SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PMF - MATEMATIČKI ODJEL

Maja Katarina Tomić

RAČUNANJE KOEFICIJENATA U MODELU DVOFAZNOG KOMPRESIBILNOG TOKA KROZ POROZNU SREDINU U FORMULACIJI S GLOBALNIM TLAKOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, lipanj 2010.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Za mog dragog prijatelja Arunu

Sadržaj

Uvod

Koncept poroznog medija je prisutan u područjima primijenjene znanosti i inženjerstva kao što su geologija, mehanika, biologija itd. Problem toka fluida kroz porozni medij je postao predmet velikog interesa zbog njegovih primjena, kao što su gibanje ulja i zraka unutar petrolejskih rezervoara, širenje opasnih kemijskih tvari kroz tlo, filtracijski procesi itd.

U okvirima ovoga rada ograničit ćemo se na proučavanje dvofaznog modela (koncept koji se koristi za ili plinovito ili tekuće agregatno stanje tvari), specifično na vodu i zrak, uz pretpostavku da su oni nemješivi. Nemješivost faza znači da ne postoji transfer mase između njih. Pod pojmom mješivosti podrazumijevamo svojstvo tvari da miješanjem daju homogenu masu; ukoliko su mješive, posebno govorimo o topivosti jedne tekućine u drugoj. Kompresibilnost faze definiramo kao mjeru relativne promjene u volumenu kao rezultat promjene tlaka. Teorija toka kompresibilnih faza se razlikuje od teorije nekompresibilnih faza utoliko da se gustoća faze ne može smatrati konstantom (iako se mogu upotrijebiti određene korekcije u računu).

Svaka faza je određena svojim svojstvima, kao što su zasićenje i relativna permeabilnost. Ta svojstva ulaze u matematički model problema dvofaznog toka kroz porozni medij koji polako razvijamo kako bi došli do modela koji se da implementirati. Općenito, jednadžbe koje opisuju problem dvofaznog toka se ne mogu riješiti analitičkim metodama. Umjesto toga se rade numerički modeli koji se tada rješavaju uz pomoć računala. Nedavni napreci u kompjuterskoj tehnologiji su uvelike proširili potencijale računala koja se bave ovim problemom i omogućili njegovo produbljivanje ubacivanjem dodatnih fizikalnih pojmova u diferencijalne jednadžbe. Jedna od metoda rješavanja problema koja se empirički pokazala učinkovitom po numeričkoj stabilnosti i vremenu izvršavanja je formulacija u formi djelomičnog toka. Takav pristup je nastao u inženjerstvu petroleja i uzima zasićenje jedne od faza te globalni tlak kao zavisne varijable. Multifazni tok je tretiran kao totalan tok jednog, pomiješanog fluida, i tada opisuje individualne faze kao dijelove (frakcije) totalnog toka.

Postoje različite formulacije dvofaznog toka koje su numerički interesantne, između kojih ćemo mi promatrati tri od njih u okvirima ovog rada - model bez globalnog tlaka, pojednostavljeni model u formulaciji sa globalnim tlakom te potpuno ekvivalentni model u formulaciji sa globalnim tlakom. Matematička formulacija ovih modela dana je u poglavlju 2, dok ćemo u poglavlju 3 promatrati različite modele za računanje kapilarnog tlaka i relativnih permeabilnosti, te načine na koje se one izvode. U poglavlju 4 ćemo opisati implementaciju biblioteke funkcija koju smo koristili za račun. Pokazati ćemo kako je moguće koristiti istu biblioteku za različite modele, tako da promjenom parametara koje upotrebljavamo mijenjamo cijelu formulaciju koja tada služi za rad sa određenim modelom.

Poglavlje 1

Dvofazni model nemješivog toka fluida kroz poroznu sredinu

1.1 Opis modela

Porozna sredina ili porozni medij je čvrsta materija koju prožima međusobno povezana mreža pora ili šupljina. Pritom nas zanimaju samo šupljine koje su povezane, jer jedino one dozvoljavaju kretanje fluida kroz porozni medij. Prirodni primjer poroznog medija je tlo, tj. zemlja, dok od ljudski-stvorenih tvari možemo navesti cement ili keramiku. Porozni medij je karakteriziran svojom poroznošću, permeabilnošću i drugim makroskopskim parametrima. Idealizirani model poroznog medija bi bio sustav sastavljen od sfera jednakih dimenzija, grupiranih nasumice. Ako promatramo tlo kao poroznu sredinu, vidimo da njena svojstva uvelike variraju od mjesta do mjesta, zbog veličine i razdiobe šupljina koje ga prožimaju.

Struktura mreže pora je geometrijski vrlo kompleksna, tako da njeno detaljno poznavanje nije moguće. No, takav mikroskopski pogled na unutrašnjost poroznog medija nije ni potreban. Umjesto toga, koristimo makroskopske veličine koje su srednje vrijednosti mikroskopskih veličina po tzv. reprezentativnom elementarnom volumenu.

Nas će zanimati porozni medij kroz koji struje dva fluida, jedan u tekućem stanju a drugi u plinovitom. Odmah na početku razmatranja pretpostavimo da se oni nemješivi, tj. da ne postoji transfer mase između njih. Pri tome je važno da između njih, na mikroskopskoj razini određenoj dimenzijom pora, postoji dobro definirana granica koja ih separira. Oblik te granice određen je Laplace-ovim zakonom prema kojem tlak fluida pri prijelazu iz jednog fluida u drugi doživljava skok koji je proporcionalan zakrivljenosti granice separacije. Slijedeće važno svojstvo fluida je njihov afinitet prema stijenci u odnosu na koji razlikujemo vlažeći i nevlažeći fluid. Vlažeći fluid uvijek više vlaži stijenku i u njemu je tlak manji nego u nevlažećem. U sustavu u kojem je jedan fluid trajno u plinovitom a drugi u tekućem stanju obično je tekući fluid vlažeći a plinoviti nevlažeći, premda to ne mora vrijediti za sve parove fluida. Vlažeći fluid ćemo označiti s indeksom w a nevlažeći s indeksom n. Nadalje ćemo različite fluide u poroznoj sredini nazivati fazama. Kako imamo dva fluida, naš tok je dvofazni. Budući da između faza (fluida) nema izmjene mase, tok je **nemješiv**.

Definirajmo najprije makroskopska svojstva koja opisuju porozni medij.

Poroznost poroznog medija (u oznaci Φ) definiramo kao omjer između ukupnog volumena šupljina, ne uzimajući u obzir izolirane šupljine (u oznaci V_p) i odabranog volumena poroznog medija, koji uključuje i šupljine i kruti dio (u oznaci V):

$$\Phi = \frac{V_p}{V}.$$

Ako gledamo reprezentativni elementarni volumen kao sferu oko točke x radijusa ε, ukupni volumen možemo izraziti kao $V(x) = K(x, \varepsilon)$, pa za poroznost imamo:

$$\Phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_p(x)}{V(x)}.$$

Očito vrijedi $0 \leq \Phi(x) < 1$. **Permeabilnost** (propusnost) je mjera sposobnosti poroznog medija da propušta fluide. **Apsolutna permeabilnost**, koju ćemo označavati sa $\mathbb{K}$, i koja je općenito simetrična matrica, je karakteristika samog poroznog medija koja nam govori koliko taj medij dopušta gibanje fluidu. Te se veličine javljaju u Darcy-evom zakonu koji veže brzinu fluida i gradijent tlaka. Svaka se faza, zbog prisutnosti druge, giba sporije, pa ćemo zbog toga kasnije uvesti i relativne propusnosti.

Zasićenje poroznog medija nekom fazom α ($\alpha = w, n$) definiramo kao frakciju poroznog prostora koja je ispunjena tom fazom, ili omjer između ukupnog volumena svih šupljina poroznog medija i volumena kojeg faza α zauzima:

$$S_\alpha = \frac{V_{p,\alpha}}{V_p},$$

gdje je $V_{p,\alpha}$ dio pornog prostora koji je ispunjen fazom α, a V_p ukupni porni prostor. Činjenica da imamo dvije faze u poroznom mediju koji ispunjavaju šupljine u potpunosti povlači relaciju

$$S_w + S_n = 1.$$

Nadalje, definirajmo pojam **Darcy-eve brzine**. Darcy-eva brzina $\mathbf{V}_\alpha$, za fazu $\alpha \in \{w, n\}$, je definirana kao volumen faze koji proteče kroz jediničnu površinu porozne sredine u jedinici vremena. Darcy-ev zakon, dan formulama (1.2) i (1.3), daje vezu između gradijenta tlaka i Darcy-eve brzine:

$$\mathbf{V}_w = \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w}\mathbb{K}(\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g})$$
$$\mathbf{V}_n = \frac{k_{rn}(S_n)}{\mu_n}\mathbb{K}(\nabla p_n - \rho_n \mathbf{g}).$$

Tu smo sa μ_α označili **dinamičku viskoznost** faze α, sa **g vektor ubrzanja sile teže**, te sa $k_{r\alpha}$ relativnu permeabilnost. **Relativna permeabilnost** $k_{r\alpha}$ je bezdimenzionalna mjera propusnosti medija za fazu α i za nju vrijedi $0 \leq k_{r\alpha} \leq 1$. Suma relativnih permeabilnosti prisutnih faza je uvijek manja ili jednaka 1. Ako je $\mathbf{V}_\alpha$ Darcy-eva brzina, onda je $\mathbf{V}_\alpha \mathbf{n} dS$ volumen faze α koji u jedinici vremena prođe kroz element plohe dS orijentiran jediničnom normalom **n**. Stoga je Darcy-eva brzina makroskopska veličina koja ne daje stvarnu brzinu gibanja fluida u porama jer element plohe dS u gornjem opisu zahvaća i porni prostor i krutu matricu. Stvarna makroskopska brzina fluida je jednaka $\frac{\mathbf{V}_\alpha}{\Phi}$.

Primijenjujući zakon sačuvanja mase na svaku pojedinu fazu, dobivamo:

$$\Phi \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w S_w) = -\operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \mathcal{F}_w$$
$$\Phi \frac{\partial}{\partial t}(\rho_n S_n) = -\operatorname{div}(\rho_n \mathbf{V}_n) + \mathcal{F}_n$$

gdje su $\mathcal{F}_w, \mathcal{F}_n$ izvori ili ponori mase.

Nadalje definiramo pojam **kapilarnog tlaka**. Zbog zakrivljenosti i površinske tenzije granice između dviju faza, tlak vlažeće (tekuće) faze je manji od tlaka nevlažeće (plinovite) faze. Zbog površinske napetosti, granica separacije dviju različitih faza je zakrivljena pa tlak trpi skok pri prijelazu iz jedne u drugu fazu. Ovu razliku tlakova zovemo kapilarni tlak:

$$p_c(S_w) = p_n - p_w,$$

gdje smo uvažili da je kapilarni tlak p_c funkcija zasićenja S_w. Vrijedi $p_c(S_w) \geq 0$, za sve S_w; pri tome je funkcija kapilarnog tlaka strogo padajuća te najčešće ima nultočku za $S_w = 1$.

