

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ivana Radišić

**MODEL DVOSTRUKE POROZNOSTI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Jednofazni tok fluida kroz poroznu sredinu</b>	<b>2</b>
1.1 Svojstva porozne sredine . . . . .	3
1.2 Darcyjev zakon . . . . .	4
1.3 Zakon sačuvanja mase . . . . .	6
1.4 Model jednofaznog toka fluida . . . . .	7
1.5 Varijacijska formulacija . . . . .	9
<b>2 Metoda konačnih elemenata za paraboličke zadaće</b>	<b>14</b>
2.1 Prostorna diskretizacija . . . . .	15
2.2 Konstrukcija prostora konačnih elemenata . . . . .	16
2.3 Vremenska diskretizacija . . . . .	20
<b>3 Model dvostruke poroznosti</b>	<b>22</b>
3.1 Izvod modela . . . . .	22
<b>4 Diskretizacija modela dvostruke poroznosti</b>	<b>35</b>
<b>5 Numerička usporedba modela</b>	<b>40</b>
5.1 Numerički primjer . . . . .	41
<b>6 Dodatak</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>65</b>

# Uvod

U prirodi često pronalazimo domene koje se sastoje od poroznih stijena, koje se okružene sustavom fraktura. Za ovakvu domenu pretpostavljamo da sadrži dvije različite porozne strukture. Porozne stijene čine jednu poroznu strukturu, koju u idealiziranom modelu domene predstavljamo odvojenim matričnim blokovima, koji su okruženi frakturama. Frakture čine drugu poroznu strukturu. Frakture, iako dimenzijom mnogo manje od matričnih blokova, imaju velik utjecaj na tok fluida jer se odlikuju visokom propusnosti i poroznosti, za razliku od matričnih blokova gdje se fluid giba vrlo sporo. Kako bi modelirali gibanje fluida kroz ovakvu domenu, važno je primijetiti da ona posjeduje dvije različite prostorne skale, skalnu određenu dimenzijom pora tzv. mikroskopsku skalnu, te skalnu određenu dimenzijom same domene tzv. makroskopsku skalnu. U ovom radu iz modela koji opisuje gibanje fluida na mikroskopskoj skali, izvodimo makroskopski model, koji je jednostavniji za numeričku aproksimaciju od mikroskopskog modela.

U Poglavlju 1 najprije predstavljamo model koji opisuje gibanje jednog fluida kroz poroznu sredinu, te izvodimo varijacijsku formulaciju navedenog modela. U Poglavlju 2 opisujemo metodu za numeričko rješavanje paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednažbi, metodu konačnih elemenata. U Poglavlju 3 najprije zadajemo model jednofaznog toka kroz frakturiranu poroznu sredinu na mikroskopskoj skali, a zatim pomoću teorije homogenizacije iz mikroskopskog modela izvodimo model na makroskopskoj skali, model dvostruke poroznosti. U Poglavlju 4 provodimo diskretizaciju modela dvostruke poroznosti metodom konačnih elemenata, te implicitnom Eulerovom metodom. U Poglavlju 5 donosimo numeričku usporedbu mikroskopskog modela i modela dvostruke poroznosti.

# Poglavlje 1

## Jednofazni tok fluida kroz poroznu sredinu

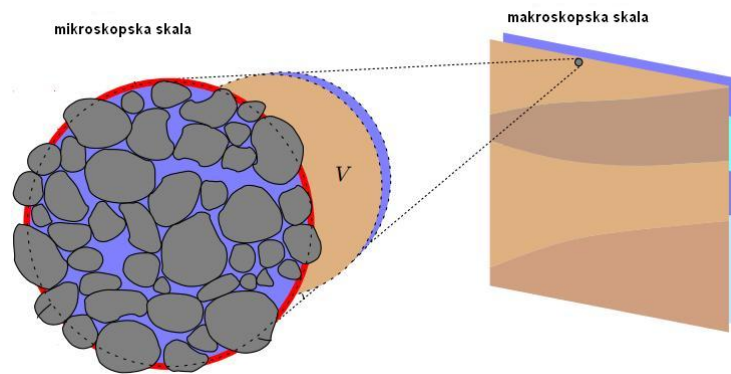
*Porozna sredina* je domena koja se odlikuje prisutnošću pora - šupljina ili pukotina koje su ispunjene s jednim ili više fluida. Dio prostora koji zauzima fluid naziva se *pornim prostorom*. Ukoliko je porni prostor povezan dolazi do strujanja fluida. Porozne sredine se dijele prema nastanku na prirodne i umjetne. U prirodne porozne sredine ubrajaju se različite vrste stijena i tla, te biološke porozne sredine. U biološke porozne sredine spadaju krvne žile, prostor tkiva, te korijenje, listovi biljaka itd. Filteri, spužve, drvo, keramika i drugi građevinski materijali primjeri su umjetnih poroznih sredina.



Slika 1.1: Primjer prirodne, biološke i umjetne porozne sredine

Model koji opisuje gibanje jednog fluida kroz poroznu sredinu temelji se na zakonu sačuvanja mase, Darcyjevu zakonu i jednadžbama stanja. Prije opisa samog modela potrebno je uvesti pojmove *kontinuum*, *makroskopske skale* i *mikroskopske skale*. Kažemo da se prostorna domena ponaša kao kontinuum ako se svojstva koja opisuju ponašanje materijala koji se nalazi u domeni mogu dodijeliti svakoj točki unutar domene. *Mikroskopska skala* je prostorna skala određena karakterističnom dimenzijom pore. Na mikroskopskoj skali razlikujemo čvrstu i tekuću fazu, te se svaka od njih ponaša kao zaseban kontinuum. Za čvrstu fazu se najčešće uzima da je kruta, premda se u primjenama trebaju uzeti u obzir

elastične, odnosno plastične deformacije porozne matrice. Gibanje fluida se na mikroskopskoj skali opisuje Navier-Stokesovim jednadžbama. *Makroskopska skala* je prostorna skala određena karakterističnom dimenzijom domene strujanja. Vrijednost makroskopske varijable u točki se dobiva usrednjavanjem mikroskopske vrijednosti te varijable unutar određenog volumena koji ima središte u toj točki. Takav karakterističan volumen nazivamo *reprezentativni elementarni volumen*, u oznaci REV. Veličina REV-a mora biti takva da uvijek sadrži čvrstu fazu i fluid u pornom prostoru. Matematički model formiran na makroskopskoj skali naziva se *makroskopski model*. U makroskopskom modelu fluid i porozna matrica predstavljaju jedinstven kontinuum, a svaka točka u kontinuumu predstavlja jedan reprezentativni elementarni volumen.



Slika 1.2: Prijelaz s mikroskopske skale na makroskopsku

## 1.1 Svojstva porozne sredine

Svojstva pornog prostora opisana su makroskopskim parametrima *poroznosti* i *propusnosti*.

### Poroznost

*Poroznost* definiramo kao udio volumena pornog prostora u ukupnom volumenu

$$\Phi(x, t) = \frac{V_p(x, t)}{V(x)}. \quad (1.1)$$

$V(x)$  je volumen REV-a koji ima središte u točki  $x$ ,  $V_p(x, t)$  je volumen pora unutar istog REV-a. Poroznost je bezdimenzionalna veličina koja poprima vrijednosti između 0 i 1, često se izražava kao postotak pornog prostora unutar porozne sredine. Razlikujemo

*efektivnu i apsolutnu poroznost.* Pri računanju efektivne poroznosti pod volumenom pornog prostora se podrazumijeva samo onaj dio u kojem su pore međusobno povezane, odnosno u kojem se fluid može gibati. Apsolutna poroznost uključuje izolirane i međusobno povezane pore.

Prema načinu nastanka pora poroznost se dijeli na *primarnu* i *sekundarnu*. Primarna poroznost karakterizirana je malim dimenzijama pora. Do primarne poroznosti dolazi ako tlo nije bilo predmet kompresije i deformacije i individualna zrna zadržavaju svoj oblik. Sekundarna poroznost je posljedica geoloških procesa koji se javljaju nakon formacije sloja sedimenata. Karakterizira je postojanje niza pukotina ili fraktura.

Porozna sredina se može prema zavisnosti poroznosti o tlaku podijeliti na krutu i elastičnu. Kod krute porozne sredine promjene tlaka fluida ne utječu na geometriju pornog prostora, odnosno poroznost je funkcija prostornog položaja  $\Phi = \Phi(x)$ . Za elastičnu poroznu sredinu karakteristično je da se porozna matrica komprimira s povećanjem tlaka u fluida, a porni prostor se povećava. Kod smanjenja tlaka događa se suprotan proces. U ovom slučaju poroznost je funkcija tlaka i prostornog položaja  $\Phi = \Phi(x, p)$ .

## Propusnost

*Propusnost* je mjera kojom se porozna sredina opire strujanju fluida. Označava se s  $\mathbf{K}$ . U općenitom slučaju  $\mathbf{K}$  je simetričan, pozitivno definitan tenzor. Jedinica za propusnost u MKS sustavu je  $\text{m}^2$  dok se u praksi češće koristi jedinica D (darsi) definirana na sljedeći način:

$$1D = \frac{1\text{cP} \cdot (1\text{cm}^3/\text{s}/\text{cm}^2)}{1\text{atm cm}^{-1}} = 9.86923 \cdot \text{m}^2.$$

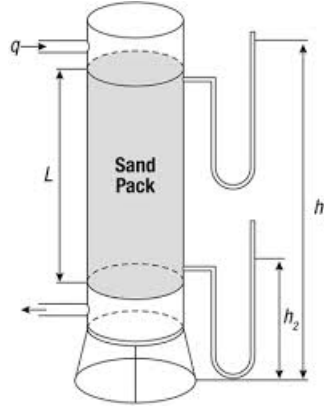
Porozna sredina je *homogena* ako je propusnost jednaka u svim njenim točkama. Ako je porozna sredina nehomogena  $\mathbf{K}$  je funkcija prostornog položaja. Ukoliko je tenzor propusnosti oblika  $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ , gdje je  $k$  konstanta, kažemo da je porozna sredina *izotropna*.

