

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PMF - MATEMATIČKI ODJEL**

Jelena Kišić

**EFEKTIVNA HIDRAULIČKA  
VODLJIVOST U NEHOMOGENIM  
POROZNIM SREDINAMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, 8.2010.

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>ii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Model jednofaznog toka kroz poroznu sredinu</b>	<b>2</b>
1.1 Porozna sredina . . . . .	2
1.2 Osnovni principi mehanike fluida . . . . .	4
1.3 Darcyjev zakon . . . . .	5
1.4 Model jednofaznog toka . . . . .	8
<b>2 Matematička teorija periodičke homogenizacije</b>	<b>11</b>
2.1 Uvod . . . . .	11
2.2 Asimptotski razvoj . . . . .	16
2.3 Energetski dokaz homogenizacijske formule . . . . .	21
2.4 Korektori . . . . .	26
2.5 Eliptički operatori s neuniformno oscilirajućim koeficijentima . . . . .	27
<b>3 Numerička verifikacija rezultata homogenizacije</b>	<b>31</b>
3.1 Kvazi 1D slučaj . . . . .	31
3.2 2D . . . . .	38
<b>4 Dodatak</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>63</b>

# Uvod

Gibanje fluida u podzemlju odvija se kroz veliki broj pora čije su dimenzije za nekoliko redova veličine manje od dimenzija područja od interesa. Stoga su u matematičkom modeliranju toka fluida kroz poroznu sredinu prisutne dvije prostorne skale: mikroskopska, određena karakterističnom dimenzijom pora i makroskopska, određena dimenzijom područja od interesa. Matematički model ima za cilj previdjeti transport mase i energije kroz poroznu sredinu na makroskopskoj skali i stoga je potrebno izvršiti skaliranje mikroskopskog modela (Navier-Stokesove jednadžbe) na makroskopsku skalu. U Poglavlju 1 izvodimo makroskopski model koji se u slučaju jednofaznog toka kroz poroznu sredinu svodi na (inicijalno-)rubnu zadaću za paraboličku ili eliptičku parcijalnu diferencijalnu jednadžbu.

U prirodi je većina poroznih sredina nehomogena s jako oscilatornim svojstvima. Mi ćemo promatrati prostorne oscilacije u poroznosti i permeabilnosti sredine. Kako bismo mogli primijeniti razvijenu matematičku tehniku homogenizacije pretpostaviti ćemo da je porozna sredina periodička. Iako ta pretpostavka nije ispunjena u slučaju prirodnih poroznih sredina, ona je reprezentativna u smislu da se generalizacijom rezultata postignutih u periodičkom slučaju mogu obuhvatiti i prirodne, neperiodičke porozne sredine. Poglavlje 2 nam daje teorijsku podlogu za tehnike periodičke homogenizacije koje nam omogućuju da nehomogenu poroznu sredinu zamijenimo s ekvivalentnom homogenom poroznom sredinom. Tehnika homogenizacije nam daje metodu za računanje svojstava ekvivalentne porozne sredine, tzv. efektivne propusnosti i efektivne poroznosti. Ove efektivne vrijednosti sadrže u sebi efekte oscilacija tlaka i brzine fluida koje se događaju na mikroskopskoj skali te su suviše male da bi mogle biti efikasno reprezentirane na makroskopskoj skali, a opet imaju utjecaja na globalno gibanje fluida. Taj je utjecaj uvažen kroz proceduru računanja efektivne permeabilnosti (i poroznosti) koji se svodi na rješavanje  $n$  periodičkih rubnih zadaća na jediničnoj ćeliji, gdje je  $n$  prostorna dimenzija.

U Poglavlju 3 numerički u programu FreeFem verificiramo teorijske rezultate iz Poglavlja 2 kroz nekoliko različitih primjera u jednoj i dvije dimenzije.

# Poglavlje 1

## Model jednofaznog toka kroz poroznu sredinu

### 1.1 Porozna sredina

Većina stijena i tala prirodno sadrže određeni postotak praznog prostora kojeg zauzimaju fluidi. To svojstvo nazivamo poroznost. Gibanje fluida kroz šupljine u tlu ili nekom drugom poroznom materijalu od velikog je značaja za različite tehničke discipline, od kojih su neke hidrogeologija, naftno inženjerstvo, agronomija, kemijsko inženjerstvo itd. Matematički modeli koji opisuju takvo gibanje imaju zadaću predvidjeti transport mase i energije unutar sustava pod zadanim vanjskim uvjetima. Formiramo ih pomoću zakona sačuvanja mase, impulsa, momenta impulsa i energije, te primjenom termodinamičkih relacija. Pri tome je često potrebno uzeti u obzir prisutnost tekuće i plinovite faze, izmjenu materije među fazama pod utjecajem promjene termodinamičkih parametara, kemijske reakcije između čvrste stijenske porozne sredine i fluida, itd. Matematički model vodi nas na Navier-Stokesov sustav diferencijalnih jednadžbi koji treba zapisati u domeni sastavljenoj od šupljina (pora) kroz koje se fluid može kretati (porni prostor) te zadati pripadne rubne i početne uvjete. Taj model nazivamo mikroskopskim i on neće biti predmet našeg proučavanja iz dva razloga:

1. Geometrija pornog prostora nije nam poznata te je tada gotovo nemoguće odrediti rubne i početne uvjete;
2. Dimenzije pora su vrlo malene ( $\sim \mu m$ ) dok mi proučavamo prostorne domene s dimenzijama u metrima i kilometrima.

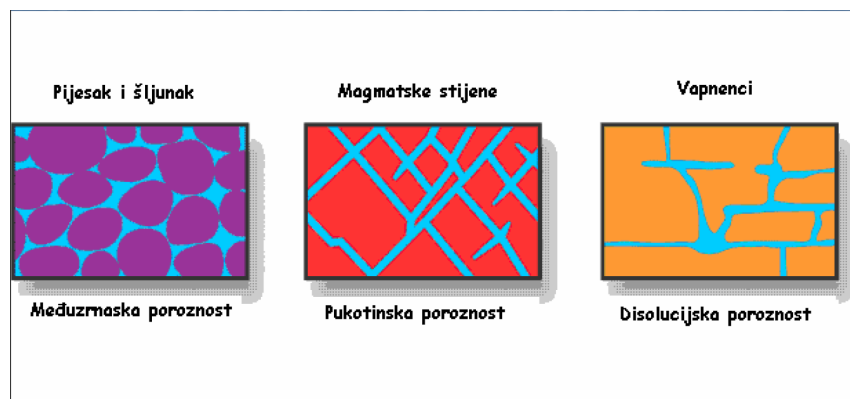
Zbog toga s mikroskopskog modela prelazimo na makroskopski model koji reprezentira fizikalne procese na prostornoj skali od praktičnog interesa. U makroskopskom modelu

porozna sredina je kontinuum u kome više nema separirane čvrste faze (stijene, tla) i fluida koji ispunjava porni prostor. Svaka točka u tom modelu predstavlja volumen koji je dovoljno velik da sadrži i čvrstu fazu i fluid u pornom prostoru. Svojstva makroskopskog kontinuumu opisuju se pomoću nekoliko parametara od kojih su najvažniji poroznost i propusnost. Poroznost ( $\Phi$ ) definiramo kao omjer praznog prostora tj. pora ( $V_p$ ) i ukupnog volumena promatranog područja (sastoji se od volumena pora te volumena čvrstog dijela -  $V_s$ ) tj.

$$\Phi = \frac{V_p}{V_p + V_s}, \quad 0 \leq \Phi \leq 1. \quad (1.1)$$

Pri tome uzimamo u obzir samo onaj dio poroznog prostora koji je povezan; izolirane pore, koje ne dozvoljavaju strujanje fluida, zanemarujemo. Poroznost stijena prema nastanku dijelimo na (slika 1.1):

- primarnu (međuzrnsku): nastaje u isto vrijeme kad se stijena stvara, konsolidira ili preobražava procesom metamorfoze (primjer: pijesak i šljunak);
- sekundarnu
  - pukotinska poroznost (primjer: magmatske stijene) - nastaje kao posljedica mehaničkog naprežanja uslijed djelovanja tektonskih sila na stijenu koja je već formirana
  - disolucijska poroznost (primjer: vapnenci) - nastaje otapanjem već formirane stijene djelovanjem otopina, uglavnom vode.



Slika 1.1: Poroznost

Poroznost ovisi i o deformacijama stijena koje su u prirodi prisutne. Dijelimo ih na:

1. ELASTIČNE - Tada je  $\Phi = \Phi(x, p)$  jer veći tlak uzrokuje komprimiranje stijene i povećava porni prostor, a manji tlak smanjuje porni prostor jer stijene ekspandiraju;
2. PLASTIČNE - U tom slučaju je  $\Phi = \Phi(x)$ . Takvu poroznu sredinu nazivamo krutom i ona će biti predmet našeg proučavanja.

U tablici 1.1 dane su poroznosti nekih sredina:

Sredina	Poroznost u %
Granit i gnajs	0.02-1.8
Kvarc	0.8
Limske stijene, primarni dolomiti	0.5-12.5
sekundarni dolomiti	10-30
Kreda	8-37
Pješčenjaci	3.5-38
Vulkanski tuf	30-40
Pijesci	15-48
Silit	do 90
Glina	45-55

Tablica 1.1: Poroznost

Propusnost je mjera kojom se sredina opire strujanju fluida. Ona može biti različita u različitim smjerovima (anizotropna) i ulazi u Darcyjev zakon koji veže gradijent tlaka i brzinu strujanja, o čemu govorimo u sekciji 1.3. Veličine koje se pojavljuju u makroskopskom modelu, kao što su tlak i brzina strujanja, predstavljaju srednje vrijednosti uzete na dovoljno velikim (u odnosu na dimenzije pora) volumenima.

## 1.2 Osnovni principi mehanike fluida

Promatranje Newtonovog fluida vodi na sustav diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho(\vec{v} \otimes \vec{v})) + \nabla p = \mu \Delta \vec{v} + (\kappa + \frac{1}{3}\mu)\nabla(\operatorname{div} \vec{v}) + \rho \vec{f}, \end{cases} \quad (1.2)$$

gdje je  $\vec{v}$  brzina fluida,  $p$  tlak,  $\rho$  gustoća fluida,  $\mu$  (dinamička) viskoznost,  $\kappa$  dilatacijska viskoznost, a  $\vec{f}$  vanjska volumna sila. U našem slučaju pretpostavit ćemo da je fluid homogen tj.  $\rho$  konstantan i inkompresibilan (nestlačiv), što povlači  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Tada sustav (1.2)

postaje sustav:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho(\vec{v} \otimes \vec{v})) + \nabla p = \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{f} \end{cases} \quad (1.3)$$

Taj se sustav naziva Navier-Stokesove jednačbe.

### Piezometarska razina

Promotrimo sada inkompresibilan fluid u polju sile teže koji je u ravnotežnom stanju. Znači pretpostavljamo da je  $\vec{v} = 0$  i  $\vec{f} = \vec{g}$ . Kada to uvrstimo u (1.3) ostaje nam:

$$\nabla p = \rho \vec{g} = \rho g \vec{e}_3.$$

Raspisano, dobivamo

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p = -\rho g z + C.$$

Stoga je prikladno uvesti novu varijablu, koja ima jedinicu duljine,

$$\psi := \frac{p}{\rho g} + z \quad (1.4)$$

koja se u hidrologiji naziva piezometarska razina, i koja je u ravnoteži konstantna.

## 1.3 Darcyjev zakon

Osnovni konstitutivni zakon za gibanje fluida kroz poroznu sredinu na makroskopskoj skali daje vezu između gradijenta tlaka i brzine fluida. Eksperimentalno ga je utvrdio francuski inženjer Henry Darcy, po kojemu je zakon dobio ime. Pravidna makroskopska brzina fluida (Darcyjeva brzina)  $\vec{q}$  definira se odnosom:

$\vec{q} \cdot \vec{n} dS$  = volumen fluida koji u jedinici vremena protekne kroz površinu  $dS$ , okomitu na jedinični vektor  $\vec{n}$  [ $L^3/T$ ].

Veza između Darcyjeve brzine i tlaka fluida dana je Darcyjevim zakonom:

$$\vec{q} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{K}(\nabla p - \rho \vec{g}), \quad (1.5)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  propusnost porozne sredine ( $[L^2]$ ). Općenito je propusnost simetričan pozitivno definitan operator. Ukoliko je sredina nehomogena  $\mathbf{K}$  je funkcija prostornog položaja. U

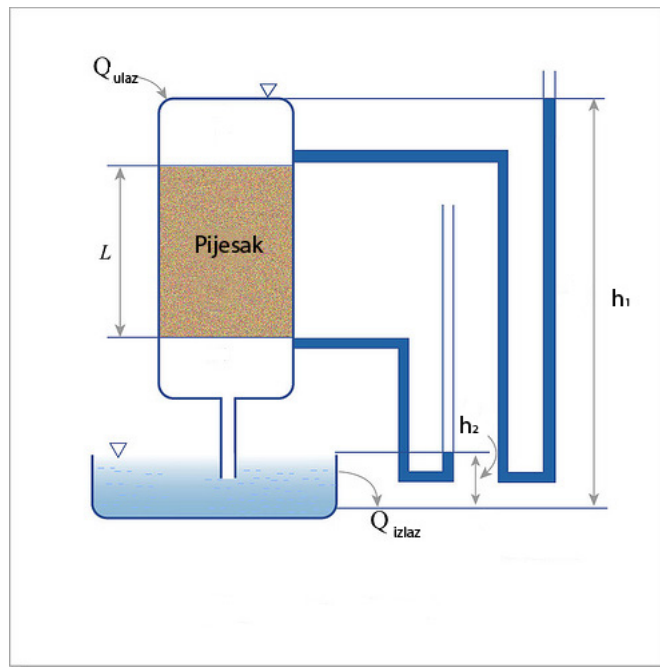
slučaju  $\mathbf{K} = k\mathbb{I}$  kažemo da je sredina izotropna.

Jedinica za propusnost je  $m^2$ , ali se u praksi koristi jedinica  $D$  (darsi) definirana ovako:

$$1D = \frac{1cP \cdot (1cm^3 s^{-1} / 1cm^2)}{1atmcm^{-1}} = 9.86923 \cdot 10^{-13} m^2,$$

gdje je  $cP$  (centipoise) jedinica za viskoznost koja iznosi  $10^{-3} Pas$ . Ta je jedinica još uvijek prevelika pa se propusnost izražava u  $mD$ .

### Darcyjev eksperiment



Slika 1.2: Darcyjev eksperiment

Darcyjev zakon ili zakon filtracije eksperimentalno je pronašao francuski inženjer Henry Darcy, 1856. godine. Postavio je eksperiment u kojemu je kroz spremnik duljine  $L$  i površine presjeka  $A$ , ispunjen pijeskom, protjecala voda (slika 1.2). Mjerena je brzina volumnog toka vode  $Q$  te piezometarska razina na ulazu i izlazu,  $h_1$  (ulaz) i  $h_2$  (izlaz). Dobiven je sljedeći odnos:

$$Q \sim \frac{A(h_2 - h_1)}{L},$$



odnosno, postoji konstanta  $\bar{k}$  takva da je

$$Q = \bar{k} \frac{A(h_2 - h_1)}{L}.$$

Izraz  $\frac{Q}{A}$  je volumni protok po jedinici površine, odnosno Darcyjeva brzina. Generalizacijom dobivamo:

$$q = -\bar{k}\nabla h. \quad (1.6)$$

Kako je piezometrijska razina jednaka  $h = \frac{p}{\rho g} + z$  imamo da je

$$q = -\frac{\bar{k}}{\rho g}(\nabla p - \rho \vec{g}). \quad (1.7)$$

Usporedbom s (1.5) vidimo da je

$$\bar{k} = k \frac{\rho g}{\mu}. \quad (1.8)$$

Koeficijent  $\bar{k}$  naziva se hidraulička vodljivost. Kao i propusnost, hidraulička vodljivost je u najopćenitijem slučaju simetričan, pozitivno definitan tenzor proporcionalan s tenzorom propusnosti.

U tablici 1.2 dane su neke tipične vrijednosti hidrauličke vodljivosti.

Sredina	$\bar{k}(m/s)$
Šljunak	$10^{-1} - 10^{-2}$
Pijesci	$10^{-2} - 10^{-5}$
Glina	$10^{-9} - 10^{-13}$
Dolomiti	$10^{-3} - 10^{-5}$
Kreda	$10^{-3} - 10^{-9}$
Pješčenjaci	$10^{-4} - 10^{-10}$
Granit, gnajs, basalt	$10^{-9} - 10^{-13}$

Tablica 1.2: Hidraulička vodljivost

## 1.4 Model jednofaznog toka

Jedan od najvažnijih zakona u mehanici fluida je zakon sačuvanja mase. Njegov zapis u diferencijalnom obliku na mikroskopskoj skali glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.9)$$

gdje je  $\rho$  gustoća mase, a  $\vec{v}$  brzina fluida. Ukupna masa fluida u volumenu  $\mathfrak{R}$  dana je izrazom:

$$\int_{\mathfrak{R}} \rho(x) dx,$$

dok je izrazom

$$\int_{\mathfrak{R}} \operatorname{div}(\rho(x) \vec{v}(x)) dx = \int_{\partial \mathfrak{R}} \rho(x) \vec{v}(x) \cdot \vec{n} dS$$

dana količina mase fluida koja u jedinici vremena protekne kroz volumen  $\mathfrak{R}$ , odnosno istekne iz njega (ovisno o predznaku). Naš se fluid nalazi u poroznoj sredini te treba primijeniti makroskopski model sačuvanja mase koji glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi \rho) + \operatorname{div}(\rho \vec{q}) = 0, \quad (1.10)$$

gdje je  $\Phi$  poroznost, a  $\vec{q}$  Darcyjeva brzina. Do promjene dolazi stoga što je sada

$$\int_{\mathfrak{R}} \Phi(x) \rho(x) dx,$$

količina mase fluida u volumenu  $\mathfrak{R}$ , dok je količina mase fluida koja pritječe/istječe kroz granice volumena dana s

$$\int_{\mathfrak{R}} \operatorname{div}(\rho(x) \vec{q}(x)) dx = \int_{\partial \mathfrak{R}} \rho(x) \vec{q}(x) \cdot \vec{n} dS$$

prema definiciji Darcyjeve brzine (u sekciji 1.3).