Naša su razmatranja rezultirala slijedećim jednadžbama:

$$S_w + S_n = 1 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{V}_w = \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w}\mathbb{K}(\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g}) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{V}_n = \frac{k_{rn}(S_n)}{\mu_n}\mathbb{K}(\nabla p_n - \rho_n \mathbf{g}) \tag{1.3}$$

$$\Phi\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w S_w) = -\operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \mathcal{F}_w \tag{1.4}$$

$$\Phi\frac{\partial}{\partial t}(\rho_n S_n) = -\operatorname{div}(\rho_n \mathbf{V}_n) + \mathcal{F}_n \tag{1.5}$$

$$p_c(S_w) = p_n - p_w. \tag{1.6}$$

Kao nepoznanice u ovih šest jednadžbi imamo S_w, S_n, p_w, p_n, $\mathbf{V}_w$ i $\mathbf{V}_n$. Za nezavisne nepoznanice odaberimo S_w i p_n i sustav od šest jednadžbi svest ćemo na dvije diferencijalne jednadžbe eliminacijom ostalih varijabli. Iz (1.1) možemo izraziti S_n preko S_w, a iz (1.6) p_w preko S_w i p_n. Pretpostavke koje ćemo uzeti su slijedeće. Poroznost i permeabilnost uzimamo kao funkcije prostora (tako je apsolutna permeabilnost simetrična, 3×3 matrica), dok su viskoznosti konstantne. Također pretpostavljamo da kapilarni tlak i relativne permeabilnosti ovise samo o zasićenju. Gustoća svake faze je funkcija faznog tlaka, tj. vrijedi

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha). \tag{1.7}$$

1.2 Formulacija u formi djelomičnog toka

Započnimo razmatranje uvođenjem funkcija mobilnosti faza i funkcije totalne mobilnosti:

$$\lambda_\alpha(S_w) = \frac{k_{r\alpha}(S_w)}{\mu_\alpha} \tag{1.8}$$

$$\lambda(S_w, p_n) = \rho_w(p_w)\lambda_w(S_w) + \rho_n(p_n)\lambda_n(S_w). \tag{1.9}$$

Sada možemo uvesti funkcije djelomičnog toka:

$$f_\alpha(S_w, p_n) = \frac{\rho_\alpha(p_\alpha)\lambda_\alpha(S_w)}{\lambda(S_w, p_n)}, \quad za\ \alpha = w, n. \tag{1.10}$$

Kako bi pojednostavili duge izraze i učinili ih čitljivijima uvodimo neke oznake.

$$\rho(S_w, p_n) = \frac{\lambda_w(S_w)\rho_w(p_w)^2 + \lambda_n(S_w)\rho_n(p_n)^2}{\lambda(S_w, p_n)} \tag{1.11}$$

$$\alpha(S_w, p_n) = \frac{\rho_w(p_w)\rho_n(p_n)\lambda_w(S_w)\lambda_n(S_w)}{\lambda(S_w, p_n)} \tag{1.12}$$

$$b(S_w, p_n) = (\rho_w(p_w) - \rho_n(p_n))\alpha(S_w, p_n), \tag{1.13}$$

$$a(S_w, p_n) = -\alpha(S_w, p_n)p'(c)(S_w). \tag{1.14}$$

Nadalje, definirajmo protok faza i totalan protok u našem sustavu:

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_w + \mathbf{Q}_n \tag{1.15}$$

$$\mathbf{Q}_w = \rho_w \mathbf{V}_w \tag{1.16}$$

$$\mathbf{Q}_n = \rho_n \mathbf{V}_n. \tag{1.17}$$

Sada iz (1.4), (1.5) i (1.2), (1.3) sumiranjem imamo:

$$\begin{aligned} &\Phi\frac{\partial}{\partial t}(S_w\rho_w(p_w) + (1 - S_w)\rho_n(p_n)) - \\ &\quad - \operatorname{div}(\lambda(S_w, p_n))\mathbb{K}(\nabla p_n - f_w(S_w, p_n)\nabla p_c(S_w) - \rho(S_w, p_n)\mathbf{g}) = \mathcal{F}_w + \mathcal{F}_n, \end{aligned} \tag{1.18}$$

dok jednadžba totalne brzine postaje:

$$\mathbf{Q}_t = -\lambda(S_w, p_n)\mathbb{K}(\nabla p_n - f_w(S_w, p_n)\nabla p_c(S_w) - \rho(S_w, p_n)\mathbf{g}). \tag{1.19}$$

Izražena pomoću uvedenih oznaka a, b i totalne brzine, jednadžba (1.4) postaje:

$$\Phi\frac{\partial}{\partial t}(S_w\rho_w(p_w)) + \operatorname{div}(f_w(S_w, p_n)\mathbf{Q}_t + b(S_w, p_n)\mathbb{K}\mathbf{g}) - \operatorname{div}(a(S_w, p_n)\mathbb{K}\nabla S_w) = \mathcal{F}_w. \tag{1.20}$$

Jednadžba (1.20) je nelinearna jednadžba tipa konvekcije-difuzije za S_w, dok tip jednadžbe (1.18) nije nedvosmisleno određen. Stoga moramo izvršiti daljnju transformaciju sustava, kako bismo sustav doveli do oblika koji ima jasnu matematičku strukturu.

Fazni tokovi $\mathbf{Q}_w$ i $\mathbf{Q}_n$ mogu se izraziti preko totalnog protoka $\mathbf{Q}_t$ na slijedeći način:

$$\mathbf{Q}_w = f_w(S_w, p_n)\mathbf{Q}_t - a(S_w, p_n)\mathbb{K}\nabla S_w + b(S_w, p_n)\mathbb{K}\mathbf{g} \tag{1.21}$$

$$\mathbf{Q}_n = f_n(S_w, p_n)\mathbf{Q}_t + a(S_w, p_n)\mathbb{K}\nabla S_w - b(S_w, p_n)\mathbb{K}\mathbf{g}. \tag{1.22}$$

Sada imamo kao novi sustav jednadžbi sustav (1.18)-(1.20). On je potpuno ekvivalentan sustavu (1.1)-(1.6). Kao nezavisne varijable imamo S_w i p_n, dok se ostale varijable, tj. S_n, p_w, $\mathbf{Q}_w$ i $\mathbf{Q}_n$ izražavaju pomoću S_w i p_n.

Poglavlje 2

Uvođenje globalnog tlaka

Jednadžbe (1.18) i (1.20) su jako vezane kroz gradijent kapilarnog tlaka, ∇p_c. Kako bi smanjili ovu ovisnost, uvesti ćemo novu varijablu, tzv. globalni tlak, koja će eliminirati ∇p_c iz (1.18) i (1.19). Istražiti ćemo dva načina uvođenja globalnog tlaka - potpuno ekvivalentni i aproksimativni.

2.1 Potpuno ekvivalentna formulacija

Želimo eliminirati $\nabla p_c(S_w)$ iz (1.19); u tu svrhu uvodimo novu varijablu p i nepoznatu funkciju ω, takve da vrijedi:

$$\nabla p_n - f_w(S_w, p_n)p_c'(S_w)\nabla S_w = \omega(S_w, p)\nabla p. \tag{2.1}$$

Trebamo odrediti funkciju ω koju smo uveli i utvrditi vezu nove varijable p sa S_w i p_n. Iz tog razloga pretpostavimo da postoje funkcije koje opisuju vezu između p_w i p te p_n i p oblika:

$$p_w = p_w(S_w, p) \tag{2.2}$$
$$p_n = p_n(S_w, p). \tag{2.3}$$

Budući da vrijedi

$$\nabla p_n = \frac{\partial p_n}{\partial S_w}(S_w, p)\nabla S_w + \frac{\partial p_n}{\partial p}(S_w, p)\nabla p$$
$$\nabla p_w = \frac{\partial p_w}{\partial S_w}(S_w, p)\nabla S_w + \frac{\partial p_w}{\partial p}(S_w, p)\nabla p,$$

iz (2.1) za $p_n(S_w, p)$ imamo:

$$\frac{\partial p_n}{\partial S_w}(S_w, p)\nabla S_w + \frac{\partial p_n}{\partial p}(S_w, p)\nabla p = \omega(S_w, p)\nabla p + f_w(S_w, p_n(S_w, p))p_c'(S_w)\nabla S_w, \tag{2.4}$$

a odavde po varijablama p i S_w imamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_n}{\partial S_w}(S_w, p) = f_w(S_w, p_n(S_w, p))p_c'(S_w) \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial p}(S_w, p) = \omega(S_w, p). \end{cases} \tag{2.5}$$

S druge strane, znamo da je $p_w(S_w, p) = p_n(S_w, p) - p_c(S_w)$, te je stoga

$$\begin{aligned} \nabla p_w(S_w, p) &= \nabla p_n(S_w, p) - p_c'(S_w)\nabla S_w \\ &= \left(\frac{\partial p_n}{\partial S_w}(S_w, p) - p_c'(S_w)\right)\nabla S_w + \frac{\partial p_n}{\partial p}(S_w, p)\nabla p. \end{aligned}$$

I sada vidimo, koristeći $f_w + f_n = 1$, da funkcija p_w zadovoljava:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_w}{\partial S_w}(S_w, p) = \frac{\partial p_n}{\partial S_w}(S_w, p) - p_c'(S_w) = \\ &= f_w(S_w, p_n)p_c'(S_w) - p_c'(S_w) = -f_n(S_w, p_n)p_c'(S_w). \end{aligned}$$

Odavde imamo za $p_w(S_w, p)$ po varijablama p i S_w:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_w}{\partial S_w}(S_w, p) = -f_n(S_w, p_n)p_c'(S_w) \\ \dfrac{\partial p_w}{\partial p}(S_w, p) = \omega(S_w, p). \end{cases} \tag{2.6}$$

Ako integriramo prvu jednadžbu iz (2.5), imamo:

$$p_n(S_w, p) = p + \int_1^{S_w} f_w(s, p_n(s, p))p_c'(s)\, ds, \tag{2.7}$$

gdje smo stavili $p_n(1, p) = p$. Budući da je $p_c'(S_w) < 0$, za sve S_w, i $0 \leq f_w(S_w, p_n) \leq 1$, imamo ocjenu:

$$\begin{aligned}
p \leq p_n(S_w, p) &= p + \int_{S_w}^{1} f_w(s, p_n(s,p))|p_c'(s)|\,ds \\
&\leq p + \int_{S_w}^{1} |p_c'(s)|\,ds \\
&= p - \int_{S_w}^{1} p_c'(s)\,ds \\
&= p - (p_c(1) - p_c(S_w)) \\
&= p + p_c(S_w).
\end{aligned}$$

Stoga izlazi:

$$p \leq p_n(S_w, p) \leq p + p_c(S_w),$$

i za našu novu varijablu p vrijedi $p_w \leq p \leq p_n$. Varijabla p predstavlja određeni srednji tlak i naziva se **globalni tlak**. Sada možemo (2.7) napisati kao Cauchyevu zadaću:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(S,p)}{dS} = \dfrac{\rho_w(p_w(S,p))\lambda_w(S)p_c'(S)}{\rho_w(p_w(S,p))\lambda_w(S) + \rho_n(p_n(S,p))\lambda_n(S)}, \quad S < 1 \\ p_n(1,p) = p. \end{cases} \tag{2.8}$$

Cauchy-evu zadaću (2.8) bilo bi jednostavnije riješiti kada bi imali kapilarni tlak $p_c(S_w)$ kao nezavisnu varijablu. Znamo da za p_c postoji jedinstveni inverz, pa možemo uvesti oznaku $u = p_c(S_w)$. Sada svaku funkciju koja je u ovisnosti o zasićenju S_w možemo zamijeniti funkcijom koja je u ovisnosti o kapilarnom tlaku, tj. $S_w(u)$. Dakle, $p_n(S_w, p) = \hat{p}_n(u, p)$ i naša Cauchy-eva zadaća (2.8) sada izgleda ovako:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{p}_n(u,p)}{du} = \dfrac{\rho_w(\hat{p}_w(u,p))\hat{\lambda}_w(u)}{\rho_w(\hat{p}_w(u,p))\hat{\lambda}_w(u) + \rho_n(\hat{p}_n(u,p))\hat{\lambda}_n(u)}, \quad u > 0 \\ \hat{p}_n(0,p) = p. \end{cases} \tag{2.9}$$

Rješenje (2.8) je dano sa:

$$p_n(S_w, p) = \hat{p}_n(p_c(S_w), p).$$

Sve funkcije koje ovise o faznim tlakovima, zamjenom varijabli $p_n = p_n(S_w, p)$ i $p_w = p_w(S_w, p) = p_n(S_w, p) - p_c(S_w)$, postaju ovisne o S_w i p:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\rho}_w(S_w, p) = \rho_w(p_w(S_w, p)), \quad \tilde{\rho}_n(S_w, p) = \rho_n(p_n(S_w, p)) \\
&\tilde{\lambda}(S_w, p) = \tilde{\rho}_w(S_w, p)\lambda_w(S_w) + \tilde{\rho}_n(S_w, p)\lambda_n(S_w) \\
&\tilde{f}_w(S_w, p) = \frac{\tilde{\rho}_w(S_w, p)\lambda_w(S_w)}{\tilde{\lambda}(S_w, p)}, \quad \tilde{f}_n(S_w, p) = \frac{\tilde{\rho}_n(S_w, p)\lambda_n(S_w)}{\tilde{\lambda}(S_w, p)} \\
&\tilde{\rho}(S_w, p) = \rho(S_w, p_n(S_w, p)) \\
&\tilde{\alpha}(S_w, p) = \alpha(S_w, p_n(S_w, p)) \\
&\tilde{b}(S_w, p) = b(S_w, p_n(S_w, p)) \\
&\tilde{a}(S_w, p) = a(S_w, p_n(S_w, p)).
\end{aligned}
$$

Da bismo pojednostavili račun označimo $S_w = S$. Iz (2.5) imamo:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p_n}{\partial p}(S, p) = \omega(S, p) \\
\dfrac{\partial p_n}{\partial S}(S, p) = f_w(S, p_n(S, p))p_c'(S_w).
\end{cases}
$$

A odavde:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial p_n}{\partial p}\right)(S, p) &= \frac{\partial}{\partial p}\Big(f_w(S, p_n(S, p))\Big)p_c'(S) \\
&= \frac{\partial f_w}{\partial p_n}\Big(S, p_n(S, p)\Big)\frac{\partial p_n}{\partial p}p_c'(S) \\
&= \frac{\partial f_w}{\partial p_n}\Big(S, p_n(S, p)\Big)p_c'(S)\omega(S, p).
\end{aligned}
$$

