Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Maja Miletić

Efikasna konstrukcija funkcije toka za nemješovitu metodu konačnih elemenata

Diplomski rad

Zagreb, listopad 2008.

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Maja Miletić

Efikasna konstrukcija funkcije toka za nemješovitu metodu konačnih elemenata

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, listopad 2008.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik

2. ______________________________, član

3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

U ovom radu promatramo zadaću:

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla p) + \alpha p = f \quad &\text{na} \quad \Omega, \\
p = 0 \quad &\text{na} \quad \Gamma,
\end{aligned}
$$

gdje je $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ograničena domena s granicom Γ, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ je simetrična i uniformno pozitivno definitna matrična funkcija, a funkcija α pozitivna i omeđena. Ova zadaća se zove difuzijsko-reakcijska zadaća, a može poslužiti kao model za inkompresibilan spremnik pri čemu je gravitacijski učinak zanemaren. Varijabla p se u tom slučaju interpretira kao tlak. Međutim, osim dobre aproksimacije tlaka, u primjenama se često javlja potreba za dobrom aproksimacijom funkcije toka $u = -\mathcal{A}\nabla p$.

Središnja ideja ovoga rada je sljedeća: dani problem rješiti u dvije faze. Prvo, aproksimaciju tlaka p_h odredimo Galerkinovom metodom konačnih elemenata, a zatim aproksimativni tok u_h računamo jednostavnom formulom na svakom elementu triangulacije posebno:

$$
\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + \mathit{korekcija}, \tag{1.1}
$$

gdje je $\mathcal{A}_K = \frac{1}{|K|}\int_K \mathcal{A}\, d\mathbf{x}$ "prosječna vrijednost" tenzora $\mathcal{A}$ po K. Vidimo da je formula intuitivna u smislu da podsjeća na Darcijevu formulu $\mathbf{u} + \mathcal{A}\nabla p = 0$. Pritom ćemo *korekciju* odrediti tako da $\mathbf{u}_h$ bude iz Raviart-Thomasovog prostora najnižeg reda na trokutima te da bude zadovoljeno svojstvo lokalne kozervativnosti.

Lokalna konzervativnost je poželjno svojstvo i karakteristično je za mješovitu metodu konačnih elemenata. Međutim, nedostatak mješovite metode konačnih elemenata je taj što moramo riješiti indefinitan sustav. S druge strane, sustav dobiven Galerkinovom metodom konačnih elemenata je pozitivno definitan i stoga lako rješiv, ali uz aproksimativni tok definiran sa $\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}\nabla p_h$ ne bismo imali dobru aproksimaciju toka i ne bi vrijedilo svojstvo konzervativnosti na elementima triangulacije.

Dakle, formulom (1.1), gdje smo na odgovarajući način odredili *korekciju*, smo izbjegli rješavanje indefinitnog sustava te zadržali svojstvo lokalne konzervativnosti. Stoga Galerkinovu metodu sa ovakvom konstrukcijom toka nazivamo konzervativnom.

U prvom poglavlju ovog rada definiramo mješovitu metodu konačnih elemenata. Za razliku od metode konačnih elementa, ova metoda koristi dva različita prostora u kojima se paralelno traži aproksimacija za tlak i tok, a odatle i naziv "mješovita". Također, navodimo uvjete uz koje je metoda rješiva te pripadne ocjene greške.

U drugom poglavlju definiramo konzervativnu i nekonzervativnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata. Zatim slijedi konstrukcija toka u nekonformnom slučaju po elementima triangulacije. Zanimljivo je napomenuti da je ovakva metoda ekvivalentna mješovitoj metodi konačnih volumena, a te ćemo rezultate navesti i dokazati. Nadalje, da bi metoda bila efikasna moramo imati konvergenciju izračunatog tlaka p_h i toka $\mathbf{u}_h$, što slijedi iz ocjena greške:

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} + h|p - p_h|_h \leq Ch^2(\|f\|_{L^2(\Omega)} + |f|_h)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)} + |f|_h),$$

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H(div,\Omega)} \leq Ch(|f|_h + |p|_{H^1(\Omega)} + h\|f\|_{L^2(\Omega)}).$$

Naposlijetku, različitim numeričkim primjerima ćemo potkrijepiti ovu teoriju, uz Dirichletove ili Neumannove rubne uvjete te za konformnu i nekonformnu konzervativnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata.

Poglavlje 2

Mješovita metoda konačnih elemenata

2.1 Modelni primjer i njegova mješovita varijacijska forma

Zadan je problem:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla p) + \alpha p = f \quad &\text{na} \quad \Omega, \\ p = 0 \quad &\text{na} \quad \Gamma, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje je $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ograničena domena s granicom Γ, funkcija $f \in L^2(\Omega)$ je zadana, funkcija α zadovoljava da je:

$$0 \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq c^* < +\infty \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2.2}$$

a $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ je simetrična i uniformno pozitivno definitna matrična funkcija takva da postoje konstante d_* i d^* sa svojstvom da je

$$0 < d_* \xi^\tau \xi \leq \xi^\tau \mathcal{A}(\mathbf{x}) \xi \leq d^* \xi^\tau \xi \tag{2.3}$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \xi \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Neka uz oznaku $\mathcal{A} = (a_{i,j})_{2\times 2}$ vrijedi i $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Definiramo prostore $\mathbf{V}$ i W sa

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}(div, \Omega) \quad \text{i} \quad W = L^2(\Omega)$$

gdje je

$$\mathbf{H}(div, \Omega) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in (L^2(\Omega))^2 \colon \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}.$$

Na prostoru $\mathbf{V}$ koristimo normu:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = \|\mathbf{v}\|_{H(div,\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega [\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v})^2] \; d\mathbf{x}}$$

koja dolazi od skalarnog produkta

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{H}(div,\Omega)} = \int_\Omega [\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + (\nabla\cdot\mathbf{u})(\nabla\cdot\mathbf{v})]\ d\mathbf{x}$$

Na prostoru $L^2(\Omega)^2$ koristimo skalarni produkt $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x}$ koji jednako označavamo i u skalarnom slučaju: Za $p, w \in W$ pišemo:

$$(p,w) = \int_\Omega pw d\mathbf{x}.$$

Također koristimo normu induciranu tim produktom:

$$\|w\|_W = \|w\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega w^2\ d\mathbf{x}} \qquad \forall w \in W\ .$$

Uvedemo li vektor toka $\mathbf{u} = -\mathcal{A}\nabla p$ zadaća (2.1) se može zapisati kao:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{u} + \alpha p = f \quad &\text{na} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} + \mathcal{A}\nabla p = 0 \quad &\text{na} \quad \Omega, \\ p = 0 \quad &\text{na} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Budući da je $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ regularna matrica za svako $\mathbf{x}\in\Omega$, vrijedi:

$$\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u} = -\nabla p.$$

Pomnožimo ovu jednadžbu sa $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, integriramo po Ω pa primjenimo teorem o divergenciji i zadani rubni uvjet:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u},\mathbf{v}) &= (-\nabla p,\mathbf{v}) \\ &= -\int_\Omega (\nabla p)\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} \\ &= -\int_\Omega \nabla\cdot(p\mathbf{v})d\mathbf{x} + \int_\Omega p(\nabla\cdot\mathbf{v})d\mathbf{x} \\ &= -\int_\Gamma p\mathbf{v}\cdot\nu dl + (\nabla\cdot\mathbf{v},p) \\ &= (\nabla\cdot\mathbf{v},p). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Zatim jednadžbu

$$\nabla\cdot\mathbf{u} + \alpha p = f$$

pomnožimo sa $w\in W$, integriramo po Ω pa imamo:

$$(\nabla\cdot\mathbf{u},w) + (\alpha p,w) = (f,w).$$

Tako smo dobili sustav koji nazivamo mješovita varijacijska forma za (2.1): Naći $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times W$ tako da je

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) &= 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, w) + (\alpha p, w) &= (f, w) \qquad \forall w \in W. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Vidimo da iz (2.1) slijedi (2.6). Može se pokazati da ukoliko je rješenje zadaće (2.6) dovoljno glatko onda zadovoljava i (2.1) jer se može izvršiti parcijalna integracija " u suprotnom smjeru".

Zadaću (2.6) možemo zapisati apstraktno pomoću bilinearnih formi:

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot)&\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ b(\cdot,\cdot)&\colon \mathbf{V} \times W \longrightarrow \mathbb{R}, \\ c(\cdot,\cdot)&\colon W \times W \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.7}$$

definiranih formulama

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad b(\mathbf{v}, p) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, p), \quad c(p, w) = (\alpha p, w), \tag{2.8}$$

i linearnog funkcionala

$$Q\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$$

danog formulom

$$Q(w) = -(f, w). \tag{2.9}$$

Zadaća (2.6) sada glasi: Naći $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ i $p \in W$ takve da vrijedi

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}, w) - c(p, w) &= Q(w), \quad \forall w \in W. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Za bilinearne forme koje ulaze u varijacijsku jednadžbu (2.10) lako se pokazuje da su ograničene, odnosno da postoje pozitivne konstante a^*, b^* i $c^* \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| &\leq a^* \|\mathbf{v}_1\|_V \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{V}} \qquad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}, \\ |b(\mathbf{v}, w)| &\leq b^* \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|w\|_W \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall w \in W, \\ |c(w_1, w_2)| &\leq c^* \|w_1\|_W \|w_2\|_W \qquad \forall w_1, w_2 \in W. \end{aligned}$$

Naime, za bilinearnu formu b imamo:

$$|b(\mathbf{v}, w)| = |(\nabla \cdot \mathbf{v}, w)| \leq \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2} \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|w\|_W. \tag{2.11}$$

Ograničenost bilinearne forme c je očita pri čemu koristimo (2.2):

$$|c(w_1, w_2)| = |\int_\Omega \alpha w_1 w_2 d\mathbf{x}| \leq c^* |\int_\Omega w_1 w_2 d\mathbf{x}| \leq c^* \|w_1\|_W \|w_2\|_W \quad \forall w_1, w_2 \in W.$$

Navedimo sada lemu koju ćemo iskoristiti da bismo dobili neke rezultate vezane za egzistenciju i jedinstvenost rješenja zadaće (2.10), ali koju ćemo često koristiti i kasnije (za dokaz vidi [4]).

Lema 2.1.1. *(Lax-Milgram) Neka je bilinearna forma $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ograničena i V-eliptična pri čemu je V Hilbertov prostor. Tada za svako $F \in V'$ zadaća: naći $u \in V$ tako da*

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall v \in V,$$

ima jedinstveno rješenje $u \in V$.

Nadalje, pretpostavimo da su forme a i c koercitivne, tj. da postoje brojevi $a_* > 0$ i $c_* > 0$ takvi da je

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq a_* \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2, \tag{2.12}$$

$$\forall w \in W, \quad c(w, w) \geq c_* \|w\|_W^2. \tag{2.13}$$

Tada imamo:

Propozicija 2.1.2. *Neka vrijedi (2.12) i (2.13). Tada za svako $Q \in W'$ zadaća (2.10) ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava*

$$a_* \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{c_*}{2} \|p\|_W^2 \leq \frac{1}{2c_*} \|Q\|_{W'}^2. \tag{2.14}$$

Dokaz. Oduzmemo li jednadžbe u (2.10) dobijemo ekvivalentnu zadaću: naći $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times W$ tako da:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, w) + c(p, w) = -Q(w) \quad \forall (\mathbf{v}, w) \in \mathbf{V} \times W. \tag{2.15}$$

Definiramo bilinearnu formu na $(\mathbf{V} \times W) \times (\mathbf{V} \times W)$ sa

$$\tilde{a}\left((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, w)\right) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, w) + c(p, w),$$

te linearni funkcional $\tilde{Q}$ na $\mathbf{V} \times W$ sa

$$\tilde{Q}(\mathbf{v}, w) = -Q(w),$$

te uzmemo normu

$$\|(\mathbf{v}, w)\|_{\mathbf{V} \times W} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \|w\|_W.$$

Tada (2.15) možemo zapisati kao:

$$\tilde{a}\left((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, w)\right) = \tilde{Q}(\mathbf{v}, w) \qquad \forall (\mathbf{v}, w) \in \mathbf{V} \times W.$$

Da je bilinearna forma $\tilde{a}$ ograničena lako se vidi. Naime, zbog ograničenosti formi a, b i c vrijedi:

$$\begin{aligned} |\tilde{a}\left((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, w)\right)| &\leq |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| + |b(\mathbf{v}, p)| + |b(\mathbf{u}, w)| + |c(p, w)| \\ &\leq C(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|p\|_W + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|w\|_W + \|p\|_W \|w\|_W) \\ &= C \|(\mathbf{u}, p)\|_{\mathbf{V} \times W} \|(\mathbf{v}, w)\|_{\mathbf{V} \times W}. \end{aligned}$$

Također, koercitivnost se lako pokaže koristeći (2.12) i (2.13):

$$\begin{aligned}
|\tilde{a}\left((\mathbf{u},p),(\mathbf{u},p)\right)| &= a(\mathbf{u},\mathbf{u}) + c(p,p) \\
&\geq a_*\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + c_*\|p\|_W^2 \\
&\geq \min\{a_*, c_*\}\frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + \|p\|_W)^2 \\
&= \min\{a_*, c_*\}\frac{1}{2}\|(\mathbf{u},p)\|_{\mathbf{V}\times W}^2.
\end{aligned}$$

Dakle, na zadaću (2.15) možemo primjeniti Lax-Milgramovu lemu, odnosno ona ima jedinstveno rješenje. Odavde i (2.10) ima jedinstveno rješenje. Pokažimo i ocjenu (2.14). Imamo da je:

$$\begin{aligned}
a_*\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + c_*\|p\|_W^2 &\leq \tilde{a}\left((\mathbf{u},p),(\mathbf{u},p)\right) \\
&= Q(p) \\
&\leq \|Q\|_{W'}\|p\|_W \\
&\leq \frac{c_*}{2}\|p\|_W^2 + \frac{1}{2c_*}\|Q\|_{W'}^2.
\end{aligned}$$

Oduzmemo li sada sa lijeve i desne strane $\frac{c_*}{2}\|p\|_W^2$ dobijemo traženu nejednakost. □

Uočimo da Propozicija 2.1.2 ne pretpostavlja ništa o bilinearnoj formi b. Unatoč tome, njene su pretpostavke u našem slučaju suviše jake. Naime, za neku konstantu $a_* \geq 0$ bilinearna forma a zadovoljava:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq 0, \tag{2.16}$$

$$\forall \mathbf{v} \in Z, \quad a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq a_*\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2, \tag{2.17}$$

gdje je

$$Z = \{\mathbf{v} \in H(div,\Omega) \colon \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\} \subset \mathbf{V}.$$

Naime,

$$a(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

a koristeći (2.3) za proizvoljno $\mathbf{v} \in Z$ imamo:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= \int_\Omega (\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{v}) \cdot (\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{v})\, d\mathbf{x} \\
&\geq \frac{1}{d^*}\int_\Omega \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{v}) \cdot (\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{v})\, d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{d^*}\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \frac{1}{d^*}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2
\end{aligned}$$

Prema tome, nemamo koercitivnost bilinearne forme a na čitavom prostoru $\mathbf{V}$. Nadalje, uz prirodnu pretpostavku na koeficijent α: $\alpha \geq 0$, imamo

$$\forall w \in W, \quad c(w,w) \geq 0. \tag{2.18}$$

Za egzistenciju rješenja u ovakvim uvjetima treba uvesti dodatnu pretpostavku o bilinearnoj formi b: Postoji konstanta $b_* > 0$ takva da je

$$\inf_{w\in W} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v}, w)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\|w\|_W} \geq b_*. \tag{2.19}$$

Sljedeći rezultat navodimo bez dokaza (vidi [3]).