## 1.2 Darcyjev zakon

Darcyjev zakon je zakon koji opisuje laminaran gravitacijski tok vode u poroznoj sredini. Eksperimentalno ga je ustanovio francuski inženjer Henry Darcy 1856. godine. Eksperiment se sastojao od mjerenja volumena vode u jedinici vremena  $Q$ , koja prolazi kroz vertikalno postavljen cilindar duljine  $L$  i površine poprečnog presjeka  $A$ , koji je ispunjen pijeskom. Također su mjerene piezometarske razine  $h_1$  i  $h_2$  na vrhu i na dnu spremnika. Piezometarska razina  $h$  se definira sa

$$h = z + \frac{p}{\rho g}, \quad (1.2)$$

gdje je  $z$  vertikalna udaljenost od referentne ravnine  $z = 0$  s tim da je os  $z$  usmjerena prema gore.  $p$  je tlak fluida,  $\rho$  gustoća fluida, a  $g$  ubrzanje sile teže.



Slika 1.3: Darcyjev uređaj

Darcy je došao do sljedećeg omjera

$$Q = KA \frac{h_1 - h_2}{L}. \quad (1.3)$$

Koeficijent  $K$  se naziva hidraulička vodljivost. Jedinica za hidrauličku vodljivost je metar po danu (m/dan). Izraz  $\frac{Q}{A}$  predstavlja volumni protok po jedinici površine i naziva se Darcyjeva brzina te označava s  $\mathbf{q}$ . Darcyjeva brzina je prividna brzina toka fluida, dok se stvarna brzina toka fluida dobiva dijeljenjem Darcyjeve brzine s efektivnom poroznošću

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\Phi} \mathbf{q}. \quad (1.4)$$

Generalizacijom Darcyjevog omjera (1.3) dobivamo

$$\mathbf{q} = \frac{Q}{A} = -K \nabla h. \quad (1.5)$$

Predznak minus slijedi iz činjenice da se voda kreće iz područja višeg potencijala u područje nižeg potencijala. Budući da je piezometarska razina dana izrazom  $h = z + \frac{p}{\rho g}$ , Darcyjev zakon možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{q} = -\frac{K}{\rho g} (\nabla p - \rho \mathbf{g}),$$

gdje je  $\mathbf{g}$  vektor ubrzanja sile teže. Veza između hidrauličke vodljivosti i propusnosti  $\mathbf{K}$  dana je s

$$K = \mathbf{K} \frac{\rho g}{\mu}, \quad (1.6)$$



gdje je  $\mu$  dinamička viskoznost fluida. Darcyjev zakon sada glasi

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{K} (\nabla p - \rho \mathbf{g}). \quad (1.7)$$

Darcyjev zakon je detaljno testiran eksperimentalno i teorijski, te je primjenjiv na strujanje relativno male brzine.

### 1.3 Zakon sačuvanja mase

Gustoća fluida  $\rho$  se definira kao masa fluida po jedinici volumena. Neka je  $\Omega$  kontrolni volumen. Masa slobodnog fluida koji se nalazi unutar  $\Omega$  dana je izrazom

$$\int_{\Omega} \rho(x, t) dx,$$

stoga  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dx$  predstavlja brzinu promjene te mase. Izrazom

$$\int_{\partial\Omega} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n} dS$$

je dana količina mase fluida koja u jedinici vremena izađe iz kontrolnog volumena. Ovdje  $\mathbf{n}$  predstavlja jediničnu, vanjsku normalu na  $\partial\Omega$ , a  $\mathbf{v}$  brzinu strujanja fluida. Zakon sačuvanja mase kaže da je brzina promjene mase u kontrolnom volumenu  $\Omega$  jednaka brzini ulaska mase u  $\Omega$  odnosno

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dx + \int_{\partial\Omega} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Primjenom teorema o divergenciji i činjenice da gornja jednakost vrijedi za svaki kontrolni volumen  $\Omega$  dobivamo jednadžbu kontinuiteta koja glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Ukoliko se fluid nalazi u poroznoj sredini masa fluida u kontrolnom volumenu  $\Omega$  iznosi

$$\int_{\Omega} \Phi(x, t) \rho(x, t) dx,$$

a količina mase koja uđe odnosno izađe preko granice kontrolnog volumena iznosi

$$\int_{\partial\Omega} \rho(x, t) \mathbf{q}(x, t) \cdot \mathbf{n} dS,$$

gdje je  $\mathbf{q}$  Darcyjeva brzina. Ako pretpostavimo da u poroznoj sredini ne postoje unutarnji izvori ili ponori, odnosno jedini način na koji fluid može ući ili izaći iz porozne sredine je kroz njene granice, onda je zakon sačuvanja mase oblika

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\rho) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{q}) = 0. \quad (1.8)$$

Ukoliko postoje izvori i ponori i njihovo djelovanje je dano funkcijom  $f = f(x, t)$ , zakon sačuvanja mase glasi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi\rho) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{q}) = f. \quad (1.9)$$

## 1.4 Model jednofaznog toka fluida

Neka se u poroznoj sredini nalazi jedan fluid pod izotermnim uvjetima. Tada su gustoća fluida i viskoznost funkcije tlaka

$$\rho = \rho(p),$$

$$\mu = \mu(p).$$

Jednofazni model toka dan je s

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu(p)}\mathbf{K}(x)(\nabla p - \rho(p)\mathbf{g}) \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, p)\rho(p)) + \operatorname{div}(\rho(p)\mathbf{q}) = f(x, t) \quad (1.11)$$

gdje funkcija  $f$  predstavlja izvore i ponore fluida unutar porozne sredine. Uvrštavanjem Darcyjeve brzine u drugu jednadžbu dobivamo nelinearnu paraboličku jednadžbu za tlak

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x, p)\rho(p)) - \operatorname{div}\left(\frac{\rho(p)}{\mu(p)}\mathbf{K}(x)(\nabla p - \rho(p)\mathbf{g})\right) = f(x, t). \quad (1.12)$$

Jednadžba je parabolička stoga što je  $\frac{\partial}{\partial p}\Phi(x, p) > 0$  i  $\frac{\partial}{\partial p}\rho(p) > 0$ , te je  $\frac{\rho(p)}{\mu(p)}\mathbf{K}(x)$  pozitivno definitna matrica za svaki  $x$  i  $p$ .

Ukoliko je porozna sredina kruta, odnosno ako poroznost ovisi samo o prostornom položaju jednadžbu možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\Phi(x)\frac{\partial}{\partial t}(\rho(p)) - \operatorname{div}\left(\frac{\rho(p)}{\mu(p)}\mathbf{K}(x)(\nabla p - \rho(p)\mathbf{g})\right) = f(x, t). \quad (1.13)$$

Uz dodatnu pretpostavku konstantnosti gustoće i viskoznosti dobivamo eliptičku jednadžbu za tlak

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\mu}\mathbf{K}(x)(\nabla p - \rho\mathbf{g})\right) = f(x, t). \quad (1.14)$$

U slučaju homogene izotropne porozne sredine tenzor propusnosti je oblika  $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$  gdje je  $k$  konstanta, pa za tlak dobivamo Poissonovu jednadžbu

$$-\Delta p = \frac{\mu f}{\rho k}. \quad (1.15)$$

Koeficijent kompresibilnosti fluida, u oznaci  $c$ , definira se na sljedeći način

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (1.16)$$

Tekućine su obično slabo kompresibilne pa se uzima da je koeficijent kompresibilnosti  $c$  konstantan. Tada dobivamo

$$\rho = \rho_0 e^{c(p-p_0)}. \quad (1.17)$$

Ako je  $c \ll 1$  koristi se aproksimacija

$$\rho = \rho_0 + c(p - p_0). \quad (1.18)$$

Primjenom koeficijenta kompresibilnosti jednofazni tok fluida kroz poroznu sredinu možemo opisati nelinearnom paraboličkom jednadžbom za gustoću

$$\Phi \frac{\partial}{\partial t} \rho - \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu c} \mathbf{K} (\nabla \rho - c \rho^2 \mathbf{g}) \right) = f. \quad (1.19)$$

Da bismo dobili matematički model koji opisuje jednofazni tok fluida, jednadžbu je potrebno kompletirati rubnim i inicijalnim uvjetima. Promatrat ćemo dva tipa rubnih uvjeta. Ukoliko je na  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  zadana gustoća kao funkcija prostornog položaja i vremena imamo rubni uvjet prve vrste ili Dirichletov rubni uvjet

$$\rho = \rho_{bd}, \quad \text{na } \Gamma_D. \quad (1.20)$$

Ako je na  $\partial\Omega$  zadan protok, rubni uvjet je oblika

$$\frac{1}{\mu c} \mathbf{K} \nabla \rho \cdot \mathbf{n} = h, \quad \text{na } \Gamma_N, \quad (1.21)$$

gdje je  $\mathbf{n}$  jedinična vanjska normala na  $\Gamma_N$ , a  $h$  zadana funkcija. Ovakav rubni uvjet nazivamo Neumannovim rubnim uvjetom ili rubnim uvjetom druge vrste. Inicijalni uvjet je oblika

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.22)$$

U nastavku promatramo samo slučaj kada utjecaj gravitacije možemo zanemariti. Kao

primjer možemo navesti domene kod kojih je vertikalna dimenzija domene puno manja od njene horizontalne dimenzije. U tom slučaju dobivamo linearnu zadaću