Želimo modelirati jednofazni tok fluida kroz poroznu sredinu. Pretpostavit ćemo da se u poroznoj sredini nalazi samo jedan fluid pod izotermnim uvjetima. Tada su gustoća mase i viskoznost funkcije koje ovise samo o tlaku pa je za opis gibanja dovoljno primijeniti zakon sačuvanja mase i Darcyjev zakon. Imamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, p) \rho(p)) + \operatorname{div}(\rho(p) \vec{q}) = 0, \quad (1.11)$$

$$\vec{q} = -\frac{1}{\mu(p)} \mathbf{K}(x) (\nabla p - \rho(p) \vec{g}). \quad (1.12)$$

Eliminacijom Darcyjeve brzine dobivamo kvazilinearnu jednadžbu paraboličkog tipa za tlak:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, p)\rho(p)) - \operatorname{div}\left(\frac{\rho(p)}{\mu(p)}\mathbf{K}(x)(\nabla p - \rho(p)\vec{g})\right) = 0. \quad (1.13)$$

Uz pretpostavku homogenosti fluida i krutosti porozne sredine, jednadžba (1.13) postaje eliptička jednadžba:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\mu}\mathbf{K}(x)(\nabla p - \rho\vec{g})\right) = 0, \quad (1.14)$$

gdje je ujedno pretpostavljeno da viskoznost ne ovisi o tlaku. Ako uvedemo hidrauličku vodljivost

$$\mathbb{K}(x) = \frac{\rho g}{\mu}\mathbf{K}(x), \quad (1.15)$$

i piezometarsku razinu  $\psi = \frac{p}{\rho g} + z$ , Darcyjev zakon možemo zapisati u obliku:

$$\vec{q} = -\mathbb{K}(x)\nabla\psi, \quad (1.16)$$

a zakon sačuvanja mase:

$$\operatorname{div}(\mathbb{K}(x)\nabla\psi) = 0. \quad (1.17)$$

**Rubni uvjeti.** Osnovni rubni uvjeti koji se postavljaju uz jednadžbu (1.14), odnosno (1.17) su:

- **DIRICHLETTOV**

Na dijelu granice zadaje se tlak  $p$  ili piezometarska razina  $\psi$ .

- **NEUMANNOV**

Zadaje se volumni protok  $\vec{q} \cdot \vec{n}$ .

### Slabo rješenje

Neka je  $\Omega$  ograničena domena, a  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  njezin rub. Promotrimo zadaću:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla\psi) = 0 \text{ u } \Omega \\ -\mathbb{K}\nabla\psi \cdot \vec{n} = Q \text{ na } \Gamma_N \\ \psi = \psi_0 \text{ na } \Gamma_D \end{cases} \quad (1.18)$$

Množenjem jednadžbe (1.18)<sub>1</sub> test funkcijom  $v$  i integriranjem po  $\Omega$  dobivamo:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla\psi) \cdot v \, dx = 0$$

$$\int_{\Omega} \mathbb{K}\nabla\psi \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla\psi v) \, dx.$$

Iskoristivši Teorem o divergenciji (vidi Dodatak) imamo:

$$\int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \psi \nabla v dx - \int_{\Gamma_D} \mathbb{K} \nabla \psi \psi_0 \cdot \vec{n} dS = - \int_{\Gamma_N} Q v dS \quad (1.19)$$

Varijacijska formulacija zadatka (1.18) glasi:

$$\begin{cases} \psi \in H^1(\Omega), \quad \psi|_{\Gamma_D} = \psi_0 \\ a(\psi, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_D} = \psi_0, \end{cases} \quad (1.20)$$

gdje je

$$\begin{aligned} a(\psi, v) &= \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \psi \nabla v dx - \int_{\Gamma_D} \mathbb{K} \nabla \psi \psi_0 \cdot \vec{n} dS \\ \langle F, v \rangle &= - \int_{\Gamma_N} Q v dS \end{aligned}$$

Prema Lax-Milgramovoj lemi (vidi Dodatak) zadatak (1.18) ima jedinstveno slabo rješenje.

## Poglavlje 2

# Matematička teorija periodičke homogenizacije

### 2.1 Uvod

U strojarstvu, fizici i kemiji, proučavanje složenih materijala, makroskopskih svojstava kristalne ili polimerne strukture, dizajn nuklearnih reaktora itd., vodi na proučavanje rubnih problema u sredini s periodičkom strukturom. Ako je period strukture mali u odnosu na veličinu područja u kojoj se sistem proučava, tada želimo naći asimptotski razvoj rješenja u terminu malog parametra  $\varepsilon$  koji predstavlja omjer perioda strukture i karakteristične mjere područja. U takvim su zadaćama prisutne dvije, bitno različite, prostorne skale: jedna mikroskopska, određena periodom strukture, i druga, makroskopska, određena karakterističnom mjerom područja od interesa. Tako ćemo s mikroskopskog opisa sustava prijeći na makroskopski opis sustava. Problem formuliramo ovako: zadana je familija parcijalnih diferencijalnih operatora,  $A^\varepsilon$ , koja ovisi o parametru  $\varepsilon$  (operatori mogu biti stacionarni ili evolucijski, linearni ili nelinearni, itd.). Ti operatori imaju oscilatorne koeficijente koji su periodičke funkcije u svim ili samo nekim varijablama s periodima proporcionalnim parametru  $\varepsilon$ . U domeni  $\Omega$  imamo rubni problem:

$$A^\varepsilon u_\varepsilon = f \text{ u } \Omega \quad (2.1)$$

$$B^\varepsilon u_\varepsilon = g \text{ na } \Gamma = \partial\Omega \quad (2.2)$$

za koji pretpostavljamo da je dobro postavljen za fiksiran  $\varepsilon > 0$ , gdje je  $A^\varepsilon$  diferencijalni operator a  $B^\varepsilon$  operator rubnih uvjeta. Problem je sada naći, ako je moguće, asimptotski razvoj rješenja  $u_\varepsilon$  oblika

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (2.3)$$

Kako je to moguće onda  $u_\varepsilon$  konvergira k  $u_0$  kad  $\varepsilon$  teži u nulu, gdje je  $u_0$  rješenje nekog problema:

$$A^h u_0 = f \quad \text{u } \Omega \quad (2.4)$$

$$B^h u_0 = g \quad \text{na } \Gamma \quad (2.5)$$

gdje je  $A^h$  diferencijalni operator na limesu a  $B^h$  pripadni operator rubnih uvjeta. U (2.4) je  $A^h$  parcijalni diferencijalni operator s neoscilatornim koeficijentima koji zovemo homogenizirani operator familije  $A^\varepsilon$ . Oscilatorno rješenje  $u_\varepsilon$  zadaje (2.1), (2.2) aproksimiramo s neoscilatornim rješenjem  $u_0$  koje zadovoljava zadaću (2.4), (2.5) i koji adekvatno reprezentira srednju vrijednost oscilatornog rješenja  $u_\varepsilon$ , odnosno njegovu neoscilatornu komponentu. Koeficijenti operatora  $A^h$  nazivaju se efektivni koeficijenti ili efektivni parametri koji opisuju makroskopska svojstva koeficijenata operatora  $A^\varepsilon$ . Najbitnije kod prijelaza sa zadaje (2.1),(2.2) na zadaću (2.4),(2.5) jest eksplicitno analitički konstruirati  $A^h$ . Takva konstrukcija zahtjeva rješavanje rubne zadaje na ćeliji koja određuje period koeficijenata operatora  $A^\varepsilon$ . Tada rješenje  $u_0$  možemo naći bez konstrukcije oscilatornog rješenja  $u_\varepsilon$ .

### Postavka problema

Neka je  $\Omega$  otvoren i omeđen skup u  $\mathbb{R}^n$ . U  $\Omega$  promatramo rubne zadaje pridružene uniformnim eliptičkim operatorima  $A^\varepsilon$  s koeficijentima koji osciliraju s periodom  $\varepsilon$ .

**Definicija 2.1.** *Neka je*

$$Y = \prod_{j=0}^n \langle 0, y_j^0 \rangle \subset \mathbb{R}^n.$$

Za funkciju  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  kažemo da je  $Y$  - periodička ako ima period  $y_j^0$  u smjeru  $y_j, j = 1, \dots, n$ .

Promatramo funkcije  $a_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ , takve da

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(y) &= (a_{ij}(y)) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ a_{ij} &\text{ je } Y \text{ - periodička} \\ a_{ij} &\in L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \xi_i \xi_j &\geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha > 0 \text{ za s.s. } y \in Y, \end{aligned} \quad (2.6)$$

te funkciju  $a_0$  koja zadovoljava

$$\begin{aligned} a_0 &\text{ je } Y \text{ - periodička} \\ a_0 &\in L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ a_0(y) &\geq \alpha_0 > 0 \text{ za s.s. } y \in Y. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Funkcije  $a_{ij}$  i  $a_0$  generiraju familiju eliptičkih operatora

$$A^\varepsilon = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (2.8)$$

gdje je  $\varepsilon$  mali pozitivan parametar.

Promatramo zadaću

$$\begin{cases} A^\varepsilon u_\varepsilon = f & \text{u } \Omega \\ Bu_\varepsilon = 0 & \text{na } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

Proučavat ćemo varijacijsku formulaciju rubne zadaće (2.9) i pri tome ćemo, radi jednostavnosti, promatrati homogenu Dirichletovu, Neumannovu ili mješovitu zadaću. Stoga uvodimo bilinearnu formu operatora operatora  $A^\varepsilon$ .

Za  $u, v \in H^1(\Omega)$  definiramo:

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} a_0^\varepsilon u v dx, \quad (2.10)$$

gdje je  $A^\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon})$ ,  $a_0^\varepsilon(x) = a_0(\frac{x}{\varepsilon})$ . Primjetimo da iz svojstava (2.6) i (2.7) slijedi

$$a^\varepsilon(v, v) \geq \min(\alpha, \alpha_0) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.11)$$

Funkcija  $u_\varepsilon$  definirana je kao rješenje zadaće:

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in V \\ a^\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.12)$$

gdje je

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (2.13)$$

a prostor  $V \subset H^1(\Omega)$  je definiran u ovisnosti o izabranim rubnim uvjetima.

**Napomena:** Radi jednostavnosti smo pretpostavili da koeficijenti rubnog operatora  $B$  nisu oscilatorni (on ne ovisi o  $\varepsilon$ ) i da je rubni uvjet homogen. Na taj su način rubni uvjeti oscilatorne i neoscilatorne zadaće isti.

### Primjer: 1D problem

Nalazimo se u jednodimenzionalnim prostoru pa je  $\Omega = \langle x_0, x_1 \rangle$  te promatramo zadaću:

$$-\frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = f \quad \text{u } \Omega \quad (2.14)$$

$$u_\varepsilon(x_0) = u_\varepsilon(x_1) = 0, \quad (2.15)$$

gdje je  $a(y)$   $Y$  - periodička funkcija (s periodom  $y_0$ ) i  $a(y) \geq \alpha > 0$  na  $\Omega$ . Rješavamo zadaću:

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in V = H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.16)$$

Stavivši  $v = u_\varepsilon$  imamo

$$\int_{\Omega} a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx} \frac{du_\varepsilon}{dx} dx = \int_{\Omega} f u_\varepsilon dx$$

i odavde, zbog stroge pozitivnosti koeficijenta  $a^\varepsilon$

$$\alpha \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$$

i stoga je

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\alpha} = C \quad (C \text{ ne ovisi o } \varepsilon). \quad (2.17)$$

Budući da je  $H_0^1(\Omega)$  Hilbertov prostor, iz ograničenosti niza  $(u_\varepsilon)$  slijedi da postoji podniz, koji također označavamo s  $u_\varepsilon$ , takav da

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ slabo u } H_0^1(\Omega) \quad (2.18)$$

(vidi [2]). Nadalje, lako se pokazuje (vidi Dodatak):

$$a^\varepsilon \rightarrow \mu(a) = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} a(y) dy \text{ slabo } * \text{ u } L^\infty(\Omega). \quad (2.19)$$

Krenimo sada naći operator  $A^h$ . Definiramo  $\xi^\varepsilon$  formulom

$$\xi^\varepsilon = a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}. \quad (2.20)$$

Budući da je  $a^\varepsilon$  uniformno omeđen i vrijedi (2.17), imamo:

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\max_y a(y))^2 \int_{\Omega} \left( \frac{du_\varepsilon}{dx} \right)^2 dx \leq (\max_y a(y))^2 C^2.$$

Iz toga slijedi da je  $\xi^\varepsilon$  uniformno omeđen u  $L^2(\Omega)$ . Prema (2.14) imamo:

$$-\frac{d\xi^\varepsilon}{dx} = f, \quad (2.21)$$



te vrijedi:

$$\left\| \frac{d\xi^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty,$$

pa je  $\xi^\varepsilon$  uniformno omeđen u  $H^1(\Omega)$ . Kako je operator ulaganja  $H^1(\Omega)$  u  $L^2(\Omega)$  kompaktan (preslikava slabo kovergentne nizove u jako konvergentne, vidi [2]), na podnizu slijedi

$$\xi^\varepsilon \rightarrow \xi \text{ jako u } L^2(\Omega). \quad (2.22)$$

S druge strane vrijedi:

$$\frac{1}{a^\varepsilon} \xi^\varepsilon \rightarrow \mu \left( \frac{1}{a} \right) \xi \text{ slabo u } L^2(\Omega). \quad (2.23)$$

Zaista, da bismo pokazali (2.23) uzmimo test funkciju  $\varphi \in L^2(\Omega)$ . Tada je  $\xi^\varepsilon \in L^1(\Omega)$  i lako se vidi da  $\xi^\varepsilon \varphi \rightarrow \xi \varphi$  jako u  $L^1(\Omega)$ . Sada po definiciji slabe \* konvergencije u  $L^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{a^\varepsilon} \xi^\varepsilon \cdot \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \mu \left( \frac{1}{a} \right) \xi \cdot \varphi dx.$$

No,  $\frac{1}{a^\varepsilon} \xi^\varepsilon = \frac{du_\varepsilon}{dx}$  pa iz (2.23) i (2.18) slijedi

$$\frac{du}{dx} = \mu \left( \frac{1}{a} \right) \xi$$

S druge strane iz (2.21) slijedi  $-\frac{d\xi}{dx} = f$  pa imamo

$$-\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\mu \left( \frac{1}{a} \right)} \frac{du}{dx} \right) = f \text{ u } \Omega, \quad u(x_0) = u(x_1) = 0. \quad (2.24)$$

Znači: HOMOGENIZIRANI OPERATOR PRIDRUŽEN OPERATORU  $A^\varepsilon$  dan je formulom

$$A^h = -\frac{1}{\mu \left( \frac{1}{a} \right)} \frac{d^2}{dx^2}. \quad (2.25)$$

Budući da je  $A^h$  uniformno eliptički operator i zadaća (2.24) ima jedinstveno rješenje, slijedi da  $u_\varepsilon \rightarrow u$  slabo u  $H_0^1(\Omega)$  (bez uzimanja podniza). Uočimo još da je homogenizirani koeficijent  $a^h = \frac{1}{\mu \left( \frac{1}{a} \right)}$  dan kao **harmonijska sredina** oscilatornog koeficijenta, a ne, kao što bi se moglo pomisliti, aritmetička sredina.

## 2.2 Asimptotski razvoj

Uvodimo funkcije  $\phi(x, y)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , koje su  $Y$  - periodičke u  $y$  te im pridružujemo funkcije  $\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ . Tražimo  $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x)$  u obliku asimptotskog razvoja

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots, \quad (2.26)$$

gdje su funkcije  $u_j(x, \frac{x}{\varepsilon})$ ,  $Y$  - periodičke u  $y$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Ideja asimptotskog razvoja je jednostavno umetnuti (2.26) u jednadžbu (2.9) i identificirati koeficijente uz pripadajuće potencije od  $\varepsilon$ . Pri tome ćemo  $x$  i  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  smatrati nezavisnim varijablama. Primjenimo li operator  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  na funkciju  $\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$  dobivamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \phi(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

pa operator  $A^\varepsilon$  možemo zapisati ovako:

$$A^\varepsilon = \varepsilon^{-2} A_1 + \varepsilon^{-1} A_2 + \varepsilon^0 A_3, \quad (2.27)$$

gdje je

$$\begin{aligned} A_1 &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ A_2 &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ A_3 &= - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Koristeći (2.26) i (2.27) i jednadžbu (2.9), izjednačavanjem s nulom članove uz istu potenciju od  $\varepsilon$  dobivamo niz jednakosti:

$$A_1 u_0 = 0, \quad (2.29)$$

$$A_1 u_1 + A_2 u_0 = 0, \quad (2.30)$$

$$A_1 u_2 + A_2 u_1 + A_3 u_0 = f. \quad (2.31)$$

Naravno, mogli smo nastaviti dalje,  $A_1 u_3 + A_2 u_2 + A_3 u_0 = 0$  itd., no homogenizirani operator  $A^h$  možemo konstruirati pomoću (2.29), (2.30) i (2.31).

Uvodimo prostor

$$H_\#^1(Y) = \{\phi | \phi \in H^1(Y), \phi \text{ je } Y \text{ - periodička funkcija}\}$$

tj.  $\phi \in H_\#^1(Y)$  poprima jednake vrijednosti na suprotnim stranicama ćelije  $Y$ . Prostor  $H_\#^1(Y)$  nasljeđuje normu iz prostora  $H^1(Y)$ .