Teorem 2.1.3. *Neka su zadane neprekidne bilinearne forme a, b, c kao u (2.7) takve da vrijedi (2.19), (2.16), (2.17) i (2.18), pri čemu je forma c simetrična. Tada zadaća (2.10) ima jedinstveno rješenje* $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times W$ *za svako* $Q \in W'$.

Da bismo iskoristili ovaj teorem trebamo još samo provjeriti uvjet (2.19). Taj uvjet se zove inf-sup uvjet ili Ladiženskaja-Babuška-Brezzijev uvjet. Navedimo sada rezultat čiji se dokaz može pronaći u [1], a koji ćemo koristiti da provjerimo da li (2.19) vrijedi.

Lema 2.1.4. *(Poincareova nejednakost) Za ograničen skup* Ω *postoji konstanta* $C = C(\Omega)$ *takva da* $\forall v \in H^1(\Omega)$ *vrijedi:*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C|v|_{H^1(\Omega)}.$$

Vratimo se provjeravanju uvjeta (2.19). Za proizvoljno $w \in L^2(\Omega)$ postoji $v \in C_0^\infty(\Omega)$ tako da vrijedi

$$\|w - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \tfrac{1}{2}\|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ovaj rezultat slijedi iz činjenice da je prostor $C_0^\infty(\Omega)$ gust u $L^2(\Omega)$ (njegov dokaz potražiti u [8]). Definirajmo

$$y = \inf\{x_1 \colon \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega\}$$

i

$$v_1(\mathbf{x}) = \textstyle\int_y^{x_1} v(\tau, x_2)d\tau, \quad v_2 = 0.$$

Ako uzmemo da je $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ onda je $\nabla \cdot \mathbf{v} = v$ i vrijedi

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^2} &= \int_\Omega v_1(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \left(\int_y^{x_1} v(\tau, x_2)d\tau\right)^2 d\mathbf{x} \\
&\leq C\|v\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

pri čemu posljednja nejednakost slijedi prema Poincareovoj nejednakosti jer je domena Ω ograničena. Prema nejednakosti trokuta imamo:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v - w\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \tfrac{3}{2}\|w\|_{L^2(\Omega)},$$

odakle je

$$\frac{1}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{2}{3\|w\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned}(v,w) &= (v-w,w)+(w,w)\\ &\geq -\|v-w\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}+\|w\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\geq \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Kako je

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = \left[\|\mathbf{v}\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + \|\nabla\cdot\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} \leq (1+C)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\Omega)},$$

vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{b(\mathbf{v},w)}{\|\mathbf{v}\|_V} &\geq \frac{(v,w)}{(1+C)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\Omega)}}\\ &\geq \frac{1}{3(1+C)^{\frac{1}{2}}}\|w\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

te očito vrijedi (2.19).

Time smo dokazali da su za bilinearne forme a, b i c dane sa (2.8) zadovoljeni uvjeti Teorema 2.1.3 pa zaključujemo da zadaća (2.10), odnosno (2.6) ima jedinstveno rješenje.

Napomena 2.1.5. *Primjetimo da smo u modelnom primjeru (2.1) imali homogeni Dirichletov rubni uvjet. U slučaju nehomogenog Dirichletovog rubnog uvjeta:*

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot(\mathcal{A}\nabla p)+\alpha p = f \quad & na \quad \Omega,\\ p = g \quad & na \quad \Gamma,\end{aligned}$$

varijacijsku formu izvodimo istim postupkom, samo što sada dobijemo dodatni integral na desnoj strani. Naime, u ovom slučaju imamo

$$(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\int_\Gamma p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dl + (\nabla\cdot\mathbf{v},p),$$

pa naša varijacijska forma izgleda ovako:

$$(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u},\mathbf{v}) - (\nabla\cdot\mathbf{v},p) = -\int_\Gamma g\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dl \qquad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V},$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{u},w)+(\alpha p,w) = (f,w) \qquad \forall w\in W.$$

U slučaju Neumannovog rubnog uvjeta imamo zadaću:

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot(\mathcal{A}\nabla p)+\alpha p = f \quad & na \quad \Omega,\\ \mathcal{A}\nabla p\cdot\mathbf{n} = g \quad & na \quad \Gamma.\end{aligned}$$

U ovom slučaju provodimo homogenizaciju rubnog uvjeta. Prostore $\mathbf{V}$ *i* W *definiramo na slijedeći način:*

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in H(div;\Omega)\colon \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \ na\ \Gamma\},$$
$$W = L^2(\Omega),$$

dok tlak tražimo u prostoru

$$\tilde{\mathbf{V}} = \{\mathbf{v} \in H(div;\Omega)\colon \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = g \ na\ \Gamma\}.$$

Obzirom na ove prostore mješovita varijacijska forma ove zadaće se dobije slično kao i u (2.5): naći $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ *i* $p \in W$ *tako da:*

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u},\mathbf{v}) - (\nabla\cdot\mathbf{v}, p) &= 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},\\ (\nabla\cdot\mathbf{u}, w) + (\alpha p, w) &= (f, w) \qquad \forall w \in W. \end{aligned}$$

Primjetimo da za mješovitu metodu konačnih elemenata Neumannov rubni uvjet postaje esencijalni uvjet koji se mora pojaviti u definiciji prostora $\mathbf{V}$*, dok je kod metode konačnih elemenata Dirichletov uvjet taj koji je esencijalni (detaljnije u [4]).*

2.2 Numerička aproksimacija

Neka su nam dani konačnodimenzionalni potprostori $\mathbf{V}_h \subseteq \mathbf{V}$ i $W_h \subseteq W$.

Mješovita metoda konačnih elemenata za (2.1) se definira sa: Naći $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ i $p_h \in W_h$ tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}_h,\mathbf{v}) - (\nabla\cdot\mathbf{v}, p_h) &= 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h,\\ (\nabla\cdot\mathbf{u}_h, w) + (\alpha p_h, w) &= (f, w) \qquad \forall w \in W_h. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Primjetimo da ideja za formulaciju ove metode jednostavno slijedi iz varijacijske forme (2.6) za (2.1). Međutim, da bi ovaj problem bio stabilan prostori $\mathbf{V}_h$ i W_h moraju zadovoljavati uvjete o kojima će sada biti riječi. Par $\mathbf{V}_h$ i W_h nazivamo familija mješovitih prostora konačnih elemenata. Prvu takvu familiju za parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda u dvije dimenzije uveli su Raviart i Thomas 1977. godine (vidi [11]).

Neka je $\mathcal{T}_h$ triangulacija za danu poligonalnu domenu Ω (za preciznu definiciju triangulacije vidi [6]). Napomenimo da ćemo za proizvoljan trokut K triangulacije $\mathcal{T}_h$ sa h_K označavati duljinu najdužeg brida trokuta K, a sa h ćemo označavati $\max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. Definirati ćemo sada Raviart-Thomasove prostore najnižeg reda na trokutima sa:

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}\colon \mathbf{v}|_K = (b_K x_1 + a_K, b_K x_2 + c_K), \quad a_K, b_K, c_K \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$W_h = \{w\colon w \text{ je konstantna na svakom K} \in \mathcal{T}_h\}.$$

Može se pokazati da za svaki rastav domene Ω na dijelove čije su unutrašnjosti u parovima disjunktni skupovi, prostor $\mathbf{H}(div,\Omega)$ se sastoji od funkcija čije su normalne komponente duž unutrašnjih bridova neprekidne. Prema tome, prostor $\mathbf{V}_h$ se može zapisati i kao:

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}\colon \mathbf{v}|_K = (b_K x_1 + a_K, b_K x_2 + c_K), \quad a_K, b_K, c_K \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathcal{T}_h, \text{ i normalne komponente od } \mathbf{v} \text{ su neprekidne duž unutarnjih bridova u } \mathcal{T}_h\}.$$

Uz oznake kao u (2.8) i (2.9), zadaća mješovite metode konačnih elemenata (2.20) se apstraktno može zapisati kao:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) &= 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, w) - c(p_h, w) &= Q(w) \qquad \forall w \in W_h. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Kao i u kontinuiranom slučaju definirat ćemo prostor

$$Z_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \colon \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

Teorem koji govori o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja mješovite metode konačnih elemenata slijedi (mi ćemo ga samo navesti, a za dokaz vidi [3]):

Teorem 2.2.1. *Ako vrijede slijedeći uvjeti:*

(i) bilinearna forma a zadovoljava da je

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \quad i \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in Z_h, \tag{2.22}$$

(ii) postoji konstanta $b_* \geq 0$ tako da je

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}, w)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|w\|_W} \geq b_* \qquad \forall w \in W_h, \tag{2.23}$$

(iii) bilinearna forma c je simetrična i

$$c(w, w) \geq 0 \qquad w \in W_h, \tag{2.24}$$

tada problem (2.21) ima jedinstveno rješenje.

Primjetimo da nije nužno $Z_h \subset Z$ te općenito vrijedi:

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v}, w)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|w\|_W} \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}, w)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|w\|_W}.$$

Prema tome, ako su zadovoljeni uvjeti Teorema 2.1.3 nisu nužno zadovoljeni i uvjeti Teorema 2.2.1. Da vrijedi (2.22) i (2.24) lako se vidi. Da bi provjerili da li vrijedi (2.23) možemo koristiti sljedeći rezultat (dokaz potraži u [4]).

Teorem 2.2.2. *Pretpostavimo da bilinearna forma b zadovoljava (2.19). Ako postoji ograničeni projektor $\pi_h \colon V \longrightarrow V_h$ tako da*

$$b(v - \pi_h v, w) = 0 \qquad \forall w \in W_h,$$

i konstanta ograničenosti projektora ne ovisi o h, tada vrijedi (2.23).

Definiramo projektor $\pi_h \colon \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}_h$ tako da $\pi_h|_K$ zadovoljava:

$$\int_{e_i} (\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_i dl = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Da je ovako definiran projektor dobro definiran, lako se može pokazati jer, kao što se kasnije vidi, tokovi funkcije duž bridova su dobro definirani stupnjevi slobode u $\mathbf{V}_h$. Prema teoremu o divergenciji je sada:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\psi_j d\mathbf{x} &= \int_{K_j} \nabla\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\, d\mathbf{x}\\ &= \int_{\partial K_j} (\mathbf{v}-\pi_h\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\, dl\\ &= 0 \qquad j=1,\dots,N.\end{aligned}$$

Dakle,

$$(\nabla\cdot(\mathbf{v}-\pi_h\mathbf{v}), w) = 0 \qquad \forall w\in W_h,$$

pa zadovoljava uvjete iz Teorema 2.2.2 i stoga vrijedi (2.23). Prema tome, uvjeti Teorema 2.2.1 su zadovoljeni. Znači metoda konačnih elemenata (2.20) ima jedinstveno rješenje.

Sada kada smo pokazali da (2.20) ima jedinstveno rješenje, pronađimo ga. U tu svrhu definiramo baze prostora $\mathbf{V}_h$ i W_h. Neka su $(\mathbf{d}_i)_{i=1}^M$ svi bridovi triangulacije $\mathcal{T}_h$, a $(\mathbf{x}_i)_{i=1}^M$ pripadna polovišta bridova. Za brid $\mathbf{d}_i$ neka je $\mathbf{n}_i$ jedinična normala na brid. Ako je brid na granici Γ onda smjer normale biramo tako da "gleda prema van", a ako brid ne pripada granici onda smjer normale nije bitan. Funkciju $\boldsymbol{\varphi}_i$ definiramo formulom:

$$\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}_j)\cdot\mathbf{n}_j = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{d}_i|} & \text{ako } j=i,\\ 0 & \text{ako } j\neq i,\end{cases}$$

gdje $j=1\dots M$. Sada se svaka funkcija $\mathbf{v}\in\mathbf{V}_h$ može na jedinstven način zapisati kao

$$\mathbf{v} = \textstyle\sum_{i=1}^M v_i\boldsymbol{\varphi}_i\ ,$$

gdje je $v_i = \int_{\mathbf{d}_i}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_i\, dl$. Kako se ove bazne funkcije definiraju lokalno, odnosno na svakom elementu $K\in\mathcal{T}_h$ posebno, pokazat ćemo kasnije, formulom (3.14).