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial}{\partial t} \rho - \operatorname{div}(\mathbb{A} \nabla \rho) = f & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \mathbf{n} = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) & \text{u } \Omega, \end{cases} \quad (1.23)$$

gdje je  $\mathbb{A} = \frac{1}{\mu c} \mathbf{K}$ . Pretpostavimo da je  $\rho_0 \in L^2(\Omega)$ , te  $\Phi \in L^\infty(\Omega)$ . Pretpostavimo i da funkcija  $\Phi$  zadovoljava sljedeći uvjet

$$\exists \alpha_0 > 0, \text{ takav da } \alpha_0 \leq \Phi(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.24)$$

Matrica koeficijenata  $\mathbb{A}(x, t) = (a_{ij}(x, t))$  je simetrična i uniformno pozitivno definitna, odnosno postoji pozitivna konstanta  $\alpha$  takva da vrijedi

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega, \forall t \in (0, T). \quad (1.25)$$

Pretpostavimo također da vrijedi

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega \times (0, T)), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

## 1.5 Varijacijska formulacija

Prilikom izvoda varijacijske formulacije tražimo da rješenje  $\rho(\cdot, t)$  pripada prostoru  $H^1(\Omega)$ , za svaki  $t \in (0, T)$ , stoga se funkcija  $\rho(x, t)$  ne promatra kao funkcija varijabli  $x$  i  $t$ , nego kao preslikavanje  $t \rightarrow \rho(x, t)$  koje svakom  $t \in (0, T)$  pridružuje funkciju iz  $H^1(\Omega)$ . Za rješenje tražimo još da vrijedi

$$\int_0^T \|\rho(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \int_\Omega \left( \rho(x, t)^2 + \sum_{i=1}^n (\partial_i \rho(x, t))^2 \right) dx dt < \infty, \quad (1.26)$$

odnosno da pripada prostoru  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . Funkciju  $f$  promatramo kao funkciju sa  $(0, T)$  u  $L^2(\Omega)$  i od nje zahtijevamo da zadovoljava

$$\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \int_\Omega f(x, t)^2 dx dt < \infty, \quad (1.27)$$

odnosno  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(\Omega \times (0, T))$ .

Neka je  $V = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$  prostor test funkcija. Množenjem (1.23)<sub>1</sub> s test funkcijom  $v$  i integracijom po  $\Omega$  dobivamo

$$\int_{\Omega} \Phi \partial_t \rho v dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{A} \nabla \rho) v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.28)$$

Parcijalnom integracijom u drugom integralu u (1.28) dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{A} \nabla \rho) v dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{A} \nabla \rho v) dx - \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx \\ &= \int_{\partial \Omega} (\mathbb{A} \nabla \rho \cdot \mathbf{n}) v dS - \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx \\ &= \int_{\Gamma_N} (\mathbb{A} \nabla \rho \cdot \mathbf{n}) v dS - \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice da se  $v$  poništava na  $\Gamma_D$ . Primjenom jednakosti (1.29) izraz (1.28) možemo zapisati na sljedeći način

$$\int_{\Omega} \Phi \partial_t \rho v dx + \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_N} (\mathbb{A} \nabla \rho \cdot \mathbf{n}) v dS = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.30)$$

Uvrštavanjem Neumannovog rubnog uvjeta dobivamo

$$\int_{\Omega} \Phi \partial_t \rho v dx + \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS, \quad \forall v \in V. \quad (1.31)$$

Budući da test funkcija  $v$  ne ovisi o vremenu, parcijalnu derivaciju po vremenu možemo izvući ispred integrala, te dobivamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi \rho v dx + \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS, \quad \forall v \in V. \quad (1.32)$$

Navedena jednakost zove se Galerkinova varijacijska ili slaba formulacija zadaće (1.23).

Neka je

$$a(\rho, v) = \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS. \quad (1.33)$$

Pripadna varijacijska zadaća sada glasi

$$\begin{cases} \text{naći } \rho \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \rho|_{\Gamma_D \times (0, T)} = \rho_{bd} \\ \frac{d}{dt} (\Phi \rho, v)_{L^2(\Omega)} + a(\rho, v) = F(v), \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \\ \rho(0) = \rho_0. \end{cases} \quad (1.34)$$

**Napomena 1.5.1.** Ovdje treba naglasiti da se jednadžba (1.34)<sub>2</sub> shvaća u smislu distribucija na intervalu  $(0, T)$ . Razlog tomu je činjenica da, za proizvoljan  $v \in V$ , funkcija  $t \mapsto (\Phi\rho(t), v)_{L^2}$  nema nužno klasičnu derivaciju, stoga je (1.34)<sub>2</sub> kraći zapis za

$$-\int_0^T (\Phi\rho, v)_{L^2} \varphi'(t) dt - \varphi(0)(\rho_0, v)_{L^2} + \int_0^T a(\rho, v)\varphi(t) dt = \int_0^T F(v)\varphi(t) dt, \\ \forall v \in V, \forall \varphi \in C^\infty([0, T]), \varphi(T) = 0.$$

Početni uvjet zadajemo posebno, što ima smisla, budući da je funkcija  $\rho \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Rješenje zadaje (1.34) naziva se *slabo rješenje* zadaje (1.23). Iz gornjeg računa se vidi da vrijedi sljedeća tvrdnja: Ako je  $\rho \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  klasično rješenje zadaje (1.23), onda je  $\rho$  ujedno i slabo rješenje. Parcijalnom integracijom se jednostavno dokazuje i obratna tvrdnja: Ako je slabo rješenje zadaje dovoljno glatko, onda je ono i klasično rješenje. Stoga je slabo rješenje dobra generalizacija pojma rješenja.

Dirichletov rubni uvjet u zadaci (1.34) je moguće homogenizirati. Pretpostavimo da postoji funkcija  $G \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$  takva da je  $G|_{\Gamma_D \times (0, T)} = \rho_{bd}$ ,  $(\mathbb{A}\nabla G \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_N \times (0, T)} = 0$  i  $G(\cdot, 0) = 0$ . Rješenje  $\rho$  sada tražimo u obliku  $\rho = u + G$ , gdje je  $u \in L^2(0, T; V)$ . Uz ove pretpostavke dobivamo

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \Phi(u + G)v dx + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla(u + G) \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS, \quad \forall v \in V.$$

Varijacijska formulacija sada glasi

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \Phi u v dx + \int_\Omega \mathbb{A}\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega (f - \Phi \partial_t G) v dx - \int_\Omega \mathbb{A}\nabla G \cdot \nabla v dx \\ + \int_{\Gamma_N} h v dS, \quad \forall v \in V. \quad (1.35)$$

Označimo sa  $F_G$  funkcional s desne strane, odnosno

$$F_G(v) = \int_\Omega (f - \Phi \partial_t G) v dx - \int_\Omega \mathbb{A}\nabla G \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS, \quad v \in V. \quad (1.36)$$

Varijacijska zadaća sada je oblika

$$\begin{cases} \text{naći } u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \\ \frac{d}{dt} (\Phi u, v)_{L^2(\Omega)} + a(u, v) = F_G(v), \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \\ u(0) = \rho_0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Promotrimo na trenutak sljedeću zadaću

$$\begin{cases} \text{naći } u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \\ \frac{d}{dt}(u, v)_{L^2(\Omega)} + a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.38)$$

gdje je  $a$  bilinearna forma,  $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$  i  $u_0 \in L^2(\Omega)$  zadane funkcije, te  $H_0^1 \subset V \subset H^1(\Omega)$  zatvoren potprostor. Teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja zadaće (1.38) glasi

**Teorem 1.5.2.** *Neka je  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  koercitivna i neprekidna bilinearna forma za svaki  $t \in (0, T)$ , tj.  $a$  zadovoljava*

$$\begin{aligned} \exists C_1 > 0 \text{ takav da vrijedi } |a(u, v)| &\leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u, v \in V, \forall t \in (0, T), \\ \exists C_2 > 0 \text{ takav da } a(v, v) &\geq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall t \in (0, T), \forall v \in V. \end{aligned}$$

Tada postoji jedinstveno rješenje  $u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  zadaće (1.38).

Dokaz teorema može se pronaći u [10]. Vratimo se sada zadaći (1.37). Provjeravamo zadovoljavaju li bilinearna forma  $a$ , te funkcional  $F_G$  uvjete Teorema 1.5.2. Na  $L^2(\Omega)$  definiramo preslikavanje

$$((u, v)) = \int_{\Omega} \Phi(x)u(x)v(x)dx, \quad (1.39)$$

koje je očito skalarni produkt ekvivalentan standardnom skalarnom produktu u  $L^2(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} ((v, v)) &= \int_{\Omega} \Phi(x)v(x)v(x)dx \leq \|\Phi\|_{L^\infty} (v, v)_{L^2(\Omega)} \\ ((v, v)) &= \int_{\Omega} \Phi(x)v(x)v(x)dx \geq \alpha_0 (v, v)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Uvođenjem novog skalarnog produkta eliminiro  $\Phi$  iz varijacijske formulacije, te varijacijska zadaća (1.37) postaje

$$\begin{cases} \text{naći } u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \\ \frac{d}{dt}((u, v)) + a(u, v) = F_G(v), \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \\ u(0) = \rho_0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Provjeravamo neprekidnost forme  $a$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq \int_{\Omega} |\mathbb{A} \nabla u| |\nabla v| dx \leq \| \mathbb{A} \|_{L^{\infty}} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx \\ &\leq \| \mathbb{A} \|_{L^{\infty}} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| \mathbb{A} \|_{L^{\infty}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

gdje je  $\| \mathbb{A} \|$  operatorska norma matrice  $\mathbb{A}$ .