**Lema 2.2. Zadaća**

$$\begin{cases} A_1\phi = F & \text{u } Y \\ \phi & \text{periodička u } Y \end{cases} \quad (2.32)$$

ima jedinstveno rješenje  $\phi \in H_{\#}^1(Y)$  do na aditivnu konstantu ako i samo ako je zadovoljen uvjet

$$\int_{\Omega} F(y)dy = 0. \quad (2.33)$$

*Dokaz.* Za  $\phi, \psi \in H_{\#}^1(Y)$  definiramo

$$a_1(\phi, \psi) = \int_Y \mathbf{a}(y)\nabla\phi\nabla\psi dy, \quad (2.34)$$

i

$$\langle F, \psi \rangle_Y = \int_Y F(y)\psi(y)dy. \quad (2.35)$$

Tada je (2.32) ekvivalentno s

$$\begin{cases} \phi \in H_{\#}^1(Y) \\ a_1(\phi, \psi) = \langle F, \psi \rangle_Y, \forall \psi \in H_{\#}^1(Y). \end{cases} \quad (2.36)$$

Uvjet (2.33) je potreban budući da je  $a_1(\phi, 1) = 0$ . Rješenje je jedinstveno do na aditivnu konstantu koju možemo eliminirati prijelazom na kvocijentni prostor. Ako vrijedi (2.33) onda uzimamo

$$H_{\#}^{1*}(Y) = H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R} \quad (2.37)$$

i  $\psi \rightarrow \langle F, \psi \rangle_Y = \langle F, \psi + c \rangle_Y, \forall c \in \mathbb{R}$  postaje neprekidna linearna forma na  $H_{\#}^{1*}(Y)$  (uz uvjet  $F \in L^2(Y)$ ). Isto tako za  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a_1(\phi + c_1, \psi + c_2) = a_1(\phi, \psi)$ , pa je  $a_1$  dobro definirana bilinearna forma na  $H_{\#}^{1*}(Y) \times H_{\#}^{1*}(Y)$ . Nadalje, iskoristit ćemo činjenicu da je  $\|\nabla\phi\|_{L^2(Y)}$  jedna norma na  $H_{\#}^1(Y)$  ekvivalentna s  $\|\phi\|_{H_{\#}^{1*}(Y)}$  normom. Stoga je  $a_1(\phi, \phi) \geq c\|\phi\|_{H_{\#}^{1*}(Y)}^2$ ,  $c > 0$  te po Lax-Milgramovoj lemi (vidi Dodatak) slijedi da (2.36) ima jedinstveno rješenje u prostoru  $H_{\#}^{1*}(Y)$  (tj.  $\phi$  je definirano do na aditivnu konstantu).  $\square$

### Rješenje jednadžbe (2.29)

Iz (2.32) i (2.33), jedino periodičko rješenje jednadžbe (2.29) je  $u_0 =$  konstanta u odnosu na varijablu  $y$ , što znači:

$$u_0(x, y) = u(x). \quad (2.38)$$

**Rješenje jednadžbe (2.30)**

$$A_1 u_1 + A_2 u_0 = 0 \Rightarrow A_1 u_1 = -A_2 u_0$$

Zbog (2.38) imamo:

$$\begin{aligned} A_2 u_0 = A_2 u(x) &= - \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right] u(x) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x). \quad (2.39)$$

Kako je desna strana u separiranom obliku tražimo  $u_1$  oblika

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^n \chi^k(y) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + \tilde{u}_1(x), \quad (2.40)$$

gdje su  $\chi^k(y)$  i  $\tilde{u}_1(x)$  nepoznate funkcije koje moramo odrediti. Uvrštavanjem (2.40) u (2.39) se lako dobije da  $\chi^k = \chi^k(y)$  mora biti rješenje zadatice

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial \chi^k}{\partial y_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ik}(y) \\ \chi^k \text{ } Y\text{-periodička.} \end{cases} \quad (2.41)$$

Budući da je  $\int_Y \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ik}(y) dy = 0$ , po Lemi 2.2 postoji jedinstveno rješenje  $\chi^k$  koje zadovoljava (2.41). Time je  $u_1(x, y)$  poznato do na aditivni član  $\tilde{u}_1(x)$ .

**Rješenje jednadžbe (2.31)**

Promatramo (2.31) gdje  $u_2$  smatramo nepoznatim a  $x$  uzimamo za parametar. Prema Lemi 2.2,  $u_2$  postoji ako i samo ako vrijedi

$$\int_Y (A_2 u_1 + A_3 u_0) dy = \int_Y f dy = |Y|f, \quad (2.42)$$

gdje je  $|Y|$  mjera skupa  $Y$ . To je homogenizirana jednadžba koju tražimo. Koristeći periodičnost funkcija raspisujemo

$$\begin{aligned} \int_Y A_2 u_1 dy &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_j} dy = - \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}(y) dy \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right] \\ \int_Y A_3 u_0 dy &= \int_Y \left( - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + a_0(y) u(x) \right) dy. \end{aligned}$$

Uvjet (2.42) daje

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \int_Y \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) + a_{ij}(y) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] + \left( \int_Y a_0(y) dy \right) u(x) = |Y| f(x).$$

Uvedimo sada homogenizirani koeficijent difuzije  $\mathbf{a}^h$ , koji je konstantna matrica, dan formulom

$$a_{ij}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ a_{ij}(y) + \sum_{k=1}^n a_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) \right] dy \quad (2.43)$$

te homogen koeficijent  $a_0^h$

$$a_0^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_0(y) dy = \mu(a_0). \quad (2.44)$$

Sada diferencijalni operator  $A^h$  možemo zapisati u obliku

$$A^h u \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^h \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0^h u = f. \quad (2.45)$$

Postupak određivanja homogeniziranog operatora  $A^h$ :

1. Riješiti (2.41) na jediničnoj ćeliji  $Y$ , za  $k = 1, \dots, n$ ;
2. Izračunati  $A^h$  prema (2.45)

### Napomene

- 1D slučaj

U jednodimenzionalnom slučaju je  $\chi^k = \chi$  pa se (2.41) svodi na

$$- \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{d\chi}{dy} \right) = \frac{da}{dy} \Rightarrow a(y) \frac{d\chi}{dy} = -a(y) + c.$$

Koeficijent  $c$  se određuje iz uvjeta  $\int_Y \left(1 - \frac{c}{a(y)}\right) dy = 0$  tj.

$$1 - c\mu\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{\mu\left(\frac{1}{a}\right)}. \quad (2.46)$$

Prema (2.43) je homogeni koeficijent

$$a^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ a(y) + a(y) \frac{\partial \chi}{\partial y} \right] dy = \frac{1}{|Y|} \int_Y (a(y) - a(y) + c) dy = c = \frac{1}{\mu\left(\frac{1}{a}\right)}$$

što smo i dobili u (2.25).

- Eliptičnost operatora  $A^h$   
Prvo ćemo pokazati da je

$$a_{ij}^h = \frac{1}{|Y|} a_1(\chi^j + y_j, \chi^i + y_i). \quad (2.47)$$

Zaista (2.41) je ekvivalentno s

$$a_1(\chi^j + y_j, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H_{\#}^1(Y), \quad (2.48)$$

gdje je  $a_1(\cdot, \cdot)$  bilinearna forma (2.34), pridružena operatoru  $A_1$ . Ako stavimo  $\psi = \chi^i$  dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Y|} a_1(\chi^j + y_j, \chi^i + y_i) &= -\frac{1}{|Y|} a_1(\chi^j + y_j, y_i) \\ &= -\frac{1}{|Y|} \int_Y \sum_{l,k=1}^n a_{lk} \left( \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} + \delta_{jk} \right) \delta_{il} dy \\ &= -\frac{1}{|Y|} \int_Y \sum_{k=1}^n (a_{ik} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} + a_{ij}) dy = a_{ij}^h. \end{aligned}$$

Sada je

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h \xi_i \xi_j = \frac{1}{|Y|} a_1(w, w), \quad w = \sum_{i=1}^n \xi_i (\chi^i + y_i). \quad (2.49)$$

Zbog koercitivnosti forme  $a_1$  imamo

$$a_1(w, w) \geq \alpha \int_Y \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial w}{\partial y_k} \right)^2 dy$$

pa slijedi:  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h \xi_i \xi_j \geq \alpha \int_Y \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial w}{\partial y_k} \right)^2 dy \geq 0$ . Zbog pozitivnosti sumanada jasno je da je

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h \xi_i \xi_j = 0 \iff \frac{\partial w}{\partial y_k} = 0 \quad \forall k$$

a to vrijedi samo za  $w = c$ . Ali tada je  $-\sum_{i=1}^n \xi_i y_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \chi^i - c$ ,  $Y$ -periodička funkcija, što povlači  $\xi_i = 0$  za sve  $i = 1, \dots, n$ . Time je pozitivna definitnost od  $A^h$  dokazana.

- Simetričnost

U slučaju da imamo simetričnost matrice  $\mathbf{a}(y)$  tj. da vrijedi

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \quad (2.50)$$

tada je  $a_1(\phi, \psi) = a_1(\psi, \phi) \quad \forall \phi, \psi \in H^1(Y)$  pa iz (2.43) slijedi

$$a_{ij}^h = a_{ji}^h, \quad \forall i, j \quad (2.51)$$

tj. diferencijalni operator  $A^h$  je također simetričan.

- Dijagonalnost

Ako je operator  $A^\varepsilon$  dijagonalan (tj.  $a_{ij} = 0$  za  $i \neq j$ ), operator  $A^h$  nije nužno dijagonalan: za  $i \neq j$  je

$$a_{ij}^h = -\frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ii} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} dy$$

što nije nužno jednako nuli.

- Operator  $A^h$  ne ovisi o  $\Omega$  već samo o koeficijentima zadanim na ćeliji periodičnosti.

## 2.3 Energetski dokaz homogenizacijske formule

Vratimo se zadaći (2.12). Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je  $a_0 = 0$ . Slučaj  $a_0 \neq 0$  tretira se analogno. Za  $u, v \in H^1(\Omega)$  stavimo

$$a^h(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (2.52)$$

gdje je  $a_{ij}^h$  definiran u (2.47), a  $\chi^j$  u (2.41). Neka je  $u$  rješenje homogenizirane zadaće:

$$\begin{cases} u \in V \\ a^h(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.53)$$

Sljedeći teorem predstavlja opravdanje postupka asimptotskog razvoja kojim smo došli do homogeniziranog problema.

**Teorem 2.3.** *Neka  $a_{ij}$  i  $a_0$  zadovoljavaju (2.6) i (2.7) i neka je  $f \in V'$ . Neka je  $u_\varepsilon$  rješenje zadaće (2.12), a  $u$  zadaće (2.53). Tada*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ slabo u } V \text{ kada } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.54)$$

**Napomene:**

1. Općenito  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$  ne konvergira jako k  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  pa se (2.54) ne može poboljšati bez upotrebe korektora (vidi sekciju 2.4.).
2. Promotrimo općenitiji slučaj: neka je zadana familija  $f_\varepsilon \in V'$  i neka je  $u_\varepsilon$  rješenje jednadžbe

$$a^\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f_\varepsilon, v \rangle \quad \forall v \in V, u_\varepsilon \in V. \quad (2.55)$$

Pretpostavimo da

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ jako u } V', \quad (2.56)$$

i neka je  $u$  rješenje od

$$a^h(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, u \in V. \quad (2.57)$$

Tada također vrijedi (2.54)!

*Dokaz.* Koristimo općenitiju formu iz prethodne napomene.

Uzimajući  $v = u_\varepsilon$  u (2.55) te koristeći koercitivnost (2.11) dobivamo

$$\|u_\varepsilon\|_V \leq C, \quad (2.58)$$

gdje  $C$  ne ovisi o  $\varepsilon$ . Definiramo

$$\xi_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^n a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}. \quad (2.59)$$

Tada iz (2.58) i ograničenosti koeficijenata  $a_{ij}^\varepsilon$  slijedi uniformno po  $\varepsilon$  ocjena

$$\|\xi_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (2.60)$$



Stoga možemo uzeti podnizove od  $u_\varepsilon$  i  $\xi_i^\varepsilon$  takve da

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u \text{ slabo u } V, \\ \xi_i^\varepsilon &\rightarrow \xi_i \text{ slabo u } L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.61)$$

(vidi [2]). Jednadžbu (2.55) možemo zapisati ovako:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle f_\varepsilon, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (2.62)$$

što na limesu kada  $\varepsilon \rightarrow 0$  daje

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (2.63)$$

Sada računamo  $\xi_i$  koristeći adjungirane jednadžbe. Neka je  $P(y)$  homogeni polinom stupnja 1 (tj.  $P(y) = a \cdot y$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  konstantan vektor) i neka je  $A_1^*$  adjungirani operator operatora  $A_1$ :

$$A_1^* = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}^* \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad a_{ij}^* = a_{ji}. \quad (2.64)$$

Definiramo  $w$  kao rješenje od

$$A_1^* w = 0 \quad (2.65)$$

tako da je  $w - PY$  - periodičko. Takva funkcija  $w$  postoji jer ako definiramo

$$w - P = \hat{\chi} \quad (2.66)$$

onda vrijedi

$$A_1^* \hat{\chi} = A_1^* P, \quad \hat{\chi} \text{ je } Y \text{ - periodička.} \quad (2.67)$$

Zadaća ima rješenje  $\hat{\chi}$  jedinstveno do na aditivnu konstantu jer je zadovoljen nužan uvjet egzistencije  $\int_Y A_1^* P = 0$ . Sljedeće definiramo

$$w_\varepsilon = \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = P(x) + \varepsilon \hat{\chi}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2.68)$$

Iz (2.67) i (2.68) slijedi

$$(A^\varepsilon)^* w_\varepsilon = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n. \quad (2.69)$$

Uvrstivši  $v = \phi w_\varepsilon$ ,  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  u (2.55) dobivamo  $a^\varepsilon(u_\varepsilon, \phi w) = \langle f_\varepsilon, \phi w_\varepsilon \rangle$ . Uzevši skalarni produkt (2.69) sa  $\phi u_\varepsilon$  dobivamo  $a^\varepsilon(\phi u_\varepsilon, w_\varepsilon) = 0$ . Oduzimanjem slijedi:

$$a^\varepsilon(u_\varepsilon, \phi w_\varepsilon) - a^\varepsilon(\phi u_\varepsilon, w_\varepsilon) = \langle f_\varepsilon, \phi w_\varepsilon \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi w_{\varepsilon}) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi u_{\varepsilon}) \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial x_i} dx &= \langle f_{\varepsilon}, \phi w_{\varepsilon} \rangle, \\ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} w_{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial x_i} u_{\varepsilon} dx &= \langle f_{\varepsilon}, \phi w_{\varepsilon} \rangle. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Lijeva strana (2.70) jednaka je:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i^{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} w_{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u_{\varepsilon} dx. \quad (2.71)$$

No  $a_{ij}^{\varepsilon} \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial x_i} = \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right)^{\varepsilon}$  pa izraz (2.71) pri  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergira k

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} P dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \mu \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u(x) dx \quad (2.72)$$

jer, naime,

$$w_{\varepsilon} \rightarrow P \text{ jako u } L^2(\Omega),$$

$u_{\varepsilon} \rightarrow u$  slabo u  $H^1(\Omega)$  pa stoga jako u  $L^2(\Omega')$  ( $\forall \Omega' \subset \Omega$ , omeđen)

$$\left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right)^{\varepsilon} \rightarrow \mu \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right) \text{ u } L^{\infty} \text{ slabo * (vidi Dodatak).}$$

S druge strane

$$\phi w_{\varepsilon} \rightarrow \phi P \text{ slabo u } H_0^1(\Omega) \quad (2.73)$$

jer

$$\phi w_{\varepsilon} \rightarrow \phi P \text{ jako u } L^2(\Omega)$$

$$\phi \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial x_i} = \phi \frac{\partial P}{\partial x_i} - \phi \left( \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial y_i} \right)^{\varepsilon} \rightarrow \phi \left( \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial y_i} \right)^{\varepsilon} \rightarrow \phi \mu \left( \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial y_i} \right) = 0 \text{ slabo u } L^2(\Omega).$$

Stoga iz (2.73) i (2.56) slijedi:

$$\langle f_{\varepsilon}, \phi w_{\varepsilon} \rangle \rightarrow \langle f, \phi P \rangle.$$

Sada možemo prijeći na limes kada  $\varepsilon \rightarrow 0$  u (2.70) i dobivamo

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} P dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \mu \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u dx = \langle f, \phi P \rangle.$$

Koristeći (2.63) dobivamo

$$\langle f, \phi P \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial(\phi P)}{\partial x_i} dx$$

te slijedi:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) P dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \mu \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial(\phi P)}{\partial x_i} dx.$$

Stoga je

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \phi dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \mu \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \phi dx, \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

gdje smo na desnoj strani napravili parcijalnu integraciju. Time smo dobili

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n \mu \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}. \quad (2.74)$$

Ako uzmemo  $P(y) = y_k$  i definiramo prema (2.67)

$$A_1^* \hat{\chi}^k = A_1^* y_k \quad (2.75)$$

onda je  $w = y_k - \hat{\chi}^k$  i

$$\xi_i = \sum_{j,k=1}^n \mu \left( a_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k} (y_i + \hat{\chi}^j) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}. \quad (2.76)$$

Naposlijetku, koristeći (2.76) i (2.63) vidimo da  $u$  zadovoljava

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n \mu \left( a_{ij} + a_{kj} \frac{\partial \hat{\chi}^i}{\partial y_k} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad (2.77)$$

Ostaje samo pokazati da vrijedi:

$$\mu \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} \right) = \mu \left( \sum_{k=1}^n a_{kj} \frac{\partial \hat{\chi}^i}{\partial y_k} \right). \quad (2.78)$$

Uzimajući skalarni produkt (2.75) za  $k = i$  sa  $\chi^j$  dobivamo

$$\int_Y A_1^* \hat{\chi}^i \chi^j dy = - \int_Y \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} dy,$$

a skalarni produkt (2.41) s  $\hat{\chi}^i$  daje

$$\int_Y A_1 \chi^j \hat{\chi}^i dy = - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n a_{kj} \frac{\partial \hat{\chi}^i}{\partial y_k} dy.$$

Stoga je po definiciji adjungiranog operatora

$$\int_Y A_1^* \hat{\chi}^i \chi^j dy = \int_Y A_1 \chi^j \hat{\chi}^i dy \quad (2.79)$$

što daje (2.78) pa je s time tvrdnja teorema ( i napomene 2) u potpunosti dokazana.  $\square$

## 2.4 Korektori

Kao što smo ranije vidjeli,  $u_\varepsilon - u$  ne konvergira jako u nulu u  $V$  (nego samo slabo). Može se pokazati da  $\frac{\partial}{\partial x_i}(u_\varepsilon - u) \rightarrow 0$  u  $L^p(\Omega)$  slabo za neki  $p > 2$ , ali iz toga ne slijedi jaka konvergencija u  $V$ . Zato uvodimo korektore.

Tražimo  $\Theta_\varepsilon$  takav da vrijedi

$$u_\varepsilon - u - \Theta_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ jako u } V. \quad (2.80)$$

Jasno je da tražimo  $\Theta_\varepsilon \neq u_\varepsilon - u$ , štoviše želimo korektor reda  $\varepsilon$  u  $L^2(\Omega)$  normi. Ideja je uzeti  $u_1$  dano s (2.40) i definirati:

$$\begin{aligned} \Theta_\varepsilon &= \varepsilon u_1 \\ u_1 &= u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = - \sum_{j=1}^n \chi^j \frac{\partial u}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ako pretpostavimo da je  $\chi^j \in W^{1,\infty}(Y)$  i da je  $u \in H^2(\Omega)$ , tada je  $\Theta_\varepsilon$  iz  $H^1(\Omega)$  ali općenito ne pripada prostoru  $V$ . No, uvijek možemo, uz male transformacije, dobiti korektor iz  $V$ . U tu svrhu uvedimo funkciju rezanja:

$$\begin{aligned} m_\varepsilon &\in C_c^\infty(\Omega) \\ m_\varepsilon(x) &= \begin{cases} 0 & \text{ako } d(x, \Gamma) \leq \varepsilon \\ 1 & \text{ako } d(x, \Gamma) \geq 2\varepsilon \end{cases} \\ \varepsilon^{|\gamma|} |D^\gamma m_\varepsilon(x)| &\leq c_\gamma, \forall \gamma \end{aligned} \quad (2.82)$$

gdje  $c_\gamma$  ovisi o  $\gamma$  ali ne ovisi o  $\varepsilon$ , a  $d(x, \Gamma)$  je udaljenost od  $x$  do  $\Gamma$ . Takve funkcije postoje ako je  $\Gamma$  dovoljno glatka. Sada definiramo

$$\Theta_\varepsilon = \varepsilon m_\varepsilon u_1 = - \sum_{j=1}^n \varepsilon m_\varepsilon(x) \chi^j \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x). \quad (2.83)$$

Vrijedi sljedeći rezultat:

**Teorem 2.4.** *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.3. Pretpostavimo da je  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\chi^j$  definirano izrazom (2.41) iz  $W^{1,\infty}(Y)$  za svaki  $j$ , te neka je granica skupa  $\Omega$  dovoljno glatka. Tada ako  $\Theta_\varepsilon$  definiramo izrazom (2.83) onda*

$$u_\varepsilon - u - \Theta_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ jako u } V.$$

Funkciju  $\Theta_\varepsilon$  nazivamo korektorom prvog reda.