Neka je N broj trokuta u $\mathcal{T}_h$ i označimo ih nekim redom sa $(K_i)_{i=1}^N$. Bazne funkcije $(\psi_i)_{i=1}^N$ za W_h se definiraju sa:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \mathbf{x}\in K_i,\\ 0 & \text{inače.}\end{cases}$$

Da je skup $\{\psi_i,\ i=1,\dots,N\}$ baza lako se vidi, a svaka se funkcija $w\in W_h$ može zapisati kao

$$w = \textstyle\sum_{i=1}^N w_i\psi_i,$$

gdje je $w_i = w|_{K_i}$.

Zapišimo rješenje problema (2.20) u obliku:

$$\mathbf{u}_h = \textstyle\sum_{i=1}^M u_i\boldsymbol{\varphi}_i, \quad p_h = \sum_{k=1}^N p_k\psi_k.$$

U (2.20) na mjestu funkcije $\mathbf{v}$ stavimo $\boldsymbol{\varphi}_j$, a umjesto w pišemo ψ_j pa imamo:

$$(\textstyle\sum_{i=1}^M u_i\,\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{\varphi}_i,\boldsymbol{\varphi}_j) - (\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_j, \sum_{k=1}^N p_k\psi_k) = 0 \qquad j=1,\dots,M,$$

$$(\nabla \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{M} u_i \boldsymbol{\varphi}_i, \psi_j) + (\alpha \sum_{k=1}^{N} p_k \psi_k, \psi_j) = (f, \psi_j) \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Dobiveni sustav je ekvivalentan sa (2.20), a njegov matrični zapis izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\tau} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{f} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

gdje su matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $\mathbf{D} = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ i vektori $\mathbf{U} = (u_i) \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{p} = (p_i) \in \mathbb{R}^N$ i $\mathbf{f} = (f_j) \in \mathbb{R}^N$ definirani sa:

$$a_{ij} = (\mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i), \quad b_{jk} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_j, \psi_k),$$

$$d_{jk} = -(\alpha \psi_k, \psi_j), \quad f_j = (f, \psi_j).$$

Primjetimo da je:

$$(\psi_k, \psi_j) = \begin{cases} |K_j| & \text{ako } k = j, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

što nas dovodi do zaključka da je matrica $\mathbf{D}$ dijagonalna s elementom $d_{jj} = -\int_{K_j} \alpha \, d\mathbf{x}$ na dijagonali. Zbog uniformne pozitivne definitnosti matrične funkcije $\mathcal{A}$, matrica $\mathbf{A}$ je simetrična i pozitivno definitna. Matrica $M = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\tau} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ iz (2.25) je također simetrična, ali i indenfinitna. Naime, može se pokazati da matrica M ima i pozitivne i negativne svojstvene vrijednosti. Dakle, dobiveni sustav je indefinitan i to je jedan od nedostataka ove metode. Postoji nekoliko efikasnih metoda za rješavanje ovakvog sustava, a to su metoda Lagrangeovog multiplikatora i sve njene varijante, Uzawin algoritam, metoda penalizacije, itd. (vidi [10]).

Preostaje nam pitanje pogreške koja se javlja kod mješovite metode konačnih elemenata. Sljedeće rezultate navodimo bez dokaza (za dokaz vidi [4] i [3]).

Teorem 2.2.3. *Neka je $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times W$ rješenje zadaće (2.6) i $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ rješenje zadaće (2.20). Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}, \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch (\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)}), \\ \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch (\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

Iz ovih ocjena se jasno vidi da nam mješovita metoda konačnih elemenata daje dobru aproksimaciju $\mathbf{u}_h$ toka $\mathbf{u}$. Ovo je lijepo svojstvo jer se u primjenama često javlja potreba da tok dobro procijenimo.

Neka je $\mathcal{T}_h$ triangulacija domene Ω te neka su p_h i $\mathbf{u}_h$ rješenja neke metode za sustav (2.1). Kažemo da je ta metoda lokalno konzervativna ako $\forall K \in \mathcal{T}_h$ vrijedi :

$$\int_K (\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \alpha p_h) \, d\mathbf{x} = \int_K f d\mathbf{x} \tag{2.26}$$

Da je mješovita metoda konačnih elemenata lokalno konzervativna lako vidimo. Naime, uzmimo da je w u (2.20) bazna funkcija $\psi_i, i = 1 \ldots N$ pa (2.26) odmah slijedi.

Poglavlje 3

Konzervativne $P1$ Galerkinove metode konačnih elemenata

3.1 Difuzijsko-reakcijska jednadžba i njena fizikalna interpretacija

Zadan je rubni problem u poligonalnoj domeni $\Omega \in \mathbb{R}^2$ s granicom Γ:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla p) + \alpha p = f \qquad & \text{na} \quad \Omega, \\ p = 0 \quad & \text{na} \quad \Gamma, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje je $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ kao i prije simetrična i uniformno pozitivno definitna matrična funkcija takva da postoje konstante d_* i d^* sa svojstvom da je

$$0 < d_* \xi^\tau \xi \leq \xi^\tau \mathcal{A}(\mathbf{x}) \xi \leq d^* \xi^\tau \xi \tag{3.2}$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \xi \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{x} \in \Omega$.

Ovaj problem zove se difuzijsko-reakcijski problem. Ubuduće ćemo pretpostaviti da je funkcija α pozitivna. Ako uvedemo varijablu toka $\mathbf{u} = -\mathcal{A}\nabla p$ kao i u drugom poglavlju, (3.1) se može zapisati kao sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha p &= f \quad \text{na} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} + \mathcal{A}\nabla p &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ p &= 0 \quad \text{na} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Varijabla p se može interpretirati kao koncentracija, pomak ili tlak, dok se varijabla toka $\mathbf{u}$ onda redom interpretira kao difuzijski tok, sila ili Darcijeva brzina. Mi smo radi jednostavnosti pretpostavili homogeni Dirichletov rubni uvjet, međutim u primjenama se češće koristi homogeni Neumannov rubni uvjet koji predstavlja uvjet da nema toka na rubu u smjeru normale na granicu (no flow uvjet). Sustav (3.3) možemo interpretirati kao model za inkompresibilan spremnik pri čemu smo zanemarili gravitacijski učinak. Druga jednadžba u (3.3) je Darcijev zakon, dok je prva jednadžba zakon očuvanja mase pri čemu funkcija f predstavlja izvor ili ponor.

3.2 Galerkinova metoda konačnih elemenata

Neka je $\mathcal{T}_h$ triangulacija domene Ω. Definirajmo standardni konformni $P1$ prostor konačnih elemenata

$$X_h = \{q \in L^2(\Omega) \colon q \text{ je neprekidna duž bridova elemenata i } q|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

i standardni $P1$ nekonformni prostor konačnih elemenata

$$Y_h = \{q \in L^2(\Omega) \colon q \text{ je neprekidna u polovištu svakog brida } e \in \partial K \text{ i } q|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Kao stupnjevi slobode za prostor X_h se uzimaju vrijednosti funkcije u vrhovima triangulacije, dok se kod prostora Y_h uzimaju vrijednosti funkcije u polovištima bridova triangulacije. Lako se vidi da su to dobro određeni stupnjevi slobode. Odavde slijedi da se globalne bazne funkcije za prostore mogu definirati ovako: za prostor X_h svakom se vrhu triangulacije pridruži globalna bazna funkcija definirana tako da poprima vrijednost 1 u tom vrhu, a 0 u svim ostalima. Za prostor Y_h se svakom polovištu brida triangulacije pridružuje globalna bazna funkcija definirana tako da ima vrijednost 1 u tom polovištu, a u svim ostalima ima vrijednost 0.

Primjenimo Galerkinovu metodu konačnih elemenata na problem (3.1). Varijacijska forma problema (3.1) glasi: naći $p \in H_0^1(\Omega)$ tako da

$$\int_\Omega (\mathcal{A}\nabla p) \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \alpha p \, q \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f q \, d\mathbf{x} \qquad \forall q \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Dakle, $P1$ nekonformna Galerkinova metoda konačnih elemenata glasi: naći $p_h \in Y_{h,0}$ tako da

$$a_h(p_h, q_h) = (\tilde{f}, q_h) \qquad \forall q_h \in Y_{h,0}, \tag{3.5}$$

gdje je

$$a_h(p_h, q_h) = \sum_K \left[\int_K (\mathcal{A}\nabla p_h) \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} + \int_K \alpha p_h \, q_h \, d\mathbf{x} \right] \tag{3.6}$$

i

$$Y_{h,0} = \{q \in Y_h \colon q \text{ se poništava u polovištima bridova na granici }\}.$$

Primjetimo da se na desnoj strani u (3.5) ne nalazi f nego funkcija $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ koja aproksimira f u smislu da je

$$\int_K \tilde{f} \, d\mathbf{x} = \int_K f \, d\mathbf{x} \tag{3.7}$$

i

$$\|\tilde{f} - f\|_{L^2(K)} \leq Ch|f|_{H^1(K)} \qquad \forall K \in \mathcal{K}_h. \tag{3.8}$$

Dvije mogućnosti za $\tilde{f}$ koje se najčešće koriste su $\tilde{f} = f$ u standardnom konformnom $P1$ smislu ili $\tilde{f} = f_K$ na svakom $K \in \mathcal{K}_h$ posebno, gdje je $f_K = \frac{1}{|K|}\int_K f \, d\mathbf{x}$. Da je u ovom drugom slučaju zadovoljena ocjena (3.8) nam govori sljedeća lema čiji se dokaz može naći u [2].

Lema 3.2.1. *Postoji konstanta C tako da za svako $f \in H^1(K)$ vrijedi:*

$$\|f - f_K\|_{L^2(K)} \leq Ch_K |f|_{H^1(K)}.$$

Konformna Galerkinova metoda konačnih elemenata je u svemu ista kao i nekonformna osim što tlak p_h tražimo u prostoru

$$X_{h,0} = \{q \in X_h \colon q \text{ se poništava na granici } \}.$$

Da Galerkinova metoda konačnih elemenata ima jedinstveno rješenje možemo pokazati koristeći Lax-Milgramovu lemu. Bilinearna forma a_h iz (3.6) zadovoljava sve pretpostavke iz Leme 2.1.1 što se lako vidi, odakle slijedi da (3.5) ima jedinstveno rješenje.

Galerkinovu metodu nije teško riješiti jer je sustav koji pomoću nje dobijemo simetričan i pozitivno definitan. Međutim, kako je p_h polinom prvog stupnja onda formula $\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}\nabla p_h$ ne daje dobru ocjenu toka, a i ne zadovoljava svojstvo lokalne konzervativnosti. S druge strane, mješovita metoda konačnih elemenata nam daje dobru aproksimaciju toka, i lokalno je konzervativna, ali u tom slučaju moramo riješiti indefinitan sustav.

Nameće nam se praktično pitanje: da li je moguće odrediti aproksimaciju tlaka i Darcijeve brzine u dvije faze? Prvo, približni tlak dobijemo konformnom ili nekonformnom Galerkinovom metodom konačnih elemenata, a zatim aprokcimacijski tlak $\mathbf{u}_h$ odredimo formulom na svakom $K \in \mathcal{T}_h$ posebno:

$$\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + korekcija, \tag{3.9}$$

gdje je $\mathcal{A}_K = \frac{1}{|K|}\int_K \mathcal{A}\, d\mathbf{x}$ "prosječna vrijednost" tenzora $\mathcal{A}$ po K. Želimo da nam ova formula osigurava lokalnu konzervativnost. Vidimo da je formula intuitivna u smislu da podsjeća na Darcijevu formulu $\mathbf{u} + \mathcal{A}\nabla p = 0$. Kada h teži k 0 imamo da $-\mathcal{A}_K\nabla p_h$ teži k $-\mathcal{A}\nabla p = \mathbf{u}$. Zato će biti smisleno *korekciju* odrediti tako da teži k 0 kada h teži k 0. Pod uvjetom da korekciju lako odredimo primjetimo da smo, problem (3.3) riješili bez puno računa. Naime, izbjegli smo rješavanje indefinitnog sustava koji se javlja kod mješovite metode konačnih elemenata, a opet smo sačuvali lokalnu konzervativnost na elementima sa dobrom aproksimacijom toka.

3.3 Konstrukcija formule za tok

Odredimo sada formulu za tok na sistematičan način, pri čemu pretpostavljamo da smo već odredili p_h. Nadalje, jedna važna pretpostavka zbog koje će se naš račun znatno pojednostavniti je da je funkcija *α konstantna na trokutima triangulacije $\mathcal{T}_h$*, pri čemu koristimo oznaku

$$\alpha_K = \alpha|_K \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{3.10}$$

Tok definiramo formulom:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = -\mathcal{A}_K\nabla p_h + (f_K - \alpha_K p_K)P_K(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_K \quad \forall \mathbf{x} \in K, \tag{3.11}$$

gdje su

$$f_K = \frac{1}{|K|}\int_K f\, d\mathbf{x}, \quad p_K = \frac{1}{|K|}\int_K p_h\, d\mathbf{x} \tag{3.12}$$

prosjeci od f i p_h po K, te

$$P_K(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B), \tag{3.13}$$

pri čemu je $\mathbf{x}_B$ radij-vektor težišta trokuta K. Ovdje je $\mathbf{C}_K$ konstantan vektor na K, koji tek moramo odrediti. Primjetimo da bez obzira na odabir $\mathbf{C}_K$, vrijedi $\nabla\cdot\mathbf{u}_h = f_K - \alpha_K p_K$ na K, odnosno imamo lokalnu konzervativnost i zato ima smisla ovakvu Galerkinovu metodu konačnih elemenata nazivati konzervativnom. Mi bismo željeli da nam tok kao i prije bude iz Raviart-Thomasovog prostora najnižeg reda na trokutima:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_h \;=\; & \{\mathbf{v}\colon \mathbf{v}|_K = (b_K x_1 + a_K, b_K x_2 + c_K), \quad a_K, b_K, c_K \in \mathbb{R}, \\ & K \in \mathcal{K}_h,\ \text{i normalne komponente od } \mathbf{V} \\ & \text{su neprekidne duž unutarnjih bridova u } \mathcal{T}_h\}\end{aligned}$$

Konstantan vektor $\mathbf{C}_K$ ćemo odrediti tako da tok zadan formulom (3.11) ima neprekidne normalne komponente duž bridova triangulacije. Prije toga, reći ćemo nešto o lokalnoj bazi prostora $\mathbf{V}_h$.

