) \leq K^{1/(n+1)}e^{\beta\Delta t}, \quad \forall n.$$

Oдавдје је  $\rho(Q) \leq e^{\beta\Delta t}$  i kako je

$$e^x = 1 + xB(x), \quad B(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad B(0) = 1,$$

za  $\tilde{C} = \max\{B(x) : 0 \leq x \leq \Delta t_0\beta\}$ , dobivamo ocjenu (3.11) s  $C = \tilde{C}\beta$ .  $\square$

Ako je matrica  $Q$  simetrična, onda je

$$\rho(Q) = \|Q\|_2,$$

pa je gornji uvjet nužan i dovoljan.

**Propozicija 3.7** Shema  $u^{n+1} = Qu^n$ , sa simetričnom matricom  $Q$ , je stabilna u 2-normi ako i samo ako postoji konstanta  $C \geq 0$

$$\rho(Q) \leq 1 + C\Delta t, \tag{3.11}$$

za sve  $(\Delta x, \Delta t) \in \mathcal{S}$ .

Uvjet simetrije u prethodnoj propoziciji može se oslabiti. Dovoljno je da je matrica  $Q$  slična simetričnoj matrici, tj da postoji matrica  $S$  takva da je

$$Q = S\tilde{Q}S^{-1}$$

gdje je  $\tilde{Q}$  simetrična, a  $S$  regularna čija je uvjetovanost  $\|S\|\|S^{-1}\|$  uniformno ograničena u odnosu na parametre diskretizacije. Naime, slične matrice imaju isti spektar te stoga i isti spektralni radijus. Sada je

$$\|Q^{n+1}\|_2 = \|S\tilde{Q}^{n+1}S^{-1}\|_2 \leq \|S\|\|S^{-1}\|\|\tilde{Q}^{n+1}\|_2 = \|S\|\|S^{-1}\|\rho(Q)^{n+1},$$

pa  $\rho(Q) \leq 1 + C\Delta t$  povlači

$$\|Q^{n+1}\|_2 \leq \|S\|\|S^{-1}\|e^{C(n+1)\Delta t}.$$

Time je tvrdnja dokazana.

**Primjer 3.5** Treba analizirati stabilnost sheme

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} = 0, \quad k = 0 : M - 1$$

$$u_M^{n+1} = 0, \quad u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0 : M,$$

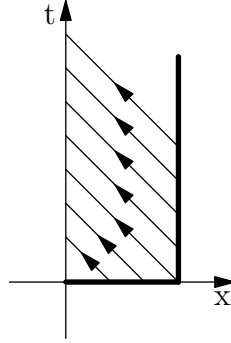
postavljene na prostornoj mreži  $x_k = k\Delta x$ ,  $k = 0 : M$ ,  $\Delta x = 1/M$ , kojom je diskretizirana zadaća

$$v_t + av_x = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

$$v(1, t) = 0, \quad v(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

pri čemu je  $a < 0$ .

Rubni uvjet za transportnu jednadžbu prvog reda može biti postavljen smo na ulaznoj granici, tj. na onom dijelu prostorno-vremenske domene  $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R})$  na koje karakteristike ulaze u domenu.



Slika 3.1: Karakteristike i ulazna granica u primjeru 3.5.

Karakteristike pridružene diferencijalnoj jednadžbi su

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad x = at + C,$$

gdje je  $C$  konstanta integracije te zbog  $a < 0$  izgledaju kao na slici 3.1. Inicijalno rubna zadaća je stoga dobro postavljena. Uočimo konačno da je rješenje konstantno po karakteristikama.

Diferencijska shema se može zapisati u obliku

$$u_k^{n+1} = (1 + R)u_k^n - Ru_{k+1}^n, \quad R = a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Promatrajmotu shemu bez rubnih uvjeta, kao shemu za rješavanje Cauchyjeve zadaće, i primijenimo von Neumannov kriterij stabilnosti. Dobivamo,

$$\hat{u}^{n+1} = [(1 + R) - Re^{2\pi i \xi}] \hat{u}^n.$$

Stoga je

$$\rho(\xi) = (1 + R) - Re^{2\pi i \xi} = (1 + R) - R \cos(2\pi \xi) - iR \sin(2\pi \xi),$$