Za dokaz vidi [1] Teorem 5.1. str. 50.

## 2.5 Eliptički operatori s neuniformno oscilirajućim koeficijentima

Promotrimo familiju operatora ovog tipa:

$$A^\varepsilon = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0 \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (2.84)$$

i pretpostavimo ove uvjete:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C^0(\overline{\Omega}; L^\infty_\#(\mathbb{R}^n)) \quad \forall i, j \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y) \xi_i \xi_j &\geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0, x \in \overline{\Omega} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$a_0 \in C^0(\overline{\Omega}; L^\infty_\#(\mathbb{R}^n)), \quad a_0(x, y) \geq \alpha_0 > 0 \quad (2.86)$$

gdje je  $C^0(\overline{\Omega}; L^\infty_\#(\mathbb{R}^n))$  prostor funkcija  $\phi(x, y)$  definiranih na  $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$  takvih da je  $\phi(x, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , za svako  $x \in \overline{\Omega}$ , i  $x \rightarrow \phi(x, \cdot)$  je neprekidna funkcija s  $\overline{\Omega}$  u  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  i  $\phi$  je  $Y$ -periodička u  $y$  za svako  $x$  (periodičnost označavamo indeksom  $\#$ ,  $L^\infty_\#(\mathbb{R}^n)$ ). Prostor  $C^0(\overline{\Omega}; L^\infty_\#(\mathbb{R}^n))$  opskrbljujemo normom

$$\sup_x \|\phi(x, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_x \operatorname{ess\,sup}_y |\phi(x, y)|. \quad (2.87)$$

Za  $u, v \in H^1(\Omega)$  definiramo

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a_0 \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) uv dx. \quad (2.88)$$

Neka je  $u_\varepsilon$  rješenje zadaje:

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in V \\ a^\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.89)$$

gdje je  $f \in V'$ . Zanima nas kako se ponaša  $u_\varepsilon$  za  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Asimptotski razvoj u neuniformnom slučaju ima oblik:

$$\begin{aligned} A^\varepsilon &= \varepsilon^{-2}A_1(x) + \varepsilon^{-1}A_2 + \varepsilon^0A_3 \\ A_1(x) &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ A_2(x) &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ A_3(x) &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

a rješenje  $u_\varepsilon$  se traži u obliku:

$$u_\varepsilon = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \dots, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (2.91)$$

Prema postupku homogenizacije iz sekcije 2.2 dobivamo

$$A_1 u_0 = 0 \quad (2.92)$$

$$A_1 u_1 + A_2 u_0 = 0 \quad (2.93)$$

$$A_1 u_2 + A_2 u_1 + A_3 u_0 = f, \quad (2.94)$$

itd. Jednadžba (2.92) daje  $u_0(x, y) = u(x)$  pa se (2.93) reducira na

$$A_1 u_1 = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(x, y) \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x).$$

Budući da ovdje uzimamo  $x$  za parametar, slijedi da je

$$u_1(x, y) = - \sum_{j=1}^n \chi^j(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) + \tilde{u}_1(x), \quad (2.95)$$

gdje je  $\chi^j(x, y)$  jedinstveno rješenje (do na aditivnu konstantu) zadaje

$$\begin{aligned} A_1(x)(\chi^j(x, y) + y_j) &= 0, \\ \chi^j(x, y) &Y\text{-periodička u } y, \\ \chi^j &\text{ ovisi neprekidno o } x \text{ s vrijednostima u } H_\#^1(Y). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Jednadžba (2.94) ima  $Y$ -periodičko rješenje  $u_2$  ako i samo ako vrijedi

$$\int_Y (A_2 u_1 + A_3 u_0) dy = |Y|f(x)$$

što vodi na  $A^h u = f$ , kao i u sekciji 2.2. Ako su  $a_{ij}$  i  $a_0$  konstante u  $x$ , problem se svodi na već razmotreno. Homogenizirani operator je u općem slučaju dan s:

$$A^h = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^h(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_0^h(x) \quad (2.97)$$

$$a_0^h(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_0(x, y) dy = \mu_y(a_0(x, y)), \quad (2.98)$$

$$a_{ij}^h(x) = \frac{1}{|Y|} a_1(\chi^j(x, y) + y_j, \chi^i(x, y) + y_i), \quad (2.99)$$

gdje je  $a_1$  bilinearna forma pridružena operatoru  $A_1$  definirana ovako:

$$a_1(x; \phi, \psi) = \int_Y \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy, \quad \forall \phi, \psi \in H^1(Y). \quad (2.100)$$

Funkcije  $x \rightarrow a_{ij}^h(x)$  su neprekidne u  $\bar{\Omega}$ , a matrica  $a_{ij}^h$  je uniformno pozitivno definitna na  $\Omega$ , odnosno postoji  $\gamma > 0$  takav da

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.101)$$

Za svaki  $u, v \in H^1(\Omega)$  definiramo

$$a^h(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0^h(x) uv dx. \quad (2.102)$$

Iz (2.86) slijedi da vrijedi  $a_0^h(x) \geq \alpha_0$  što s (2.101) daje jedinstvenost rješenja zadaće

$$\begin{cases} u \in V, \\ a^h(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.103)$$

Glavni rezultat sadržan je u sljedećem teoremu:

**Teorem 2.5.** *Neka vrijedi (2.85) i (2.86) i neka je  $f \in V'$ . Tada  $u_\varepsilon$ , rješenje zadaće (2.89) konvergira slabo u  $V$  k rješenju u zadaće (2.103), gdje je  $A^h$  konstruiran pomoću (2.97) - (2.99) homogenizirani operator pridružen operatoru  $A^\varepsilon$ .*

Dokaz se može naći u [1] Teorem 6.1. str. 74.

Ako pretpostavimo da je  $A^\varepsilon$  simetričan i

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}; L^\infty(\mathbb{R}^n)), \quad (2.104)$$

možemo definirati

$$\Theta_\varepsilon = - \sum_{i,j=1}^n \varepsilon \chi^j(x, \frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) m_\varepsilon(x), \quad (2.105)$$

gdje je  $m_\varepsilon$  funkcija rezanja konstruirana kao u sekciji 2.4. Tada imamo:

**Teorem 2.6.** *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.5, neka je  $a_{ij} = a_{ji}$  za svaki  $i, j$  i vrijedi (2.104). Tada ako je  $f \in V' \cap L^2_{loc}(\Omega)$  onda*

$$z_\varepsilon = u_\varepsilon - (u + \Theta_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (2.106)$$

jako u  $V$ .

Dokaz u [1] Teorem 6.2. str 76.



## Poglavlje 3

# Numerička verifikacija rezultata homogenizacije

U nekoliko primjera ilustrirat ćemo postupak homogenizacije te s praktične strane uvidjeti njezinu važnost pri prelasku s mikroskopske na makroskopsku skalu. Svi numerički rezultati dobiveni su u programu FreeFem, a vizualizacija u programu Paraview. U svim primjerima fluid je voda, a porozna sredina satkana od vapnenca.

### 3.1 Kvazi 1D slučaj

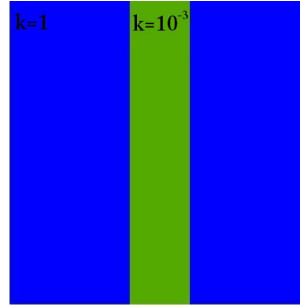
Započnimo numeričku verifikaciju najjednostavnijim primjerom - 1D periodičnošću. To je vrlo praktično jer rješenje možemo dobiti egzaktno (pomoću teorije iz 2. poglavlja) te tako testirati FreeFem kod. Promatramo domenu dimenzija  $1250m \times 100m$  i na njoj periodičku hidrauličku vodljivost  $\mathbb{K} = \mathbb{K}(x)$ . Kako hidraulička vodljivost ovisi samo o jednoj varijabli očekujemo 1D ponašanje na 2D domeni i zato je to zapravo kvazi 1D slučaj. Postupak homogenizacije prvo provodimo egzaktno a zatim numerički verificiramo u FreeFem-u.

#### Teorijski rezultat

Na jediničnoj ćeliji zadana je hidraulička vodljivost  $\mathbb{K}(x) = k(x)\mathbb{I}$ , gdje je

$$k(x) = \begin{cases} 10^{-3} & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$

(slika 3.1).


 Slika 3.1: Permeabilnost  $k$  na jediničnoj ćeliji

Prema postupku u sekciji 2.2 prvo rješavamo zadaće na ćeliji (zadaće (2.41)), koje u našem slučaju glase:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_1} \left( k_{11}(y_1) \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1}(y) \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left( k_{22}(y_1) \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1}(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y_1} k_{11}(y_1) \\ \chi^1 \quad Y - \text{periodička} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_1} \left( k_{11}(y_1) \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1}(y) \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left( k_{22}(y_1) \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1}(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y_2} k_{22}(y_1) \\ \chi^2 \quad Y - \text{periodička} \end{cases} \quad (3.2)$$

Kako funkcija  $k$  ovisi samo o prvoj varijabli, tj.  $k = k(x)$ , pretpostavit ćemo isto i za  $\chi^1$  i  $\chi^2$ , tj.  $\chi^1 = \chi^1(y_1)$  te  $\chi^2 = \chi^2(y_1)$ .

Rješenje zadaće (3.1)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y_1} \left( k_{11}(y_1) \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1}(y_1) \right) &= \frac{\partial}{\partial y_1} k_{11}(y_1) \\ -\frac{\partial}{\partial y_1} \left( k_{11}(y_1) \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1}(y_1) + k_{11}(y_1) \right) &= 0 \\ -k_{11}(y_1) \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1}(y_1) - k_{11}(y_1) &= C_1 \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1}(y_1) &= -\frac{C_1}{k_{11}(y_1)} - 1 \\ \chi^1(y_1) - \chi^1(0) &= -C_1 \int_0^{y_1} \frac{1}{k_{11}(\xi)} d\xi - y_1 \end{aligned}$$

Sada iskoristimo činjenicu da je  $\chi^1(1) = \chi^1(0)$ , što izlazi iz  $Y$  - periodičnosti funkcije  $\chi^1$ , te dobivamo:

$$-C_1 \int_0^1 \frac{1}{k_{11}(\xi)} d\xi - 1 = 0.$$

Uočimo da je

$$C_1 = -\frac{1}{\mu\left(\frac{1}{k_{11}}\right)} = -1.24969 \cdot 10^{-3}.$$

Rješenje zadatke (3.2)

$$-\frac{\partial}{\partial y_1} \left( k_{11}(y_1) \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1}(y_1) \right) = 0$$

$$k_{11}(y_1) \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1}(y_1) = C_2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial y_1}(y_1) = \frac{C_2}{k_{11}(y_1)}$$

$$\chi^2(y_1) = -C_2 \int_0^{y_1} \frac{1}{k_{11}(\xi)} d\xi + D.$$

No, primijetimo da je  $k_{11}(y_1) \geq 0 \quad \forall y_1 \in [0, 1]$  (jer poprima vrijednost 1 ili  $10^{-3}$ ) a kako  $\chi^2$  mora biti periodička, nameće se uvjet  $C_2 = 0$ , što nam ostavlja  $\chi^2 = D$ , konstantna funkcija.

### Homogenizirani operator $\mathbb{K}^h$

Prema (2.43) homogenizirani operator dan je s:

$$k_{11}^h = \int_0^1 k_{11} + k_{11} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} dy = -C = 1.24969 \cdot 10^{-3}$$

$$k_{12}^h = \int_0^1 k_{12} + k_{11} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1} dy = 0$$

$$k_{21}^h = \int_0^1 k_{21} + k_{22} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} dy = 0$$

$$k_{22}^h = \int_0^1 k_{22} + k_{22} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_2} dy = \int_0^1 k_{22}(y) dy = \mu(k_{22}) = 0.2008$$

zapisano matrično:

$$\mathbb{K}^h(x) = \begin{bmatrix} 1.24969 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0.2008 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Uočimo da je homogenizirani operator  $\mathbb{K}^h$  konstantan operator (što općenito ne mora biti slučaj).

### Numerički rezultat

U FreeFemu numerički rješavamo familiju zadaća:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \psi = 100 \text{ bar} & \text{na } \Gamma_L \\ \psi = 30 \text{ bar} & \text{na } \Gamma_D \\ \mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_{lat} \end{cases} \quad (3.4)$$

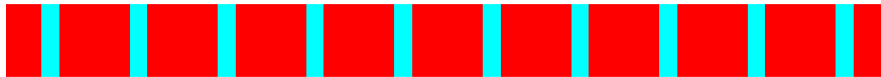
(gdje je  $\Gamma_L$  lijeva,  $\Gamma_D$  desna strana pravokutnika, a  $\Gamma_{lat}$  ostatak granice) i promatramo što se događa s rješenjem kako smanjujemo  $\varepsilon$ . Za svaki odabrani  $\varepsilon$  imamo pripadnu Dirichletovu zadaću. Zadajemo skalarnu hidrauličku vodljivost,  $\mathbb{K}^\varepsilon = k_\varepsilon \mathbb{I}$ , pomoću periodičnih skalarnih funkcija  $k_\varepsilon$  koje su dobivene proširivanjem funkcije  $k$  koja je zadana na jediničnoj ćeliji, na cijelu domenu  $1250 \times 100$ . Zapravo, kako su to funkcije koje ovise samo o prvoj varijabli, proširujemo funkciju s  $[0,1]$  na  $[0,1250]$  i to formulom:

$$k_\varepsilon(x) = k\left(\frac{x}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor\right), \quad \forall x \in [0, 1250].$$

Ovdje se  $\varepsilon$  odnosi na dužinu ćelije periodičnosti, pa je odabrano  $\varepsilon = 250, 125, 50$ . Funkcije  $k_{250}, k_{125}$  i  $k_{50}$  (koje pripadaju odgovarajućim  $\varepsilon$ -ima) prikazane su na slikama 3.2, 3.3 i 3.4 (plava boja predstavlja vrijednost  $10^{-3}$ , a crvena vrijednost  $1 \text{ m/dan}$ ).



Slika 3.2:  $k_{250}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$



Slika 3.3:  $k_{125}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$

Slika 3.4:  $k_{50}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 50$ 

Pri triangulaciji domene u FreeFemu posebna pozornost je pridodana tome da se nijedan trokut ne nalazi u dva materijala različite hidrauličke vodljivosti te da mreža uvijek bude dovoljno fina kako bi mogla pratiti oscilacije rješenja.

FreeFem metodom konačnih elemenata rješava parcijalne diferencijalne jednačbe koje se mogu zapisati pomoću varijacijske formulacije. Zapišimo problem(e) (3.4) u varijacijskoj formulaciji:

$$\begin{cases} \psi \in H^1(\Omega), \quad \psi|_{\Gamma_L} = 100, \quad \psi|_{\Gamma_D} = 30 \\ \int_{\Omega} \mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi \cdot \nabla v dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_L} = 100, \quad v|_{\Gamma_D} = 30, \end{cases} \quad (3.5)$$

koju u FreeFem upisujemo ovako:

```
problem epsilon1(psi1, phi1)=
int2d(Th) (keps1*(dx(psi1)*dx(phi1)+dy(psi1)*dy(phi1)))
+on(1, psi1=p0)
+on(10, psi1=pL);
epsilon1;
```

Nakon toga rješavamo zadaće na jediničnoj ćeliji (3.1) i (3.2)

```
problem prvi(hix, fi)=
int2d(Th) (kk*(dx(hix)*dx(fi)+dy(hix)*dy(fi)))
+int2d(Th) (kk*dx(fi));
prvi;

problem drugi(hiy, fi)=
int2d(Th) (kk*(dx(hiy)*dx(fi)+dy(hiy)*dy(fi)))
+int2d(Th) (kk*dy(fi));
drugi;
```

te homogenizacijsku zadaću:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^{h,num} \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \psi = 100 \text{ bar} & \text{na } \Gamma_L \\ \psi = 30 \text{ bar} & \text{na } \Gamma_D \\ \mathbb{K}^{h,num} \nabla \psi \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_{lat} \end{cases} \quad (3.6)$$

gdje je  $\mathbb{K}^{h,num}$  izračunat numerički rješavanjem zadaća (3.1) i (3.2).

```

problem homogen(psi, v) =
int2d(Th1)
((k11*dx(psi)+k12*dy(psi))*dx(v)+(k21*dx(psi)+k22*dy(psi))*dy(v))
+on(40, psi=pul)
+on(20, psi=piz);
homogen;

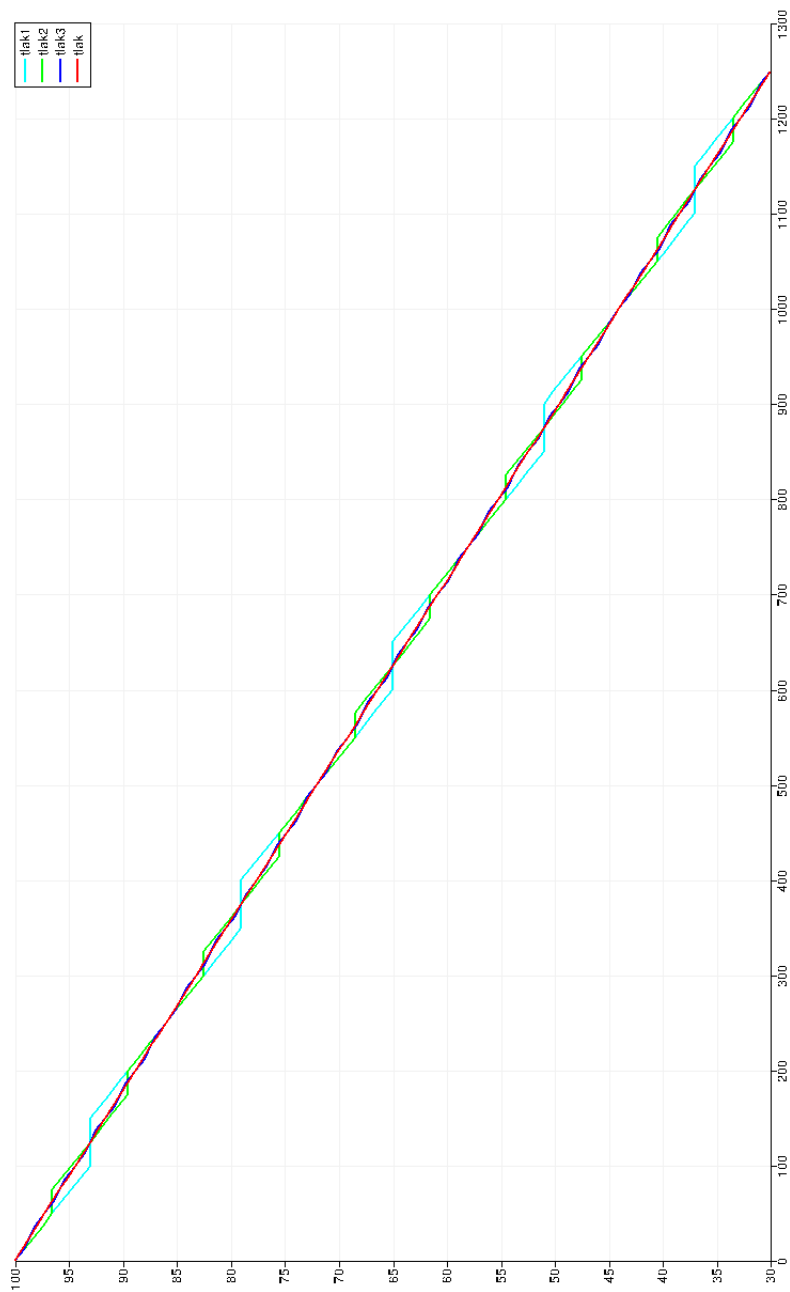
```