Za dani trokut $K \in \mathcal{T}_h$ označimo vrhove trokuta sa S, S' i S'', te neka su njima pripadni nasuprotni bridovi označeni sa $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$. Za brid $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1$ definiramo pripadnu lokalnu baznu funkciju sa

$$\mathbf{P}_{K,\mathbf{d}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2|K|}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \tag{3.14}$$

gdje je $\mathbf{x}_S$ radij-vektor vrha S.

Primjetimo da za jediničnu vanjsku normalu $\mathbf{n}$ vrijedi

$$\mathbf{P}_{K,\mathbf{d}}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n} = \begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{d}|} & \forall \mathbf{x} \in \mathbf{d} = S'S'', \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in SS', \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in SS''. \end{cases} \tag{3.15}$$

Druge dvije bazne funkcije $\mathbf{P}_{K,\mathbf{d}_2}$ i $\mathbf{P}_{K,\mathbf{d}_3}$ definiramo slično. Tada se svaka funkcija $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ može lokalno prikazati na K sa

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x})|_K = \textstyle\sum_{\mathbf{d}\in\partial K} u_{\mathbf{d}} \mathbf{P}_{K,\mathbf{d}}(\mathbf{x})$$

gdje je $u_{\mathbf{d}} = \int_{\mathbf{d}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} ds$ tok $\mathbf{u}_h$ duž brida $\mathbf{d}$.

Uz iste oznake na K, promotrimo polinom prvog stupnja λ koji u vrhu S poprima vrijednost 1, a u ostala dva vrha vrijednost 0. Primjetimo da je λ lokalna bazna funkcija prostora X_h pridružena vrhu S. Ako sa φ označimo globalnu baznu funkciju prostora Y_h pridruženu bridu $\mathbf{d}$ onda se lako vidi da je:

$$\varphi|_K = 1 - 2\lambda. \tag{3.16}$$

Nadalje, na K vrijedi:

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{d}|}{|K|}\mathbf{n} = const. \tag{3.17}$$

U računu koji slijedi ćemo koristiti da je integracijska formula

$$\int_K \phi d\mathbf{x} \approx \frac{|K|}{3}\left[\phi(m_1) + \phi(m_2) + \phi(m_3)\right] \tag{3.18}$$

egzaktna na polinomima drugog stupnja gdje smo sa m_1, m_2 i m_3 označili polovišta bridova $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$(dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [6]).

Vratimo se određivanju konstantnog vektora $\mathbf{C}_K$. Da bismo to mogli moramo biti određeniji po pitanju tlaka p_h. Pretpostavimo da smo ga odredili nekonformnom Galerkinovom metodom konačnih elemenata.

Lema 3.3.1. *Neka je p_h rješenje zadaće (3.5), a $\mathbf{u}_h$ definiran sa (3.11) gdje je konstantni vektor $\mathbf{C}_K$ dan formulom:*

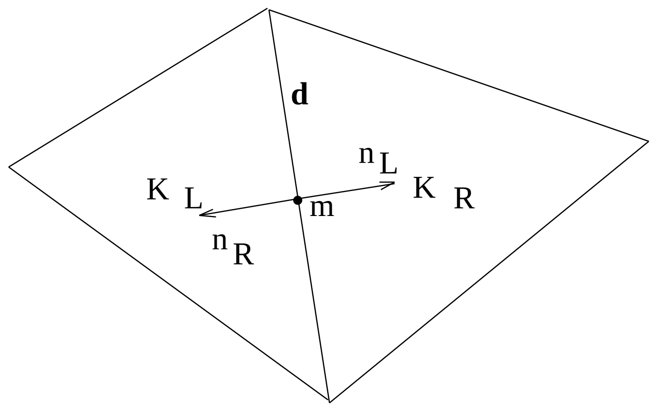
$$\mathbf{C}_K = \begin{bmatrix} |\mathbf{d}_1|\mathbf{n}_1^\tau \\ |\mathbf{d}_2|\mathbf{n}_2^\tau \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_1) - p_K) \\ \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_2) - p_K) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

pri čemu smo sa $\mathbf{d}_1$ i $\mathbf{d}_2$ označili dva proizvoljna brida trokuta K, m_1 i m_2 su redom njihova polovišta, a φ_1 i φ_2 bazne funkcije pridružene tim bridovima. Tada je $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$.

Dokaz. Označimo sa $(\cdot,\cdot)_K$ skalarni produkt L^2 na K :

$$(q,w)_K = \int_K q\, w\, d\mathbf{x}.$$

Neka su K_L i K_R dva trokuta triangulacije sa zajedničkim bridom $\mathbf{d}$.



Dalje, neka je $\varphi \in Y_{h,0}$ globalna bazna funkcija koja poprima vrijednost 1 u polovištu brida $\mathbf{d}$, a u ostalim polovištima bridova triangulacije poprima vrijednost 0. Uzmimo da je $q_h = \varphi$ u jednadžbi (3.5) pa imamo:

$$(\mathcal{A}_{K_L}\nabla p_h, \nabla\varphi)_{K_L} + (\mathcal{A}_{K_R}\nabla p_h, \nabla\varphi)_{K_R} + \int_{K_L\cup K_R} \alpha p_h \varphi\, d\mathbf{x} = \int_{K_L\cup K_R} \tilde{f}\varphi\, d\mathbf{x}, \tag{3.20}$$

jer se φ poništava na svim drugim trokutima pa imamo integrale samo po K_L i K_R, a koristili smo i činjenicu da za proizvoljne linearne polinome q_h i w_h na K vrijedi:

$$(\mathcal{A}\nabla q_h, \nabla w_h)_K = (\mathcal{A}_\mathcal{K}\nabla q_h, \nabla w_h)_K.$$

Sa $\mathbf{n}_L$ označimo vanjsku normalu trokuta K_L na brid $\mathbf{d}$, sa $\mathbf{n}_R$ vanjsku normalu trokuta K_R na brid $\mathbf{d}$, a sa ∇p_h^L i ∇p_h^R označimo restrikciju ∇p_h na K_L, odnosno K_R. Na prva dva člana u (3.20) primjenimo (3.17) pa imamo

$$(\mathcal{A}_{K_L}\nabla p_h, \nabla\varphi)_{K_L} + (\mathcal{A}_{K_R}\nabla p_h, \nabla\varphi)_{K_R} = |\mathbf{d}|(\mathcal{A}_{K_L}\nabla p_h^L \cdot \mathbf{n}_L + \mathcal{A}_{K_R}\nabla p_h^R \cdot \mathbf{n}_R).$$

Nadalje, na treći član u (3.20) primjenimo činjenicu da je integracijska formula (3.18) egzaktna na polinomima drugog stupnja:

$$\textstyle\int_{K_L\cup K_R} \alpha p_h \varphi \, d\mathbf{x} = p_h(m)\frac{\alpha_{K_L}|K_L|+\alpha_{K_R}|K_R|}{3},$$

gdje smo sa m označili polovište brida $\mathbf{d}$. Dakle, iz (3.20) sada slijedi:

$$|\mathbf{d}|(\mathcal{A}_{K_L}\nabla p_h^L \cdot \mathbf{n}_L + \mathcal{A}_{K_R}\nabla p_h^R \cdot \mathbf{n}_R) + p_h(m)\frac{\alpha_{K_L}|K_L|+\alpha_{K_R}|K_R|}{3} = \textstyle\int_{K_L\cup K_R} \tilde{f}\varphi \, d\mathbf{x}.$$

Prema (3.11) imamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{K_L}\nabla p_h^L \cdot \mathbf{n}_L + \mathcal{A}_{K_R}\nabla p_h^R \cdot \mathbf{n}_R \;&=\; [(f_{K_L} - \alpha_{K_L}p_{K_L})\mathbf{P}_{K_L}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_{K_L} - \mathbf{u}_h^L(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_L \\ &+\; [(f_{K_R} - \alpha_{K_R}p_{K_R})\mathbf{P}_{K_R}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_{K_R} - \mathbf{u}_h^R(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_R.\end{aligned}$$

Iz prethodne dvije formule sada slijedi:

$$\mathbf{u}_h^L(m) \cdot \mathbf{n}_L + \mathbf{u}_h^R(m) \cdot \mathbf{n}_R$$

$$\begin{aligned}&= \; [(f_{K_L} - \alpha_{K_L}p_{K_L})\mathbf{P}_{K_L}(m) + \mathbf{C}_{K_L}] \cdot \mathbf{n}_L - \frac{1}{|\mathbf{d}|}\int_{K_L} \tilde{f}\varphi d\mathbf{x} + \frac{\alpha_{K_L}}{3|\mathbf{d}|}p_h(m)|K_L| \\ &+ \; [(f_{K_R} - \alpha_{K_R}p_{K_R})\mathbf{P}_{K_R}(m) + \mathbf{C}_{K_R}] \cdot \mathbf{n}_R - \frac{1}{|\mathbf{d}|}\int_{K_R} \tilde{f}\varphi d\mathbf{x} + \frac{\alpha_{K_R}}{3|\mathbf{d}|}p_h(m)|K_R|.\end{aligned}$$

Uvesti ćemo uvjet neprekidnosti normalne komponente toka u polovištu m koji glasi

$$\mathbf{u}_h^L(m) \cdot \mathbf{n}_L + \mathbf{u}_h^R(m) \cdot \mathbf{n}_R = 0 \tag{3.21}$$

na sljedeći način. Za trokut $K = K_L$ označimo bridove trokuta sa $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$. Neka je $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1$ i neka je φ_1 bazna funkcija pridružena bridu $\mathbf{d}_1$. Neka vrijedi:

$$|\mathbf{d}_1|[(f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K(m_1) + \mathbf{C}_K] \cdot \mathbf{n}_1 - \int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} + \frac{\alpha_K}{3}p_h(m_1)|K| = 0 \tag{3.22}$$

Za $\mathbf{d} = \mathbf{d}_2$ neka je

$$|\mathbf{d}_2|[(f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K(m_2) + \mathbf{C}_K] \cdot \mathbf{n}_2 - \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x} + \frac{\alpha_K}{3}p_h(m_2)|K| = 0 \tag{3.23}$$

Lako se vidi da za funkciju $\mathbf{P}_K$ na K vrijedi

$$\mathbf{P}_K = \frac{|K|}{3}\sum_{\mathbf{d}\in\partial K} \mathbf{P}_{K,\mathbf{d}} \tag{3.24}$$

gdje smo funkcije $P_{K,\mathbf{d}}$ definirali sa (3.14). Prema (3.15) slijedi da $\mathbf{P}_K(m_1) \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{|K|}{3|\mathbf{d}_1|}$ i $\mathbf{P}_K(m_2) \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{|K|}{3|\mathbf{d}_2|}$. Prema tome, (3.22) i (3.23) postaje

$$|\mathbf{d}_1|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{C}_K = \int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3}f_K - \alpha_K\frac{|K|}{3}(p_h(m_1) - p_K) \tag{3.25}$$

i

$$|\mathbf{d}_2|\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{C}_K = \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_2) - p_K). \tag{3.26}$$

Razlog zašto nismo uveli uvjet i na trećem bridu trokuta je taj što je to nepotrebno. Ako vrijede (3.25) i (3.26) onda se može pokazati da analogna jednakost vrijedi i na bridu $\mathbf{d}_3$. Naime, ako iskoristimo jednakost $\sum_{i=1}^{3} |\mathbf{d}_i|\mathbf{n}_i = 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{d}_3|\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{C}_K &= -|\mathbf{d}_1|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{C}_K - |\mathbf{d}_2|\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{C}_K \\
&= -\left(\int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} + \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x}\right) + \frac{2|K|}{3} f_K \\
&\quad + \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_1) + p_h(m_2) - 2p_K).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Prema (3.18) je:

$$\textstyle\int_K \tilde{f}\varphi_i = \frac{|K|}{3}\tilde{f}(m_i),\ \int_K \tilde{f} d\mathbf{x} = \frac{|K|}{3}[\tilde{f}(m_1) + \tilde{f}(m_2) + \tilde{f}(m_3)]$$

$$\text{i } \textstyle\int_K p_h d\mathbf{x} = \frac{|K|}{3}[p_h(m_1) + p_h(m_2) + p_h(m_3)].$$

Uzmimo u obzir još i (3.7) pa se vratimo u (3.27):

$$|\mathbf{d}_3|\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{C}_K = \int_K \tilde{f}\varphi_3 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_3) - p_K).$$

Dakle, ako uvedemo oznaku $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} |\mathbf{d}_1|\mathbf{n}_1^\tau \\ |\mathbf{d}_2|\mathbf{n}_2^\tau \end{bmatrix}$ onda je

$$\mathbf{MC}_K = \begin{bmatrix} \int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_1) - p_K) \\ \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_2) - p_K) \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

a budući da su vanjske normale bridova linearno nezavisne pa je matrica $\mathbf{M}$ regularna, vrijedi:

$$\mathbf{C}_K = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} \int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_1) - p_K) \\ \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_2) - p_K) \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Jasno da je sa ovakvom konstrukcijom zadovoljeno (3.21) svojstvo neprekidnosti normalnih komponenti u polovištima bridova, a budući da je $\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}$ konstanta duž bridova imamo neprekidnost normalnih komponenti toka na svim bridovima. Dakle, $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$. $\square$

Formulom (3.11), pri čemu smo koristili (3.19) smo postigli sljedeće:

(i) lokalnu konzervativnost

(ii) neprekidnost normalnih komponenti toka duž bridova

Napomena 3.3.2. *Dakle, ako za p_h koji smo dobili nekonformnom Galerkinovom metodom konačnih elemenata tok odredimo formulom (3.11) sa $\mathbf{C}_K$ određenim kao u (3.19) on će biti iz prostora $\mathbf{V}_h$. Međutim, kod konformne Galerkinove metode konačnih elemenata to neće vrijediti. Naime, u konstrukciji vektora $\mathbf{C}_K$ koji osigurava neprekidnost normalnih komponenti toka na rubovima triangulancije bitno smo koristili da je p_h određeno nekonformnom metodom. Bazne funkcije iz konformne aproksimacije uvele bi u račun sve elemente koji sadrže njoj pridružen vrh.*