Primjenom Hoelderove nejednakosti, te teorema o tragu dokazujemo da je  $F_G$  neprekidan funkcional

$$\begin{aligned} |F_G(v)| &= \left| \int_{\Omega} (f - \Phi \partial_t G) v dx - \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla G \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L^{\infty}} \|\partial_t G\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \| \mathbb{A} \|_{L^{\infty}} \| \nabla G \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L^{\infty}} \|\partial_t G\|_{L^2(\Omega)} + \| \mathbb{A} \|_{L^{\infty}} \| \nabla G \|_{L^2(\Omega)} + C \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Koercitivnost bilinearne forme slijedi iz pozitivne definitnosti matrice  $\mathbb{A}$ , te ekvivalencije normi  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  i  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  u  $V$ :

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla v \cdot \nabla v dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = \alpha |v|_{H^1(\Omega)}^2 \geq C \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Time je dokazana egzistencija i jedinstvenost rješenja zadatka (1.40).

**Teorem 1.5.3.** *Neka je  $\rho_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ , te neka su ispunjene sljedeće pretpostavke*

$$\exists \alpha_0 > 0, \text{ takav da } \alpha_0 \leq \Phi(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega,$$

$$\exists \alpha > 0, \text{ takav da } \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega, \forall t \in (0, T),$$

$$k_{ij} \in L^{\infty}(\Omega \times (0, T)), \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \text{ gdje je } \mathbf{K} = (k_{ij}), \text{ te}$$

$$\exists G \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) \text{ takva da } G|_{\Gamma_D \times (0, T)} = \rho_{bd}, \left( \frac{1}{\mu c} \mathbf{K} \nabla G \cdot \mathbf{n} \right)|_{\Gamma_N \times (0, T)} = 0 \text{ i } G(\cdot, 0) = 0.$$

Tada zadatak (1.23) ima jedinstveno slabo rješenje.

Teorem 1.5.3 pokazuje da uz fizikalno razumne uvjete na parametre porozne sredine, propusnost i poroznost, te uz uvjete na glatkoću rubnih uvjeta i domene, koji su dani kroz uvjete na funkciju  $G$ , zadatak (1.23) je korektno postavljena, s tim da rješenje trebamo uzeti u slabom smislu. Analogan zaključak vrijedi i za nelinearnu zadatak (1.19), čiju varijacijsku formulaciju i dokaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja možemo pronaći u [7].



## Poglavlje 2

# Metoda konačnih elemenata za paraboličke zadaće

Metoda konačnih elemenata je metoda za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi koja se temelji na varijacijskoj formulaciji inicijalno-rubne zadaće, te na konstrukciji prostora konačnih elemenata. Objasnimo metodu na primjeru zadaće koja opisuje jednofazni tok fluida kroz poroznu sredinu

$$\begin{cases} \Phi \frac{\partial}{\partial t} \rho - \operatorname{div}(\mathbb{A} \nabla \rho) = f & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho = g & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \mathbf{n} = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) & \text{u } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

U odjeljku 1.5 izveli smo varijacijsku formulaciju zadaće sa homogeniziranim Dirichletovim uvjetom koja glasi

$$\begin{cases} \text{naći } u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \\ \frac{d}{dt}((u, v)) + a(u, v) = F_G(v), \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \\ u(0) = \rho_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

gdje je

$$V = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\},$$
$$((u, v)) = \int_{\Omega} \Phi(x) u(x) v(x) dx,$$

$$\begin{aligned}
 a(\rho, v) &= \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla \rho \cdot \nabla v dx, \\
 F_G(v) &= \int_{\Omega} (f - \Phi \partial_t G) v dx - \int_{\Omega} \mathbb{A} \nabla G \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS.
 \end{aligned}$$

## 2.1 Prostorna diskretizacija

Metoda konačnih elemenata temelji se na varijacijskoj aproksimaciji kojom iz beskonačnodimenzionalnog problema dobivamo konačnodimenzionalni zamjenom beskonačnodimenzionalnog prostora  $V$  u zadaći (2.2) konačnodimenzionalnim prostorom  $V_h \subset V$ . Na ovaj način dobivamo sljedeću zadaću

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{naći } u_h \in L^2(0, T; V_h) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \\
 \frac{d}{dt}((u_h, v)) + a(u_h, v) = F_G(v), \quad \forall v \in V_h, t \in (0, T) \\
 u_h(\cdot, 0) = u_{0,h}.
 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Zadaća (2.3) se naziva semidiskretnom budući da je diskretizirana u prostornim varijablama, a neprekidna u vremenskoj varijabli  $t$ . Inicijalni uvjet  $\rho_0$  je aproksimiran funkcijom  $u_{0,h} \in V_h$  i njen izbor nije jedinstven. Neka su bazne funkcije prostora  $V_h$  označene s  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Tada se rješenje aproksimacijske zadaće (2.3)  $u_h$  može na jedinstven način zapisati u obliku

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^M u_i(t) \varphi_i(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (2.4)$$

Funkciju  $u_{0,h}$  također zapišimo u bazi  $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$

$$u_{0,h}(x) = \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(x). \quad (2.5)$$

Za  $j = 1, \dots, M$  uvrstimo u (2.3)<sub>2</sub>  $v = \varphi_j$ . Za  $t \in (0, T)$  dobivamo

$$\sum_{i=1}^M ((\varphi_i, \varphi_j)) \frac{du_i}{dt} + \sum_{i=1}^M a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = F(\varphi_j), \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (2.6)$$

Sustav se matricno može zapisati u obliku

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} + \mathbf{A} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad t \in (0, T) \\
 \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,
 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

gdje su  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$   $M \times M$  matrice

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (a_{ij}), & a_{ji} &= a(\varphi_i, \varphi_j), \\ \mathbf{B} &= (b_{ij}), & b_{ji} &= ((\varphi_i, \varphi_j)),\end{aligned}$$

a  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_0$  i  $\mathbf{f}$  su vektori

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u_j), & \mathbf{u}_0 &= (c_j), \\ \mathbf{f} &= (f_j), & f_j &= F_G(\varphi_j).\end{aligned}$$

Varijacijsku zadaću smo pretvorili u sustav običnih diferencijalnih jednadžbi. Matrica  $\mathbf{A}$  se naziva *matricom krutosti*, dok se matrica  $\mathbf{B}$  naziva *matricom mase*. Matrica  $\mathbf{B}$  je regularna budući da je to Gramova matrica baze  $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ .

## 2.2 Konstrukcija prostora konačnih elemenata

U metodi konačnih elemenata prostor  $V_h$  konstruira se na specifičan način. Početna točka u konstrukciji je triangulacija domene  $\Omega$ , za koju pretpostavljamo da je ograničen, poliedarski skup. Triangulacija domene  $\Omega$  je konačna familija  $\mathcal{T}_h$  podskupova od  $\overline{\Omega} = \{K_1, \dots, K_N\}$  koja ima sljedeća svojstva:

1.  $\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = \overline{\Omega}$ ,
2. Svaki  $K \in \mathcal{T}_h$  je zatvoren poliedarski skup i  $\text{Int}(K) \neq \emptyset$ ,
3. Za svaka dva različita skupa  $K_1$  i  $K_2 \in \mathcal{T}_h$  vrijedi  $\text{Int}(K_1) \cap \text{Int}(K_2) = \emptyset$ .

Skupove iz  $\mathcal{T}_h$  nazivamo *elementima*. Parametar  $h$  triangulacije  $\mathcal{T}_h$  se odnosi na veličinu elemenata, i općenito predstavlja mjeru finoće triangulacije. Obično se uzima kao dijаметar najvećeg elementa, odnosno

$$h_j = \max_{x, y \in K, K \in \mathcal{T}_h} \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, \dots, N, \quad h = \max\{h_1, \dots, h_N\}.$$

Triangulacija poligonalne domene za konformnu metodu konačnih elemenata mora zadovoljavati i sljedeći uvjet:

4. Svaka dva elementa  $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ ,  $K_1 \neq K_2$  za koje je  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$  imaju ili zajedničku stranicu, ili zajednički brid ili zajednički vrh.

Primjeri triangulacije su triangulacija domene simpleksima i pravokutnicima u  $\mathbb{R}^n$ .

Neka je  $\mathcal{T}_h$  neka triangulacija domene  $\Omega$ . Svakom elementu  $K \in \mathcal{T}_h$  pridružujemo linearan prostor funkcija na  $K$

$$P_K = \{v : K \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad (2.8)$$

takav da vrijedi

$$\dim P_K = n_K < \infty. \quad (2.9)$$

Definiramo  $X_h$  kao linearni prostor funkcija na  $\bar{\Omega}$  čije su restrikcije na  $K$  u  $P_K$  :

$$X_h = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_K\}. \quad (2.10)$$

Funkcije u  $X_h$  općenito nisu neprekidne, jer imaju skokove na granicama susjednih elemenata, stoga prostor konačnih elemenata  $V_h$  definiramo kao podskup prostora  $X_h$  koji se sastoji od neprekidnih funkcija i dokazujemo da je tada  $V_h \subseteq H^1(\Omega)$ .