Očekujemo podudaranje matrica  $\mathbb{K}^{h,num}$  i  $\mathbb{K}^h(3.3)$ , jer je na taj način postupak homogenizacije numerički opravdan. Numerički je izračunata matrica

$$\mathbb{K}^{h,num}(x) = \begin{bmatrix} 0.00124969 & 6.25576 \cdot 10^{-19} \\ -7.12022 \cdot 10^{-20} & 0.2008 \end{bmatrix}$$

koja odgovara matrici  $\mathbb{K}^h$ . Norma razlike tih matrica je  $\frac{\|\mathbb{K}^{h,num} - \mathbb{K}^h\|_2}{\|\mathbb{K}^h\|_2} = 3.1154 \cdot 10^{-18}$ , što je jednostavno posljedica numeričkog rješavanja problema.

Promotrimo sada rješenja zadaća (3.4) za  $\varepsilon = 250, 125, 50$  te rješenje homogenizacijske zadaće (3.6). Rezultat je prikazan na slici 3.5. Tlakovi su prikazani po  $x$  osi, u smjeru periodičnosti (tlak1(plavo) je dobiven za  $\varepsilon = 250$ , tlak2(zeleno) za  $\varepsilon = 125$ , a tlak3(ljubičasto) za  $\varepsilon = 50$ , dok tlak (crveno) prikazuje homogenizirani tlak). Na slici jasno možemo vidjeti kako tlakovi kovergiraju homogeniziranom tlaku.



Slika 3.5: TLAK

## 3.2 2D

Uzmimo sada pravi dvodimenzionalni slučaj  $\rightarrow$  periodičnost u dva smjera. Promotrit ćemo dva slučaja: horizontalni i vertikalni tok.

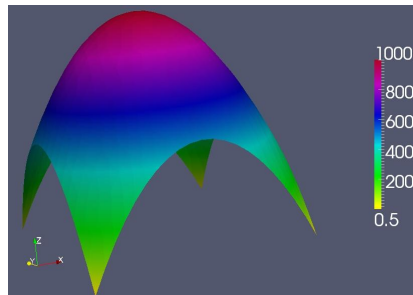
### Horizontalni slučaj

Promatramo horizontalni tok, tj. tok u  $xy$ -ravnini. Tada nema utjecaja sile teže te vrijedi  $p = \psi$ . Promatrat ćemo isti problem s glatkom, a nakon toga diskontinuiranom periodičnosti.

### GLATKA PERIODIČNOST

Zamislimo nehomogenu poroznu sredinu s glatkom periodičkom hidrauličkom vodljivošću tj. da je za  $\mathbb{K}(x, y) = k(x, y)\mathbb{I}$ ,  $k(x, y)$  glatka periodička funkcija. Za primjer takve funkcije na jediničnoj ćeliji odabrali smo funkciju prikazanu na slici 3.6:

$$k(x, y) = 1000 - 1999 \cdot (x - 0.5)^2 - 1999 \cdot (y - 0.5)^2$$



Slika 3.6: Permeabilnost  $k$  na jediničnoj ćeliji

Ponovno rješavamo familiju zadaća:

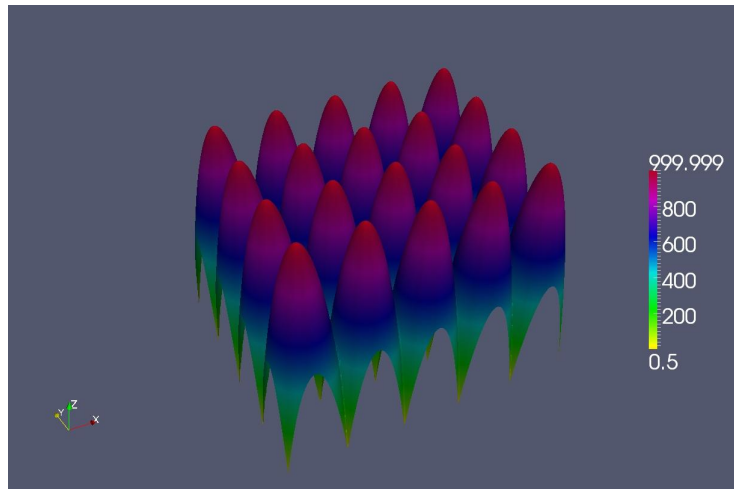
$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \psi = g_{ul} & \text{na } \Gamma_{ul} \\ \psi = g_{iz} & \text{na } \Gamma_{iz} \\ \mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_{lat} \\ p_\varepsilon = \psi \end{cases} \quad (3.7)$$

gdje je

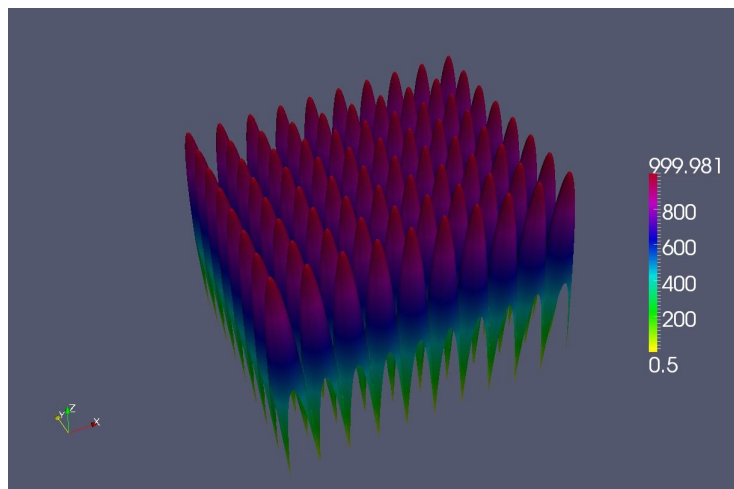
$$k_\varepsilon(x, y) = k\left(\frac{x}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor, \frac{y}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \right\rfloor\right), \quad \forall (x, y) \in [0, 1250] \times [0, 1000],$$



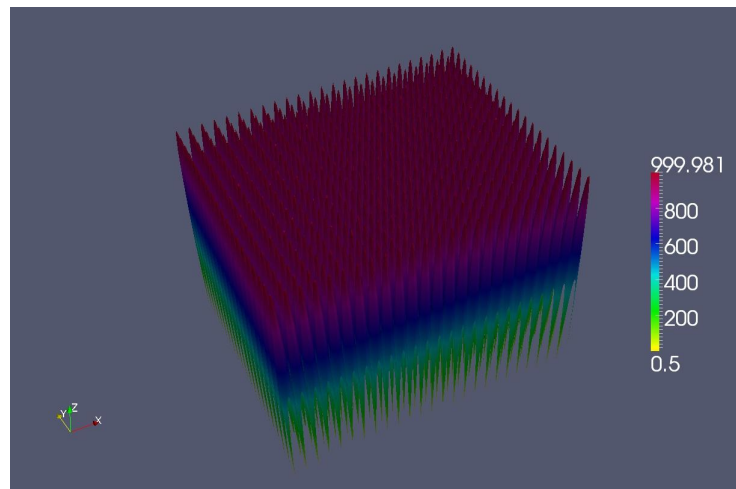
a za  $\varepsilon$  je odabrano 250, 125 i 50 kao i prije (vidi slike 3.7, 3.8 i 3.9).



Slika 3.7:  $k_{250}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$



Slika 3.8:  $k_{125}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$

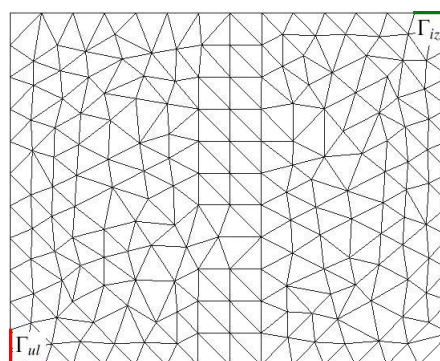


Slika 3.9:  $k_{50}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 50$

Zadajemo konstantan tlak na dijelovima granice, konkretno na donjem lijevom ( $\Gamma_{ul}$ ) i gornjem desnom ( $\Gamma_{iz}$ ) kutu pravokutnika (vidi sliku 3.10), dok je ostatak granice ( $\Gamma_{lat}$ ) nepropusan. Kako želimo držati konstantan tlak, a rješavati jednadžbu s piezometarskom razinom, rubni uvjeti konstantnog tlaka prema (1.4) postaju funkcije

$$g_{ul} = \frac{100}{\rho g} + y$$

$$g_{iz} = \frac{30}{\rho g} + y.$$



Slika 3.10: Rubni uvjet

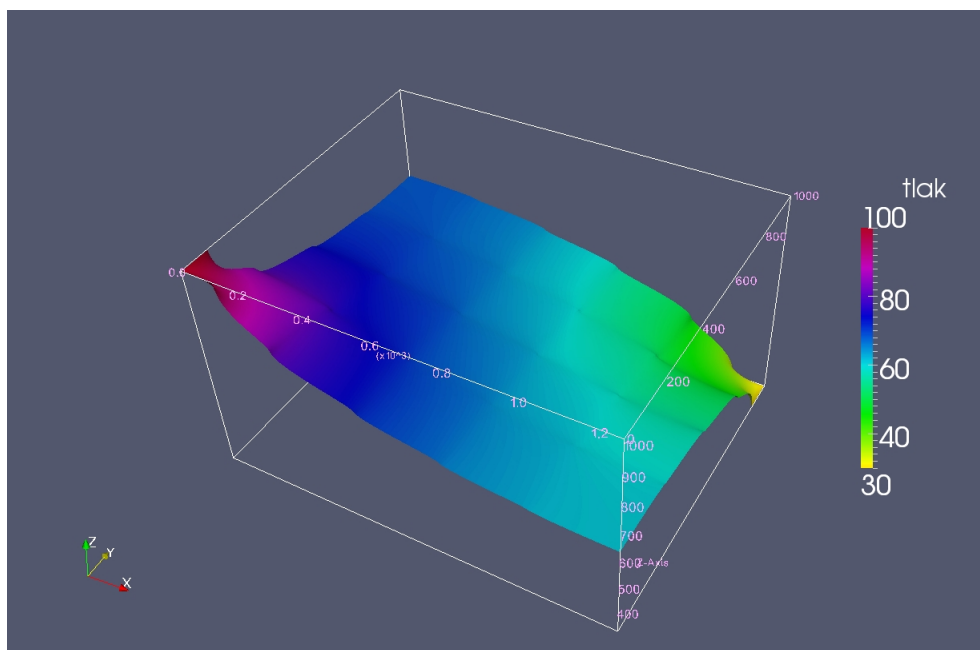
Zadaće (3.7) zapisujemo u varijacijskoj formulaciji:

$$\begin{cases} \psi \in H^1(\Omega), \psi|_{\Gamma_{ul}} = 100, \psi|_{\Gamma_{iz}} = 30 \\ \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \psi \cdot \nabla v dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_{ul}} = 100, v|_{\Gamma_{iz}} = 30, \end{cases} \quad (3.8)$$

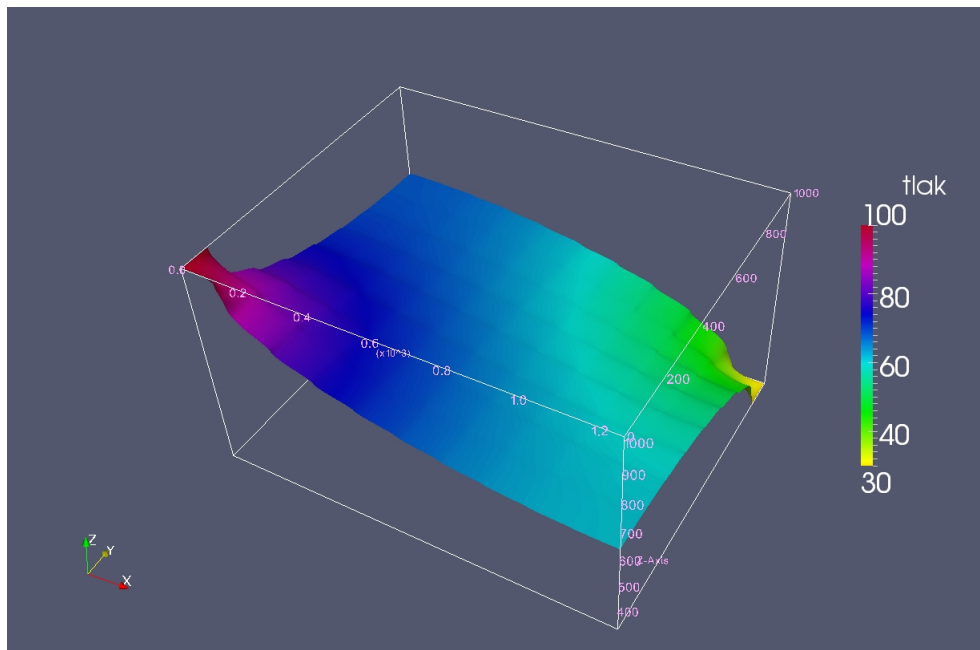
kako bismo mogli iskoristiti FreeFem:

```
problem epsilon1(psi1, phi1)=
int2d(Th) (keps1*(dx(phi1)*dx(psi1)+dy(phi1)*dy(psi1))
+on(11,12,psi1=pul)
+on(21,22,psi1=piz);
```

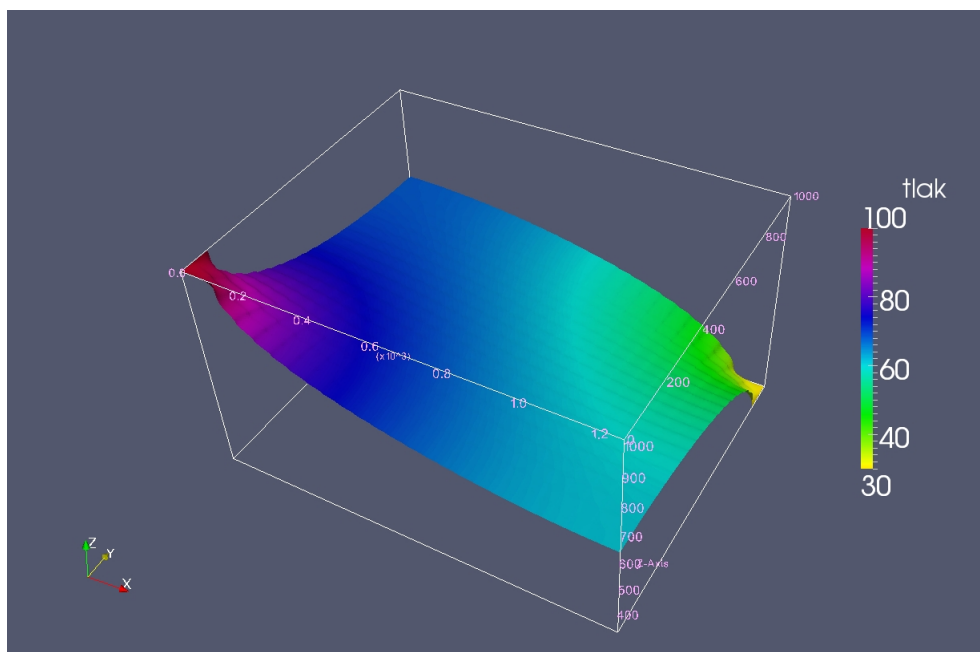
Dobiveni tlakovi prikazani su na slikama 3.11,3.12,3.13.