odakle

$$|\rho(\xi)|^2 = (1 + R)^2 + R^2 - 2R(1 + R) \cos(2\pi \xi).$$

Simbol diferencijske sheme možemo ocijeniti na sljedeći način:

$$|\rho(\xi)|^2 \leq (1+R)^2 + R^2 + 2R(1+R) = (1+2R)^2$$

te dobivamo uvjet stabilnosti

$$|1+2R| \leq 1,$$

koji se svodi na  $-1 \leq R \leq 0$ . Taj je uvjet nužan i za stabilnost inicijalno rubne zadaće, što možemo argumentirati na sljedeći način: uzmimo početni uvjet s kompaktnim nosačem. Tada je evidentno rješenje inicijalne zadaće isto što i rješenje postavljene rubne zadaće te von Neumannov uvjet mora biti zadovoljen da bi shema bila stabilna. S druge strane, lako se vidi neposredno da uvjet  $-1 \leq R \leq 0$  povlači

$$\max_k |u_k^{n+1}| \leq \max_k |u_k^n|.$$

Pogledajmo sada što nam daje uvjet sa spektralnim radijusom. Matrica sustava  $u^{n+1} = Qu^n$  ima oblik

$$Q = \begin{bmatrix} 1+R & -R & & & \\ 0 & 1+R & -R & & \\ & 0 & 1+R & -R & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1+R & -R \\ & & & & 0 & 1+R \end{bmatrix}.$$

Sve su svojstvene vrijednosti dane na dijagonali matrice i stoga je  $\rho(Q) = |1+R|$ , a uvjet  $|1+R| \leq 1$  daje  $-2 \leq R \leq 0$ , što je očito slabije od von Neumannovog uvjeta i nije dovoljno za stabilnost sheme. Ovaj primjer stoga pokazuje da u slučaju nesimetrične matrice uvjet stabilnosti iz Propozicije 3.6 nije dovoljan za stabilnost.

**Primjer 3.6** Inicijalno rubnu zadaću

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx}, & x \in (0, 1), & t > 0 \\ v_x(0, t) &= 0, & v(1, t) &= 0, & v(x, 0) &= f(x), & x \in (0, 1), \end{aligned}$$

možemo aproksimirati sljedećom shemom:

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= ru_{k-1}^n + (1-2r)u_k^n + ru_{k+1}^n, & k &= 1 : M-1, & r &= D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ u_0^{n+1} &= u_1^{n+1}, & u_M^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Matrični zapis sheme je

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r & 1-2r & r \\ & & & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

Uočimo promjenu na dijagonali u prvom retku. Ova se matrica može zapisati korištenjem Leme A.2 kao

$$Q = I - rT_{N_1 D}.$$

Svojsvene vrijednosti su joj stoga (za  $N$  stavljamo  $M - 1$ )

$$\lambda_j = 1 - 2r(1 - \cos \frac{(2j-1)\pi}{2M-1}) = 1 - 4r \sin^2(\frac{(2j-1)\pi}{2M-1}), \quad j = 1 : M - 1.$$

Uvjet  $\rho(Q) \leq 1$  daje

$$|1 - 4r \sin^2(\frac{(2j-1)\pi}{2M-1})| \leq 1, \quad j = 1 : M - 1.$$

Budući da se ovdje sinus kreće između 0 i 1 i prima diskretne vrijednosti po volji blizu 0 i 1 (za  $M$  dovoljno veliko) vidimo da mora vrijediti

$$|1 - 4r| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}.$$

Time smo dobili standardan uvjet stabilnosti za paraboličku zadaću. Budući da je matrica  $Q$  simetrična, vidimo da je taj uvjet nužan i dovoljan za stabilnost inicijalno rubne zadaće.

U ocjeni spektralnog radijusa od pomoći može biti Gershgorinov teorem o krugovima:

**Teorem 3.2** (Gershgorin) Za svaku svojsvenu vrijednost  $\lambda$  matrice  $Q = (q_{i,j}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$  postoji  $1 \leq i \leq N$ , takav da vrijedi

$$|\lambda - q_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^N |q_{i,j}|.$$

Pokažimo kako se Gershgorinov teorem primijenjuje na jednom primjeru.