**Lema 2.2.1.** *Neka je  $P_K \in H^1(K)$  za svaki  $K \in \mathcal{T}_h$ , te neka je  $V_h = X_h \cap C(\bar{\Omega})$ . Tada je  $V_h \subset H^1(\Omega)$ .*

*Dokaz.* Neka je  $v \in X_h$ . Tada vrijedi

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v|_K\|_{L^2(K)}^2,$$

odnosno  $v \in L^2(\Omega)$ . Potrebno je još dokazati da svako  $v \in V_h$  ima slabu derivaciju u  $L^2(\Omega)$ . To znači da za  $i = 1, \dots, n$  postoje  $v_i \in L^2(\Omega)$  takvi da vrijedi

$$\int_{\Omega} v \partial_i \varphi dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Parcijalnom integracijom na svakom elementu dobivamo

$$\int_K v \partial_i \varphi dx = - \int_K \partial_i (v|_K) \varphi dx + \int_{\partial K} v|_K n_{i,k} \varphi dS,$$

gdje je  $n_{i,k}$  komponenta jedinične, vanjske normale na  $\partial K$ . Sumiranjem po svim elementima dobivamo

$$\int_{\Omega} v \partial_i \varphi dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v|_K n_{i,k} \varphi dS,$$

gdje smo  $v_i$  definirali formulom  $v_i|_K = \partial_i (v|_K) \in L^2(K)$ , pa je očito  $v_i \in L^2(\Omega)$ . Da bi  $v_i$  bila slaba derivacija mora suma integrala po rubu biti nula. To je istina budući da je  $\varphi$  nula na  $\partial\Omega$ , a doprinosi od dva susjedna elementa se poništavaju zbog neprekidnosti funkcije  $v$ . □

*Konačni element* se definira kao trojka  $(K, P_K, \Sigma_K)$ , gdje je  $K$  skup,  $P_K$  konačnodimenzi-  
onalni prostor funkcija na  $K$ , a  $\Sigma_K$  skup stupnjeva slobode. Stupnjevi slobode su funkci-  
onali na prostoru funkcija  $P_K$ . Konačni element mora zadovoljavati svojstvo *unisolvantnosti*,  
odnosno stupnjevi slobode u  $\Sigma_K$  moraju na jedinstven način određivati funkciju u  $P_K$ . Izbor  
stupnjeva slobode je važan radi postizanja neprekidnosti funkcija iz  $V_h$ .

## Prostor konačnih elemenata na pravokutnicima

Pretpostavimo da se triangulacija domene  $\mathcal{T}_h$  sastoji od pravokutnih elemenata. Pravokut-  
nik  $K$  u  $\mathbb{R}^n$  je definiran s

$$K = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}. \quad (2.11)$$

Kod triangulacije domene pravokutnicima za prostor  $P_K$  uzima se linearan prostor svih  
polinoma stupnja najviše  $k$  u svakoj varijabli zasebno, u oznaci  $\mathbb{Q}_k$ . U  $\mathbb{R}^2$  taj je prostor  
jednak

$$\mathbb{Q}_k = \left\{ v : v(x) = \sum_{i,j=0}^k v_{i,j} x_1^i x_2^j, x \in K, v_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.12)$$

Primijetimo da je dimenzija prostora  $\mathbb{Q}_k$  u  $\mathbb{R}^n$  jednaka  $(k+1)^n$ , dakle da bismo na jedins-  
tven način zadali polinom iz  $\mathbb{Q}_k$ , dovoljno je zadati njegovu vrijednost u  $(k+1)^n$  simetrično  
raspoređenih točaka, koje se nazivaju *nodalne točke*. Za skup  $\Sigma_K$  uzima se skup funkci-  
onala oblika  $\phi(p) = p(\hat{\mathbf{a}}_i)$ , gdje su  $\hat{\mathbf{a}}_i$  nodalne točke pravokutnika. Kao primjer možemo  
navesti slučaj  $k = 1$ , gdje se za nodalne točke uzimaju vrhovi pravokutnika kojih je ukupno  
 $2^n$ , a tolika je i dimenzija prostora  $\mathbb{Q}_1$  u  $\mathbb{R}^n$ . Konačan element konstruiran na ovaj način  
naziva se *n-pravokutnik tipa (1)*. U slučaju  $k = 2$ , pored vrhova za nodalne točke uzimamo  
točke koje raspolavljaju stranice, te točku koja se nalazi u centru pravokutnika za  $n = 2$ ,  
dok za  $n = 3$  uzimamo dodatno točke koje raspolavljaju bridove, te točke koje se nalaze  
u centrima stranica, te u centru samog elementa. Ovakav raspored nodalnih točaka osigu-  
rava svojstvo unisolvantnosti trojke  $(K, \mathbb{Q}_k, \Sigma_K)$ . Element dobiven ovim putem naziva se  
*n-pravokutnik tipa (2)*. Detaljniji opis ovog tipa konačnih elemenata može se pronaći u  
[16].

Ukoliko se triangulacija sastoji od elemenata istog tipa, prostor konačnih elemenata  
se konstruira tako da se fiksira jedan, referentni element, a svi drugi elementi se dobivaju  
afinim preslikavanjem referentnog elementa. Označimo taj element s  $(\hat{K}, P(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ . Kod  
triangulacije domene pravokutnicima uzimamo  $\hat{K} = [0, 1]^n$ , te  $P(\hat{K}) = \mathbb{Q}_k(\hat{K})$ . Neka je  
 $\{\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_l\}$  skup nodalnih točaka referentnog elementa. Pretpostavimo da se element  $K \in \mathbb{R}^n$

može prikazati kao afina slika od  $\hat{K}$ , te neka je

$$\mathbf{F}_K(\hat{x}) = \mathbf{B}_K \hat{x} + \mathbf{b}_k \quad (2.13)$$

afino preslikavanje koje preslikava referentni element  $\hat{K}$  u element  $K \in \mathcal{T}_h$ , odnosno  $K = \mathbf{F}_K(\hat{K})$ . Prostor funkcija  $P_K$  na  $K$  definiramo na sljedeći način

$$P(K) = \left\{ v : v(x) = \hat{v}(\mathbf{F}_K^{-1}(x)), x \in K, \hat{v} \in P(\hat{K}) \right\}. \quad (2.14)$$

Skup stupnjeva slobode  $\Sigma_K$  definiramo kao skup funkcionala oblika  $\phi(p) = p(\mathbf{a}_i)$ , gdje su  $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{a}}_i)$ , za  $i = 1, \dots, l$ . Može se pokazati da je  $s(K, P(K), \Sigma_K)$  dan jedan konačan element, odnosno  $(K, P(K), \Sigma_K)$  zadovoljava svojstvo unisolvantnosti. Za elemente  $(\hat{K}, P(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$  i  $(K, P(K), \Sigma_K)$  kažemo da su *afino ekvivalentni*. Bitno je naglasiti da je ovakva konstrukcija prostora konačnih elemenata moguća jedino ako se triangulacija domene sastoji od paralelograma.

Neka je  $\mathcal{N}_h$  skup svih nodalnih točaka svih elemenata triangulacije. Kod triangulacije domene pravokutnicima za prostor  $X_h$  uzimamo

$$X_h = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in \mathbb{Q}_k(K)\}.$$

Prostor konačnih elemenata  $V_h$  sastoji se samo od onih funkcija iz  $X_h$  koje u nodalnim točkama koje se nalaze na granici dva ili više elemenata primaju istu vrijednost u svim elementima koji ih sadrže. Svaka funkcija iz  $V_h$  je na jedinstven način određena svojim vrijednostima u skupu  $\mathcal{N}_h$ , pa vrijednosti funkcije u tim točkama predstavljaju *globalne stupnjeve slobode*. Primijetimo da izborom globalnih stupnjeva slobode osiguravamo globalnu neprekidnost funkcija iz  $V_h$ .

Bazu za prostor  $V_h$  možemo dobiti na način da najprije konstruiramo bazne funkcije na referentnom elementu  $(\hat{K}, P(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ , a zatim pomoću afinog preslikavanja dobivamo bazne funkcije na proizvoljnom elementu  $(K, P(K), \Sigma_K)$ . Svakom vrhu  $\hat{\mathbf{a}}_i$  referentnog elementa  $\hat{K}$  pridružujemo baznu funkciju  $\hat{\varphi}_i$  definiranu na sljedeći način

$$\hat{\varphi}_i \in V_h, \quad \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{a}}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (2.15)$$

Ukoliko je naš referentni element  $\hat{K} = [0, 1]^2$ , te  $P(\hat{K}) = \mathbb{Q}_1$  kao primjer baznih funkcija možemo navesti

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}) = (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2), \quad \hat{\varphi}_2(\hat{x}) = \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2), \quad \hat{\varphi}_3(\hat{x}) = \hat{x}_1\hat{x}_2, \quad \hat{\varphi}_4(\hat{x}) = \hat{x}_2(1 - \hat{x}_1).$$

Bazne funkcije na proizvoljnom elementu  $K \in \mathcal{T}_h$  definiramo na sljedeći način

$$\varphi_i = \hat{\varphi}_i \circ \mathbf{F}_K^{-1}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.16)$$

Ovakva konstrukcija prostora konačnih elemenata pogodna je za implementaciju metode, jer se na taj način sva računanja vrše na referentnom elementu, te nam je potrebna samo jedna formula numeričke integracije na referentnom elementu. Tada elemente matrica  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  možemo računati na sljedeći način

$$a_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\hat{K}} \mathbb{A} (\nabla \mathbf{F}_K(\hat{x}))^{-\tau} \nabla \hat{\varphi}_j(\hat{x}) \cdot (\nabla \mathbf{F}_K(\hat{x}))^{-\tau} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) |det \mathbf{F}_K(\hat{x})| d\hat{x}, \quad i, j = 1, \dots, M,$$

$$b_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\hat{K}} \Phi(\mathbf{F}_K(\hat{x})) \hat{\varphi}_j(\hat{x}) \hat{\varphi}_i(\hat{x}) |det \mathbf{F}_K(\hat{x})| d\hat{x}, \quad i, j = 1, \dots, M.$$

Analogno računamo vektor desne strane  $\mathbf{f}$

$$f_i = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \int_{\hat{K}} (f(\mathbf{F}_K(\hat{x})) - \Phi(\mathbf{F}_K(\hat{x})) \partial_t G(\mathbf{F}_K(\hat{x}))) \hat{\varphi}_i(\hat{x}) |det \mathbf{F}_K(\hat{x})| d\hat{x} \right. \\ \left. - \int_{\hat{K}} \mathbb{A} (\nabla \mathbf{F}_K(\hat{x}))^{-\tau} \nabla G(\mathbf{F}_K(\hat{x})) \cdot (\nabla \mathbf{F}_K(\hat{x}))^{-\tau} \hat{\varphi}_i(\hat{x}) |det \mathbf{F}_K(\hat{x})| d\hat{x} \right] \\ + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ \partial K \subset \Gamma_N}} \int_{\partial \hat{K}} h(\mathbf{F}_K(\hat{x})) \hat{\varphi}_i(\hat{x}) |det \mathbf{F}_K(\hat{x})| d\hat{S}, \quad i = 1, \dots, M.$$

## 2.3 Vremenska diskretizacija

Vremensku diskretizaciju sustava možemo provesti primjenom implicitne Eulerove metode. Tada dobivamo

$$\begin{cases} \mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\Delta t^m} + \mathbf{A} \mathbf{u}^m = \mathbf{f}^m \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

gdje je  $\Delta t^m = t^m - t^{m-1}$ . U svakom koraku  $t^m$ ,  $m \geq 1$  rješavamo sljedeći sustav

$$(\mathbf{B} + \Delta t^m \mathbf{A}) \mathbf{u}^m = \Delta t^m \mathbf{f}^m + \mathbf{B} \mathbf{u}^{m-1}. \quad (2.18)$$

Vremensku diskretizaciju moguće je provesti bilo kojom numeričkom metodom za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi npr. Eulerovom metodom, Runge-Kutta metodom, itd. Bitno je naglasiti da u diskretizaciji ipak preferiramo implicitne metode zbog njihove bezuvjetne stabilnosti, što je nužno jer je dobiveni sustav algebarskih jednadžbi krut. Može se pokazati da se uvjetovanost matrice  $\mathbf{A}$  ponaša kao  $\frac{1}{h^2}$ , gdje je  $h$  finoća mreže.