Slika 3.11:  $p_{250}$ : tlak  $p_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$



Slika 3.12:  $p_{125}$ : tlak  $p_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$



Slika 3.13:  $p_{50}$ : tlak  $p_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 50$

Nakon toga rješavajući zadaće na ćeliji,(3.1) i (3.2), dobivamo matricu homogeniziranog operatora:

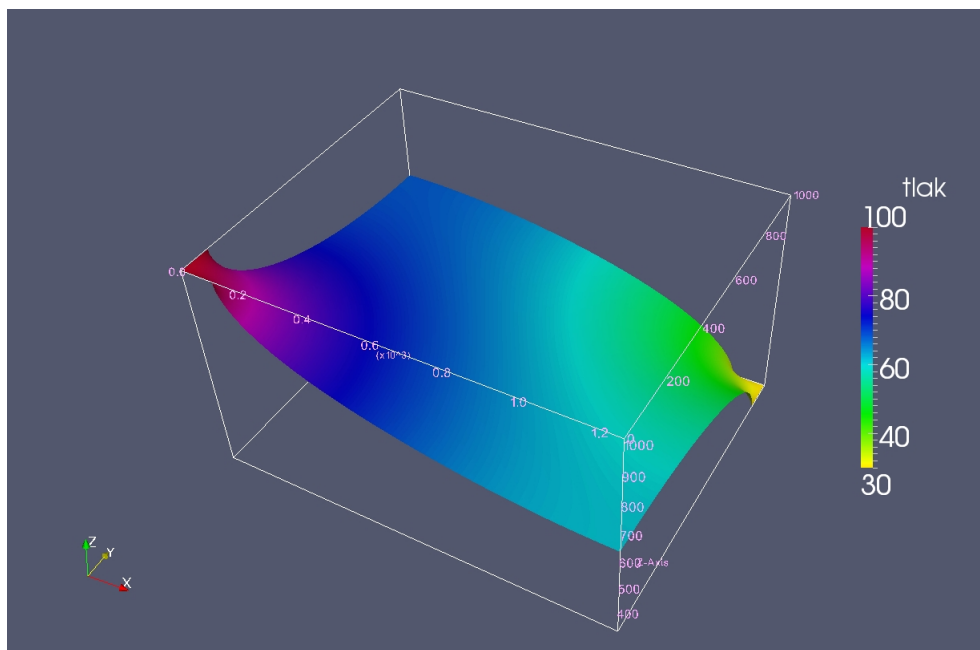
$$\mathbb{K}^h(x) = \begin{bmatrix} 624.288 & 4.16196 \cdot 10^{-3} \\ 4.16196 \cdot 10^{-3} & 624.203 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo riješiti zadaću s homogeniziranim operatorom:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^h \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \psi = g_{ul} & \text{na } \Gamma_{ul} \\ \psi = g_{iz} & \text{na } \Gamma_{iz} \\ p^h = \psi \end{cases}$$

```
problem homogen(psi, v)=
int2d(Th)
((k11*dx(psi)+k12*dy(psi))*dx(v)+(k21*dx(psi)+k22*dy(psi))*dy(v))
+on(11,12,psi=pul)
+on(21,22,psi=piz);
```

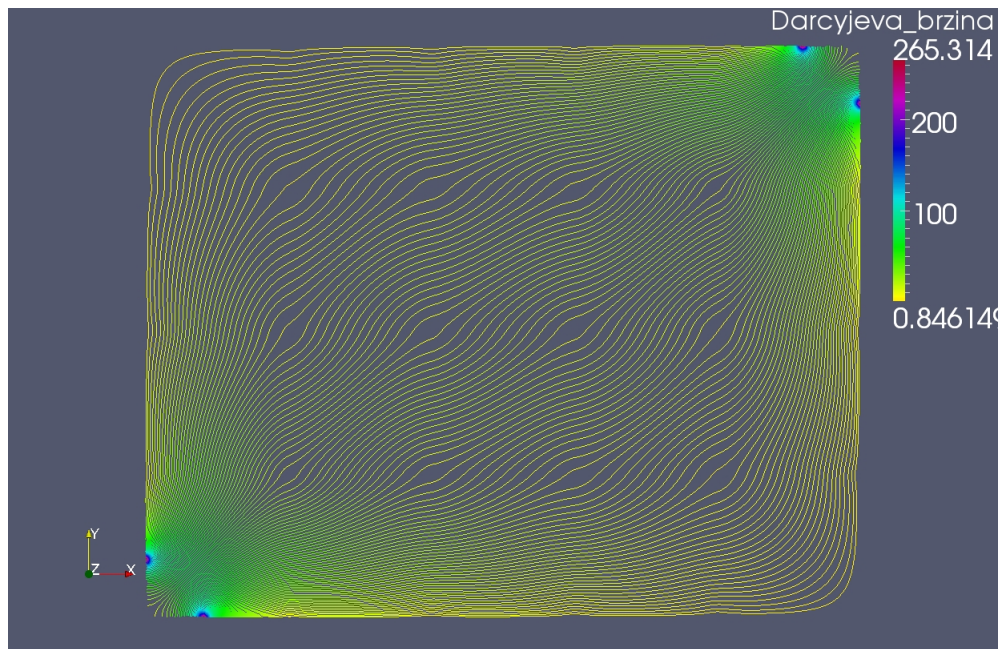
Slika 3.14 prikazuje rješenje jednadžbe (3.2).



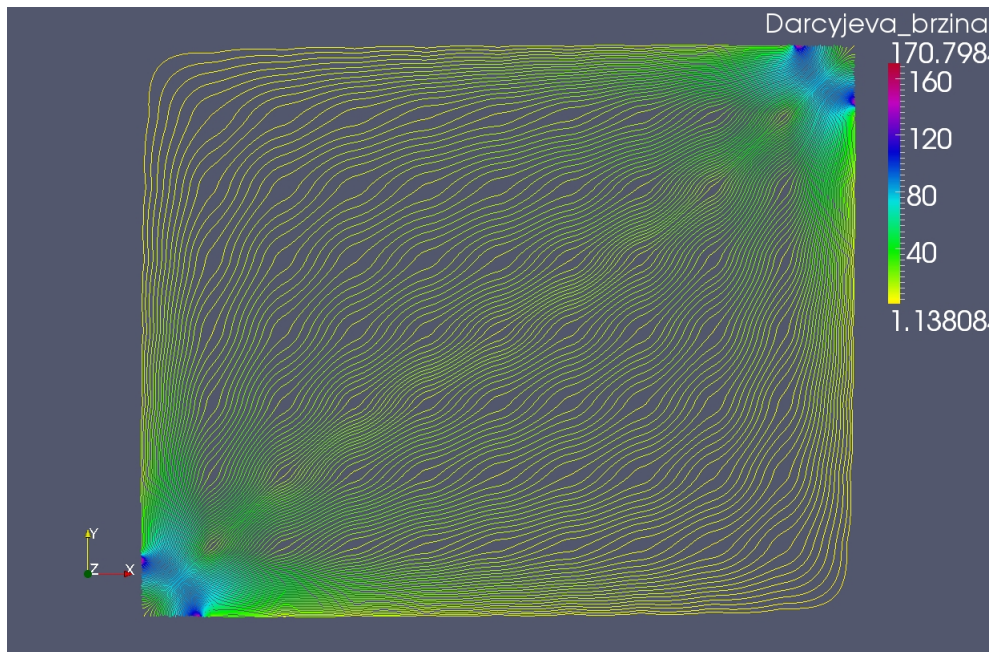
Slika 3.14: Tlak dobiven homogenizacijom ( $p^h$ )

Primijetimo da smanjujući broj  $\varepsilon$  dobivamo sve sličnije rješenje homogeniziranom rješenju, tj.  $p_\varepsilon \rightarrow p^h$ . Znači, dovoljno je riješiti jednačbe na ćeliji i homogenizacijsku jednačbu umjesto cijele familije jednačbi da bi se dobio željeni rezultat. Što više smanjujemo broj  $\varepsilon$  to je teže numerički riješiti jednačbu, a i točnost rješenja kod tako gustih mreža, koje su potrebne za rješavanje tih jednačbi, postaje upitna.

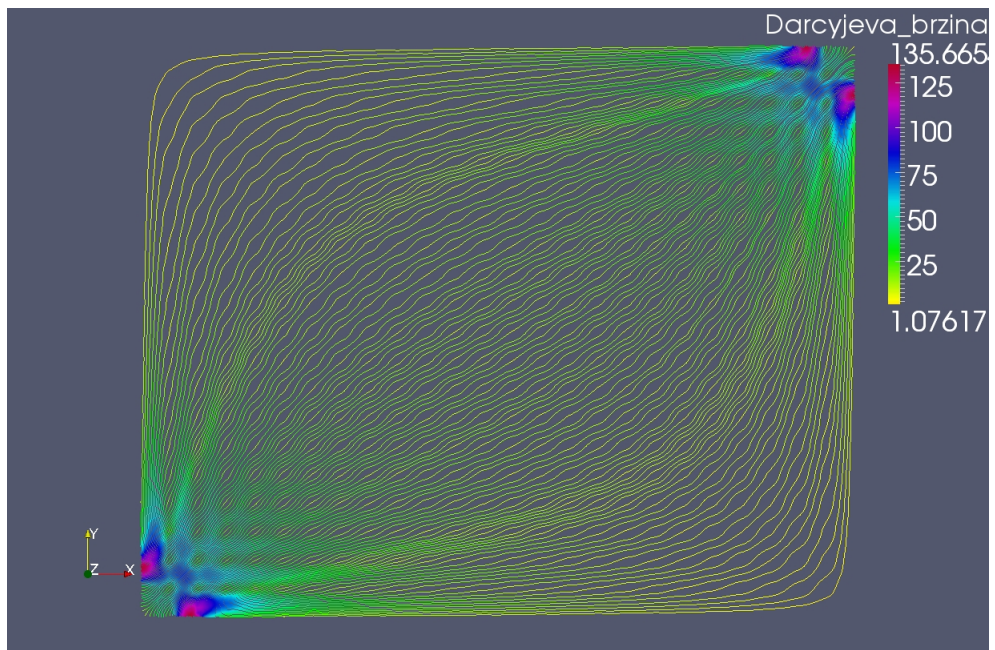
Osim na tlaku, efekt postupka homogenizacije vidimo na strujnicama Darcyjeve brzine,  $\vec{q}_\varepsilon = -\mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi$ , slike 3.15, 3.16 i 3.17, odnosno  $\vec{q}^h = -\mathbb{K}^h \nabla \psi$  na slici 3.18. Vidi se da fluid „izbjegava” područja niske hidrauličke vodljivosti na mikroskopskoj razini, no nama je zapravo bitno samo makroskopski gledano gibanje fluida od donjeg lijevog prema gornjem desnom kutu domene.



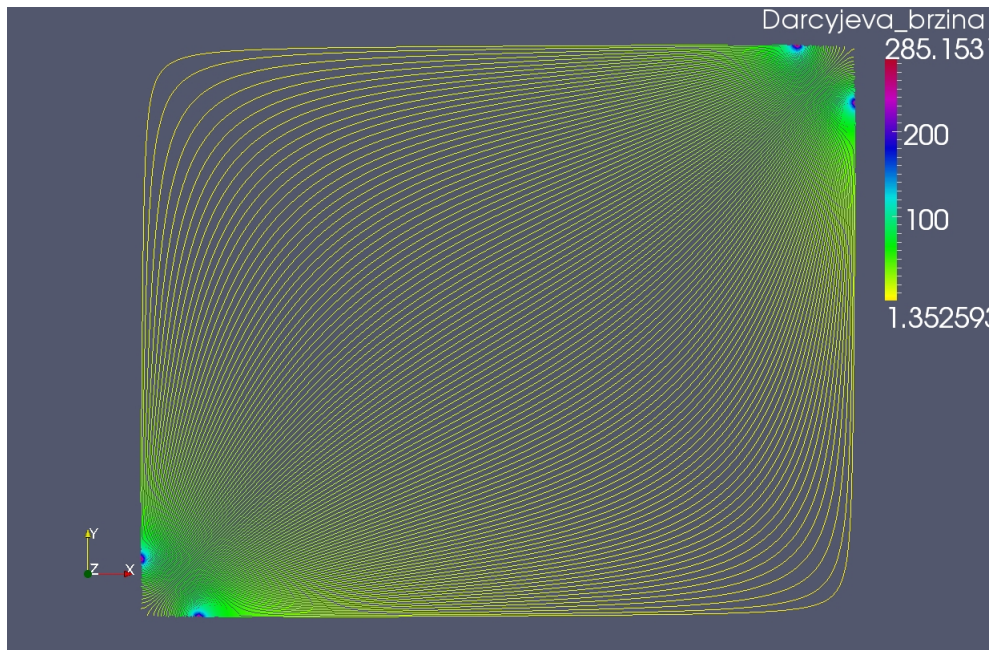
Slika 3.15:  $\vec{q}_{250}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$



Slika 3.16:  $\vec{q}_{125}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$



Slika 3.17:  $\vec{q}_{50}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 50$

Slika 3.18: Brzina dobivena homogenizacijom ( $\vec{q}^h$ )

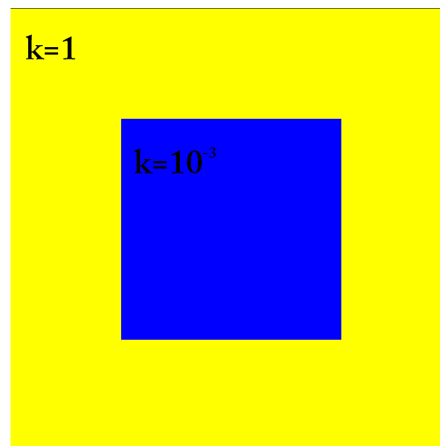
### DISKONTINUIRANA PERIODIČNOST

Promatramo diskontinuiranu hidrauličku vodljivost. Zadajemo  $\mathbb{K}(x, y) = k(x, y)\mathbb{I}$  zadajući

$$k(x, y) = \begin{cases} 10^{-3} & 0.25 \leq x \leq 0.75, 0.25 \leq y \leq 0.75 \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$

na jediničnoj ćeliji (slika 3.19).

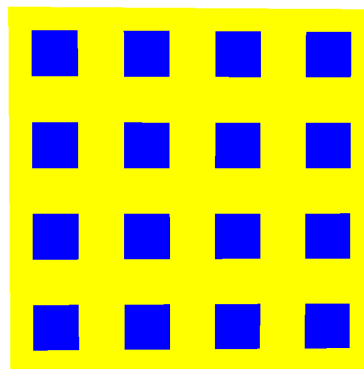


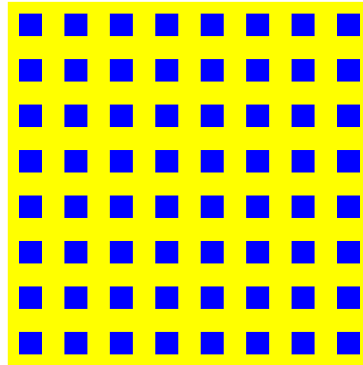
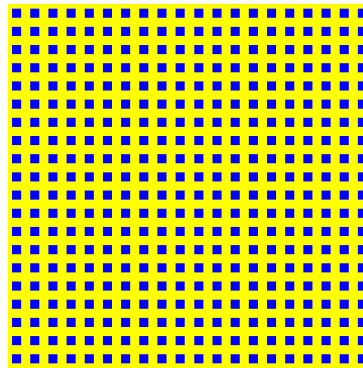
Slika 3.19: Permeabilnost  $k$  na jediničnoj ćeliji

Proširivanjem funkcije  $k$  na cijelu domenu formulom

$$k_\varepsilon(x, y) = k\left(\frac{x}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor, \frac{y}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \right\rfloor\right), \quad \forall (x, y) \in [0, 1000] \times [0, 1000],$$

dobivamo funkcije  $k_{250}$ ,  $k_{125}$  i  $k_{50}$  prikazane na slikama 3.20, 3.21 i 3.22.

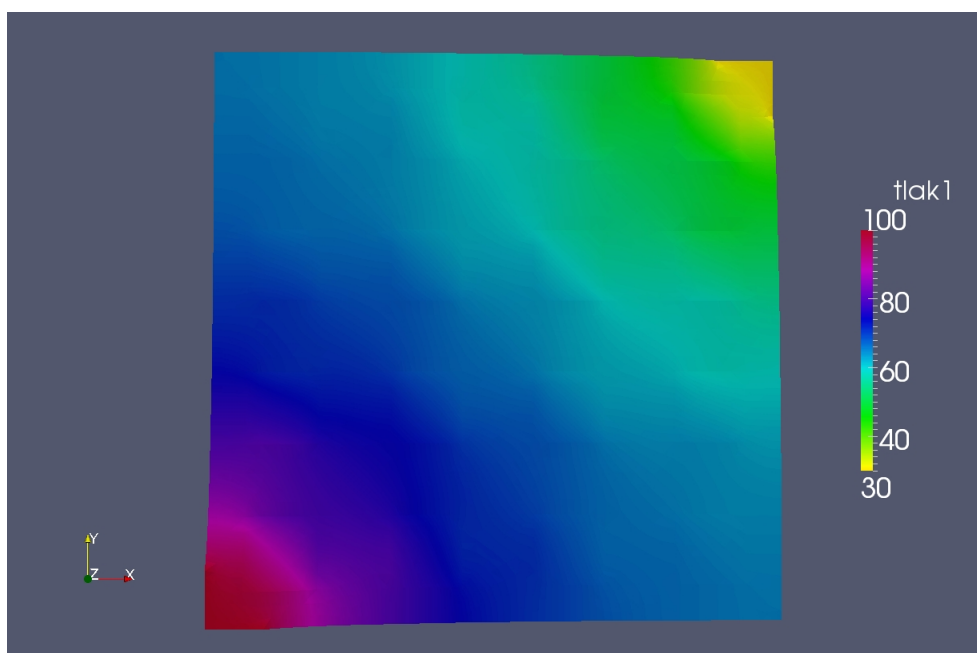
Slika 3.20:  $k_{250}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$

Slika 3.21:  $k_{125}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$ Slika 3.22:  $k_{50}$ : permeabilnost  $k_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 50$ 

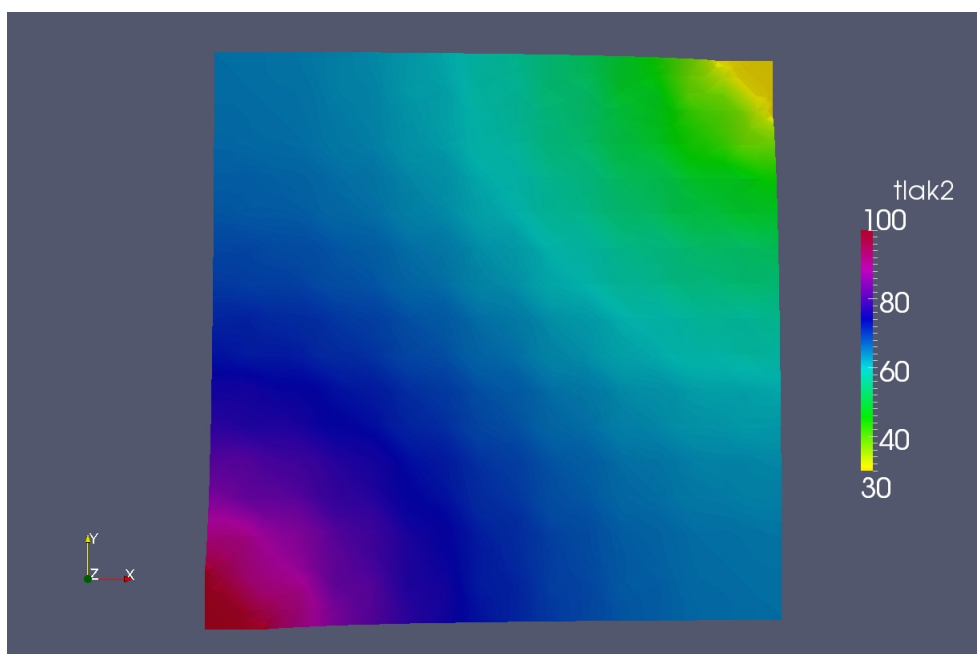
Za svaki  $\varepsilon$  u FreeFemu rješavamo zadaću:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \psi = g_{ul} & \text{na } \Gamma_{ul} \\ \psi = g_{iz} & \text{na } \Gamma_{iz} \\ \mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_{lat} \\ p_\varepsilon = \psi, \end{cases} \quad (3.9)$$

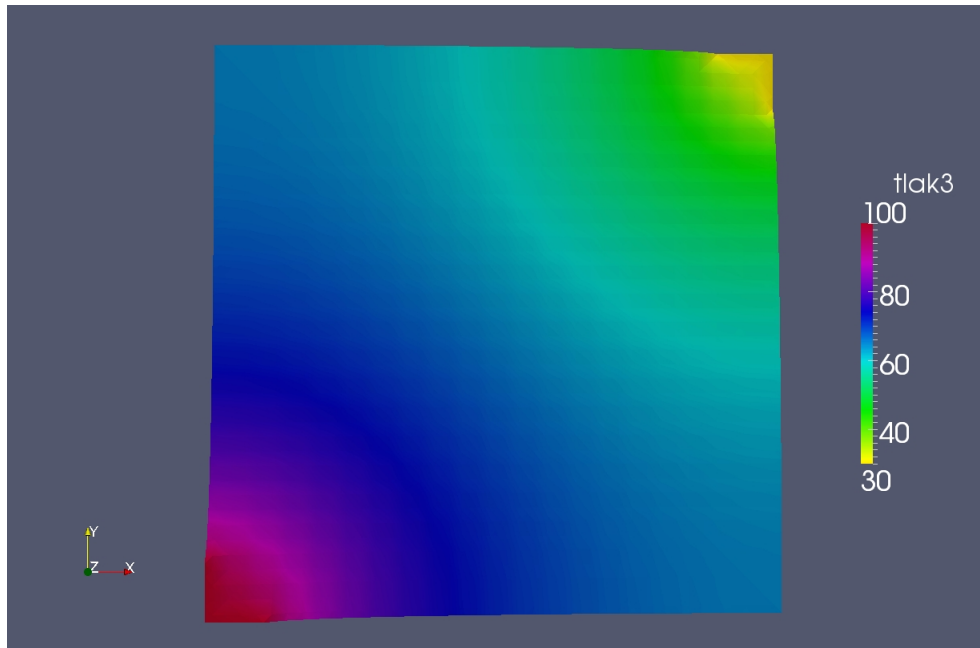
kao i za glatku periodičnost. Dobiveni rezultati prikazani su na slikama 3.23,3.24,3.25.