Stoga je

$$
\frac{\partial \omega}{\partial S}(S, p) = \frac{\partial f_w}{\partial p_n}\Big(S, p_n(S, p)\Big)p_c'(S)\omega(S, p). \tag{2.10}
$$

Ovo je linearna diferencijalna jednadžba po ω (p je parametar). Iz $p_n(1, p) = p$ izlazi da je za ω dobar početni uvjet $\omega(1, p) = 1$. Stoga integriranjem (2.10) dobivamo:

$$
\omega(S, p) = exp\left(-\int_S^1 \frac{\partial f_w}{\partial p_n}(s, p_n(s, p))p_c'(s)\, ds\right). \tag{2.11}
$$

Raspišimo izraz pod integralom u (2.11). Uvođenjem oznaka za **kompresibilnost** faza, $\tilde{\nu}_w(S,p)$ i $\tilde{\nu}_n(S,p)$:

$$\tilde{\nu}_w(S,p) = \frac{\rho'_w(p_w(S,p))}{\rho_w(p_w(S,p))}, \quad \tilde{\nu}_n(S,p) = \frac{\rho'_n(p_n(S,p))}{\rho_n(p_n(S,p))}, \tag{2.12}$$

dobivamo

$$\omega(S_w,p) = exp\left(\int_{S_w}^{1} (\tilde{\nu}_n(s,p) - \tilde{\nu}_w(s,p))\frac{\tilde{\rho}_w(s,p)\tilde{\rho}_n(s,p)\lambda_w(s)\lambda_n(s)p'_c(s)}{[\tilde{\rho}_w(s,p)\lambda_w(s) + \tilde{\rho}_n(s,p)\lambda_n(s)]^2}\, ds\right). \tag{2.13}$$

Za dobru definiranost važno je da je ω strogo pozitivna funkcija, što je ovdje evidentno ispunjeno. Ako zamijenimo p_n sa $p_n(S_w,p)$ u (1.18), (1.19) i (1.20), uz pomoć (2.1) imamo novi, poboljšan sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}\Phi\frac{\partial}{\partial t}(S_w\tilde{\rho}_w(S_w,p) + (1-S_w)\tilde{\rho}_n(S_w,p)) -& \\ -\operatorname{div}(\tilde{\lambda}(S_w,p)\mathbb{K}(\omega(S_w,p)\nabla p - \tilde{\rho}(S_w,p)\mathbf{g})) &= \mathcal{F}_w + \mathcal{F}_n\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{Q}_t = -\tilde{\lambda}(S_w,p)\mathbb{K}(\omega(S_w,p)\nabla p - \tilde{\rho}(S_w,p)\mathbf{g}) \tag{2.15}$$

$$\Phi\frac{\partial}{\partial t}(S_w\tilde{\rho}_w(S_w,p)) + \operatorname{div}(\tilde{f}_w(S_w,p)\mathbf{Q}_t + \tilde{b}(S_w,p)\mathbb{K}\mathbf{g}) = \operatorname{div}(\tilde{a}(S_w,p)\mathbb{K}\nabla S_w) + \mathcal{F}_w. \tag{2.16}$$

Sustav jednadžbi (2.14)-(2.16) je izražen pomoću S_w i p, a fazni tlakovi se dobivaju pomoću funkcija $p_n = p_n(S_w,p)$ i $p_w = p_n(S_w,p) - p_c(S_w)$. Sustav (2.14)-(2.16) ekvivalentan je sa (1.18)-(1.20), koji je opet ekvivalentan sa (1.1)-(1.6).

2.2 Pojednostavljena formulacija

Razmotrimo sada drugi pristup formulaciji dvofaznog toka, u kojem ćemo uvesti globalni tlak uz pomoć aproksimacije. Pokazat će se da ovakav pristup ne podrazumijeva rješavanje Cauchy-evih zadaća za određivanje funkcija p_n i p_w.

Dakle, pretpostavimo da se p_w može zamijeniti sa globalnim tlakom p u jednadžbi (2.1):

$$\nabla p_n - f_w(S_w,p)p'_c(S_w)\nabla S_w = \omega(S_w,p)\nabla p. \tag{2.17}$$

Kao i ranije, iz $p_n = p_n(S_w,p)$ dobivamo:

$$\frac{\partial p_n}{\partial S_w} = f_w(S_w, p)p_c'(S_w) \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial p} = \omega(S_w, p) \tag{2.19}$$

Uočimo da se (2.18) sada može riješiti integriranjem, uz uvjet $p_n(1, p) = p$, što daje

$$p_n(S_w, p) = p + \int_1^{S_w} f_w(s, p))p_c'(s)\, ds. \tag{2.20}$$

Nadalje, ω možemo izračunati direktno iz (2.18):

$$\omega(S_w, p) = 1 - \int_{S_w}^1 \frac{\partial f_w}{\partial p}(s, p)p_c'(s)\, ds. \tag{2.21}$$

U (2.17) iskoristimo pretpostavku da je $\rho_w(p_w) \sim \rho_w(p)$ i $\rho_n(p_n) \sim \rho_n(p)$. Sada ćemo tu pretpostavku sustavno primijeniti u jednadžbama (1.18)-(1.20), što nas vodi do sustava:

$$\begin{aligned} &\Phi\frac{\partial}{\partial t}(S_w\rho_w(p) + (1 - S_w)\rho_n(p)) - \\ &\quad - \operatorname{div}(\lambda(S_w, p))\mathbb{K}(\omega(S_w, p)\nabla p - \rho(S_w, p)\mathbf{g}) = \mathcal{F}_w + \mathcal{F}_n \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{Q}_t = -\lambda(S_w, p)\mathbb{K}(\omega(S_w, p)\nabla p - \rho(S_w, p)\mathbf{g}) \tag{2.23}$$

$$\Phi\frac{\partial}{\partial t}(S_w\rho_w(p)) + \operatorname{div}(f_w(S_w, p)\mathbf{Q}_t + b(S_w, p)\mathbb{K}\mathbf{g}) - \operatorname{div}(a(S_w, p)\mathbb{K}\nabla S_w) = \mathcal{F}_w. \tag{2.24}$$

Koeficijenti koji ulaze u sustav, osim ω, se ne mijenjaju, i dani su u (2.25)-(2.31):

$$\rho_w(S_w, p) = \frac{(\lambda_w(S_w)\rho(p)^2 + \lambda_n(S_w)\rho_n(p)^2)}{\lambda(S_w, p)} \tag{2.25}$$

$$\lambda(S_w, p) = \rho_w(p)\lambda_w(S_w) + \rho_n(p)\lambda_n(S_w) \tag{2.26}$$

$$f_\alpha(S_w, p) = \frac{\rho_\alpha(p)\lambda_\alpha(S_w)}{\lambda(S_w, p)}, \quad \alpha = w, n \tag{2.27}$$

$$\alpha(S_w, p) = \frac{\rho_w(p)\rho_n(p)\lambda_w(S_w)\lambda_n(S_w)}{\lambda(S_w, p)} \tag{2.28}$$

$$b(S_w, p) = (\rho_w(p) - \rho_n(p))\alpha(S_w, p) \tag{2.29}$$

$$a(S_w, p) = -\alpha(S_w, p)p_c'(S_w) \tag{2.30}$$

$$\omega(S_w, p) = 1 - \int_{S_w}^1 \frac{\partial f_w}{\partial p}(s, p)p_c'(s)\, ds. \tag{2.31}$$

Sustav (2.22)-(2.24) je dobro definiran ukoliko je $\omega > 0$. Imamo:

$$\omega(S_w, p) = 1 - \int_{S_w}^{1} \frac{\partial f_w}{\partial p}(s, p) p_c'(s)\, ds \tag{2.32}$$

Uz oznake:

$$M(p) = \frac{\rho_n(p)}{\rho_w(p)}, \quad M'(p) = M(p)\left(\frac{\rho_n'(p)}{\rho_n(p)} - \frac{\rho_w'(p)}{\rho_w(p)}\right) \tag{2.33}$$

ω možemo zapisati u obliku:

$$\omega(S_w, p) = 1 - \int_0^{p_c(S_w)} \frac{\hat{\lambda}_w(u)\hat{\lambda}_n(u)}{(\hat{\lambda}_w(u) + M(p)\hat{\lambda}_n(u))^2}\, du M'(p). \tag{2.34}$$

Uvjet $\omega > 0$ može biti neostvaren ako je kompresibilnost vlažeće faze $\frac{\rho_w'(p)}{\rho_w(p)}$ manja od kompresibilnosti nevlažeće faze $\frac{\rho_n'(p)}{\rho_n(p)}$. Tada na p stavljamo uvjet:

$$\int_0^{\infty} \frac{\hat{\lambda}_w(u)\hat{\lambda}_n(u)}{(\hat{\lambda}_w(u) + M(p)\hat{\lambda}_n(u))^2}\, du\, M'(p) < 1 \tag{2.35}$$

Budući da sustav (2.22)-(2.24) nije dobro postavljen ukoliko je $\omega \leq 0$, što je moguće za dovoljno male globalne tlakove, modificrati ćemo ω tako što ćemo jednadžbu (2.31) zamijeniti sa (2.13) u kojoj ćemo $\rho_w(p_w)$ zamijeniti sa $\rho_w(p)$ i $\rho_n(p_n)$ sa $\rho_n(p)$. Time dobivamo novi izraz za ω:

$$\omega(S_w, p) = exp\left(-\int_0^{p_c(S_w)} \frac{\hat{\lambda}_w(u)\hat{\lambda}_n(u)}{(\hat{\lambda}_w(u) + M(p)\hat{\lambda}_n(u))^2}\, du\, M'(p)\right). \tag{2.36}$$

Novi ω je uvijek strogo pozitivan.

Prednost pojednostavljene formulacije je da ne uključuje rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi, kao što je to bio slučaj u potpuno ekvivalentnoj formulaciji. Umjesto toga, koristi se (2.20), te $\rho_w(p_w)$ $\rho_w(p)$ i $\rho_n(p_n)$ $\rho_n(p)$.

Poglavlje 3

Primjeri kapilarnih tlakova i relativnih propusnosti

U ovom poglavlju ćemo navesti nekoliko modela za određivanje kapilarnog tlaka i relativnih permeabilnosti. Svaki model koristi nekoliko parametara koji omogućuju usklađivanje analitičkog modela i izmjerenih podataka, uglavnom metodom najmanjih kvadrata. Najprije moramo uvesti nekoliko novih oznaka i pojmova.

U dvofaznom toku, funkcija relativne permeabilnosti vlažeće faze $k_{rw}(S_w)$ je strogo rastuća funkcija. No za interval $(0, S_{wr})$, za neku vrijednost S_{wr}, vrijednost te funkcije je nula. Vrijednost S_{wr} nazivamo **rezidualno zasićenje vlažeće faze**. Jednako tako, funkcija relativne permeabilnosti nevlažeće faze $k_{rn}(S_n)$ je strogo padajuća funkcija čija je vrijednost također nula na intervalu $(1 - S_{nr}, 1)$. Vrijednost S_{nr} nazivamo **rezidualno zasićenje nevlažeće faze**.

Nadalje definiramo pojam **efektivnog zasićenja vlažeće faze**, u oznaci S_{ew}, na slijedeći način:

$$S_{ew} = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{nr}}, \quad S_{ew} \in [0, 1] \tag{3.1}$$

Kapilarni tlak se uglavnom promatra kao funkciju ovisnu o S_{ew}.