**Primjer 3.7** Treba ispitati stabilnost Crank-Nicolsonove sheme

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} - \frac{r}{2} \delta^2 u_k^{n+1} &= u_k^n + \frac{r}{2} \delta^2 u_k^n, \quad k = 1 : M - 1, \quad r = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \\ u_0^{n+1} &= \alpha^{n+1}, \quad u_M^{n+1} = \beta^{n+1}, \quad u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0 : M. \end{aligned}$$

Shema se može zapisati u obliku  $Bu^{n+1} = Qu^n$ , gdje je

$$B = \begin{bmatrix} 1+r & -r/2 & & & \\ -r/2 & 1+r & -r/2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r/2 & 1+r & -r/2 \\ & & & -r/2 & 1+r \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1-r & r/2 & & & \\ r/2 & 1-r & r/2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r/2 & 1-r & r/2 \\ & & & & r/2 & 1-r \end{bmatrix}$$

To možemo pisati kao  $Bu^{n+1} = (2I - B)u^n$ , odnosno  $u^{n+1} = (2B^{-1} - I)u^n$ . Ako je  $\lambda$  svojsvena vrijednost za  $B$ , onda je  $2/\lambda - 1$  svojsvena vrijednost za  $2B^{-1} - I$ . Stoga je uvjet stabilnosti

$$|\frac{2}{\lambda} - 1| \leq 1.$$

Odatle vidimo da za  $\lambda < 0$  stabilnost nije moguća. Za  $\lambda > 0$  stabilnost se svodi na  $\lambda \geq 1$ .

Prema Gershgorinovu teoremu imamo

$$|\lambda - 1 - r| \leq r \quad \text{ili} \quad |\lambda - 1 - r| \leq r/2$$

(ovisno o tome da li koristimo prvi/zadnji red ili ne). Prvi uvjet daje  $1 \leq \lambda \leq 1 + 2r$ , a drugi  $1 + r/2 \leq \lambda \leq 1 + 3r/2$ . Dakle u svakom slučaju je uvjet stabilnosti zadovoljen. Shema je bezuvjetno stabilna jer je matrica sheme  $2B^{-1} - I$  simetrična.

# Dodatak A

## Spektar trodijagonalnih matrica

Trodijagonalne matrice se često javljaju u vezi s metodom konačnih diferencija. Pored toga što postoje efikasni algoritmi za rješavanje sustava s trodijagonalnim matricama, moguće je u nekim jednostavnijim slučajevima izračunati i njihov spektar. Ovdje dajemo jedan primjer.

**Lema A.1** *Neka je  $ac > 0$ . Tada matrica*

$$T = Tr(a, b, c) = \begin{bmatrix} b & c & \cdots & \\ a & b & c & \cdots \\ \cdots & a & b & c \\ \cdots & \cdots & a & b \end{bmatrix}_{N \times N}$$

*ima svojstvene vrijednosti:*

$$\lambda_j = b + 2c \sqrt{\frac{a}{c}} \cos \frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

*i svojstvene vektore:*

$$\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \\ \cdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad u_k = 2 \left( \sqrt{\frac{a}{c}} \right)^k \sin \frac{kj\pi}{N+1}, \quad k = 1, \dots, N,$$

za  $j = 1, \dots, N$ .

**Dokaz.** Zadaća nalaženja svojstvenih vrijednosti svojstvenih vektora može se svesti na diferencijsku zadaću drugog reda:

$$\begin{aligned} au_{k-1} + bu_k + cu_{k+1} &= \lambda u_k, \quad k = 1 : N \\ u_0 &= u_{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Rješenje te zadatice tražit ćemo u obliku  $u_k = A^k$ , gdje je  $A \in \mathbb{C}$ .