Slika 3.23:  $p_{250}$ : tlak  $p_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$



Slika 3.24:  $p_{125}$ : tlak  $p_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$



Slika 3.25:  $p_{50}$ : tlak  $p_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 50$

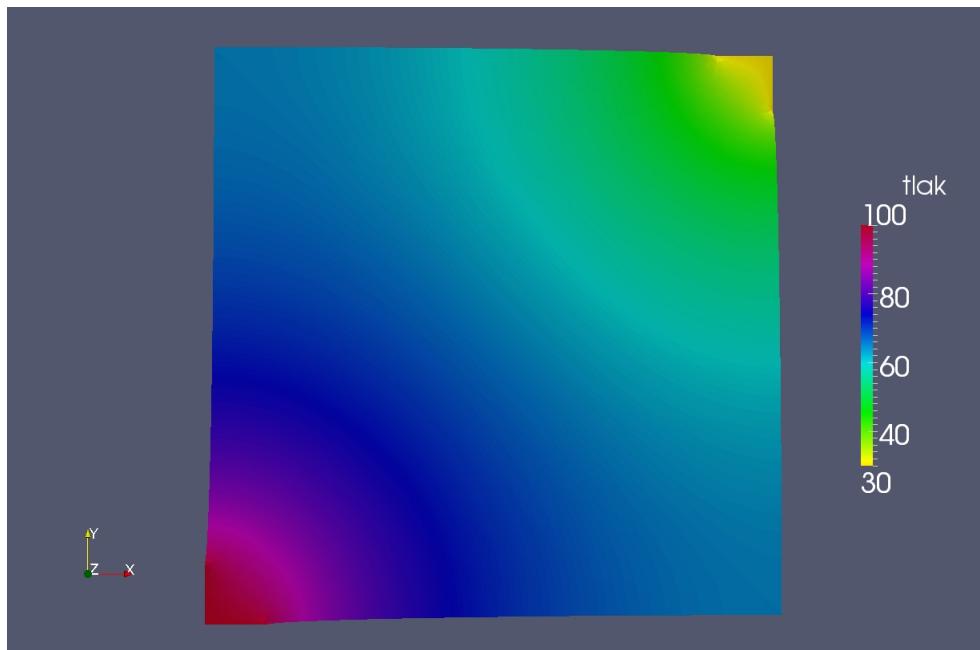
Zatim, kao i kod glatke periodičnosti, rješavamo zadaće (3.1) i (3.2), te dobivamo matricu operatora

$$\mathbb{K}^h(x) = \begin{bmatrix} 0.584112 & -1.43663 \cdot 10^{-4} \\ -1.43663 \cdot 10^{-4} & 0.583985 \end{bmatrix}.$$

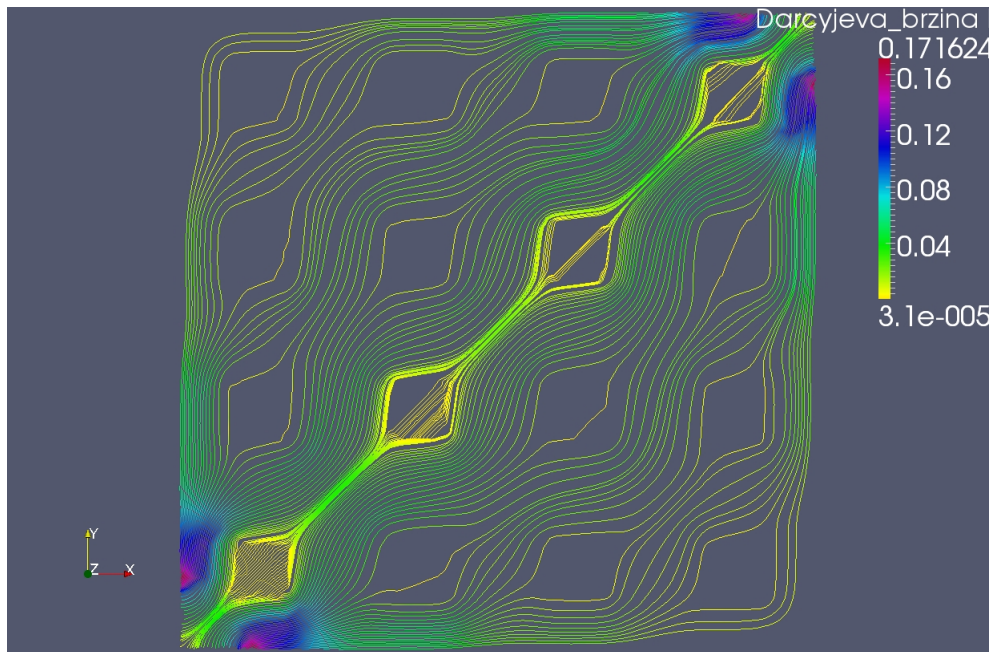
Rješenje zadaće

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^h \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \psi = g_{ul} & \text{na } \Gamma_{ul} \\ \psi = g_{iz} & \text{na } \Gamma_{iz} \\ \mathbb{K}^h \nabla \psi \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_{lat} \\ p^h = \psi \end{cases} \quad (3.10)$$

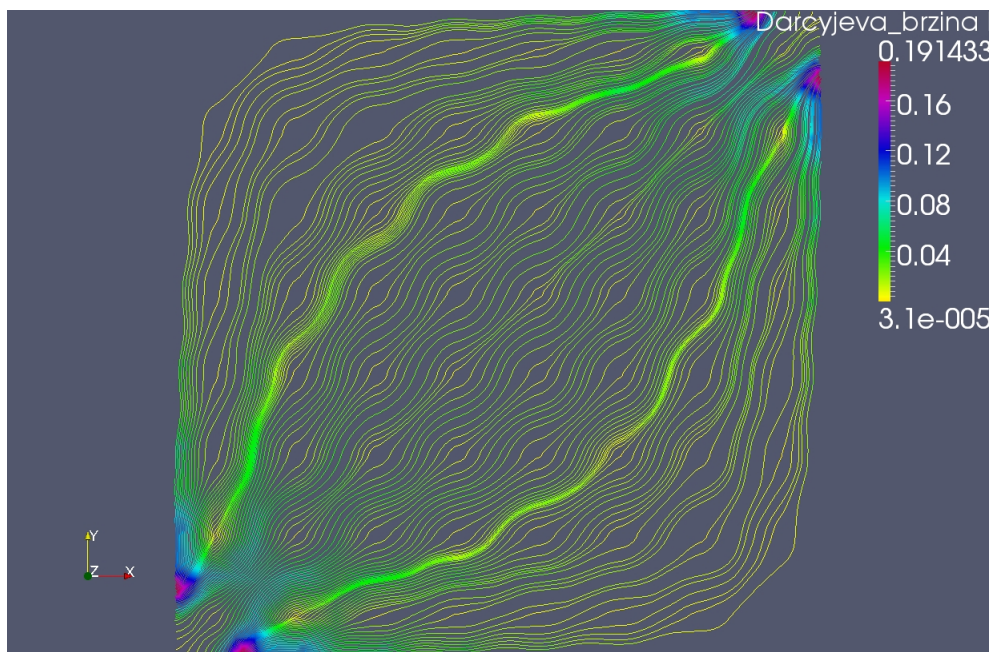
daje nam homogenizirani tlak ( $p^h$ ) prikazan na slici 3.26.

Slika 3.26: Tlak dobiven homogenizacijom ( $p^h$ )

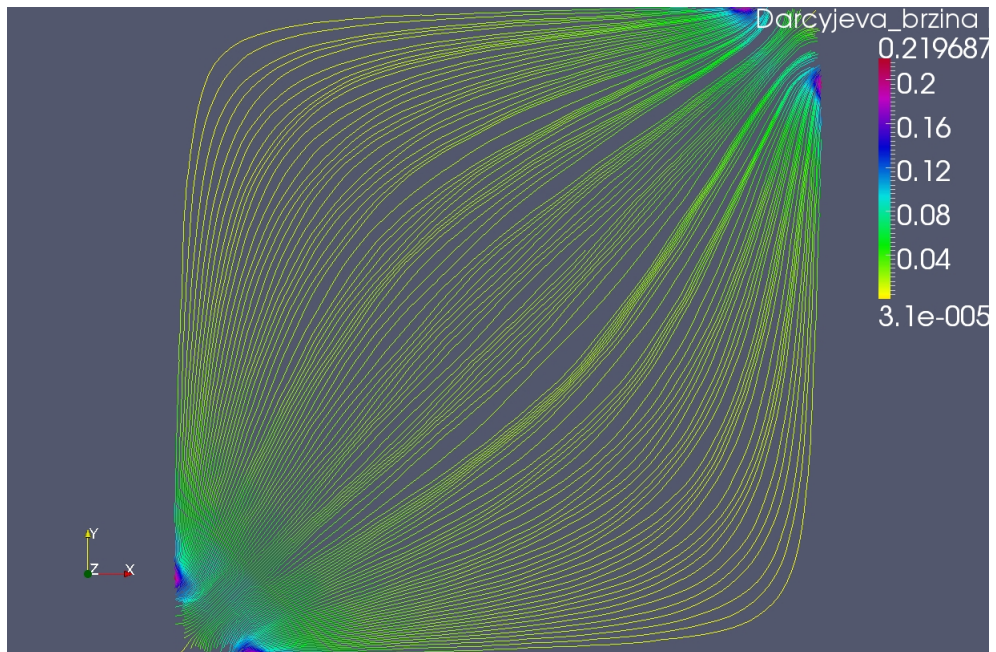
Primjećujemo da se, kao i u slučaju glatke periodičnosti, smanjujući  $\varepsilon$  rješenje približava homogeniziranom rješenju. Isti efekt vidljiv je i na Darcyjevoj brzini,  $\vec{q}_\varepsilon = -\mathbb{K}^\varepsilon \nabla \psi$ , odnosno  $\vec{q}^h = -\mathbb{K}^h \nabla \psi$ . Pogledajmo strujnice Darcyjeve brzine na slikama 3.27, 3.28, 3.29 i 3.30. Uočimo da nas makroskopski model koji je realiziran homogenizacijom, „oslobađa” od sitnih i nama nepotrebnih oscilacija te daje opis toka fluida koji je od koristi.



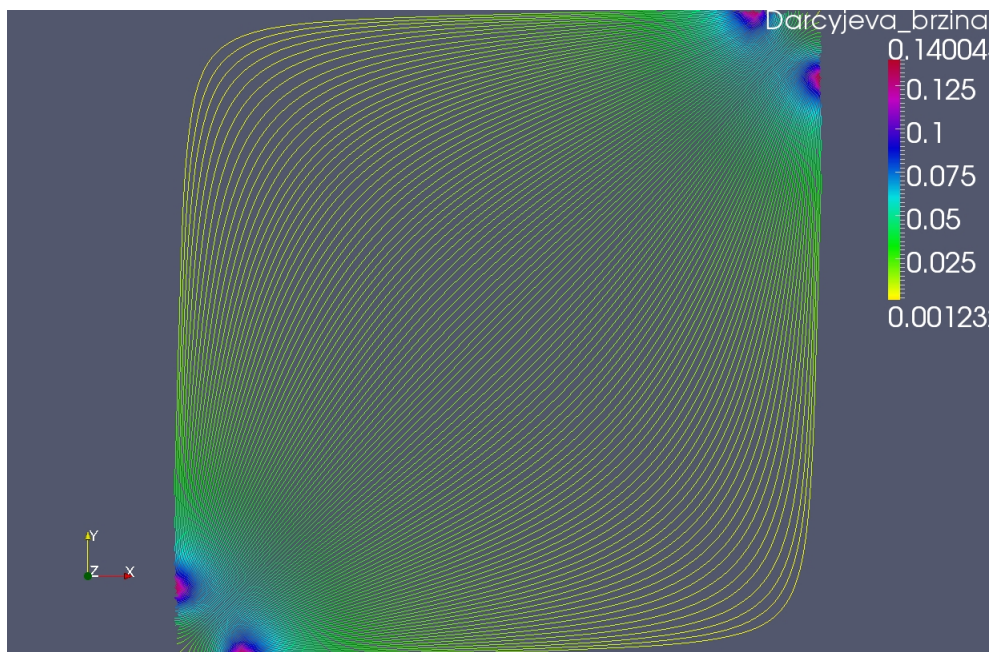
Slika 3.27:  $\vec{q}_{250}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$



Slika 3.28:  $\vec{q}_{125}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$



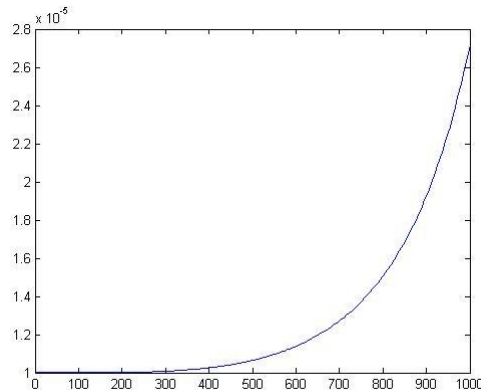
Slika 3.29:  $\vec{q}_{50}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 50$



Slika 3.30: Brzina dobivena homogenizacijom ( $\vec{q}^h$ )

### Vertikalni slučaj

Kada želimo modelirati dotok fluida u podzemlje, često koristimo 2D vertikalni prikaz tj. prikazujemo  $xz$  ili  $yz$ -ravninu. Neka je zadano područje duljine 1000 i dubine 200 metara i zamislimo da imamo stalni dotok fluida raspodjeljen kao na slici 3.31.

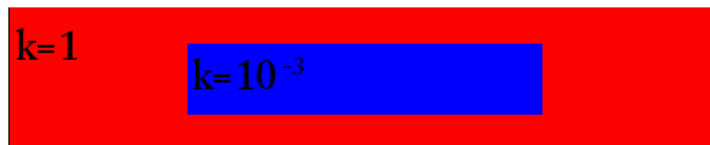


Slika 3.31: Rubni uvjet: protok  $Q$  na površini

Ponovno zadajemo hidrauličku vodljivost,  $\mathbb{K}(x, y) = k(x, y)\mathbb{I}$  (varijable nazivamo  $x$  i  $y$  bez obzira na koordinatni sustav), funkcijom  $k$

$$k(x, y) = \begin{cases} 10^{-3} & 0.25 \leq x \leq 0.75, 0.05 \leq y \leq 0.15 \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$

na jediničnoj ćeliji, koja je sada pravokutnik (slika 3.32).

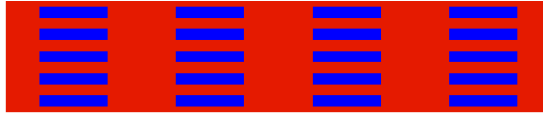
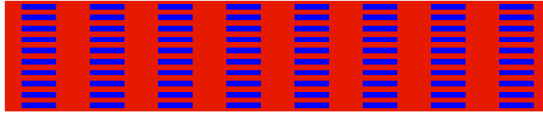


Slika 3.32: Permeabilnost  $k$  na jediničnoj ćeliji

Funkciju  $k$  proširujemo na cijelu domenu:

$$k_{\varepsilon}(x, y) = k\left(\frac{x}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor, \frac{y}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \right\rfloor\right), \quad \forall (x, y) \in [0, 1000] \times [0, 200]$$




 Slika 3.33:  $k_{250}$ : permeabilnost  $k_{\epsilon}$  za  $\epsilon = 250$ 

 Slika 3.34:  $k_{125}$ : permeabilnost  $k_{\epsilon}$  za  $\epsilon = 125$ 

za  $\epsilon = 250$  i  $125$ . Slike 3.33 i 3.34 prikazuju  $k_{250}$  i  $k_{125}$  respektivno.