**Napomena 2.3.1.** U slučaju nelinearne paraboličke diferencijalne zadaće dobili bismo nelinearni sustav jednadžbi koji možemo riješiti npr. Newtonovom metodom.

Vremenski korak može biti varijabilan. Smanjujemo ga kada broj linearnih, odnosno nelinearnih iteracija raste, a povećavamo ga kad broj iteracija pada. To je posebno važno u nelinearnom slučaju.



## Poglavlje 3

# Model dvostruke poroznosti

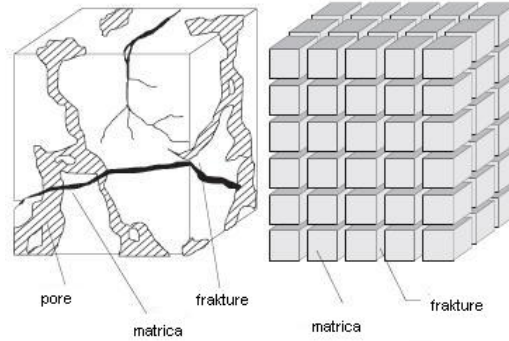
*Frakturirana porozna sredina* je sredina koja se sastoji od dviju različitih poroznih struktura: matrice poroznih blokova i fraktura koje ih okružuju. Model dvostruke poroznosti je makroskopski model toka fluida u ovakvoj domeni. Pored dviju različitih poroznosti uzima se u obzir da matični blokovi i frakture imaju različitu propusnost. Za frakture je karakteristična vrlo visoka propusnost i poroznost u odnosu na matične blokove, stoga se najveći dio transporta fluida odvija upravo kroz frakture. Dakle ovakva domena je izrazito nehomogena, pa se model toka fluida najprije zadaje na Darcyjevoj skali koja u ovom slučaju predstavlja mikroskopsku skalju. Generalni makroskopski model se dobije kao limes mikroskopskih modela kad veličina matičnog bloka teži u nulu. Izvod modela dvostruke poroznosti napravljen je prema [11].

### 3.1 Izvod modela

Prije zadavanja modela na mikroskopskoj razini potrebno je opisati idealizirani model frakturirane sredine  $\Omega$ . Pretpostavimo da je  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  domena sa periodičkom strukturom. Preciznije,  $\Omega$  se može prikazati kao unija disjunktih paralelopipeda koji su periodički s periodom  $\varepsilon Y$ , gdje je  $Y = (0, 1)^3$  i  $\varepsilon > 0$ , te  $\gamma^\varepsilon \subset \mathbb{Z}^3$  skup indeksa koji ovisi o  $\varepsilon$

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \varepsilon(\bar{Y} + \xi). \quad (3.1)$$

Ćelija  $Y$  se sastoji od matičnog bloka  $Y_m$  koji je u potpunosti okružen prostorom fraktura  $Y_f$ .



Slika 3.1: Prijelaz na idealizirani model frakturirane porozne sredine

$\Omega$  možemo zapisati kao uniju  $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Omega_m^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon$ . Domena  $\Omega_f^\varepsilon$  predstavlja područje fraktura unutar  $\Omega$  te je jednaka

$$\Omega_f^\varepsilon = \bigcup_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \varepsilon(Y_f + \xi). \quad (3.2)$$

Domena  $\Omega_m^\varepsilon$  označava matrični dio unutar  $\Omega$  i za nju vrijedi

$$\Omega_m^\varepsilon = \bigcup_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \varepsilon(Y_m + \xi). \quad (3.3)$$

Područje koje razdvaja matrični dio od frakturog dijela označavamo  $\Gamma^\varepsilon$ ,

$$\Gamma^\varepsilon = \bigcup_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \varepsilon(\partial Y_m + \xi). \quad (3.4)$$

Gustoću fluida  $\rho^\varepsilon$  ćemo promatrati posebno u frakturama i posebno u matrici, stoga uvodimo restrikcije  $\rho_f^\varepsilon = \rho^\varepsilon|_{\Omega_f^\varepsilon}$  i  $\rho_m^\varepsilon = \rho^\varepsilon|_{\Omega_m^\varepsilon}$ . Sada za gustoću fluida vrijedi

$$\rho^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \rho_f^\varepsilon(x, t) & (x, t) \in \Omega_f^\varepsilon \times (0, T) \\ \rho_m^\varepsilon(x, t) & (x, t) \in \Omega_m^\varepsilon \times (0, T). \end{cases} \quad (3.5)$$

Pretpostavimo da fluid ima konstantnu viskoznost  $\mu$ , konstantan koeficijent kompresibilnost  $c$ , te da tlak i gustoća fluida zadovoljavaju sljedeću jednadžbu stanja

$$d\rho^\varepsilon = c\rho^\varepsilon dp.$$

Neka je  $\Phi : Y \rightarrow (0, 1]$  poroznost unutar jedinične ćelije  $Y$ . Budući da se pretpostavlja da matrični blokovi imaju jednaka svojstva funkciju  $\Phi$  proširimo po periodičnosti s periodom  $Y$ . Dobivamo funkciju

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, 1]. \quad (3.6)$$

Pretpostavljamo da je poroznost konstantna na frakturnom djelu  $Y_f$ , dok je na matričnom djelu  $Y_m$  funkcija prostornog položaja

$$\Phi(y) = \begin{cases} \Phi^* & y \in Y_f \\ \phi(y) & y \in Y_m. \end{cases} \quad (3.7)$$

Time dobivamo da je poroznost unutar matrice  $\Omega_m^\varepsilon$  definirana na sljedeći način

$$\begin{aligned} \phi^\varepsilon : \Omega_m^\varepsilon &\rightarrow (0, 1] \\ \phi^\varepsilon(x) &= \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

dok je poroznost  $\Phi^* : \Omega_f^\varepsilon \rightarrow (0, 1]$  na području fraktura  $\Omega_f^\varepsilon$  konstantna. Sada možemo definirati poroznost  $\Phi^\varepsilon : \Omega \rightarrow (0, 1]$  na čitavoj domeni  $\Omega$  sa

$$\Phi^\varepsilon(x) = \begin{cases} \Phi^* & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ \phi^\varepsilon(x) & x \in \Omega_m^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.9)$$

Na jednak način najprije definiramo propusnost  $K : Y \rightarrow (0, +\infty)$  unutar jedinične ćelije  $Y$ , te je proširimo po periodičnosti na čitav  $\mathbb{R}^3$

$$K : \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, +\infty). \quad (3.10)$$

Pretpostavimo da je funkcija  $K$  konstantna na frakturnom djelu  $Y_f$ , a funkcija prostornog položaja na matričnom djelu odnosno

$$K(y) = \begin{cases} K^* & y \in Y_f \\ k(y) & y \in Y_m. \end{cases} \quad (3.11)$$

Propusnost unutar matrice  $\Omega_m^\varepsilon$  je dana s

$$\begin{aligned} k^\varepsilon : \Omega_m^\varepsilon &\rightarrow (0, +\infty) \\ k^\varepsilon(x) &= k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Propusnost unutar fraktura  $\Omega_f^\varepsilon$  je konstantna, stoga definiramo propusnost  $K^\varepsilon : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$  unutar  $\Omega$  na sljedeći način

$$K^\varepsilon(x) = \begin{cases} K^* & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ \varepsilon^2 k^\varepsilon(x) & x \in \Omega_m^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.13)$$

Područje fraktura se odlikuje vrlo visokom propusnosti  $K^*$ , te poroznosti  $\Phi^* \approx 1$ , dok je na području matrice suprotna situacija. Kako bi modelirali činjenicu da je propusnost matrice neusporedivo manja od propusnosti fraktura, odnosno kako bi se očuvao protok

fluida između matričnih blokova i fraktura od degeneracije pri prijelazu s mikroskopskog modela na makroskopski potrebno je skalirati propusnost faktorom  $\varepsilon^p$ , za neki  $p > 0$ . Izbor eksponenta  $p = 2$  možemo opravdati na sljedeći način. Uzmimo da je  $\rho_m^\varepsilon(x) = \rho_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $\rho_m : Y_m \rightarrow (0, +\infty)$  funkcija proširena po periodičnosti. Promatramo količinu fluida koja iz matrice ulazi u frakture.