3.1 Modeli kapilarnog tlaka

Funkcija kapilarnog tlaka je strogo padajuća funkcija s vertikalom asimptotom u $S_{ew} = 0$, dok za $S_{ew} = 1$ ona ima konačnu vrijednost, kao što će se vidjeti na grafovima modela koje ćemo opisati. Opišimo sada prvi model kapilarni tlak-zasićenje, **van Genuchten-ovu** funkciju. Ona je definirana na slijedeći način:

$$S_{ew} = \left(1 + (\alpha p_c(S_{ew}))^n\right)^{-m}, \tag{3.2}$$

gdje su α, n i m parametri, dok za m pretpostavljamo da je $m = 1 - \frac{1}{n}$. Odavde dobivamo funkciju kapilarnog tlaka:

$$p_c(S_{ew}) = \frac{1}{\alpha}\left(S_{ew}^{-\frac{1}{m}} - 1\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.3}$$

Derivacija van Genuchten-ve funkcije je dana sa:

$$p_c'(S_{ew}) = -\frac{1}{\alpha m n}\left(S_{ew}^{-\frac{1}{m}} - 1\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(S_{ew}^{-\frac{1}{m}-1}\right),$$

za koju vrijedi $p_c'(0) = -\infty$ i $p_c'(1) = -\infty$. Drugi model koji ćemo navesti je **Brooks-Coreyev model**. On je baziran na ideji da je $\log(S_{ew})$ u linearnom odnosu prema $\log(p_c(S_{ew}))$. Tako je efektivno zasićenje vlažeće faze dano sa:

$$\begin{cases} S_{ew} = \left(\dfrac{p_r}{p_c(S_{ew})}\right)^{\lambda}, & p_c(S_{ew}) > p_r \\ S_{ew} = 1, & p_c(S_{ew}) \leq p_r, \end{cases} \tag{3.4}$$

gdje su p_r (potencijal ulaska zraka u medij) i λ (indeks distribucije veličine pora) parametri, a funkcija kapilarnog tlaka je dana sa:

$$p_c(S_{ew}) = p_r\, S_{ew}^{-\frac{1}{\lambda}}. \tag{3.5}$$

Derivacija Brooks-Coreyeve funkcije je dana sa:

$$p_c'(S_{ew}) = -\frac{p_r}{\lambda} S_{ew}^{-\frac{1}{\lambda}-1},$$

za koju imamo da je $p_c'(0) = -\infty$, dok je $p_c'(1) \neq 0$. Treći model, **lognormalni** model, polazi od pretpostavke da porozni medij možemo reprezentirati pomoću lognormalne distribucije po veličini pora (tj. radijusu). U ovom modelu, funkcija efektivnog zasićenja S_{ew} je dana sa:

$$S_{ew} = F_n\left(\frac{\ln p_r - \ln p_c(S_{ew})}{\sigma}\right), \tag{3.6}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi,$$

gdje su p_r i σ parametri, bazirani na geometrijskoj sredini i varijanci distribucije po veličine pora, a F_n je funkcija normalne distribucije. Funkcija kapilarnog tlaka za ovaj model je dana sa:

$$p_c(S_{ew}) = p_r\, exp(- \sigma {F_n}^{-1}(S_{ew})). \tag{3.7}$$

Derivacija je dana sa:

$$p_c'(S_{ew}) = -\sigma \sqrt{2\pi}\ \frac{p_c(S_{ew})}{exp(-\frac{p_c^2(S_{ew})}{2})},$$

za koju vrijedi $p_c'(0) = -\infty$ i $p_c'(1) = 0$. Četvrti model, **Brutsaertov** model, je oblika:

$$S_{ew} = \frac{\beta}{\beta + {p_c}^{\gamma}(S_{ew})}, \tag{3.8}$$

gdje su β i γ parametri. Odavde je funkcija kapilarnog tlaka dana sa:

$$p_c(S_{ew}) = \left[\beta\left(\frac{1}{S_{ew}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{3.9}$$

Njena je derivacija dana sa:

$$p_c'(S_{ew}) = \frac{1}{\gamma}\left[\beta\left(\frac{1}{S_{ew}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}-1}\left[- \frac{\beta}{S_{ew}^2}\right],$$

za koju vrijedi $p_c'(0) = -\infty$ i $p_c'(1) \neq 0$. Zadnji model, **Gardnerov** model, koji ne daje eksplicitni izraz za p_c, dan je s izrazom:

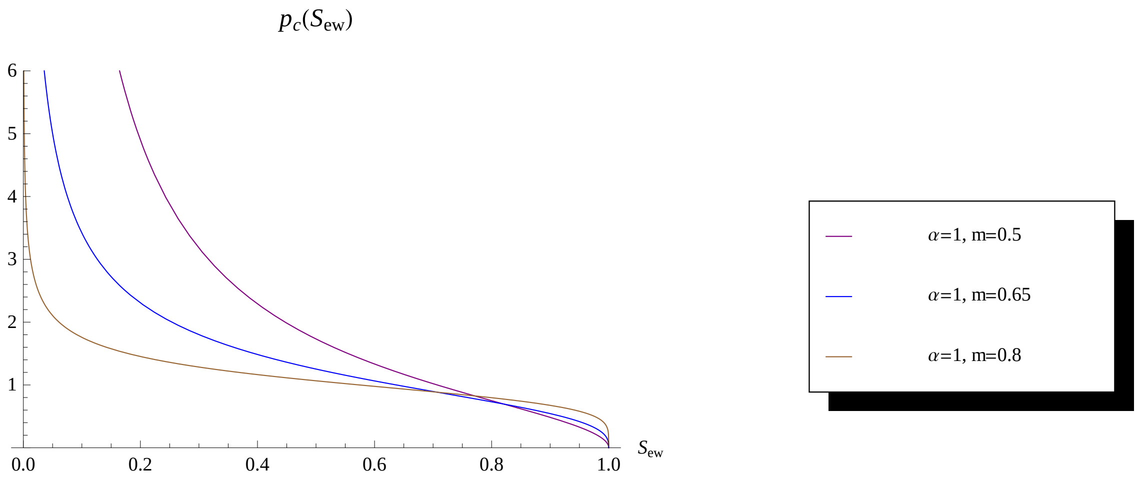
$$S_{ew} = (1 + \frac{1}{2}\alpha p_c(S_{ew}))e^{-\frac{1}{2}\alpha p_c(S_{ew})}, \tag{3.10}$$

dok je njegova derivacija:

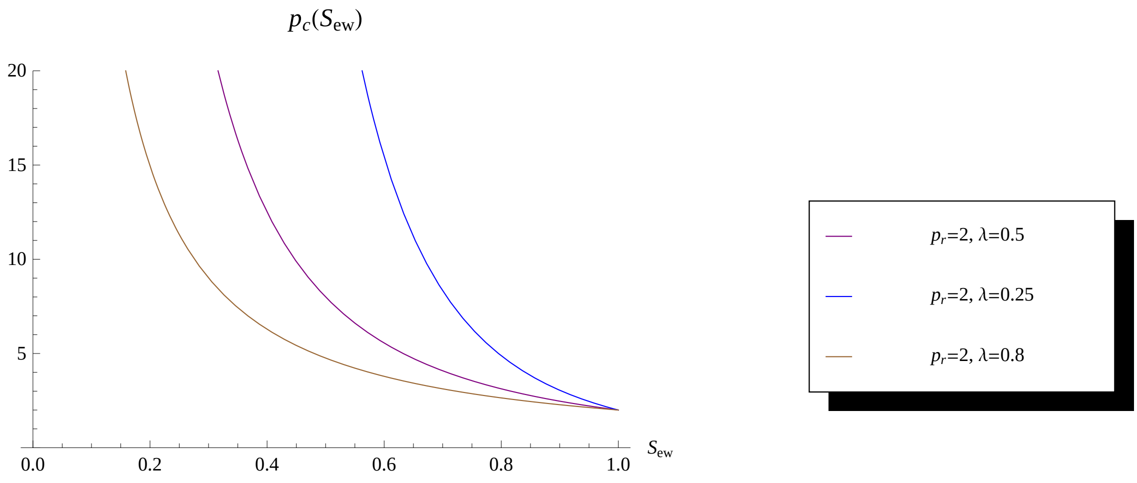
$$p_c'(S_{ew}) = \frac{\frac{2}{\alpha}}{exp(-\frac{1}{2}\alpha p_c(S_{ew})) - S_{ew}},$$

za koju imamo da je $p_c'(0) = -\infty$ i $p_c'(1) \neq 0$.

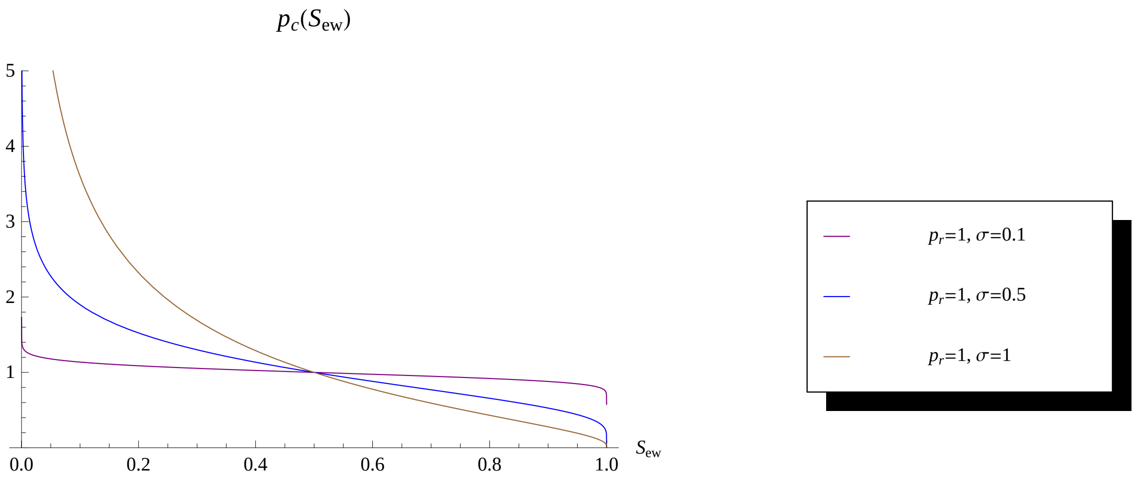
Na slikama 3.1-3.5 može se vidjeti kako svaka od ovih funkcija izgleda za različite parametre.



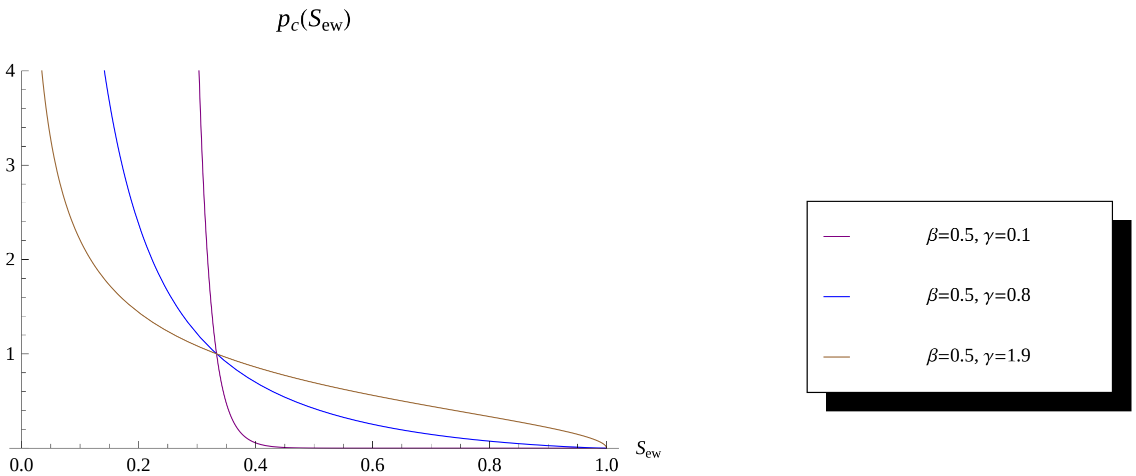
Slika 3.1: Van Genuchtenova funkcija kapilarnog tlaka



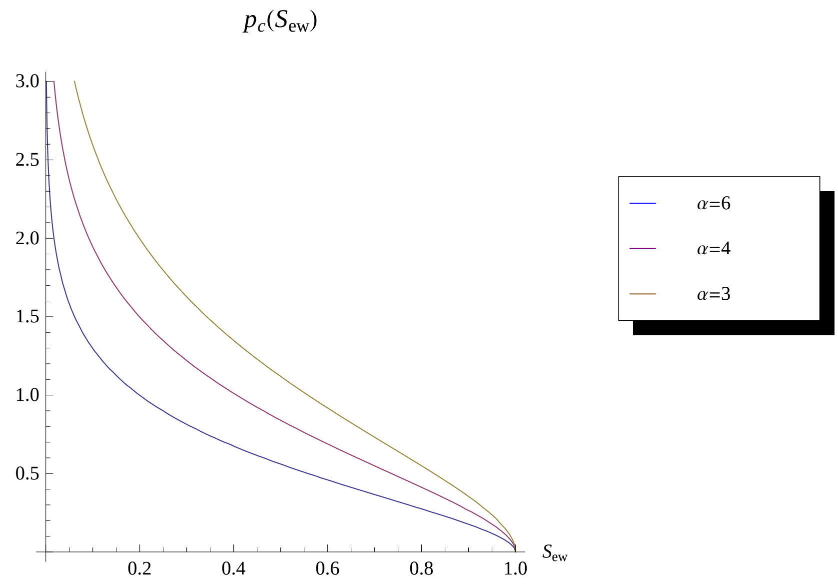
Slika 3.2: Brooks-Coreyeva funkcija kapilarnog tlaka



Slika 3.3: Lognormalna funkcija kapilarnog tlaka



Slika 3.4: Brutsaertova funkcija kapilarnog tlaka



Slika 3.5: Gardnerova funkcija kapilarnog tlaka

3.2 Relativne permeabilnosti

Kapilarni tlak-zasićenje funkcija se može shvatiti kao statičko svojstvo tla, dok je funkcija relativne permeabilnosti svojstvo koje opisuje sposobnost tla da propušta tekućinu. Opisati ćemo dva modela, u kojima se relativne permeabilnosti dobivaju iz funkcija kapilarnog tlaka.