Uvrštavanjem u diferencijsku jednadžbu dobivamo

$$aA^{k-1} + bA^k + cA^{k+1} = \lambda A^k \quad \Rightarrow \quad a + bA + cA^2 = \lambda A.$$

Rješenja te kvadratne jednadžbe su

$$A_{1,2} = \frac{\lambda - b \pm \sqrt{(\lambda - b)^2 - 4ac}}{2c}.$$

Kako mora vrijediti  $A^0 = A^{N+1} = 0$  broj  $A$  evidentno mora biti kompleksan što daje uvjet

$$(\lambda - b)^2 < 4ac. \quad (\text{A.1})$$

Zapišemo li broj  $A$  u trigonometrijskoj formi  $A = |A|(\cos \phi + i \sin \phi)$  dobivamo

$$A^k = |A|^k (\cos(k\phi) + i \sin(k\phi)).$$

Budući da realni dio ovog vektora ne može zadovoljiti rubne uvjete jednostavno ćemo ga zanemariti i promatrat ćemo samo imaginarni dio, odnosno uzimamo  $u_k = \text{Im}(A^k)$ . Taj pristup je opravdan ukoliko pokažemo da su svojstvene vrijednosti realne, budući da su tada i imaginarni i realni dio vektora  $u$  rješenja diferencijske jednadžbe. Dakle, imamo,  $u_n = |A|^k \sin(k\phi)$ , što zadovoljava  $u_0 = 0$ , no da bismo imali  $u_{N+1} = 0$  moramo odabrati kup  $\phi$  tako da bude  $\sin((N+1)\phi) = 0$ , odnosno  $(N+1)\phi = j\pi$  za  $j \in \mathbb{Z}$ . Time dobivamo eventualno  $N$  različitih svojstvenih vektora

$$u_k = |A|^k \sin\left(\frac{kj\pi}{N+1}\right), \quad j = 1 : N.$$

Ostale vrijednosti od  $j$  neće dati nove vektore. Da bismo se uvjerali da je time dobiveno rješenje svojstvene zadatice treba samo provjeriti da je uvjet kompleksnosti broja  $A$  zadovoljen i da je pripadna svojstvena vrijednost  $\lambda_j$  realna.

Za broj  $A$  imamo dva obilka koja sada treba povezati:

$$A_{1,2} = \frac{\lambda - b}{2c} \pm i \frac{\sqrt{4ac - (\lambda - b)^2}}{2c}.$$

Stoga je

$$|A_{1,2}|^2 = \left(\frac{\lambda - b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac - (\lambda - b)^2}{4c^2} = \frac{a}{c}.$$

Time dobivamo

$$A_{1,2} = \sqrt{\frac{a}{c}} \left( \frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}} \pm i \frac{\sqrt{4ac - (\lambda - b)^2}}{2\sqrt{ac}} \right),$$

odnosno

$$\cos \phi = \frac{\lambda - b}{2\sqrt{ac}}, \quad \sin \phi = \pm \frac{\sqrt{4ac - (\lambda - b)^2}}{2\sqrt{ac}}.$$

Izbor kuta  $\phi = \phi_j = j\pi/(N + 1)$  daje nam  $j$ -tu svojstvenu vrijednost

$$\lambda_j = b + 2\sqrt{ac} \cos\left(\frac{j\pi}{N + 1}\right),$$

koja je evidentno realna za sve  $j = 1 : N$ . Time je naša tvrdnja dokazana ukoliko pokažemo da je za sve  $j = 1 : N$  ispunjeno (A.1). Ali,

$$(\lambda_j - b)^2 = 4ac \cos^2\left(\frac{j\pi}{N + 1}\right) < 4ac, \quad \text{za } j = 1 : N.$$

To je evidentno istina jer je  $0 < j\pi/(N + 1) < \pi$  za  $j = 1 : N$ . Time je tvrdnja dokazana.  $\square$

**Lema A.2** *Matrica*

$$T_{N_1D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ & \dots & \dots & & \\ \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

*ima svojstvene vrijednosti:*

$$\lambda_j = 2 - 2 \cos \frac{(2j - 1)\pi}{2N + 1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

*i svojstvene vektore:*

$$u_k = \cos \frac{(2j - 1)\pi x_k}{2}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

gdje je  $x_k = (2k - 1)\Delta x/2$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $\Delta x = 2/(2N + 1)$ .