Rješavamo zadaće:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^{\epsilon} \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \mathbb{K}^{\epsilon} \nabla \psi \cdot \vec{n} = Q & \text{na } \Gamma_N \\ \psi = 210 \text{ m} & \text{na } \Gamma_D \\ \mathbb{K}^{\epsilon} \nabla \psi \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_{lat} \\ p^{\epsilon} = \rho g(\psi - y), \end{cases} \quad (3.11)$$

gdje je  $Q(t) = 10^{-5} e^{(\frac{t}{1000})^4}$  zadan protok u metrima po danu na gornjoj stranici pravokutnika ( $\Gamma_N$ ) tj. na površini. Također imamo zadanu konstantnu piezometarsku razinu na lijevoj stranici pravokutnika ( $\Gamma_D$ ), a ostatak granice je nepropusno tlo.

Nakon toga rješavamo zadaće (3.1) i (3.2) te zadaću

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}^h \nabla \psi) = 0 & \text{u } \Omega \\ \mathbb{K}^h \nabla \psi \cdot \vec{n} = Q & \text{na } \Gamma_N \\ \psi = 210 \text{ m} & \text{na } \Gamma_D \\ \mathbb{K}^h \nabla \psi \cdot \vec{n} = 0 & \text{na } \Gamma_{lat} \\ p^h = \rho g(\psi - y), \end{cases} \quad (3.12)$$

Matrični prikaz operatora efektivne hidrauličke vodljivosti glasi:

$$\mathbb{K}^h(x) = \begin{bmatrix} 0.133422 & 4.28502 \cdot 10^{-16} \\ 2.35055 \cdot 10^{-16} & 0.106934 \end{bmatrix}.$$

Varijacijska formulacija zadaća (3.11) i zadaće (3.12) glasi:

$$\begin{cases} \psi \in H^1(\Omega), \quad \psi|_{\Gamma_D} = 210 \\ \int_{\Omega} \mathbb{K} \nabla \psi \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma_N} Q v dS, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_D} = 210 \end{cases} \quad (3.13)$$

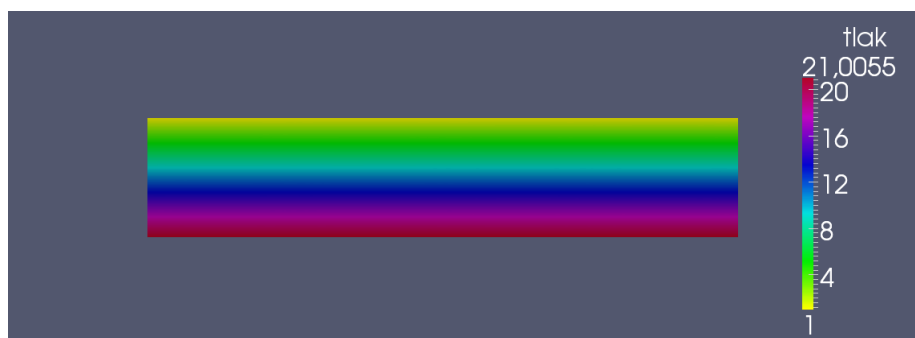
```

problem epsilon1(psi1,phi1)=
int2d(Th)(k *(dx(psi1)*dx(phi1)+dy(psi1)*dy(phi1)))
-int1d(Th,3)(Q*phi1)
+on(4,psi1=pcon);
epsilon1;
pepsi1=rho*g*(psi1-y)/1e5;

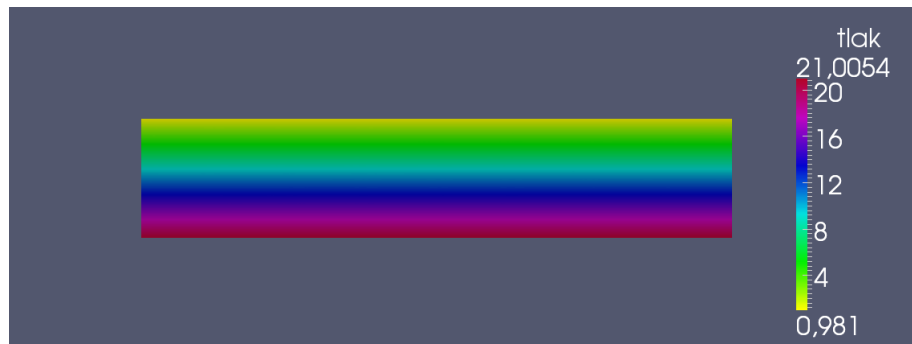
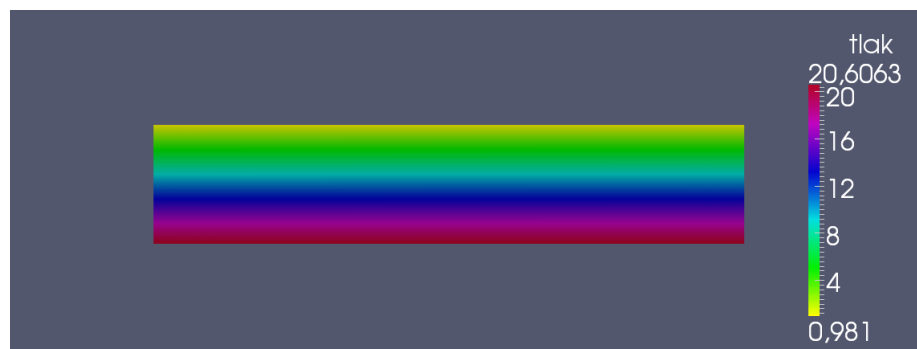
problem homogen(psi,v)=
int2d(Th)
((k11*dx(psi)+k12*dy(psi))*dx(v)+(k21*dx(psi)+k22*dy(psi))*dy(v))
- int1d(Th,3)(Q*v)
+on(4,psi=pcon);
homogen;
Vh p=rho*g*(psi-y)/1e5;

```

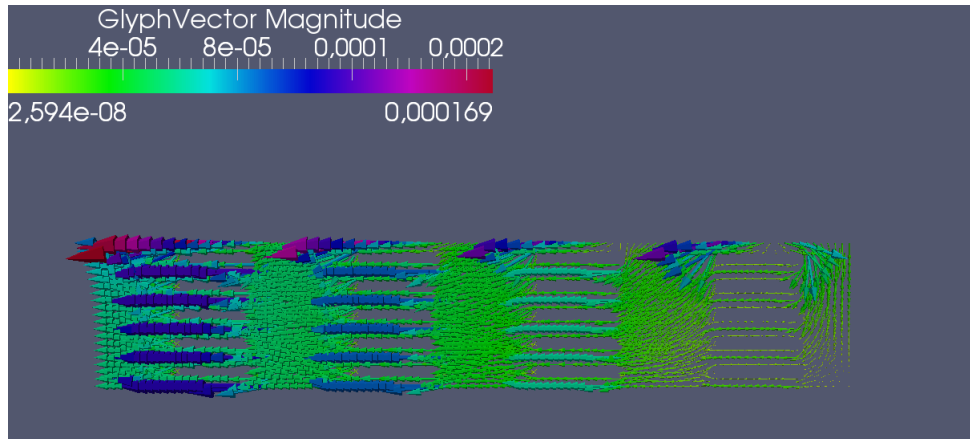
U ovom slučaju nema velike razlike između tlakova jer je na 200 metara utjecaj sile teže velik te je tlak zapravo hidrostatski i na njemu ne možemo vidjeti efekt homogenizacije (slike 3.35, 3.36 i 3.37).



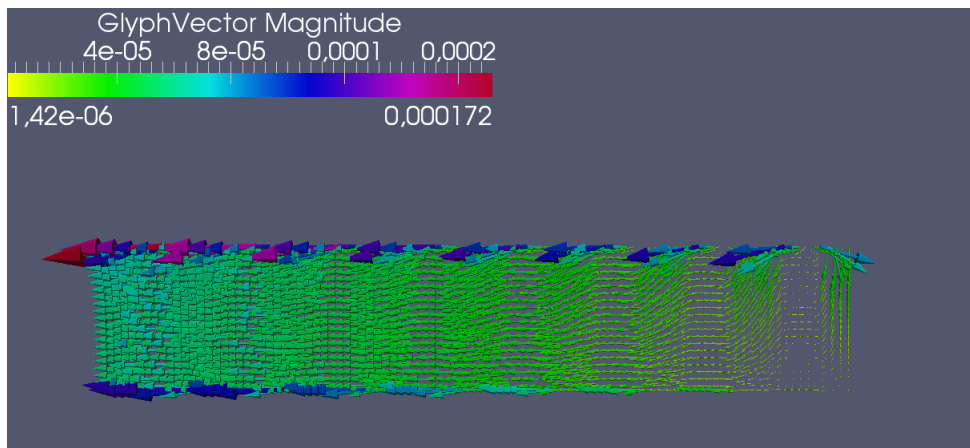
Slika 3.35:  $p_{250}$ : tlak  $p_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$

Slika 3.36:  $p_{125}$ : tlak  $p_\epsilon$  za  $\epsilon = 125$ Slika 3.37: Tlak dobiven homogenizacijom ( $p^h$ )

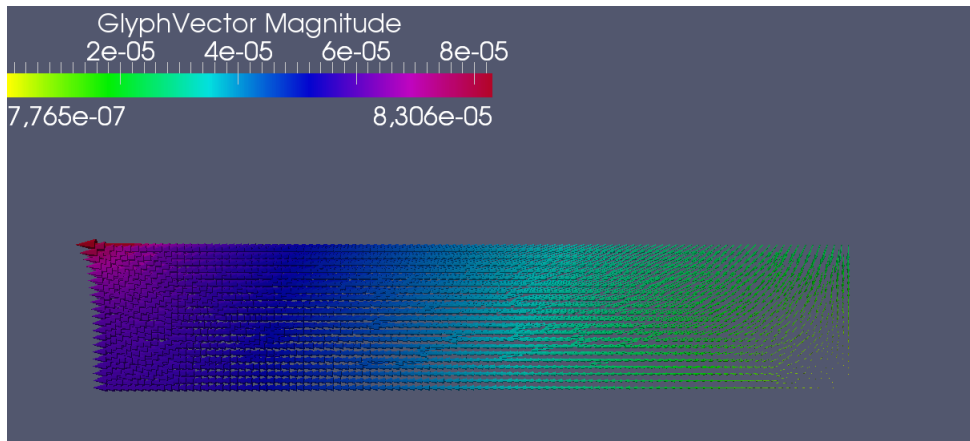
No, efekt homogenizacije uočavamo na Darcyjevoj brzini fluida,  $\vec{q}_\epsilon = -\mathbb{K}^\epsilon \nabla \psi$ , odnosno  $\vec{q}^h = -\mathbb{K}^h \nabla \psi$ . Na slikama 3.38, 3.39 i 3.40 prikazana je vektorski brzina, a na slikama 3.41, 3.42 i 3.43 možemo vidjeti strujnice te iste brzine. Lako se vidi da fluid „obilazi” područja manje hidrauličke vodljivosti, no to se događa na mikroskopskoj skali, dok nam taj efekt na makroskopskoj skali uopće nije od koristi.



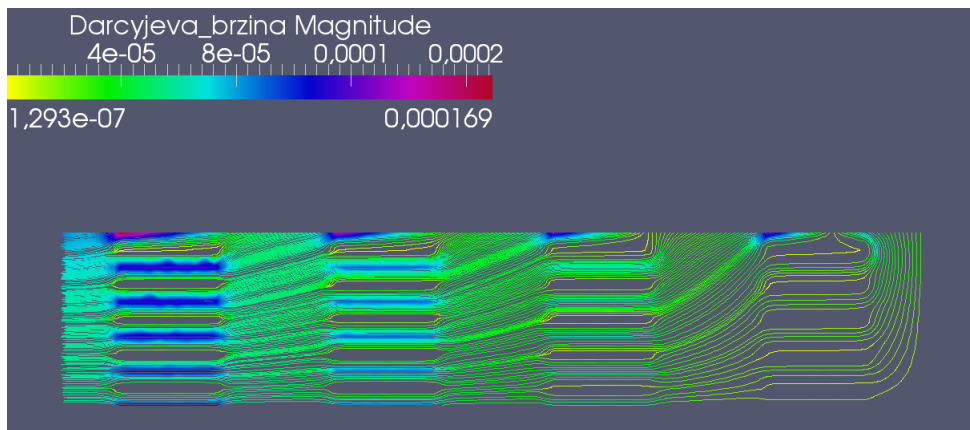
Slika 3.38:  $\vec{q}_{250}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$



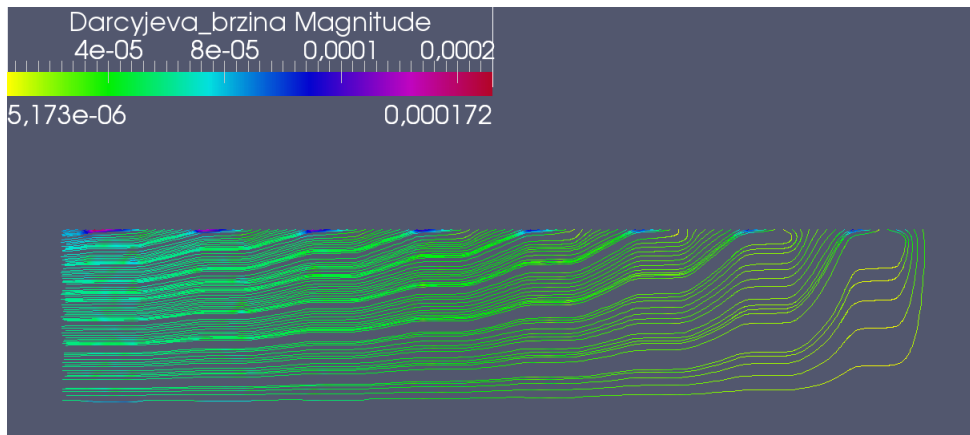
Slika 3.39:  $\vec{q}_{125}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$



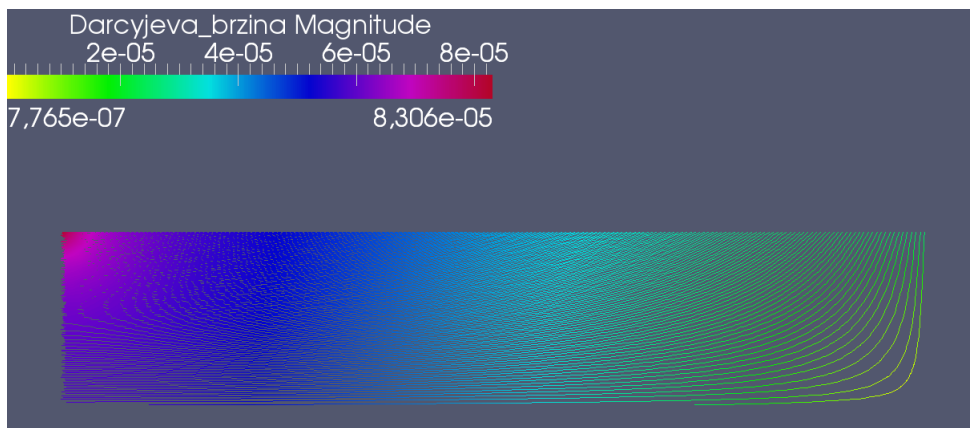
Slika 3.40: Brzina dobivena homogenizacijom ( $\vec{q}^h$ )



Slika 3.41:  $\vec{q}_{250}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 250$  - strujnice



Slika 3.42:  $\vec{q}_{125}$ : brzina  $\vec{q}_\varepsilon$  za  $\varepsilon = 125$  - strujnice



Slika 3.43: Brzina dobivena homogenizacijom ( $\vec{q}^h$ ) - strujnice

# Poglavlje 4

## Dodatak

**Tvrđnja 4.1.**  $a^\varepsilon \rightarrow \mu(a) = \int_0^{y_0} a(y)dy$  slabo \* u  $L^\infty(\Omega)$  ( (2.19))

*Dokaz.* Prema definiciji slabe \* konvergencije u  $L^\infty(\Omega)$  treba pokazati da

$$\forall \phi \in L^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} a^\varepsilon(x)\phi(x)dx \rightarrow \int_{\Omega} \mu(a)\phi(x)dx = \int_{\Omega} \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} a(y)dy \phi(x)dx.$$

Znamo da su jednostavne funkcije guste u  $L^1$  pa je dovoljno pokazati da tvrdnja vrijedi za karakteristične funkcije. Uzmimo stoga  $\phi = \chi_{[a,b]}$ . Tada je

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a^\varepsilon(x)\chi_{[a,b]}(x)dx &= \int_a^b a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \sum_k^{\varepsilon(k+1)} \int_{\varepsilon k}^{\varepsilon(k+1)} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx + R_\varepsilon \\ &= \sum_k^{\varepsilon(k+1)} \varepsilon \int_k^{k+1} a(y)dy + R_\varepsilon = \sum_k^{\varepsilon(k+1)} \varepsilon \int_0^{y_0} a(y)dy + R_\varepsilon \\ &= \frac{b-a}{\varepsilon y_0} \varepsilon \int_0^{y_0} a(y)dy + R_\varepsilon = \frac{b-a}{y_0} \int_0^{y_0} a(y)dy + R_\varepsilon, \end{aligned}$$

gdje je  $R_\varepsilon$  ostatak integrala koji teži u nulu kad  $\varepsilon$  teži u nulu. Znači:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} a(y)dy \chi_{[a,b]}(x)dx + R_\varepsilon \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} a(y)dy \chi_{[a,b]}(x)dx$$

□

**Teorem 4.2** (LAX-MILGRAMOVA LEMA). *Neka je  $V$  Hilbertov prostor,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinearna forma sa sljedećim svojstvima:*

1. *ograničenost: postoji  $M > 0$ , za svako  $u, v \in V$ ,  $|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$*
2. *koercitivnost: postoji  $\alpha > 0$  takav da za svako  $v \in V$   $a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2$ .*

*Neka je  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  linearan i neprekidan funkcional. Tada zadaća:*

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \text{ takav da} \\ a(u, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V \end{cases}$$

*ima jedinstveno rješenje.*

Za dokaz vidi [4]

**Teorem 4.3** (Teorem o divergenciji). *Za dovoljno regularno područje  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  i dovoljno glatku vektorsku funkciju  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  vrijedi*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \vec{n}(x) dS$$

*gdje je  $\vec{n}$  polje jedinične vanjske normale na  $\partial\Omega$*

Dokaz se može naći u [5].



# Bibliografija

- [1] A. Bensoussan, J. Lions, G. Papanicolaou: Asymptotic Analysis for Periodic Structures, Studies in Mathematics and its Applications, Volume 5 , North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [2] H. Brezis: Analyse fonctionnelle, Theorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [3] G. de Marsily: Quantitative Hydrogeology, Groundwater Hydrology for Engineers, Academic Press, Orlando, 1986.
- [4] L.C. Evans: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1988.
- [5] Š. Ungar: Matematička analiza u  $\mathbb{R}^n$ , Golden Marketing Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.