$$I_m^\varepsilon = \int_{\partial\Omega_m^\varepsilon} \frac{k^\varepsilon(x)}{\mu c} \nabla_x \rho_m^\varepsilon(x) \cdot \nu dS_x = \sum_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \int_{\varepsilon(\partial Y_m + \xi)} \frac{k^\varepsilon(x)}{\mu c} \nabla_x \rho_m^\varepsilon(x) \cdot \nu dS_x, \quad (3.14)$$

gdje je  $\nu$  jedinična vanjska normala na  $\partial\Omega_m^\varepsilon$ . Zamjenom varijabli  $y = \frac{1}{\varepsilon}(x - \varepsilon\xi)$  imamo da je  $\nabla_x = \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y$  i  $dS_x = \varepsilon^2 dS_y$ , te možemo računati

$$\begin{aligned} I_m^\varepsilon &= \sum_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \int_{\partial Y_m} \frac{\varepsilon^p k(y)}{\mu c} \varepsilon^{-1} \nabla_y \rho_m(y) \cdot \nu \varepsilon^2 dS_y \\ &= \sum_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \int_{\partial Y_m} \frac{\varepsilon^p k(y)}{\mu c} \varepsilon^{-2} \nabla_y \rho_m(y) \cdot \nu dS_y |\varepsilon Y| \\ &= \int_{\partial Y_m} \frac{\varepsilon^p k(y)}{\mu c} \varepsilon^{-2} \nabla_y \rho_m(y) \cdot \nu dS_y \sum_{\xi \in \gamma^\varepsilon} |\varepsilon Y| \\ &= \int_{\partial Y_m} \frac{\varepsilon^p k(y)}{\varepsilon^2 \mu c} \nabla_y \rho_m(y) \cdot \nu dS_y |\Omega|. \end{aligned}$$

Za izbor  $p = 2$  ukupan protok kroz  $\partial\Omega_m$ ,  $I_m^\varepsilon$ , ostaje konačan kad  $\varepsilon$  teži u nulu. Za  $p < 2$   $|I_m| \rightarrow +\infty$  kad  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dok za  $p > 2$   $|I_m| \rightarrow 0$  kad  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pretpostavimo da na području matričnih fraktura također vrijedi Darcyjev zakon, te neka je zadana gustoća u trenutku  $t = 0$

$$\rho^{init}(x) = \begin{cases} \rho_f^{init}(x) & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ \rho_m^{init}(x) & x \in \Omega_m^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.15)$$

Tada je tok fluida u frakturnoj domeni dan s

$$\Phi^* \partial_t \rho_f^\varepsilon - \operatorname{div} \left( \frac{K^*}{\mu c} \nabla \rho_f^\varepsilon \right) = f \quad \text{u } \Omega_f^\varepsilon \times (0, T) \quad (3.16)$$

$$\frac{K^*}{\mu c} \nabla \rho_f^\varepsilon \cdot \nu = \varepsilon^2 \frac{k^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho_m^\varepsilon \cdot \nu \quad \text{na } \Gamma^\varepsilon \times (0, T) \quad (3.17)$$

$$\rho_f^\varepsilon = \rho_f^{init} \quad \text{na } \Omega_f^\varepsilon \times \{0\}. \quad (3.18)$$

Funkcija  $f(x, t)$  predstavlja vanjske izvore i ponore, a  $\nu(x)$  je vanjska jedinična normala na  $\Gamma^\varepsilon$ . Jednadžba (3.17) slijedi iz očuvanja protoka između dva područja. Tok fluida u matricnoj domeni dan je s

$$\phi^\varepsilon \partial_t \rho_m^\varepsilon - \varepsilon^2 \operatorname{div} \left( \frac{k^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho_m^\varepsilon \right) = f \quad \text{u } \Omega_m^\varepsilon \times (0, T) \quad (3.19)$$

$$\rho_m^\varepsilon = \rho_f^\varepsilon \quad \text{na } \Gamma^\varepsilon \times (0, T) \quad (3.20)$$

$$\rho_m^\varepsilon = \rho_m^{\text{init}} \quad \text{na } \Omega_m^\varepsilon \times \{0\} \quad (3.21)$$

U ovom slučaju druga jednadžba se dobije iz zahtjeva na neprekidnost gustoće na granici između blokova i fraktura. Jednadžbe (3.16)-(3.21) predstavljaju mikroskopski model jednofaznog toka kroz frakturiranu poroznu sredinu. Jednadžbama dodajemo i sljedeće rubne uvjete

$$\begin{aligned} \rho_f^\varepsilon &= \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^*}{\mu c} \nabla \rho_f^\varepsilon \cdot \nu_\Omega &= h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdje su  $\rho_{bd}$  i  $h$  zadane funkcije. Mikroskopski model možemo u terminima funkcija  $\rho^\varepsilon$ ,  $K^\varepsilon$ , te  $\Phi^\varepsilon$  napisati na sljedeći način

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \rho^\varepsilon - \operatorname{div} \left( \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \right) = f & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nu_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho^{\text{init}} & \text{na } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Budući da rješenje zadaje tražimo u prostoru  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  rubni uvjeti (3.17) i (3.20) postoje u smislu tragova.

Pretpostavimo da se rješenja mikroskopskog modela ponašaju u prostoru kao da su funkcije makroskopske varijable  $x \in \Omega$ , i u svakom takvom  $x$ , funkcije mikroskopske varijable  $y \in Y_m$  ili  $Y_f$ . Veza između  $x$  i  $y$  je dana s  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ . Uvođenjem nove varijable  $y$  operatori  $\nabla$  i  $\operatorname{div}$  postaju

$$\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \quad (3.24)$$

$$\operatorname{div} = \operatorname{div}_x + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y. \quad (3.25)$$

Pretpostavimo i da se rješenja mikroskopskog modela  $\rho_m^\varepsilon(x, t)$  i  $\rho_f^\varepsilon(x, t)$  mogu zapisati u obliku asimptotskog reda potencija po malom parametru  $\varepsilon$

$$\rho_m^\varepsilon(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \rho_m^k(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.26)$$

$$\rho_f^\varepsilon(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \rho_f^k(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.27)$$

gdje su  $\rho_m^k$  i  $\rho_f^k$  periodičke funkcije s periodom  $Y$  u varijabli  $y$  za svaki  $k \in \mathbf{N}_0$ . S ovim pretpostavkama računamo

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_f^\varepsilon(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \partial_t \rho_f^k(x, y, t) \\ \nabla \rho_f^\varepsilon(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left( \nabla_x \rho_f^k(x, y, t) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \rho_f^k(x, y, t) \right) \\ \operatorname{div} \left( \frac{K^*}{\mu c} \nabla \rho_f^\varepsilon(x, t) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \operatorname{div} \left( \frac{K^*}{\mu c} \nabla \rho_f^k(x, y, t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[ \operatorname{div}_x \left( \frac{K^*}{\mu c} \nabla \rho_f^k(x, y, t) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \left( \frac{K^*}{\mu c} \nabla \rho_f^k(x, y, t) \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[ \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_x \left( \nabla_x \rho_f^k(x, y, t) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \rho_f^k(x, y, t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y \left( \nabla_x \rho_f^k(x, y, t) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \rho_f^k(x, y, t) \right) \right]. \end{aligned}$$

Uz ove pretpostavke jednadžbe koje opisuju tok u frakturama možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 \Phi^* \partial_t \rho_f^0(x, y, t) + \varepsilon^1 \Phi^* \partial_t \rho_f^1(x, y, t) + \dots &= f(x, t) + \varepsilon^{-2} \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y \left( \nabla_y \rho_f^0(x, y, t) \right) + \\ \varepsilon^{-1} \left[ \operatorname{div}_x \left( \frac{K^*}{\mu c} \nabla_y \rho_f^0(x, y, t) \right) + \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y \left( \nabla_x \rho_f^0(x, y, t) \right) + \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y \left( \nabla_y \rho_f^1(x, y, t) \right) \right] + \\ \varepsilon^0 \left[ \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y \left( \nabla_y \rho_f^2(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^1(x, y, t) \right) + \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_x \left( \nabla_y \rho_f^1(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^0(x, y, t) \right) \right] + \dots, \end{aligned}$$

$$(x, y, t) \in \Omega \times Y_f \times (0, T). \quad (3.28)$$

Na granici matrice i frakture dobivamo iz (3.17)

$$\begin{aligned} & \frac{K^*}{\mu c} \left[ \varepsilon^{-1} \nabla_y \rho_f^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v} + \varepsilon^0 \left( \nabla_x \rho_f^0(x, y, t) + \nabla_y \rho_f^1(x, y, t) \right) \cdot \mathbf{v} + \right. \\ & \left. \varepsilon \left( \nabla_x \rho_f^1(x, y, t) + \nabla_y \rho_f^2(x, y, t) \right) \cdot \mathbf{v} + \dots \right] = \varepsilon \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v} \dots, \\ & (x, y, t) \in \Omega \times \partial Y_m \times (0, T). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Iz početnog uvjeta (3.18) slijedi

$$\rho_f^0(x, y, 0) = \rho_f^{init}(x), \quad (x, y) \in \Omega \times Y_f, \quad (3.30)$$

$$\rho_f^i(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \times Y_f, i > 0. \quad (3.31)$$

Asimptotski razvoj jednadžbe u matričnoj domeni daje

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \phi(y) \partial_t \rho_m^0(x, y, t) + \varepsilon \phi(y) \partial_t \rho_m^1(x, y, t) + \dots = f(x, t) + \varepsilon^0 \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \right) + \dots \\ & (x, y, t) \in \Omega \times Y_m \times (0, T). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Rubni uvjet (3.20) daje  $\rho_m^k(x, y, t) = \rho_f^k(x, y, t)$  za  $(x, y, t) \in \Omega \times \partial Y_m \times (0, T)$  i za svaki  $k \in \mathbf{N}_0$ . Iz početnog uvjeta (3.21) dobivamo

$$\rho_m^0(x, y, 0) = \rho_m^{init}(x), \quad (x, y) \in \Omega \times Y_m, \quad (3.33)$$

$$\rho_m^i(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \times Y_m, i > 0. \quad (3.34)$$