**Dokaz.** Naša metoda bit će analogna onoj iz porethodne leme. Formirajmo diferencijsku jednadžbu

$$\begin{aligned} -u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1} &= \lambda u_k, \quad k = 1 : N \\ u_0 &= u_1, \quad u_{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Ovdje smo morali korigirati jedan rubni uvjet kako bismo se prilagodili izmjeni matrice u prvom retku. Promijenjeni rubni uvjet tjera nas da promijenimo oblik u kojem ćemo tražiti rješenje. Naime kada bismo uzeli  $u_k = A^k$  dobili bismo uvjet  $1 = A$  koji bi mogao zadovoljavati realni dio broja  $A$ , no lako se provjerava

da se na taj način oba rubna uvjeta ne mogu zadovoljiti. Stoga ćemo rješenje diferencijske zadaće tražiti u obliku  $u_k = A^{2k-1}$ , gdje je  $A \in \mathbb{C}$ .

Uvrštavanjem u diferencijsku jednadžbu dobivamo

$$-A^{2k-3} + 2A^{2k-1} - A^{2k+1} = \lambda A^{2k-1} \quad \Rightarrow \quad -1 + 2A^2 - A^4 = \lambda A^2.$$

Rješenja te kvadratne jednadžbe su

$$A_{1,2}^2 = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{(2 - \lambda)^2 - 4}}{2}.$$

Pretpostavimo da je broj  $A_{1,2}$  kompleksan, odnosno da je

$$A_{1,2}^2 = \frac{2 - \lambda \pm i\sqrt{4 - (2 - \lambda)^2}}{2},$$

što je zadovoljeno pod uvjetom  $0 \leq \lambda \leq 4$ . Sada možemo izračunati modul broja, što daje

$$|A_{1,2}^2|^2 = \left(\frac{2 - \lambda}{2}\right)^2 + \frac{4 - (2 - \lambda)^2}{4} = 1.$$

Rubne uvjete zapisujemo u obliku

$$A^{-1} = A, \quad A^{2N+1} = 0.$$

Uzmimo sada trigonometrijski oblik broja  $A$ ,  $A = |A|(\cos \phi + i \sin \phi) = \cos \phi + i \sin \phi$  i uočimo da realni dio od  $A^k$  zadovoljava prvi rubni uvjet, jer je

$$\cos(-\phi) = \cos \phi.$$

Stoga ćemo uzeti  $u_k = \operatorname{Re}(A^{2k-1})$ . Da bismo zadovoljili drugi rubni uvjet moramo imati  $\cos((2N+1)\phi) = 0$  što vodi do  $(2N+1)\phi_j = (2j-1)\pi/2$  za  $j \in \mathbb{Z}$ . Time su rubni uvjeti zadovoljeni i imamo niz rješenje

$$u_k = \operatorname{Re}(A^{2k-1}) = \cos\left(\frac{(2k-1)(2j-1)\pi}{2(2N+1)}\right), \quad k = 1 : n, \quad j = 1 : N.$$

Uvođenjem  $\Delta x = 2/(2N+1)$  i  $x_k = (2k-1)\Delta x/2$ , lako se vidi da je

$$u_k = \operatorname{Re}(A^{2k-1}) = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi x_k}{2}\right), \quad k = 1 : N, \quad j = 1 : N.$$

Budući da je iz kompleksnog zapisa broja  $A_{1,2}$ , uz odbrani indeks  $j \in \{1, \dots, N\}$

$$\cos(2\phi_j) = \frac{2 - \lambda_j}{2},$$

dobivamo

$$\lambda_j = 2 - 2\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2N+1}\right),$$

koja je evidentno realna za sve  $j = 1 : N$  te zadovoljava uvjet  $0 \leq \lambda_j \leq 4$ . Time je tvrdnja dokazana.  $\square$

**Zadatak A.1** Za matricu

$$T_{N_2 D} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

izračunati:

$$\lambda_j = 2 - 2 \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N}, \quad j = 1, \dots, N,$$

Svojstveni vektori:

$$u_k = \cos \frac{(2j-1)\pi x_k}{2}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

gdje je  $x_k = (k-1)\Delta x$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $\Delta x = 1/N$ .

**Zadatak A.2** Za matricu

$$T_{N_1 N_2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

izračunati:

$$\lambda_j = 2 - 2 \cos \frac{(j-1)\pi}{N-1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

Svojstveni vektori:

$$u_k = \cos(j-1)\pi x_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

gdje je  $x_k = (k-1)\Delta x$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $\Delta x = 1/(N-1)$ .