Napomena 3.3.3. *Vratimo se matrici M iz (3.28) i tome kako možemo najjednostavnije odrediti M^{-1}. Jedan način da je izračunamo je sljedeći. Označimo sa $\mathbf{R}_\varphi$ matricu rotacije za kut φ. Tada vrijedi $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_i|}$, odnosno $|\mathbf{d}_i|\mathbf{n}_i = \mathbf{R}_{-\frac{\pi}{2}}\mathbf{d}_i$. Dakle, imamo:*

$$M^{-1} = (\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^\tau \\ \mathbf{d}_2^\tau \end{bmatrix} \mathbf{R}^\tau_{-\frac{\pi}{2}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^\tau \\ \mathbf{d}_2^\tau \end{bmatrix}^{-1}$$

Napomena 3.3.4. *U slučaju da nam je zadan homogeni Neumannov rubni uvjet, ovakvim izborom konstantnog vektora $\mathbf{C}_K$ je on zadovoljen. Naime, tada p_h tražimo u Y_h, a ne u $Y_{h,0}$. Zato provedemo račun kao i u dokazu Leme 3.3.1 samo što ovaj put u (3.5) uvrstimo i bazne funkcije pridružene čvorovima na granici Γ, što u slučaju Dirichletovog rubnog uvjeta nismo mogli. Neka je $\mathbf{d}$ proizvoljan brid na granici. Označimo sa m polovište od $\mathbf{d}$ te sa K, $\mathbf{n}$ i φ trokut triangulacije kojem on pripada, vanjsku normalu u točki m i pripadnu baznu funkciju. Nakon računa imamo:*

$$\mathbf{u}_h(m)\cdot\mathbf{n} = [f_K - \alpha_K p_K]\mathbf{P}_K(m)\cdot\mathbf{n} + \tfrac{1}{|\mathbf{d}|}(p_h(m)\tfrac{\alpha_K|K|}{3} - \textstyle\int_K \tilde{f}\varphi d\mathbf{x}) + \mathbf{C}_K\cdot\mathbf{n}$$

što zbog uvjeta (3.22) i (3.23) koji smo postavili na $\mathbf{C}_K$ povlači $\mathbf{u}_h(m)\cdot\mathbf{n} = 0$. Slično se tretira i nehomogena Neumannova zadaća.

Napomena 3.3.5. *Promotrimo formulu (3.19). Vidimo da će članovi*

$$\int_K \tilde{f}\varphi_i d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K,$$

za $i = 1, 2$ biti jednaki 0 ako uzmemo $\tilde{f}|_K = f_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$. Uočimo još da ako u formuli (3.5) bilinearnu formu a_h danu sa (3.6) zamjenimo sa:

$$\tilde{a}_h(p_h, q_h) = \textstyle\sum_K \left[\int_K (\mathcal{A}\nabla p_h)\cdot\nabla q_h\, d\mathbf{x} + \int_K \alpha_K p_K\, q_h\, d\mathbf{x}\right],$$

onda će u (3.19) doći do kraćenja članova sa p_h pa dobivamo $\mathbf{C}_K \equiv 0$. Taj ćemo rezultat koristiti u Teoremu 3.4.4.

3.4 Ekvivalencija konzervativne Galerkinove mke i mješovite metode konačnih volumena

Zanimljive rezultate dobijemo ako Galerkinovu metodu konačnih elemenata s efikasnom konstrukcijom toka usporedimo s određenim mješovitim metodama konačnih volumena definiranih u Lemi 3.4.1 i Teoremima 3.4.4, 3.4.5 i 3.4.8. Budući da obe metode imaju zajedničko svojstvo konzervativnosti, možemo se zapitati da li imaju još zajedničkih svojstava. Nećemo ulaziti u pojedinosti vezane za mješovitu metodu konačnih volumena, ali može se pokazati da između ove dvije metode vrijedi ekvivalencija. Te rezultate navodimo u Teoremima 3.4.4, 3.4.5 i 3.4.8.

Naša razmatranja započinjemo tako da definiramo Raviart-Thomasov prostor najnižeg reda na trokutima, koji nema neprekidne normalne komponente duž bridova u triangulaciji:

$$\mathbf{V}_h^d = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega) \colon \mathbf{v}|_K = (b_K x_1 + a_K, b_K x_2 + c_K),\ a_K, b_K, c_K \in \mathbb{R},\ K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Neka sada $\mathbf{C}$ bude po dijelovima konstantan vektor obzirom na $\mathcal{T}_h$ i neka $\mathbf{C}|_K = \mathbf{C}_K\ \forall K \in \mathcal{T}_h$. Nadalje, označimo sa χ_K karakterističnu funkciju elementa K, a s $\boldsymbol{\chi}_K$ proizvoljni konstantni vektor pomnožen s χ_K. Prije svega, navesti ćemo i dokazati neke korisne rezultate.

Lema 3.4.1. *Promotrimo mješovitu metodu konačnih volumena:*
naći $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^d \times Y_{h,0}$ *tako da*

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \alpha p_h - f, \chi_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.30}$$

$$(\mathbf{u}_h + \mathcal{A}\nabla p_h - \mathbf{C}, \boldsymbol{\chi}_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.31}$$

te zadaću:
naći $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^d \times Y_{h,0}$ *tako da* $\forall K \in \mathcal{T}_h$ *vrijedi:*

$$\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + (f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K + \mathbf{C}_K. \tag{3.32}$$

Ove dvije zadaće su ekvivalentne.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da (3.32) povlači (3.30) i (3.31). Primjenimo divergenciju na (3.32) pa imamo

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h = f_K - \alpha_K p_K \tag{3.33}$$

jer je prema (3.13) $\nabla \cdot \mathbf{P}_K = 1$. Kad to pomnožimo sa karakterističnom funkcijom χ_K i integriramo po Ω imamo (3.30). Dalje, (3.32) množimo s $\boldsymbol{\chi}_K$ pa integriramo po Ω. Kada uzmemo u obzir da je

$$(\mathbf{P}_K, \boldsymbol{\chi}_K) = 0,$$

(3.31) odmah slijedi. Dokažimo obrat. Iz (3.30) slijedi da je

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h = f_K - \alpha_K p_K.$$

Funkciju $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^d$ promatranu na K možemo napisati u obliku

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_K + \tfrac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \qquad \forall \mathbf{x} \in K,$$

jer je $\mathbf{u}(\mathbf{x}_B) = \mathbf{u}_K$, a onda prema (3.31) vrijedi

$$\mathbf{u}_K = \frac{1}{|K|}\int_K \mathbf{u}_h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + \mathbf{C}_K.$$

Dakle,

$$\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + (f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K + \mathbf{C}_K,$$

tj. vrijedi (3.32). □

Lema 3.4.2. *Neka je* $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^d \times Y_{h,0}$ *rješenje od (3.32). Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}\sum_K (\mathcal{A}\nabla p_h, \nabla q_h)_K + \sum_K \alpha_K (p_K, q_h)_K &= \sum_K (f_K, q_h)_K \\ &- \sum_K ((\mathbf{u}_h - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K} \\ &\forall q_h \in Y_{h,0}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Štoviše, ako je pri tome $\mathbf{u}_h - \mathbf{C} \in \mathbf{V}_h$ *onda je:*

$$\begin{aligned}\sum_K (\mathcal{A}\nabla p_h, \nabla q_h)_K + \sum_K \alpha_K (p_K, q_h)_K &= \sum_K (f_K, q_h)_K \\ &\forall q_h \in Y_{h,0}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dokaz. Zbog ekvivalencije iz prethodne leme, dovoljno je (3.34) pokazati koristeći (3.30) i (3.31). Stavljajući $\boldsymbol{\chi}_K = \nabla q_h|_K$ u (3.31) i sumiranjem po svim $K \in \mathcal{T}_h$ imamo:

$$\begin{aligned}\sum_K (\mathcal{A}\nabla p_h, \nabla q_h)_K &= \sum_K (-\mathbf{u}_h + \mathbf{C}_K, \nabla q_h)_K \\ &= \sum_K [(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_K - (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K} + (\mathbf{C}_K \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K}] \\ &= \sum_K [(f_K - \alpha_K p_K, q_h)_K - (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K} + (\mathbf{C}_K \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K}],\end{aligned}$$

pri čemu smo primjenili teorem o divergenciji i (3.33). Ako sada pretpostavimo i da $\mathbf{u}_h - \mathbf{C} \in \mathbf{V}_h$ onda je $(\mathbf{u}_h - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}$ neprekidno u polovištima bridova, a to onda znači da je neprekidno duž cijelih bridova jer je $(\mathbf{u}_h - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}$ zbog linearnosti od $\mathbf{u}_h$ konstanta na bridu. Treba pokazati da se suma $\sum_K ((\mathbf{u}_h - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K}$ poništava pa će vrijediti (3.35). Zbog linearnosti izraza je dovoljno provjeriti za slučajeve kada je q_h bazna funkcija prostora $Y_{h,0}$ a to se lako vidi. □

Napomena 3.4.3. *Važno je primjetiti da Lema 3.4.1 i Lema 3.4.2 vrijede i u slučaju ako prostor* $Y_{h,0}$ *zamjenimo s* $X_{h,0}$. *Naime, u dokazima koristimo samo konstantnost gradijenta* ∇p_h *po elementima* $K \in \mathcal{T}_h$.

Iz ovih razmatranja slijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.4.4. *Promotrimo konzervativnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata: naći* $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Y_{h,0}$ *tako da*

$$\sum_K (\mathcal{A}\nabla p_h, \nabla q_h)_K + \sum_K \alpha_K p_K (1, q_h)_K = \sum_K (f_K, q_h)_K \tag{3.36}$$

i

$$\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + (f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K. \tag{3.37}$$

Također promotrimo mješovitu metodu konačnih volumena:
naći $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Y_{h,0}$ *tako da*

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \alpha p_h - f, \chi_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.38}$$

$$(\mathbf{u}_h + \mathcal{A}\nabla p_h, \boldsymbol{\chi}_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{3.39}$$

Tada su ove dvije zadaće ekvivalentne.

Dokaz. Varijacijska jednadžba (3.36) ima jedinstveno rješenje prema Lax-Milgramovoj lemi. Također, prema Napomeni 3.3.5 slijedi da je i $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$. Budući da je $\mathbf{C} \equiv 0$ onda prema Lemi 3.4.1 je (3.38) i (3.39) ekvivalentno s (3.37), a (3.37) povlači (3.36), jer je $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ i iz (3.32) slijedi (3.35). □

Primjetimo da smo u dokazu ovog teorema koristili Napomenu 3.3.5 da vidimo da je $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$. Ta napomena je direktna posljedica Leme 3.3.1 pa nam taj argument ne vrijedi ako smo tlak p_h dobili konformnom Galerkinovom metodom konačnih elemenata. Verzija Teorema 3.4.4 u tom slučaju slijedi.

Teorem 3.4.5. *Promotrimo konzervativnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata:*
naći $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^d \times X_{h,0}$ *tako da*

$$\sum_K (\mathcal{A}\nabla p_h, \nabla q_h)_K + \sum_K \alpha_K p_K (1, q_h)_K = \sum_K (f_K, q_h)_K \tag{3.40}$$

i

$$\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + (f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K. \tag{3.41}$$

Zatim promotrimo mješovitu metodu konačnih volumena:
naći $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^d \times X_{h,0}$ *tako da*

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \alpha p_h - f, \chi_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.42}$$

$$(\mathbf{u}_h + \mathcal{A}\nabla p_h, \boldsymbol{\chi}_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.43}$$

$$\sum_K (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K} = 0 \qquad \forall q_h \in X_{h,0}. \tag{3.44}$$

Tada su ove dvije zadaće ekvivalentne.

Dokaz. Kao i prije vidimo da egzistencija i rješenje varijacijske jednadžbe (3.40) slijedi ako primjenimo Lax-Milgramovu lemu. Nadalje, prema Lemi 3.4.1 vrijedi da (3.42) i (3.43) povlači (3.41). (3.41) zajedno s (3.44) povlači (3.40). Obratno, (3.41) povlači (3.42) i (3.43), a (3.44) zatim slijedi ako usporedimo (3.40) sa (3.34). □

Mješovita metoda konačnih volumena iz prethodnog teorema, zbog dodatnog uvjeta (3.44) nije standardna.