U **Mualemovom** modelu [3], relativne permeabilnosti k_{rw} i k_{rn} su dane formulama:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S^{\eta}{}_{ew} \left[\frac{\int_0^{S_{ew}} \frac{ds}{p_c(s)}}{\int_0^1 \frac{ds}{p_c(s)}} \right]^2, \qquad k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^{\eta} \left[\frac{\int_{S_{ew}}^1 \frac{ds}{p_c(s)}}{\int_0^1 \frac{ds}{p_c(s)}} \right]^2, \tag{3.11}$$

gdje je η parametar. U **Burdine-ovom** modelu [3] one poprimaju oblik:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S^2{}_{ew} \left[\frac{\int_0^{S_{ew}} \frac{ds}{p_c(s)^2}}{\int_0^1 \frac{ds}{p_c(s)^2}} \right], \qquad k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^2 \left[\frac{\int_{S_{ew}}^1 \frac{ds}{p_c(s)^2}}{\int_0^1 \frac{ds}{p_c(s)^2}} \right]. \tag{3.12}$$

Supstitucijom van Genuchtenove funkcije (3.3) u Mualemov model (3.11) dobivamo funkcije relativne permeabilnosti slijedećeg oblika:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S^{\eta}{}_{ew} \left[\frac{\displaystyle\int_0^{S_{ew}} \left(S^{-\frac{1}{m}} - 1 \right)^{m-1} dS}{\displaystyle\int_0^1 \left(S^{-\frac{1}{m}} - 1 \right)^{m-1} dS} \right]^2 = S^{\eta}_{ew} \left[1 - \left(1 - S_{ew}^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 \tag{3.13}$$

$$k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^{\eta} \left[\frac{\displaystyle\int_{S_{ew}}^1 \left(S^{-\frac{1}{m}} - 1 \right)^{m-1} dS}{\displaystyle\int_0^1 \left(S^{-\frac{1}{m}} - 1 \right)^{m-1} dS} \right]^2 = (1 - S_{ew})^{\eta} \left[1 - S_{ew}^{\frac{1}{m}} \right]^{2m}. \tag{3.14}$$

Slično dobivamo kombinaciju Brooks-Coreyeve funkcije (3.9) sa Mualemovim modelom (3.11):

$$k_{rw}(S_{ew}) = S^{\eta}{}_{ew} \left[\frac{\int_0^{S_{ew}} S^{\frac{1}{\lambda}} \, dS}{\int_0^1 S^{\frac{1}{\lambda}} \, dS} \right]^2 = S_{ew}^{\eta+2+\frac{2}{\lambda}} \tag{3.15}$$

$$k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^{\eta} \left[\frac{\int_{S_{ew}}^1 S^{\frac{1}{\lambda}} \, dS}{\int_0^1 S^{\frac{1}{\lambda}} \, dS} \right]^2 = (1 - S_{ew})^{\eta} \left[1 - S_{ew}^{1+\frac{1}{\lambda}} \right]^2. \tag{3.16}$$

Supstitucija lognormalne funkcije (3.7) u Mualemov model (3.11) daje:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S^{\eta}{}_{ew} \left[\frac{\int_0^{S_{ew}} exp(\sigma F_n{}^{-1}(S)) \, dS}{\int_0^1 exp(\sigma F_n{}^{-1}(S)) \, dS} \right]^2 = S^{\eta}_{ew} \left[F_n(F_n^{-1}(S_{ew}) + \sigma) \right]^2 \tag{3.17}$$

$$k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^{\eta} \left[\frac{\int_{S_{ew}}^1 exp(\sigma F_n{}^{-1}(S)) \, dS}{\int_0^1 exp(\sigma F_n{}^{-1}(S)) \, dS} \right]^2 = (1 - S_{ew})^{\eta} \left[1 - F_n(F_n^{-1}(S_{ew}) + \sigma) \right]^2. \tag{3.18}$$

Gardner funkcija (3.10), kombinirana sa Mualemovim modelom (3.11) za $\eta = 0$, daje slijedeće izraze za relativne permeabilnosti:

$$k_{rw}(S_{ew}) = e^{-\alpha p_c(S_{ew})} \tag{3.19}$$

$$k_{rn}(S_{ew}) = (1 - e^{-\frac{1}{2}\alpha p_c(S_{ew})})^2. \tag{3.20}$$

Nadalje, kombinacija van Genuchtenove funkcije (3.3) i Burdine-ovog modela (3.12), uz pretpostavku $m = 1 - \frac{2}{n}$, je dana sa:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S^2{}_{ew}\left[\frac{\int_0^{S_{ew}} (S^{-\frac{1}{m}} - 1)^{m-1}\, dS}{\int_0^1 (S^{-\frac{1}{m}} - 1)^{m-1}\, dS}\right] = S^2_{ew}\left[1 - \left(1 - S_{ew}^{\frac{1}{m}}\right)^m\right] \tag{3.21}$$

$$k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^2\left[\frac{\int_{S_{ew}}^1 (S^{-\frac{1}{m}} - 1)^{m-1}\, dS}{\int_0^1 (S^{-\frac{1}{m}} - 1)^{m-1}\, dS}\right] = (1 - S_{ew})^2\left[1 - S_{ew}^{\frac{1}{m}}\right]^m. \tag{3.22}$$

Supstitucija Brooks-Coreyeve funkcije (3.5) u Burdine-ov model (3.12) daje:

$$k_{rw}(S_{ew}) = S^2{}_{ew}\left[\frac{\int_0^{S_{ew}} S^{\frac{2}{\lambda}}\, dS}{\int_0^1 S^{\frac{2}{\lambda}}\, dS}\right] = S_{ew}^{3+\frac{2}{\lambda}} \tag{3.23}$$

$$k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^2\left[\frac{\int_{S_{ew}}^1 S^{\frac{2}{\lambda}}\, dS}{\int_0^1 S^{\frac{2}{\lambda}}\, dS}\right] = (1 - S_{ew})^2\left[1 - S_{ew}^{1+\frac{2}{\lambda}}\right]. \tag{3.24}$$

Brutsaertova funkcija (3.9), kombinirana sa Burdine-ovim modelom (3.12), poprima oblik:

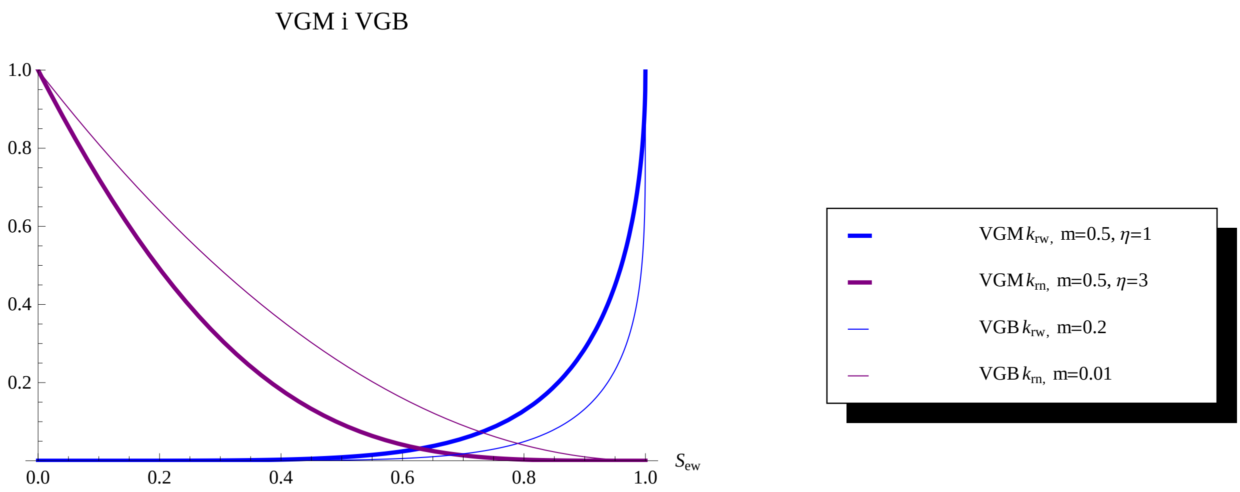
$$k_{rw}(S_{ew}) = S^2{}_{ew}\left[\frac{\int_0^{S_{ew}} (\frac{1}{S} - 1)^{-\frac{2}{\gamma}}\, dS}{\int_0^1 (\frac{1}{S} - 1)^{-\frac{2}{\gamma}}\, dS}\right] = S^2{}_{ew}[1 - (1 - S_{ew})^{1-\frac{2}{\gamma}}] \tag{3.25}$$

$$k_{rn}(S_{ew}) = (1 - S_{ew})^2\left[\frac{\int_{S_{ew}}^1 (\frac{1}{S} - 1)^{-\frac{2}{\gamma}}\, dS}{\int_0^1 (\frac{1}{S} - 1)^{-\frac{2}{\gamma}}\, dS}\right] = [1 - S_{ew}]^{3-\frac{2}{\gamma}}. \tag{3.26}$$

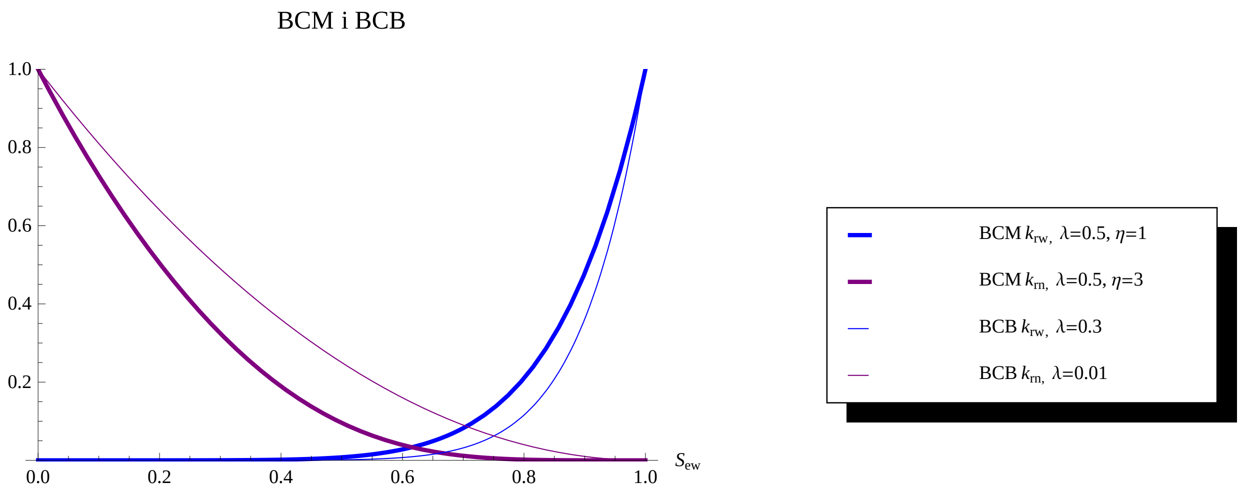
Ove kombinacije su popisane u tablici 3.1, a potom grafirane na slikama 3.6-3.10.