Napomena 3.4.6. *Budući da zadaća (3.40)-(3.41) ima jedinstveno rješenje time smo pokazali da i zadaća (3.42)-(3.44) ima jedinstveno rješenje.*

Napomena 3.4.7. *Iako rješenje* $\mathbf{u}_h$ *Teorema 3.4.5 nema nužno neprekidne normalne komponente duž bridova, svejedno zadovoljava sličan uvjet duž bridova. Naime, uzmimo da je* q_h *u (3.44) globalna bazna funkcija koja pripada vrhu* O*. Odavde imamo:*

$$\sum_{\mathbf{d}} [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]|_{\mathbf{d}} = 0, \tag{3.45}$$

gdje $[.]$ *predstavlja skok funkcije duž brida* $\mathbf{d}$*,* $\mathbf{n}$ *je normala na brid* $\mathbf{d}$ *i sumiramo po bridovima* $\mathbf{d}$ *svih onih trokuta* K *kojima je* O *jedan od vrhova.*

Primjetimo da ako uzmemo standardnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata koja umjesto člana $\sum_K (\alpha_K p_K, q_h)_K$ kao u Teoremu 3.4.4 ima član $\sum_K (\alpha_K p_h, q_h)$ onda nemamo garanciju da se tok dobiven sa (3.37) nalazi u prostoru $\mathbf{V}_h$ (osim ako $\alpha = 0$). Zato koristimo konstrukciju toka kao u (3.11) gdje je $\mathbf{C}_K$ određeno sa (3.19). O ekvivalenciji metoda u tom slučaju nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.4.8. *Promotrimo konzervativnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata: naći* $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Y_{h,0}$ *tako da*

$$\sum_K (\mathcal{A}\nabla p_h, \nabla q_h)_K + \sum_K \alpha_K (p_h, q_h)_K = \sum_K (\tilde{f}, q_h)_K \tag{3.46}$$

i

$$\mathbf{u}_h = -\mathcal{A}_K \nabla p_h + (f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K + \mathbf{C}_K, \tag{3.47}$$

gdje je vektor $\mathbf{C}_K$ *određen sa (3.19). Također promotrimo mješovitu metodu konačnih volumena: naći* $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Y_{h,0}$ *tako da*

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h + \alpha p_h - f, \chi_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.48}$$

$$(\mathbf{u}_h + \mathcal{A}\nabla p_h - \mathbf{C}, \boldsymbol{\chi}_K) = 0 \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{3.49}$$

gdje smo $\mathbf{C}$ *definirali kao po dijelovima konstantan vektor takav da je* $\mathbf{C}|_K = \mathbf{C}_K$*. Tada su ove dvije zadaće ekvivalentne.*

Dokaz. Da rješenje varijacijske jednadžbe (3.46) postoji i jedinstveno je slijedi prema Lax-Milgramovoj lemi. Također prema Lemi 3.19 za $\mathbf{u}_h$ definirano s (3.47) vrijedi $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$. Nadalje, prema Lemi 3.4.1 odmah je jasno da je (3.47) ekvivalentno s (3.48) i (3.49). Znamo da (3.47) povlači (3.34):

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_K (\mathcal{A}\nabla p_h, \nabla q_h)_K + \sum_K \alpha_K (p_K, q_h)_K = \\ \textstyle\sum_K (f_K, q_h)_K - \sum_K ((\mathbf{u}_h - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K} \qquad \forall q_h \in Y_{h,0}.\end{gathered}$$

Pokazati ćemo da je to isto kao i (3.46). Ako usporedimo ove dvije jednadžbe vidimo da je to jednako tome da pokažemo da je za svako $q_h \in Y_{h,0}$

$$\sum_K [(\alpha_K p_K, q_h)_K - (\alpha p_h, q_h)_K] = \sum_K [(f_K - \tilde{f}, q_h)_K - (\mathbf{C}_K \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K}], \tag{3.50}$$

gdje se zbog $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ član $\sum_K (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, q_h)_{\partial K}$ poništio. Da bismo provjerili (3.50) pokazat ćemo da (3.50) vrijedi za svaku globalnu baznu funkciju φ koja pripada bridu $\mathbf{d}$ s oznakama kao i kod (3.20). Lako se vidi da je tada izraz $\sum_K [(\alpha_K p_K, q_h)_K - (\alpha p_h, q_h)_K]$ na lijevoj strani u (3.50) jednak

$$\alpha_{K_L} p_{K_L} \tfrac{|K_L|}{3} + \alpha_{K_R} p_{K_R} \tfrac{|K_R|}{3} - \alpha_{K_L} p_h(m) \tfrac{|K_L|}{3} - \alpha_{K_R} p_h(m) \tfrac{|K_R|}{3},$$

gdje je m polovište brida $\mathbf{d}$. Iskoristimo naša ranija razmatranja da bismo drugačije zapisali desnu stranu (3.50). Naime, jednadžba (3.25) bi u ovom kontekstu glasila:

$$|\mathbf{d}|\mathbf{n}_L \cdot \mathbf{C}_{K_L} = \int_{K_L} \tilde{f}\varphi - \tfrac{|K_L|}{3} f_{K_L} - \alpha_{K_L} \tfrac{|K_L|}{3} (p_h(m) - p_{K_L})$$

i

$$|\mathbf{d}|\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{C}_{K_R} = \int_{K_R} \tilde{f}\varphi - \tfrac{|K_R|}{3} f_{K_R} - \alpha_{K_R} \tfrac{|K_R|}{3} (p_h(m) - p_{K_R}).$$

Sada iz ovoga lako slijedi jednakost. □

Napomena 3.4.9. *Promotrimo li ove teoreme ekvivalencije, vidimo da se kod mješovite metode konačnih volumena jednadžba tlaka može odvojiti od jednadžbe za tok, što nije svojstvo koje imamo kod mješovite metode konačnih elemenata.*

Na kraju ovog razmatranja, važno je još jednom naglasiti da smo za rješenje nekonformne Galerkinove metode konačnih elemenata postigli konzervativnost i neprekidnost normalnih komponenti toka duž bridova, dok u konformnom slučaju imamo konzervativnost, ali neprekidnost normalnih komponenti toka samo "približno", u smislu da vrijedi (3.45).

3.5 Ocjene greške

Analizirajmo greške koje se javljaju pri aproksimaciji rješenja p i $\mathbf{u}$ problema (3.3). Pri tome pretpostavljamo da je naša aproksimacija p_h rješenje (3.5) nekonformne Galerkinove metode konačnih elemenata pri čemu funkcija $\tilde{f}$ zadovoljava (3.7) i (3.8), a $\mathbf{u}_h$ je određeno koristeći formulu (3.11) gdje je $\mathbf{C}_K$ dan sa (3.19).

Ocjenimo prvo $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ i $|p - p_h|_h$. U ovom računu ćemo koristiti seminormu $|\,.\,|\colon H_0^1(\Omega) \oplus Y_{h,0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranu sa:

$$|q|_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |q|^2_{H^1(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall q \in H_0^1(\Omega) \oplus Y_{h,0}. \tag{3.51}$$

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza (vidi [7]).

Teorem 3.5.1. *Neka je $\tilde{p}$ rješenje varijacijske zadaće:*

$$a(\tilde{p}, q) = (\tilde{f}, q) \qquad \forall q \in H_0^1(\Omega), \tag{3.52}$$

gdje je bilinearna forma a zadana sa:

$$a(p, q) = \int_\Omega (\mathcal{A}\nabla p) \cdot q \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \alpha p q \, d\mathbf{x}$$

te neka je $p_h \in Y_h$ rješenje (3.5) nekonformne Galerkinove metode konačnih elemenata. Ako je $\tilde{p} \in H^2(\Omega)$ tada postoji konstanta C neovisna o h tako da je:

$$\|\tilde{p} - p_h\|_{L^2(\Omega)} + h|\tilde{p} - p_h|_h \le C h^2 \|\tilde{p}\|_{H^2(\Omega)}, \tag{3.53}$$

Pretpostavimo ubuduće da vrijedi uvjet eliptičke regularnosti $\|\tilde{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}$.

Lema 3.5.2. *Ako je $f \in L^2(\Omega)$ i lokalno za f vrijedi $f|_K \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$, onda postoji konstanta C neovisna o h tako da je:*

$$\begin{aligned} |p - \tilde{p}|_h &\leq Ch^2|f|_h \\ \|p - \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2|f|_h \end{aligned} \tag{3.54}$$

Dokaz. Primjetimo da zbog (3.7) vrijedi $(f - \tilde{f}, 1)_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$, odnosno:

$$(f - \tilde{f}, q)_K = (f - \tilde{f}, q - q_K)_K, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega),$$

gdje je q_K konstantna funkcija na K definirana sa $q_K = \frac{1}{|K|}\int_K q\,d\mathbf{x}$. Prema tome, imamo:

$$\begin{aligned} |(f - \tilde{f}, q)| &= |\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f - \tilde{f}, q)_K| \\ &= |\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f - \tilde{f}, q - q_K)_K| \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |(f - \tilde{f}, q - q_K)_K|. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Primjenimo li sada na (3.55) redom Schwarz-Cauchy nejednakost, ocjenu (3.8) te Lemu 3.2.1 slijedi:

$$\begin{aligned} |(f - \tilde{f}, q)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f - \tilde{f}\|_{L^2(K)} \|q - q_K\|_{L^2(K)} \\ &\leq Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |f|_{H^1(K)} |q|_{H^1(K)} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Primjenimo li opet na (3.56) Schwarz-Cauchy nejednakost, imamo:

$$\begin{aligned} |(f - \tilde{f}, q)| &\leq Ch^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |f|^2_{H^1(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |q|^2_{H^1(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= Ch^2 |f|_h |q|_h. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Oduzmemo li sada jednakost (3.52) od (3.4) imamo:

$$a(p - \tilde{p}, q) = (f - \tilde{f}, q) \qquad \forall q \in H_0^1(\Omega). \tag{3.58}$$

Dakle, iz (3.57) i (3.58) možemo vidjeti da je:

$$|a(p - \tilde{p}, q)| \leq Ch^2 |f|_h |q|_h.$$

Prema tome, vrijedi:

$$\begin{aligned} |p - \tilde{p}|_h^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |p - \tilde{p}|^2_{H^1(K)} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{d_*} (\int_K [\mathcal{A}\nabla(p - \tilde{p}) \cdot \nabla(p - \tilde{p}) + \alpha(p - \tilde{p})^2)] d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{d_*} |a(p - \tilde{p}, p - \tilde{p})| \\ &\leq Ch^2 |f|_h |p - \tilde{p}|_h, \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili da je:

$$|w|^2_{H^1(K)} \leq \frac{1}{d_*}\int_K (\mathcal{A}\nabla w)\cdot\nabla w\,d\mathbf{x} \leq \frac{1}{d_*}\int_K [(\mathcal{A}\nabla w)\cdot\nabla w + \alpha w^2]d\mathbf{x} \quad \forall w \in H^1_0(\Omega)$$

a to imamo iz (3.2) i pozitivnosti koeficijenta α. Odavde imamo:

$$|p-\tilde{p}|_h \leq Ch^2|f|_h, \tag{3.59}$$

a to je upravo prva nejednakost koju smo željeli pokazati. Primjenom Poincaréove nejednakosti dobivamo

$$\|p-\tilde{p}\|_{L^2(\Omega)} \leq C|p-\tilde{p}|_h \leq Ch^2|f|_h.$$

□

Prema tome, možemo dokazati sljedeće:

Teorem 3.5.3. *Ako $p \in H^2(\Omega)$ i $f|_K \in H^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h$ onda imamo:*

$$\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)} + h|p-p_h|_h \leq Ch^2(\|f\|_{L^2(\Omega)} + |f|_h) \tag{3.60}$$

Dokaz. Primjetimo da su zadovoljeni uvjeti Leme 3.5.2 pa vrijedi (3.54) te su također zadovoljeni uvjeti pod kojima vrijedi (3.53). Dakle,

$$\begin{aligned} \|p-p_h\|_{L^2(\Omega)} + h|p-p_h|_h &\leq (\|p-\tilde{p}\|_{L^2(\Omega)} + h|p-\tilde{p}|_h) \\ &\quad +(\|\tilde{p}-p_h\|_{L^2(\Omega)} + h|\tilde{p}-p_h|_h) \\ &\leq Ch^2(|f|_h + \|\tilde{p}\|_{H^2(\Omega)}) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ako uzmemo u obzir (3.8) vidimo da je:

$$\|\tilde{f}-f\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\tilde{f}-f\|^2_{L^2(K)} \leq Ch\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|f|^2_{H^1(K)} = Ch|f|^2_h$$

Zbog pretpostavke da vrijedi uvjet eliptičke regularnosti imamo:

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(\|\tilde{f}-f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq C(|f|_h + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

Vratimo se sada s tim u (3.61) i slijedi tvrdnja teorema. □

Odredimo sada i ocjene za $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2}$ te $|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{H(div,\Omega)}$. Prvo navedimo neke pomoćne rezultate koje ćemo koristiti.

Lema 3.5.4. *Postoji konstanta C neovisna o h takva da je:*

$$\|\mathbf{C}_K\|_{(L^2(K))^2} \leq Ch_K(\|\tilde{f}\|_{L^2(K)} + \|p_h\|_{L^2(K)}), \tag{3.62}$$

$$\|\mathbf{P}_K\|_{(L^2(K))^2} \leq Ch_K^2, \tag{3.63}$$

$$|f_K| \leq Ch_K^{-1}\|f\|_{L^2(K)}, \tag{3.64}$$

$$|p_K| \leq Ch_K^{-1}\|p_h\|_{L^2(K)}. \tag{3.65}$$

Dokaz. Pokažimo (3.62). Primjetimo da vrijedi:

$$\|\mathbf{C}_K\|_{(L^2(K))2} = \left(\int_K (\mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_K)\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \leq h_K \|\mathbf{C}_K\|, \tag{3.66}$$

gdje sa $\|\ .\ \|$ označavamo Euklidovu normu na $\mathbb{R}^2$, odnosno u matričnom slučaju to je norma inducirana Euklidovom normom. Dalje, imamo:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{C}_K| &\leq \left\| \begin{bmatrix} |\mathbf{d}_1|\mathbf{n}_1^\tau \\ |\mathbf{d}_2|\mathbf{n}_2^\tau \end{bmatrix}^{-1} \right\| \left\| \begin{bmatrix} \int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_1) - p_K) \\ \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K - \alpha_K \frac{|K|}{3}(p_h(m_2) - p_K) \end{bmatrix} \right\| \\
&\leq \frac{C}{h_K} \left(\left\| \begin{bmatrix} \int_K \tilde{f}\varphi_1 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K \\ \int_K \tilde{f}\varphi_2 d\mathbf{x} - \frac{|K|}{3} f_K \end{bmatrix} \right\| + \alpha_K \left\| \begin{bmatrix} \frac{|K|}{3}(p_h(m_1) - p_K) \\ \frac{|K|}{3}(p_h(m_2) - p_K) \end{bmatrix} \right\| \right) \\
&= \frac{C}{h_K} \left(\left\| \begin{bmatrix} \int_K \tilde{f}(\varphi_1 - \frac{1}{3}) d\mathbf{x} \\ \int_K \tilde{f}(\varphi_2 - \frac{1}{3}) d\mathbf{x} \end{bmatrix} \right\| + \alpha_K \left\| \begin{bmatrix} \int_K p_h(\varphi_1 - \frac{1}{3}) d\mathbf{x} \\ \int_K p_h(\varphi_2 - \frac{1}{3}) d\mathbf{x} \end{bmatrix} \right\| \right) \\
&= \frac{C}{h_K} \Big(\sqrt{\|\tilde{f}(\varphi_1 - \frac{1}{3})\|_{L^2(K)}^2 + \|\tilde{f}(\varphi_2 - \frac{1}{3})\|_{L^2(K)}^2} \\
&\quad + \alpha_K \sqrt{\|p_h(\varphi_1 - \frac{1}{3})\|_{L^2(K)}^2 + \|p_h(\varphi_2 - \frac{1}{3})\|_{L^2(K)}^2} \Big) \\
&\leq \frac{C}{h_K} \Big(\sqrt{\|\tilde{f}\|_{L^2(K)}^2 \|\varphi_1 - \frac{1}{3}\|_{L^2(K)}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^2(K)}^2 \|\varphi_2 - \frac{1}{3}\|_{L^2(K)}^2} \\
&\quad + \alpha_K \sqrt{\|p_h\|_{L^2(K)}^2 \|\varphi_1 - \frac{1}{3}\|_{L^2(K)}^2 + \|p_h\|_{L^2(K)}^2 \|\varphi_2 - \frac{1}{3}\|_{L^2(K)}^2} \Big) \\
&= \frac{C2\sqrt{K}}{3h_K} (\|\tilde{f}\|_{L^2(K)} + \alpha_K \|p_h\|_{L^2(K)}) \\
&\leq C(\|\tilde{f}\|_{L^2(K)} + \alpha_K \|p_h\|_{L^2(K)}).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Pri tome smo uvelike koristili formulu (3.18), između ostalog da vidimo da je $\|\varphi_i - \frac{1}{3}\|_{L^2(K)}^2 = \frac{2|K|}{9}$, $i = 1, 2$. Naime, imamo:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i - \frac{1}{3}\|_{L^2(K)}^2 &= \int_K (\varphi_i - \frac{1}{3})^2 d\mathbf{x} \\
&= \frac{|K|}{3} [(\varphi_i - \frac{1}{3})^2(m_1) + (\varphi_i - \frac{1}{3})^2(m_2) + (\varphi_i - \frac{1}{3})^2(m_3)] \\
&= \frac{|K|}{3} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right] = \frac{2|K|}{9}.
\end{aligned}$$

Konačno, (3.66) i (3.67) povlače (3.62). Ostale tvrdnje su evidentne. □

Sada možemo analizirati pogrešku aproksimacije toka.