	Mualem	Burdine
VanGenuchten	(3.13), (3.14)	(3.21), (3.22)
Brooks-Corey	(3.15), (3.16)	(3.23), (3.24)
Lognormalna	(3.17), (3.18)	-
Brutsaert	-	(3.25), (3.26)
Gardner	(3.19), (3.20)	-

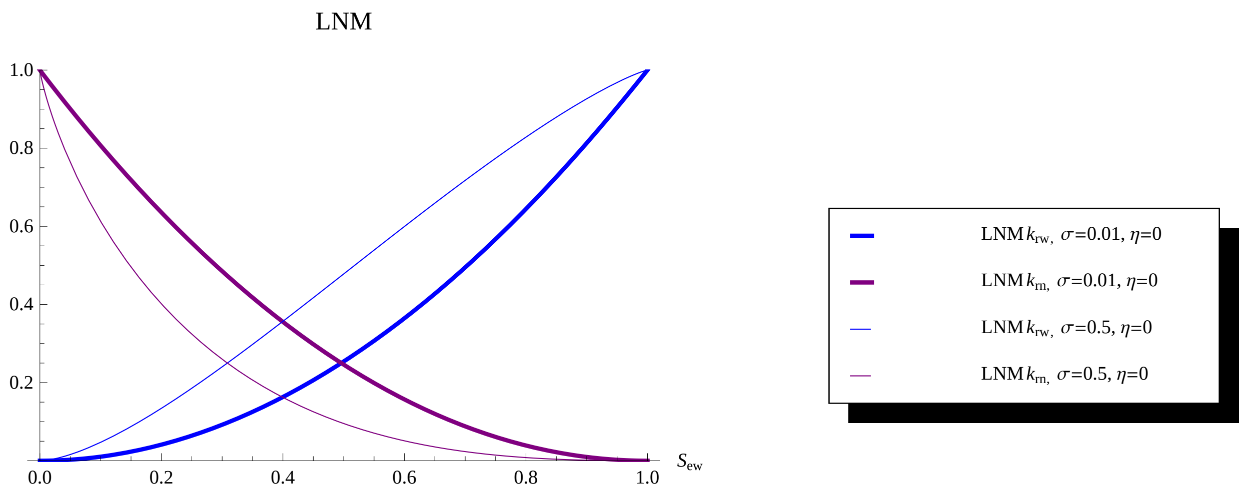
Tablica 3.1: Modeli relativnih permeabilnosti



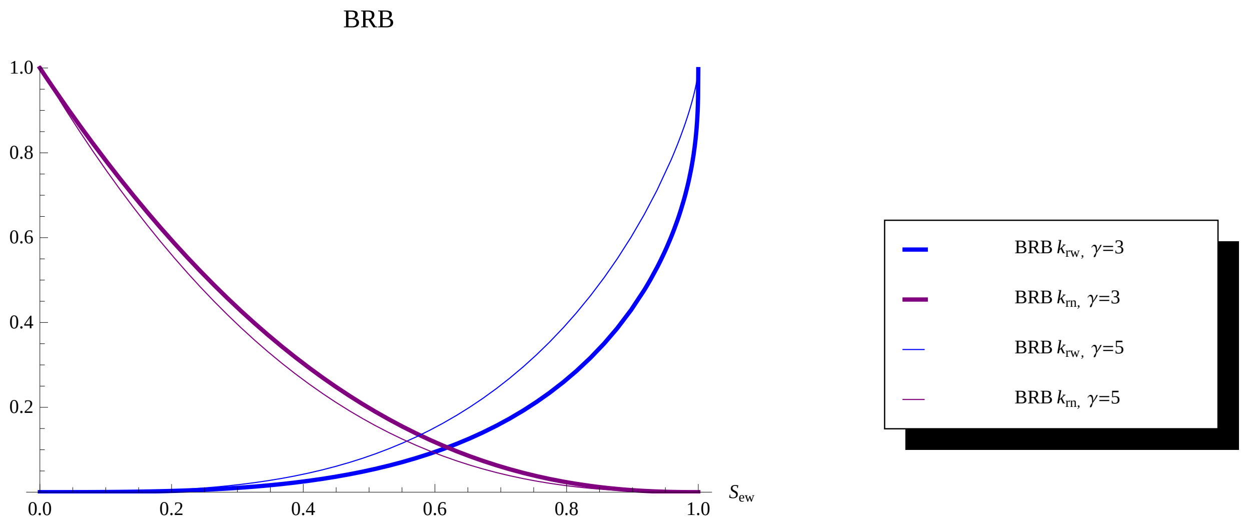
Slika 3.6: Funkcije k_{rw} i k_{rn} u vanGenuchten-Mualem i vanGenuchten-Burdine modelima



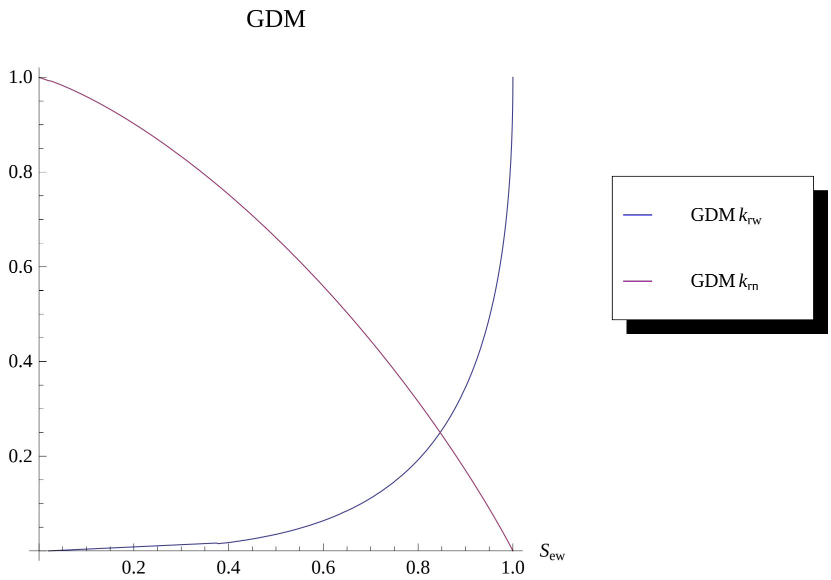
Slika 3.7: Funkcije k_{rw} i k_{rn} u Brooks-Corey - Mualem i Brooks-Corey - Burdine modelima



Slika 3.8: Funkcije k_{rw} i k_{rn} u lognormalna-Mualem modelu



Slika 3.9: Funkcije k_{rw} i k_{rn} u Brutsaert-Burdine modelu



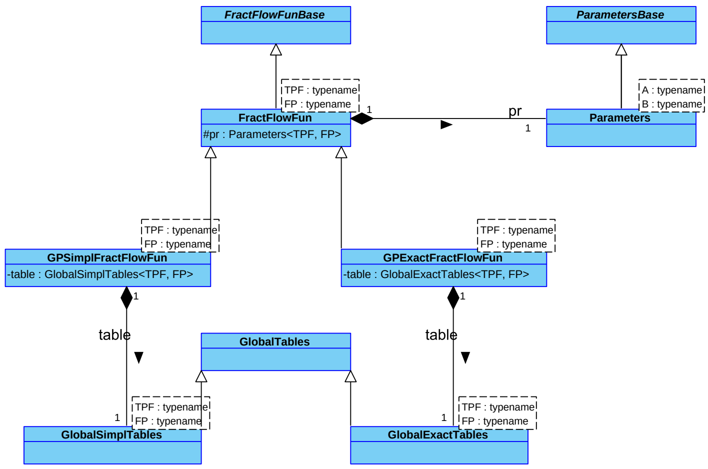
Slika 3.10: Funkcije k_{rw} i k_{rn} u Gardner-Mualem modelu

Poglavlje 4

Implementacija biblioteke funkcija

U implementaciji sustav jedinica koji je upotrebljavan je fiksan. Jer se radi o specifičnom modelu koji zahtijeva različite mjere za različite varijable, koje su većinom nestandardne, nije moguće upotrijebljavati SI sustav. Stoga se to nadoknađuje množenjem sa konstantom koju zovemo Darcyeva konstanta. Tako je gustoća faza mjerena u kg/m^3, viskoznost u cP ($1cP = 10^{-3}Pa * s$), permeabilnost u mD, tlak u MPa ($1MPa = 10^6 Pa$), vrijeme u danima, duljina u m, brzina u m/dan itd. Defaultne vrijednosti ovih varijabli i Darcyeva konstanta se zadaju u FP klasama. Hijerarhija klasa koje smo koristili za računanje koeficijenata u našem dvofaznom toku može se vidjeti na slici 4.1. Opisati ćemo klase koje su upotrebljavane za model prema važnosti, uz odgovarajuće UML class dijagrame, kako bi se vidjela njihova struktura.

Apstraktna klasa **FractFlowFunBase** (slika 4.2) predstavlja sučelje za funkcije dvofaznog toka, uključujući i funkcije djelomičnog toka te funkcije koje su vezane na globalni tlak. Ona je bazna klasa za sve klase koje rade sa jednim od tri modela, što se naznačuje kroz public enumeraciju **VarType** - *base* (formulacija bez globalnog tlaka), *simplified* (pojednostavljeni model s globalnim tlakom) i *exact* (potpuno ekvivalentni model s globalnim tlakom). Klasa kombinira dvije klase koje su zadane kao template parametri: **TPF** klasa (Two-Phase Flow Functions) i **FP** klasa (Fluid Property). *TPF* (slika **??**) klasa nudi relativne permeabilnosti, kapilarni tlak, zasićenost faza i derivacije koje su nam potrebne za račun. Primjeri klase *TPF* su klase koje se koriste za rad sa kapilarnim tlakom, tj. klase koje implementiraju prije spomenute vanGenuchtenove funkcije, Brooks-Coreyeve funkcije itd. Klasa *FP* (slika **??**) nudi svojstva faza, tj. gustoću, viskoznost i njihove derivacije koje su nam potrebne. Primjeri te klase su npr. klase *FluidCompress* (modelira kompresibilne zrak i vodu) i *FluidIncompr* (modelira nekompresibilne zrak i vodu) su npr. klase koje implementiraju klasu *FP*. Klase *TPF* i *FP* sadrže samo statičke varijable i metode. Ovo je nužno zbog kompatibilnosti sa GSL solverom kojeg koristimo za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, koji je pisan u programkom jeziku C.



Slika 4.1: Hijerarhija klasa

Funkcije koje su deklarirane u klasi *FractFlowFunBase* (a koje su nadalje implementirane u klasama koje ju nasljeđuju) navodimo skupa sa notacijom koju smo koristili u prijašnjim poglavljima, kako bi razjasnili njihovu upotrebu:

Zadane u klasi TPF:
krw(u): $k_{rw}(S_w)$
dkrw(u): $k'_{rw}(S_w)$
krg(u): $k_{rn}(S_w)$
dkrg(u): $k'_{rn}(S_w)$
pc(S): $p_c(S_w)$
dpc(S): $p'_c(S_w)$
ddpc(S): $p''_c(S_w)$
Sw(u): S_w
dSw(u): S'_w
Sg(u): S_n
dSg(u): S'_n

Zadane u klasi FP:
rho_w(p): $\rho_w(p)$
drho_w(p): $\rho'_w(p)$
ddrho_w(p): $\rho''_w(p)$
rho_n(p): $\rho_n(p)$

drho_n(p): $\rho_n'(p)$
ddrho_n(p): $\rho_n''(p)$
mu_w(): μ_w
mu_n(): μ_n
Darcy_const(): Darcyeva konstanta
scaled_gravity(): $g = 9.81 m/s^2$

Kombinacije prethodnih funkcija:
pn(u,p): $p_n(S_w, p)$
dpn_du(u,p): $\frac{\partial p_n}{\partial S_w}(S_w, p)$
dpn_dp(u,p): $\frac{\partial p_n}{\partial p}(S_w, p)$
pw(u,p): $p_w(S_w, p)$
dpw_du(u,p): $\frac{\partial p_w}{\partial S_w}(S_w, p)$
dpw_dp(u,p): $\frac{\partial p_n}{\partial p}(S_w, p)$
omega(u,p): $\omega(S_w, p)$
domega_du(u,p): $\frac{\partial \omega(S_w,p)}{\partial S_w}(S_w, p)$
domega_dp(u,p): $\frac{\partial \omega(S_w,p)}{\partial p}(S_w, p)$
global_pressure(u,pn): p
mobw(u): $\lambda_w(S_w)$
dmobw_du(u): $\lambda_w'(S_w)$
mobn(u): $\lambda_n(S_w)$
dmobn_du(u): $\lambda_n'(S_w)$
mobt(u,p): $\lambda(S_w, p)$
dmobt_dp(u,p): $\frac{\partial \lambda(S_w,p)}{\partial p}$
dmobt_du(u,p): $\frac{\partial \lambda(S_w,p)}{\partial S_w}$
f_w(u,p): $f_w(S_w, p)$
dfw_dp(u,p): $\frac{\partial f_w(S_w,p)}{\partial p}$
dfw_du(u,p): $\frac{\partial f_w(S_w,p)}{\partial S_w}$
f_g(u,p): $f_n(S_w, p)$
dfg_dp(u,p): $\frac{\partial f_n(S_w,p)}{\partial p}$
dfg_du(u,p): $\frac{\partial f_n(S_w,p)}{\partial S_w}$
a(u,p): $a(S_w, p)$
da_du(u,p): $\frac{\partial a(S_w,p)}{\partial S_w}$
da_dp(u,p): $\frac{\partial a(S_w,p)}{\partial p}$

```
beta(u,p):
```
$\alpha(S_w, p)$ [1]
```
dbeta_du(u,p):
```
$\frac{\partial\alpha(S_w,p)}{\partial S_w}$ [2]
```
dbeta_dp(u,p):
```
$\frac{\partial\alpha(S_w,p)}{\partial p}$ [3]
```
b_g(u,p):
```
$b(S_w, p)$
```
dbg_du(u,p):
```
$\frac{\partial b(S_w,p)}{\partial S_w}$
```
dbg_dp(u,p):
```
$\frac{\partial a(S_w,p)}{\partial p}$
```
rho(u,p):
```
$\rho(S_w, p)$
```
rho_du(u,p):
```
$\frac{\partial\rho(S_w,p)}{\partial S_w}$
```
rho_dp(u,p):
```
$\frac{\partial\rho(S_w,p)}{\partial p}$

[1] za tip varijable CapillaryPressure jednak je $\alpha(S_w, p)$, dok je za WSaturation jednak $-\alpha(S_w, p)$

[2] ovisno o tipu varijable je $\frac{\partial\alpha(S_w,p)}{\partial S_w}$ ili $-\frac{\partial\alpha(S_w,p)}{\partial S_w}$

[3] ovisno o tipu varijable je $\frac{\partial\alpha(S_w,p)}{\partial p}$ ili $-\frac{\partial\alpha(S_w,p)}{\partial p}$

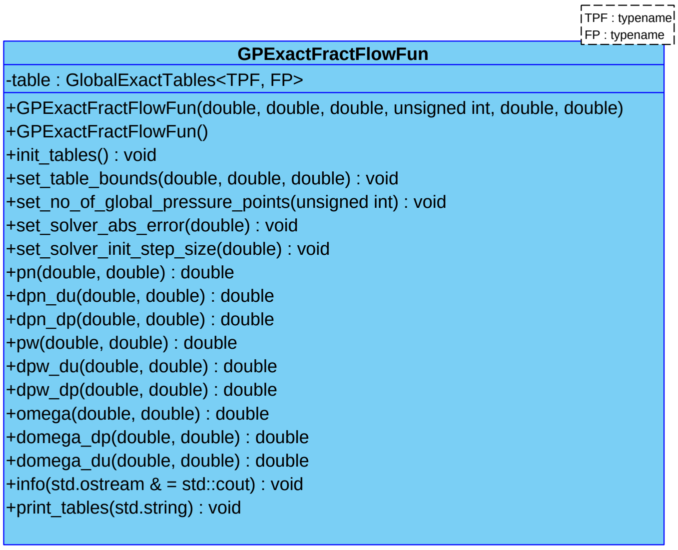
FractFlowFunBase

+get_parameter_names() : std.vector<std.string> const &
+get_parameter_by_name(std.string) : double const &
+get_parm_default_by_name(std.string) : double const &
+has_parameter(std.string) : bool
+function_type() : std.string
+variable_type() : VarType
+set_variable_type(VarType) : void
+info(std.ostream & = std::cout) : void
+krw(double) : double
+krg(double) : double
+pc(double) : double
+Sw(double) : double
+Sg(double) : double
+dkrw(double) : double
+dkrg(double) : double
+dpc(double) : double
+ddpc(double) : double
+dSw(double) : double
+dSg(double) : double
+rho_w(double) : double
+drho_w(double) : double
+ddrho_w(double) : double
+rho_n(double) : double
+drho_n(double) : double
+ddrho_n(double) : double
+mu_w() : double
+mu_n() : double
+Darcy_const() : double
+scaled_gravity() : double
+pn(double, double) : double
+dpn_du(double, double) : double
+dpn_dp(double, double) : double
+pw(double, double) : double
+dpw_du(double, double) : double
+dpw_dp(double, double) : double
+omega(double, double) : double
+domega_dp(double, double) : double
+domega_du(double, double) : double
+global_pressure(double, double) : double
+mobw(double) : double
+mobn(double) : double
+mobt(double, double) : double
+dmobn_du(double) : double
+dmobw_du(double) : double
+dmobt_dp(double, double) : double
+dmobt_du(double, double) : double
+f_w(double, double) : double
+f_g(double, double) : double
+dfw_dp(double, double) : double
+dfg_dp(double, double) : double
+dfw_du(double, double) : double
+dfg_du(double, double) : double
+a(double, double) : double
+beta(double, double) : double
+b_g(double, double) : double
+da_du(double, double) : double
+dbeta_du(double, double) : double
+da_dp(double, double) : double
+dbeta_dp(double, double) : double
+dbg_du(double, double) : double
+dbg_dp(double, double) : double
+total_mob(double, double) : double
+dtotal_mob_du(double, double) : double
+dtotal_mob_dp(double, double) : double
+rho(double, double) : double
+rho_du(double, double) : double
+rho_dp(double, double) : double
+init_tables() : void
+set_table_bounds(double, double, double) : void
+set_no_of_global_pressure_points(unsigned int) : void
+set_solver_abs_error(double) : void
+set_solver_init_step_size(double) : void
+set_no_of_capillary_pressure_pts(unsigned, unsigned) : void

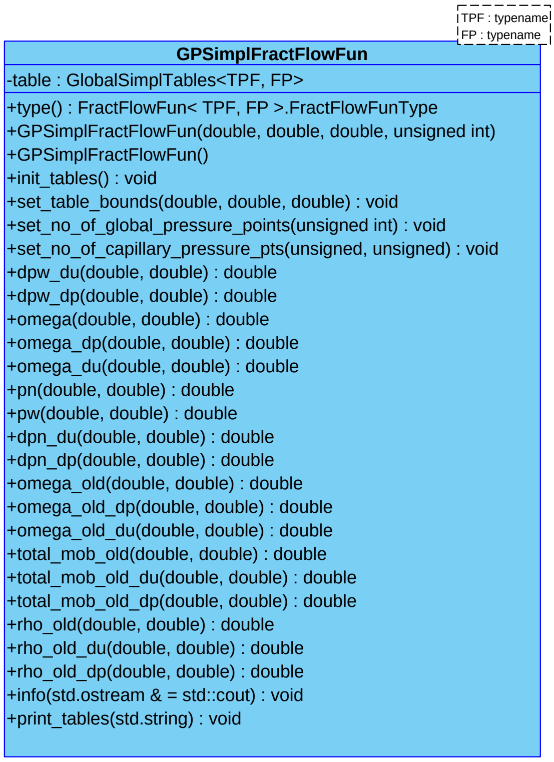
Slika 4.2: Klasa FractFlowFunBase

Klasa **FractFlowFun** nasljeđuje apstraktnu klasu *FractFlowFunBase*. Ona implementira funkcije iz te klase tako da ih povezuje sa klasama *TPF* i *FP*, te prenosi zadane parametre kao jedan od argumenata. U implementaciji koristimo instancu objekta klase *StaticFractFlowFun*. U klasi *FractFlowFun* funkcije koriste tlak plina kao varijablu tlaka p; tj. funkcije ovise o (S, p_n), gdje je S zasićenost vode.

Klase **GPExactFractFlowFun** i **GPSimplFractFlowFun** nasljeđuju klasu *FractFlowFun*, te također upotrebljavaju template parametre *TPF* i *FP*. Ove klasu upotrebljavamo kada radimo s aproksimativnim modelom sa globalnim tlakom – za razliku od *FractFlowFun* klase ovdje je varijabla tlaka globalni tlak. Kako bi izračunali tlak zraka iz globalnog tlaka moramo imati pristup statičkim funkcijama iz klase *FP*. Sav račun se odvija u *GlobalExactTables*, odnosno *GlobalSimplTables* klasama, a same tablice su kreirane u konstruktorima klasa. Obje klase sadrže varijablu koja je objekt klasa *GlobalExactTables*, odnosno *GlobalSimplTables*. U tim klasama imamo implementaciju spomenutih funkcija po tipu varijable, tj. funkcija se opredijeljuje za jednu od mogućnosti. Funkcije koje su klasi *FractFlowFun* bile ovisne o S i p_n u ovim klasama postaju ovisne o S i $p = p_n(S, p)$, a p_n se računa iz tabela. Time npr. $a(S, p)$ postaje $a(S, p_n(S, p))$, a jedna od njenih derivacija postaje $\frac{\partial a(S,p)}{\partial p} = \frac{\partial a(S,p)}{\partial p_n} \frac{\partial p_n(S,p)}{\partial p}$.

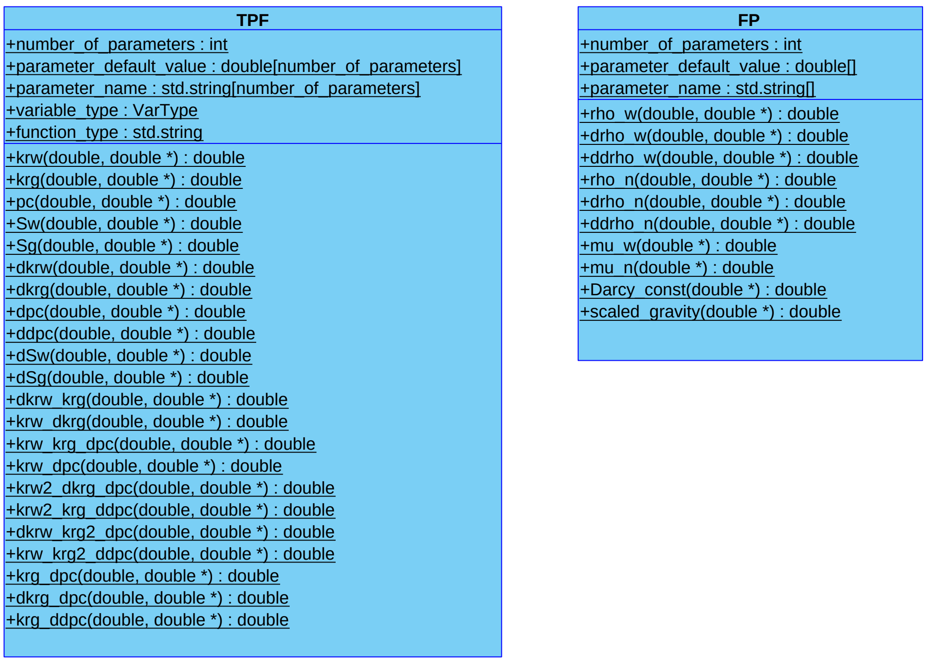


Slika 4.3: Klasa GPExactFractFlowFun



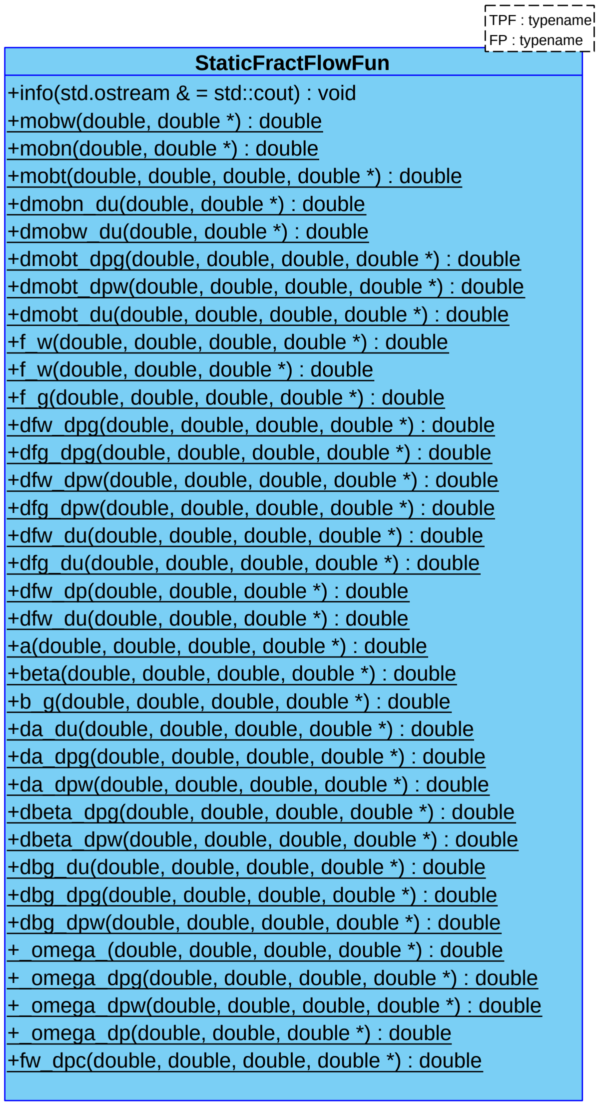
Slika 4.4: Klasa GPSimplFractFlowFun

U klasi *FP* koristimo statičke varijable koje dopuštaju rad sa parametrima koji su definirani u npr. klasi *FluidCompInc*, *FluidCompr* ili *FluidIncompr*. Neki od njih su viskoznosti faza, gustoće faza, Darcyeva konstanta itd., za koje postavljamo defaultne vrijednosti. U klasi *TPF* koristimo također statičke varijable; parametri su definirani u npr. klasi *SimpleFun*, a sadrže funkcije za računanje kapilarnog tlaka i zasićenja faza. U klasi TPF funkcije umnožaka kao npr. `krw_dpc` su deklarirane i imaju trivijalnu implementaciju (jednostavno se pozivaju već implementirane funkcije i njihove povratne vrijednosti se množe) ako u umnošku ne postoji singularitet; u protivnom, implementacija postoji jer se u nekim slučajevima u njihovoj kombinaciji singulariteti dokidaju. Imena parametara i njihove defaultne vrijednosti se implementiraju kao statičke varijable.Kako bi implementirali novu klasu funkcija, trebamo napisati novu *TPF* klasu, kao što je to napravljeno u *VanGenuchtenFun* ili *BrooksCoreyFun* klasama, koja se tada koristi kao template parametar. Te klase daju konkretnu numeričku implementaciju funkcija modela kojeg upotrebljavamo. Unutar svake od funkcija u klasi treba navesti parametre koje koristimo u računu u `parms` polju, dakle za npr. Brutsaert-Burdine model navodimo γ i β. Tada promatramo račun za tip varijable (enumeracija *VarType*), koji je funkcija prenijela kao argument, uz pointer na početak polja parametara, tj. za slučaj `W_Saturation`, `N_Saturation` i `pc` (koji je postavljen kao default). Osim same implementacije numeričkog dijela, potrebna je još i instanca objekta klasa *GPExactFractFlowFun* ili *GPSimplFractFlowFun* u test programu, koja kao template parametre prenosi ime naše *TPF* klase i *FP* klase koje koristimo (kompresibilne ili nekompresibilne faze). Sve funkcije u klasi TPF moraju biti implementirane tako da se može birati tip varijable koju ćemo koristiti (S_w, S_n ili $u = p_c(S)$). Sukladno tome se mijenjaju i sve formule za koeficijente (svaka funkcija u klasi ima implementaciju za tri tipa varijabli). Varijabla p (varijabla tlaka) je s druge strane fiksirana, i ovisno o implementacijskoj klasi, u *FractFlowFun* to je p_n, dok je u *GPSimplFractFlowFun* i *GPExactFractFlowFun* odgovarajući globalni tlak.