Teorem 3.5.5. *Postoji konstanta C neovisna o h takva da je :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq Ch(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1(\Omega)} + |f|_h), \tag{3.68}$$

$$|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{H(div,\Omega)} \leq Ch(|f|_h + |p|_{H^1(\Omega)} + h\|f\|_{L^2(\Omega)}), \tag{3.69}$$

pod uvjetom da je $p \in H^2(\Omega)$ i da f zadovoljava $f|_K \in H^1(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$.

Dokaz. $\forall K \in \mathcal{T}_h$ prema (3.11) vrijedi:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})_K = -\mathcal{A}_K\nabla p_h + \mathcal{A}\nabla p + (f_K - \alpha_K p_K)\mathbf{P}_K(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_K.$$

Dakle, vidimo da je:

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{(L^2(K))^2} \leq \|\mathcal{A}_K\nabla p_h - \mathcal{A}\nabla p\|_{(L^2(K))^2} + |f_K - \alpha_K p_K|\|\mathbf{P}_K\|_{(L^2(K))^2} + \|\mathbf{C}_K\|_{(L^2(K)^2}. \tag{3.70}$$

Evidentno je:

$$|\tilde{f}_K| \leq Ch_K^{-1}\|\tilde{f}\|_{L^2(K)}.$$

Također, imamo da je $\tilde{f}_K = \frac{1}{|K|}\int_K \tilde{f}\,d\mathbf{x} = \frac{1}{|K|}\int_K f\,d\mathbf{x} = f_K$. Koristeći to, ograničenost funkcije α, Lemu 3.5.4 te nejednakost trokuta vidimo da je:

$$\begin{aligned} |f_K - \alpha_K p_K|\|\mathbf{P}_K\|_{(L^2(K))^2} + \|\mathbf{C}_K\|_{(L^2(K))^2} &\leq C(|f_K| + \alpha_K|p_K|)h_K^2 \\ &\quad +Ch_K(\|\tilde{f}\|_{L^2(K)} + \|p_h\|_{L^2(K)}) \\ &\leq Ch_K(\|\tilde{f}\|_{L^2(K)} + \|p_h\|_{L^2(K)}). \end{aligned}$$

Time smo odozgo ocjenili drugi i treći član u (3.70). Da bismo ocjenili i prvi uvesti ćemo dodatni uvjet na koeficijente matrice $\mathcal{A}$. Neka vrijedi:

$$a_{i,j} \in H^1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Sada na ove koeficijente možemo primijeniti Lemu 3.2.1 pa s tim rezultatom i zbog ograničenosti matrice $\mathcal{A}$ imamo:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_K\nabla p_h - \mathcal{A}\nabla p\|_{(L^2(K))^2} &\leq \|\mathcal{A}_K\nabla p_h - \mathcal{A}_K\nabla p\|_{(L^2(K))^2} + \|\mathcal{A}_K\nabla p - \mathcal{A}\nabla p\|_{(L^2(K))^2} \\ &\leq C\|\mathcal{A}\|_{L^\infty(K)}|p_h - p|_{H^1(K)} + C\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_K\|_{L^\infty(K)}|p|_{H^1(K)} \\ &\leq C|p_h - p|_{H^1(K)} + Ch_K\|\mathcal{A}\|_{W^{1,\infty}(K)}|p|_{H^1(K)}. \end{aligned}$$

Ako sada dobiveno primjenimo na (3.70), vrijedi:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{(L^2(K))^2} &\leq Ch_K(\|\tilde{f}\|_{L^2(K)} + \|p_h\|_{L^2(K)} + |p|_{H^1(K)}) + C|p_h - p|_{H^1(K)} \\ &\leq Ch_K(\|\tilde{f} - f\|_{L^2(K)} + \|f\|_{L^2(K)} + \|p_h\|_{L^2(K)} \\ &\quad +|p|_{H^1(K)}) + C|p_h - p|_{H^1(K)} \\ &\leq Ch_K(h_K|f|_{H^1(K)} + \|f\|_{L^2(K)} + \|p_h\|_{L^2(K)} \\ &\quad +|p|_{H^1(K)}) + C|p_h - p|_{H^1(K)}, \end{aligned} \tag{3.71}$$

pri čemu smo iskoristili (3.8) i nejednakost trokuta. Sumiramo li sada (3.71) po svim $K \in \mathcal{T}_h$ i primjenimo Schwarz-Cauchy nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^2} &\leq Ch(h|f|_h + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|p_h\|_{L^2(\Omega)} + |p|_{H^1(\Omega)}) \\ &\quad +C|p_h - p|_h \end{aligned}$$

Nadalje, primjenimo li nejednakost trokuta i (3.60) vidimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^2} &\leq Ch(h|f|_h + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|p_h - p\|_{L^2(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad |p|_{H^1(\Omega)}) + C|p_h - p|_h \\ &\leq Ch(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} + |p|_{H^1(\Omega)} + |f|_h) \end{aligned}$$

Tako smo dokazali (3.68). Ocjenimo i $H(div,\Omega)$ normu greške:

$$\begin{aligned} \|\nabla\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{u}_h\|_{L^2(K)} &= \|(f-\alpha_K p) - (f_K - \alpha_K p_K)\|_{L^2(K)} \\ &\leq \|f - f_K\|_{L^2(K)} + \alpha_K\|p - p_K\|_{L^2(K)} \\ &\leq \|f - f_K\|_{L^2(K)} + \alpha_K(\|p - p_h\|_{L^2(K)} + \|p_h - p_K\|_{L^2(K)}) \end{aligned}$$

Zbog

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H(div,\Omega)} = \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\nabla\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}\right)^{1/2},$$

a odavde koristeći Lemu 3.2.1 primjenjenu na funkcije f i p_h te primjenom Teorema 3.5.3 slijedi:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H(div,\Omega)} &\leq C(h|f|_h + \|p - p_h\|_{L(\Omega)} + h|p_h|_h) \\ &\leq C(h|f|_h + \|p - p_h\|_{L(\Omega)} + h|p|_{H^1(\Omega)} + h|p_h - p|_h) \\ &\leq Ch(|f|_h + |p|_{H^1(\Omega)} + h\|f\|_{L^2(\Omega)} + h|f|_h). \end{aligned}$$

□

Napomena 3.5.6. *U konformnom slučaju, budući da* $\mathbf{u}_h$ *nije iz* $H(div;\Omega)$ *definiramo normu*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|^2_{h,H(div,\Omega)} = \textstyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\nabla\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{u}_h\|^2_{L^2(K)}.$$

Lako se vidi da račun proveden u nekonformnom slučaju vrijedi i u konformnom slučaju pa imamo:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{h,H(div,\Omega)} \leq Ch(|f|_h + |p|_{H^1(\Omega)} + h\|f\|_{L^2(\Omega)}).$$

Napomena 3.5.7. *Sav račun proveden prilikom ocjenjivanja greške vrijedi i u slučaju homogenog Neumannovog rubnog uvjeta pa u tom slučaju imamo iste rezultate.*

Jasno je da smo *korekciju* u (3.9) odredili smisleno. Naime, aproksimativni tok $\mathbf{u}_h$ dobiven s (3.11) pri čemu smo $\mathbf{C}_K$ odredili s (3.19) konvergira rješenju $\mathbf{u}$. Rezultat iz Teorema 3.5.5 govori o konvergenciji prvog reda za tok što je jednako dobar rezultat kao i kod mješovite metode konačnih elemenata.

3.6 Numerički primjeri

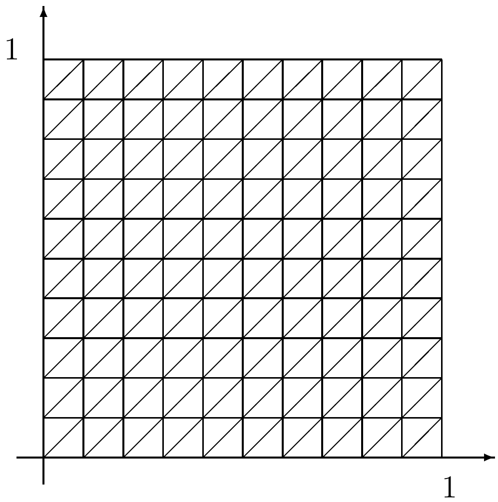
Nakon teoretskih razmatranja greške aproksimacije, navodimo različite numeričke primjere. Kao što ćemo pokazati, dobiveni numerički rezultati su u skladu s teoretskim ocjenama greške. Osim toga, vidjeti ćemo na koji način smo konzervativnu metodu konačnih elemenata s efikasnom konstrukcijom toka realizirali na računalu.

3.6.1 Realizacija u FreeFem++-u

Sada ćemo naša razmatranja primjeniti na rješavanje konkretnih problema oblika

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla p) + \alpha p = f \quad \text{na} \quad \Omega, \tag{3.72}$$

uz Dirichletove ili Neumannove rubne uvjete. Pri tome ćemo koristiti FreeFem++ [1] da bismo proveli naš račun. Uzmimo da je domena Ω jedinični kvadrat. Želimo li da svaka stranica jediničnog kvadrata bude podijeljena na n dijelova, FreeFem++ će za nas generirati triangulaciju T_h kao na slici:



Tako smo dobili triangulaciju $\mathcal{T}_h$ sa kojom ćemo raditi. Kod za to izgleda ovako:

```
n = 10;
mesh Th = square (n, n);
```

Neka su nam funkcije alpha, a11, a12, a21, a22, f, p, uu1, uu2 poznate i unaprijed definirane. Pri tome su a11, a12, a21, a22 koordinatne funkcije matrice $\mathcal{A}$, p egzaktan tlak te u1, u2 komponente egzaktnog toka. Nadalje, funkciju $\tilde{f}$ odredimo tako da aproksimira f u standardnom konformnom $P1$ smislu. To znači da je $\tilde{f}$ polinom prvog stupnja na svakom trokutu triangulacije koji interpolira f u vrhovima trokuta. U FreeFem++-u to postižemo sa:

```
fespace Ph (Th, P1) ;
Ph ff = f;
```

[1]FreeFem++ je IDE visokog stupnja za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

U nekonformnom slučaju uz homogeni Dirichletov rubni uvjet tlak tražimo u prostoru $Y_{h,0}$. Za rješavanje sustava (3.5) koristimo funkciju solve FreeFem++-a:

```
fespace Yh (Th, P1nc);
Yh ph, qh;
solve GFEM (ph, qh, solver = CG) =
int2d(Th)(dx(ph) * dx(qh) * a11 + dy(ph) * dy(qh) * a22 +
a12 * dy(ph) * dx(qh) + a21 * dx(ph) * dy(qh) ) - int2d(Th) (ff * qh)
+ on( 1, 2, 3, 4, ph = 0.0) ;
```

Ovdje je ph upravo oznaka za aproksimativan tlak p_h iz (3.5). Nadalje, odrediti ćemo $\mathbf{u}_h$ iz (3.11) koristeći formulu (3.19). Komponente aproksimativnog toka su označene s uh1 i uh2. Budući da njih određujemo po svakom trokutu triangulacije posebno, uzeti ćemo te funkcije iz prostora funkcija koje su polinomi prvog stupnja na svakom trokutu, ali nisu nužno neprekidne na njihovim bridovima:

```
fespace Dh(Th, P1dc);
Dh uh1, uh2;
uh1=0.0; uh2=0.0;
```

Upravo zbog toga što se račun provodi posebno na svakom trokutu, definirati ćemo funkciju karakteristicna u prostoru funkcija koje su konstante po elementima. Na taj način funkcija karakteristicna se može definirati tako da bude upravo karakteristična funkcija pojedinog trokuta. Imamo:

```
fespace Wh(Th, P0);
Wh karakteristicna;
```

Definiramo još neke pomoćne varijable:

```
real[int,int] A(2,2);
real [int] b (2);
real pk, fk, alphak;
real area;
real det;
real temp;
int stupanj1, stupanj2;
Yh phi1, phi2;
real aa11, aa22, aa12, aa21;
real barix, bariy;
```