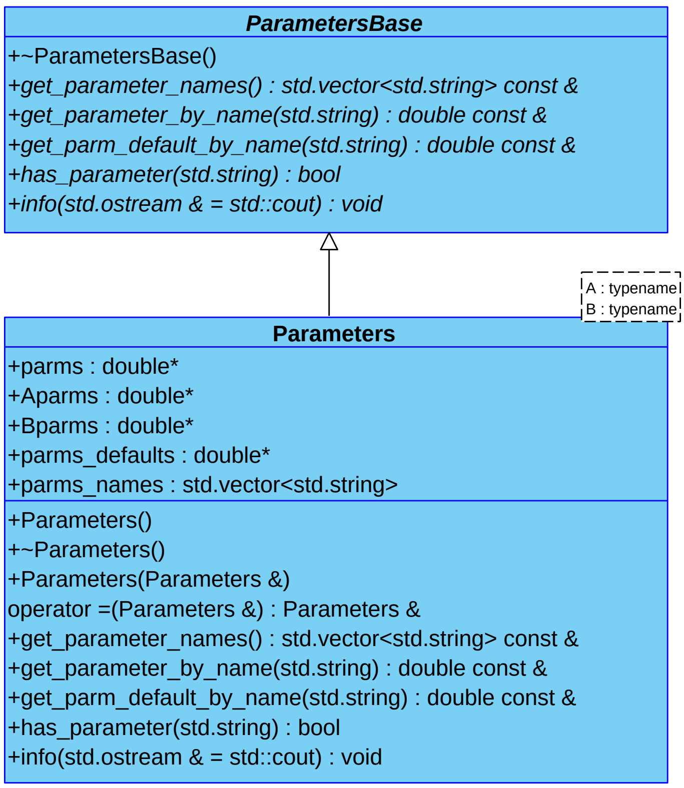
Slika 4.5: Klase TPF i FP

Sada možemo objasniti ukratko ostale klase koje su uključene u model. Klasa **StaticFractFlowFun** uzima kao template parametre klase *TPF* i *FP*, te funkcije navedene u *FractFlowFunBase* prerađuje u smislu da ih dijeli na one koje će biti implementirane u *TPF* klasi i one koje će biti implementirane u *FP* klasi. U ovoj klasi te funkcije postaju statičke, kako bi bile prilagođene upotrebi klasa koje zahtijevaju metode napisane u C-u.



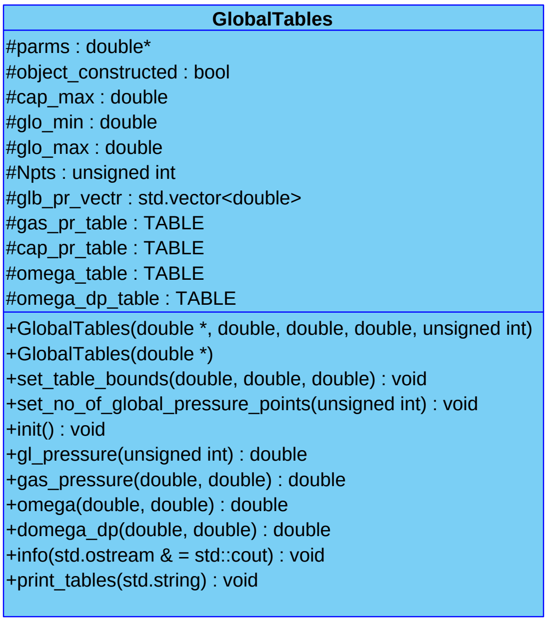
Slika 4.6: Klasa StaticFractFlowFun

Apstraktna klasa **ParametersBase** predstavlja public sučelje za klasu **Parameters**, koja dozvoljava promjenu vrijednosti parametara. Svi parametri nalaze se, po redu pojavljivanja, u polju `parms`, dok se njihova imena nalaze u vektoru `parameter_name`. U klasi *Parameters* također kombiniramo template parametre, tj. prvo uzimamo parametre iz *TPF* klase a onda parametre iz *FP* klase. Specifično, upotrebljavamo public varijable *Aparms* i *Bparms*, koje su pointeri na početke dva skupa parametara koje upotrebljavamo.



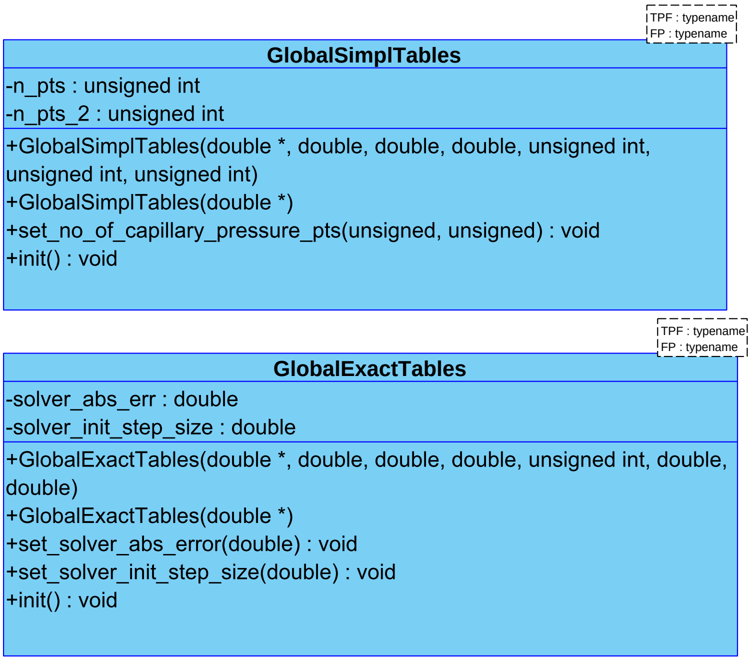
Slika 4.7: Klase ParametersBase i Parameters

Klasa **GlobalTables** nudi rad sa tlakom zraka kao funkcijom kapilarnog i globalnog tlaka, tj. sve funkcije koje su potrebne za interpolaciju. Ovo je bazna klasa za klase koje računaju tablice tlaka zraka i ostale. GlobalTables je implementacijska klasa koja radi interpolaciju tabela, dok se sama konstrukcija tabela odvija u izvedbenim klasama (tj. GlobalSimplTables i GlobalExactTables). Klasa GlobalTables služi za računanje tlaka plina kao funkcije globalnog tlaka i zasićenja (tj. kapilarnog tlaka). Interpolacija ne ovisi o tome kako se računaju tablice. Upotrebljavamo posebne tipove podataka tj. matricu *TABLE* i par *Bounds*. Tako npr. za varijablu `gas_pr_table` koja je tipa *TABLE*, `gas_pr_table[i]` je tablica vrijednosti tlaka zraka za dani globalni tlak `p_i`. Tip podatka *Bounds* je par koji nam predstavlja granice unutar kojih radimo sa tablicom.



Slika 4.8: Klasa GlobalTables

Klase **GlobalExactTables** i **GlobalSimplTables** nasljeđuju *GlobalTables* i kombiniraju *TPF* i *FP* klase koje su dane kao template parametri. 'Exact' i 'Simple' se odnose na dva modela implementacije koeficijenata; u klasi *GlobalSimplTables* broj točaka kapilarnog tlaka se zadaje unaprijed, što je jedna od važnijih razlika između klasa. U klasi *GlobalExactTables* radimo sa solverom koji nam pomaže u rješavanju diferencijalnih jednadžbi (koji nam u GlobalSimplTables nije potreban), pa imamo varijable koje su vezane na njega, npr. varijablu koja postavlja vrijednost početnog koraka solvera, funkciju za postavljanje početnog koraka solvera itd. Ovdje također imamo i metode koje definiraju funkcije djelomičnog toka za faze u obliku u kojem ga zahtijeva GSL biblioteka, dakle metode su statičke (iz upravo ovog razloga bilo je važno funkcije koje će ova klasa koristiti deklarirati kao statičke).



Slika 4.9: Klase GlobalExactTables i GlobalSimplTables

Na kraju još par riječi o GSL biblioteci koju smo upotrebljavali za interpolaciju i rješavanje diferencijalnih jednadžbi. GSL biblioteka (GNU Scientific Library) je biblioteka napisana u C-u koja služi za numeričke račune u primijenjenoj matematici i znanosti. Između ostalog, obuhvaća linearnu algebru, statistiku, rad sa posebnim funkcijama (npr. trigonometrijske i eksponencijalne funkcije), kombinatoriku, interpolaciju, obične diferencijalne jednadžbe itd. Ukoliko se želi raditi sa GSL bibliotekom u C++-u, ako je moguće trebamo statičke klase koje će moći tada koristiti GSL (kao što je učinjeno u našoj TPF klasi). Ukoliko to nije moguće, postoje razni GSL wrapperi koji se koriste u svrhu adaptiranja koda za upotrebu GSL biblioteka (pisanje kojih tada podrazumijeva rad sa sučeljem a ne sa samom implementacijom GSL biblioteke, tako da korisnik ne mora biti upućen u sve matematičke pojmove što bi inače bilo potrebno).

Bibliografija

[1] Z. Chen, G. Huan, Z. Ma, Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.

[2] B. Amaziane, M. Jurak, A. Žgaljić-Keko, Modeling and Numerical Simulations of Immiscible Compressible Two-Phase Flow in Porous Media by the Concept of Global Pressure, Transport in Porous Media, 2000.

[3] J. Chen, J. W. Hopmans, M. E. Grismer, Parameter estimation of two-fluid capillary pressure-saturation and permeability functions, Advances in Water Resources Vol. 22, Issue 5, 1999, pp 479–493.

[4] Upotrebljavan software:

1. UML dijagrami su rađeni u Visual Paradigmu 4.2.
2. C++ programi su kompilirani i izvođeni u Cygwinu, na Windows XP platformi
3. grafovi funkcija kapilarnog tlaka i ostali su rađeni u Wolfram Mathematici 7

Sažetak

Polazeći od formulacije zadaće dvofaznog toka nemješivih fluida u poroznom mediju, razvijamo tri matematička modela:

1. *base* - model bez globalnog tlaka, u kojem su funkcije ovisne o tlaku zraka (p_n) i zasićenju vlažeće faze (S_w)

2. *simplified (aproksimativni)* - model u formulaciji sa globalnim tlakom, u kojem su funkcije ovisne o globalnom tlaku (p) i zasićenju vlažeće faze (S_w)

3. *exact* - potpuno ekvivalentni model u formulaciji sa globalnim tlakom, u kojem su funkcije ovisne o globalnom tlaku (p) i zasićenju vlažeće faze (S_w)

Nadalje promatramo različite modele kapilarnog tlaka, modele u kojima se relativna permeabilnost faza dobiva iz kapilarnog tlaka, te njihove grafove.

Na kraju predstavljamo implementaciju i design software-a za računanje koeficijenata u prethodno navedena tri modela, *base*, *simplified* i *exact*. U implementaciji ovih modela ostavljamo mjesta za dodatne implementacije tih modela od strane korisnika, koji tada upotrebljava postojeću biblioteku funkcija zajedno sa implementacijom svog modela. Formulirana je tako da je moguće raditi sa kompresibilnim i nekompresibilnim fazama, te upotrebljavati jedan od tri navedena modela. Opis implementacije i designa je popraćen UML dijagramima za klase te dijagramom za ukupnu hijerarhiju klasa koje su korištene.