Da bismo definirali $\mathbf{u}_h$ kao u (3.11) proći ćemo svakim elementom triangulacije:

```
for (int i = 0; i < Th.nt; i++) {
barix = (Th[i][0].x + Th[i][1].x + Th[i][2].x)/3.0;
bariy = (Th[i][0].y + Th[i][1].y + Th[i][2].y)/3.0;
```

pri čemu smo gore i izračunali koordinate težišta i-tog trokuta. Želimo odrediti konstantni vektor $\mathbf{C}_K$ kao u (3.19). Vrhovi trokuta triangulacije u FreeFem++-u su numerirani sa 0, 1 i 2. Za bridove $\mathbf{d}_1$ i $\mathbf{d}_2$ uzet ćemo da su to upravo bridovi između vrhova 0 i 1, odnosno 1 i 2. Nadalje, na i-tom trokutu odredimo prvu matricu iz formule (3.19):

```
A(0, 0) = Th[i][1].x - Th[i][2].x;
A(0, 1) = Th[i][1].x - Th[i][0].x;
A(1, 0) = Th[i][1].y - Th[i][2].y;
A(1, 1) = Th[i][1].y - Th[i][0].y;
```

Primjetimo da matricu A još treba podijeliti determinantom:

```
det = A(0, 0) * A(1, 1) - A(0, 1) * A(1, 0);
```

Sada ćemo definirati funkcije φ_1 i φ_2 kao u (3.19) koje su bazne funkcije prostora Y_h te pripadaju bridovima $\mathbf{d}_1$ i $\mathbf{d}_2$. Njih smo ovdje označili sa phi1 i phi2 te ćemo ih definirati tako da prvo odredimo koji stupnjevi slobode (ovdje označeni sa stupanj1 i stupanj2) pripadaju $\mathbf{d}_1$ i $\mathbf{d}_2$:

```
stupanj1 = Yh(i, 2); stupanj2 = Yh(i, 0);
phi1 = 0; phi2 = 0;
phi1[][stupanj1] = 1.0; phi2[][stupanj2] = 1.0;
```

Odredimo karakteristicna tako da na i-tom trokutu poprima vrijednost 1, a na ostalima 0. Neka vrijednost varijable area bude površina i-tog trokuta:

```
karakteristicna = (Th(x,y).nuTriangle == i);
area = Th[i].area;
```

Da bismo varijable pk, fk i alphak odredili kao u (3.12), odnosno (3.10) pišemo:

```
pk = int2d(Th)(karakteristicna * ph)/area;
fk = int2d(Th)(karakteristicna * f)/area;
alphak = int2d(Th)(karakteristicna * alpha)/area;
```

Slijedeće ćemo izračunati vektor koji se nalazi na drugom mjestu desne strane (3.19):

```
b[0] = int2d(Th)(karakteristicna * ff * phi1) - area * fk/3.0
    - alphak * (ph[][stupanj1] - pk) * area/3.0;
b[1]=int2d(Th)(karakteristicna * ff * phi2) - area * fk/3.0
    - alphak * (ph[][stupanj2] - pk) * area/3.0;
```

Naposlijetku ćemo izračunatu desnu stranu (3.19) spremiti u vektor c:

```
c = A * b;
c = (1.0/det) * c;
```

Sada kada smo odredili kako vektor $\mathbf{C}_K$ izgleda na i-tom trokutu, definirajmo na njemu tok $\mathbf{u}_h$. Zbog toga se vraćamo formuli (3.11). Prvo ćemo odrediti $\mathcal{A}_K$ po komponentama:

```
aa11 = int2d(Th)(karakteristicna * a11)/area;
aa12 = int2d(Th)(karakteristicna * a12)/area;
aa21 = int2d(Th)(karakteristicna * a21)/area;
aa22 = int2d(Th)(karakteristicna * a22)/area;
```

Naš račun sada završava sa:

```
u1 = u1 + karakteristicna * (-aa11 * dx(ph) - aa12 * dy(ph)
        + 0.5 * (fk - alphak * pk) * (x - barix) + c[0]);
u2 = u2 + karakteristicna * (-aa22 * dy(ph) - aa21 * dx(ph)
        + 0.5 * (fk - alphak * pk) * (y - bariy) + c[1]);
```

Primjetimo da je ovaj račun valjan kada imamo homogeni Dirichletov rubni uvjet. U slučaju homogenog Neumannovog rubnog uvjeta, umjesto:

```
solve GFEM(ph, qh, solver = CG) =
int2d(Th)(dx(ph) * dx(qh) * a11 + dy(ph) * dy(qh) * a22 +
a12 * dy(ph) * dx(qh) + a21 * dx(ph) * dy(qh)) - int2d(Th) (ff * qh)
 +on(1, 2, 3, 4, ph=0.0) ;
```

imamo samo:

```
solve GFEM(ph, qh, solver = CG) =
int2d(Th)(dx(ph) * dx(qh) * a11 + dy(ph) * dy(qh) * a22 +
a12 * dy(ph) * dx(qh) + a21 * dx(ph) * dy(qh))- int2d(Th) (ff * qh);
 }
```

pri čemu smo zatvorili for petlju koja je išla po svim trokutima.

3.6.2 Numerički primjeri za nekonformni slučaj

Budući da sada znamo kako odrediti aproksimativni tlak p_h i tok $\mathbf{u}_h$ želimo vidjeti kolika je norma tako dobivenih greški. Kao što smo već spomenuli, ocjene Teorema 3.5.3 i Teorema 3.5.5 vrijede bez obzira da li imamo Dirichletove ili Neumannove rubne uvjete. Mi ćemo zbog jednostavnosti računa uzeti neke diskretne norme da bismo izmjerili grešku između točnih i dobivenih podataka.

Neka je m neki prirodni broj, te podijelimo stranice domene na m jednakih dijelova. Neka je (x_i, y_j) središte (i, j)-tog kvadratića kojeg smo tako dobili. Tada je $x_i = (i - \frac{1}{2})h$ i $y_j = (j - \frac{1}{2})h$, pri čemu je $h = \frac{1}{m}$. Tada definiramo diskretnu L^2 normu greške $p - p_h$ sa:

$$pErrL2 = \left[\sum_{i,j=1}^{m} h^2 (p(x_i, y_j) - p_h(x_i, y_j))^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Za normu greške $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ uzmemo sljedeće:

$$uErrNml = \left\{ \sum_{\mathbf{d}} \left[\int_{\mathbf{d}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

gdje suma ide po svim bridovima $\mathbf{d}$ triangulacije $\mathcal{T}_h$.

Navesti ćemo nekoliko primjera s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom, pri čemu uzimamo da je točno rješenje zadaće jednako $p = (x^2 - x)(y^2 - y)$. Za svaki ćemo primjer imati drugačije zadanu matricu $\mathcal{A}$ te funkciju α. U tablicama dolje su navedeni podaci dobiveni za triangulacije različite finoće.

Primjer 3.6.1.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 + 10x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 10y^2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 0.$$

n	h	$pErrL2$	*red knv*	$uErrNml$	*red knv*
12	0.1178	$5.64 * 10^{-4}$	–	0.0132	–
24	0.0589	$1.899 * 10^{-4}$	1.57	$3.2177 * 10^{-3}$	2.0364
48	0.0295	$1.343 * 10^{-4}$	0.4997	$7.9241 * 10^{-4}$	2.0217

Primjer 3.6.2.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 + 10x^2 + y^2 & \frac{1}{2} + x^2 + y^2 \\ \frac{1}{2} + x^2 + y^2 & 1 + x^2 + 10y^2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 0$$

n	h	$pErrL2$	*red knv*	$uErrNml$	*red knv*
12	0.1178	$4.7307 * 10^{-4}$	–	0.0130	–
24	0.0589	$1.7331 * 10^{-4}$	1.4487	$3.1312 * 10^{-3}$	2.0537
48	0.0295	$1.3293 * 10^{-4}$	0.3827	$7.8185 * 10^{-4}$	2.0018

Primjer 3.6.3.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 + 10x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 10y^2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 1$$

n	h	$pErrL2$	*red knv*	$uErrNml$	*red knv*
12	0.1178	$5.6013 * 10^{-4}$	–	0.0132	–
24	0.0589	$1.8924 * 10^{-4}$	1.5655	$3.2202 * 10^{-3}$	2.0353
48	0.0295	$1.3425 * 10^{-4}$	0.4953	$7.9261 * 10^{-4}$	2.0225

Navedimo sada još jedan primjer sa homogenim Neumanovim rubnim uvjetom.

Primjer 3.6.4. *Neka je točno rješenje zadaće* $p = \cos(2\pi x)\sin(2\pi x)$, *pri čemu je*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi y) + 2 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) + 2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 1$$

n	h	$pErrL2$	*red knv*	$uErrNml$	*red knv*
12	0.1178	$4.1760 * 10^{-2}$	–	0.8355	–
24	0.0589	$1.0518 * 10^{-2}$	1.9893	0.2100	1.9923
48	0.0295	$2.6306 * 10^{-3}$	1.9994	$5.2581 * 10^{-2}$	1.9978

Dakle, kao što smo vidjeli prilikom teoretskog razmatranja, $L^2(\Omega)$ diskretna norma greške $p - p_h$ ima kvadratičnu konvergenciju. Međutim, zanimljivo je primjetiti da numerički rezultati za diskretnu $(L^2(\Omega))^2$ normu greške $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ sugeriraju kvadratičnu konvergenciju, iako prema ocjeni greške imamo samo konvergenciju prvog reda.

3.6.3 Numerički primjeri za konformni slučaj

Primjetimo da nema smisla zadaću s Neumannovim rubnim uvjetom rješiti konformnom Galerkinovom metodom s korekcijom toka jer u tom slučaju nemamo garanciju da će tok dobiven s (3.11) zadovoljavati Neumannov rubni uvjet. Naime, taj je uvjet zadovoljen samo u slučaju nekonformne Galerkinove metode konačnih elemenata kao što smo vidjeli u Napomeni 3.3.4.

U ovom slučaju rješenje p_h tražimo u prostoru X_h. To znači da će kod u FreeFem++-u biti u svemu isti kao i u nekonformnom slučaju osim što funkcije `ph` i `qh` neće biti iz prostora `(Th,P1nc)` nego iz `(Th,P1)`. Nakon što smo odredili aproksimativni tlak p_h možemo uzeti (3.11) da odredimo $\mathbf{u}_h$. Naravno, tako konstruiran aproksimativni tok možda neće zadovoljavati uvjet neprekidnosti normalne komponente duž bridova triangulacije. Ipak, imamo lokalnu konzervativnost te znamo, prema Napomeni 3.5.6, da vrijede iste ocjene kao i u nekonformnom slučaju.

Norma kojom ćemo mjeriti $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ definira se isto kao u nekonformnom slučaju. Za definiciju diskretne norme $p - p_h$ uzmemo slijedeće:

$$pErrL2 = \left[\sum_{i,j=1}^{m-1} h^2 (p(x_i, y_j) - p_h(x_i, y_j))^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

gdje je m proizvoljan prirodan broj i $x_i = ih,\ y_j = jh,\ h = \frac{1}{m},\ i, j = 1, \ldots, m-1$.

Zadaća u slijedećem primjeru je Dirichletova.

Primjer 3.6.5. *Neka je točno rješenje zadaće* $p = (x^2 - x)(y^2 - y)$, *pri čemu je*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 + 10x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 10y^2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 1$$

n	h	$pErrL2$	*red knv*	$uErrNml$	*red knv*
12	0.1178	$4.9952 * 10^{-4}$	–	0.2632	–
24	0.0589	$1.2510 * 10^{-4}$	1.9975	0.1274	1.046
48	0.0295	$3.1260 * 10^{-5}$	2.0007	0.0624	1.0297

Vidimo da numerički rezultati sugeriraju konvergenciju drugog reda $L^2(\Omega)$ norme za tlak, odnosno prvog reda za tok i tako podupiru teoretske rezultate koje smo dobili prilikom ocjenjivanja greške.

Poglavlje 4

Zaključak

U ovom smo radu za dano rješenje p_h Galerkinove metode konačnih elemenata, koje aproksimira točno rješenje p difuzijsko-reakcijske jednadžbe

$$-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla p) + \alpha p = f$$

na poligonalnoj domeni, konstruirali vektorsku funkciju $\mathbf{u}_h$ koja aproksimira točan tok u. Konstrukciju smo proveli jednostavnom formulom po elementima triangulacije i to tako da bude zadovoljeno svojstvo lokalne konzervativnosti. Nadalje, u slučaju da imamo nekonformnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata, postigli smo da $\mathbf{u}_h$ bude iz Raviart-Thomasovog prostora najnižeg reda na trokutima, dok za konformnu Galerkinovu metodu konačnih elemenata to općenito neće vrijediti. Dakle, na pitanje da li se može pronaći dobra aproksimacija toka u Raviart-Thomasovom prostoru tako da vrijedi svojstvo konzervativnosti na razini elementa, a u isto vrijeme izbjegne rješavanje indefinitnog sustava smo potvrdno odgovorili. Osim toga, pokazali smo kako se aproksimativni tok, u tom slučaju, može efikasno i izračunati.

Bibliografija

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] M. Bukal *Ocjena greške za metodu konačnih volumenih elemenata, Diplomski rad*, Zagreb, 2008.

[3] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, 1991.

[4] Z. Chen, *Finite Element Methods and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.

[5] S.H. Chou, S. Tang, *Conservative P1 conforming and nonconforming Galerkin FEMs: Effective flux evaluation via a nonmixed method approach*, SIAM J. Numer. Anal., 38 (2000), pp. 660-680.

[6] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, SIAM, 2002.

[7] M. Crouzeix, P. A. Raviart *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I, Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationnelle* Sér. Rouge, 7 (1973), pp.33-76

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19*, American Mathematical Society, 1998.

[9] FreeFem++ manual, Version 2.17 - 1.

[10] V. Girault, P. A. Raviart *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Computational Mathematics Series, no. 5*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[11] R. Raviart, J. M. Thomas *A mixed finite element method for second order elliptic problems, Lecture Notes in Mathematics, vol. 606*, Springer, Berlin Heidelberg New York, (1977) pp. 292-315.