U dobivenim izrazima (3.28), (3.29) i (3.32) izjednačavamo članove uz iste potencije od  $\varepsilon$ . Izjednačavanjem izraza uz  $\varepsilon^{-2}$  u jednadžbi (3.28) dobivamo

$$\frac{K^*}{\mu c} \Delta_y \rho_f^0(x, y, t) = 0, \quad y \in Y_f.$$

Iz jednadžbe (3.29) izjednačavanjem članova uz  $\varepsilon^{-1}$  dobivamo

$$\frac{K^*}{\mu c} \nabla_y \rho_f^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad y \in \partial Y_m.$$

Dakle  $\rho_f^0$  zadovoljava Neumannovu rubnu zadaću

$$\begin{cases} \Delta_y \rho_f^0(x, y, t) = 0 & y \in Y_f \\ \nabla_y \rho_f^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v} = 0 & y \in \partial Y_m \\ \rho_f^0(x, y, 0) = \rho_0(x) & y \in Y_f, \end{cases} \quad (3.35)$$

odnosno funkcija  $\rho_f^0(x, y, t)$  ne ovisi o mikroskopskoj varijabli  $y$ , tj.  $\rho_f^0(x, y, t) = \rho_f^0(x, t)$ . Uz faktor  $\varepsilon^{-1}$  u jednadžbi (3.28) imamo

$$\frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_x (\nabla_y \rho_f^0(x, y, t)) + \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y (\nabla_x \rho_f^0(x, y, t)) + \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y (\nabla_y \rho_f^1(x, y, t)) = 0, \quad y \in Y_f.$$

Budući da  $\rho_f^0$  ne ovisi o  $y$  prva dva člana u gornjoj jednakosti propadaju pa nam ostaje

$$\Delta_y \rho_f^1(x, y, t) = 0, \quad y \in Y_f.$$

Uz  $\varepsilon^0$  u (3.29) imamo

$$(\nabla_x \rho_f^0(x, t) + \nabla_y \rho_f^1(x, y, t)) \cdot \nu = 0, \quad y \in \partial Y_m.$$

Stoga je  $\rho_f^1$  je rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} \Delta_y \rho_f^1(x, y, t) = 0 & y \in Y_f \\ \nabla_y \rho_f^1(x, y, t) \cdot \nu = -\nabla_x \rho_f^0(x, t) \cdot \nu & y \in \partial Y_m \\ \rho_f^1(x, y, 0) = 0 & y \in Y_f. \end{cases} \quad (3.36)$$

Definiramo pomoćnu funkciju  $\omega_j = \omega_j(y)$ ,  $j = 1, 2, 3$  kao  $Y$ -periodično rješenje problema određeno do na aditivnu konstantu

$$\begin{cases} \Delta_y \omega_j = 0 & \text{u } Y_f \\ \nabla_y \omega_j \cdot \nu = -e_j \cdot \nu & \text{na } \partial Y_m. \end{cases} \quad (3.37)$$

Varijacijska formulacija, te detalji o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja zadaća (3.36) i (3.37) mogu se pronaći u Dodatku.

Korištenjem funkcije  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  i činjenice da  $\rho_f^0$  ne ovisi o  $y$  rješenje zadaće (3.36)  $\rho_f^1(x, y, t)$  možemo zapisati u obliku

$$\rho_f^1(x, y, t) = \omega(y) \cdot \nabla_x \rho_f^0(x, t) + \psi(x, t) = \sum_{j=1}^3 \omega_j(y) \partial_j \rho_f^0(x, t) + \psi(x, t), \quad (3.38)$$

gdje je  $\psi$  neka funkcija koja ne ovisi o  $y$ .

Izjednačavanjem izraza uz  $\varepsilon^0$  u (3.28) dobivamo jednakost

$$\begin{aligned} \Phi^* \partial_t \rho_f^0(x, t) = f(x, t) + \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_y (\nabla_y \rho_f^2(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^1(x, y, t)) \\ + \frac{K^*}{\mu c} \operatorname{div}_x (\nabla_y \rho_f^1(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^0(x, t)) \quad , y \in Y_f. \end{aligned} \quad (3.39)$$



Dobivenu jednakost integriramo po  $Y_f$ .

$$\begin{aligned} |Y_f|\Phi^* \partial_t \rho_f^0(x, t) &= |Y_f|f(x, t) + \frac{K^*}{\mu c} \int_{Y_f} \operatorname{div}_y (\nabla_y \rho_f^2(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^1(x, y, t)) dy \\ &\quad + \operatorname{div}_x \left( \frac{K^*}{\mu c} \int_{Y_f} (\nabla_y \rho_f^1(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^0(x, t)) dy \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Iz jednadžbe (3.29) izjednačavanjem izraza uz  $\varepsilon$  slijedi

$$\frac{K^*}{\mu c} (\nabla_x \rho_f^1(x, y, t) + \nabla_y \rho_f^2(x, y, t)) \cdot \mathbf{v} = \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v}, \quad y \in \partial Y_m. \quad (3.41)$$

Primjenom teorema o divergenciji u prvom integralu u (3.40), te jednakosti (3.41) dobivamo

$$\frac{K^*}{\mu c} \int_{Y_f} \operatorname{div}_y (\nabla_y \rho_f^2(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^1(x, y, t)) dy = \int_{\partial Y_m} \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v} dS_y. \quad (3.42)$$

Budući da znamo kako  $\rho_f^1(x, y, t)$  izgleda možemo izračunati

$$\nabla_y \rho_f^1(x, y, t) = (\nabla_y \omega(y))^\top \nabla_x \rho_f^0(x, t).$$

Oдавde slijedi da drugi integral u (3.40) možemo zapisati u obliku

$$\operatorname{div}_x \left( \frac{K^*}{\mu c} \int_{Y_f} (\nabla_y \rho_f^1(x, y, t) + \nabla_x \rho_f^0(x, t)) dy \right) = \operatorname{div}_x \left( \frac{K^*}{\mu c} \int_{Y_f} ((\nabla_y \omega(y))^\top + \mathbb{I}) dy \nabla_x \rho_f^0(x, t) \right). \quad (3.43)$$

Sada jednakost (3.40) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} |Y_f|\Phi^* \partial_t \rho_f^0(x, t) &= |Y_f|f(x, t) + \int_{\partial Y_m} \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v} dS_y \\ &\quad + \operatorname{div}_x \left( \frac{K^*}{\mu c} \int_{Y_f} ((\nabla_y \omega(y))^\top + \mathbb{I}) dy \nabla_x \rho_f^0(x, t) \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sada prelazimo na analizu jednadžbi u matrici. Ponovno izjednačavanjem faktora uz  $\varepsilon^0$  u (3.32) dobivamo

$$\operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \right) = \phi(y) \partial_t \rho_m^0(x, y, t) - f(x, t), \quad y \in Y_m. \quad (3.45)$$

Na integral (3.42) primijenimo teorem o divergenciji i jednakost (3.45)

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y_m} \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \cdot \mathbf{v} dS_y &= - \int_{Y_m} \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \right) dy \\ &= - \int_{Y_m} (\phi(y) \partial_t \rho_m^0(x, y, t) - f(x, t)) dy. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Predznak minus slijedi iz činjenice da smo  $\nu$  odabrali kao vanjsku normalu na  $\partial Y_f$ , stoga kad prelazimo na integral po  $Y_m$  za vanjsku normalu moramo uzeti  $-\nu$ .

Sada izraz (3.44) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} |Y_f| \Phi^* \partial_t \rho_f^0(x, t) &= |Y_f| f(x, t) - \int_{Y_m} \phi(y) \partial_t \rho_m^0(x, y, t) dy + |Y_m| f(x, t) \\ &\quad + \operatorname{div}_x \left( \frac{K^*}{\mu c} \int_{Y_f} \left( (\nabla_y \omega(y))^\tau + \mathbb{I} \right) dy \nabla_x \rho_f^0(x, t) \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Prijelaz na makroskopsku skalu se ostvaruje usrednjavanjem mikroskopskih svojstava po reprezentativnom volumenu, stoga definiramo makroskopsku poroznost sustava fraktura

$$\Phi^H = \frac{|Y_f|}{|Y|} \Phi^*, \quad (3.48)$$

te makroskopsku propusnost sustava fraktura

$$K^H = K^* \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \left( (\nabla_y \omega(y))^\tau + \mathbb{I} \right) dy. \quad (3.49)$$

**Lema 3.1.1.**  $K^H$  je simetričan, pozitivno definitan tenzor.

*Dokaz.* Uvedimo najprije sljedeću oznaku

$$(u, v)_{Y_f} = \int_{Y_f} u(y)v(y) dy.$$

Komponenta na mjestu  $(i, j)$  u tenzoru  $K^H$  je dana s

$$K_{ij}^H = K^* \frac{1}{|Y|} \left( |Y_f| \delta_{ij} + (\partial_i \omega_j, 1)_{Y_f} \right). \quad (3.50)$$

Korištenjem činjenice da je  $\omega_j$ , za  $j = 1, 2, 3$  rješenje (3.37) možemo računati

$$\begin{aligned} (\nabla_y \omega_j + e_j, \nabla_y \omega_i)_{Y_f} &= \int_{Y_f} (\nabla_y \omega_j + e_j) \cdot \nabla_y \omega_i dy \\ &= \int_{\partial Y_f} (\nabla_y \omega_j + e_j) \cdot \nu \omega_i dS_y - \int_{Y_f} \operatorname{div}_y (\nabla_y \omega_j + e_j) \omega_i dy = 0. \end{aligned}$$

Oдавde vidimo da vrijedi

$$(\partial_j \omega_i, 1)_{Y_f} = -(\nabla_y \omega_j, \nabla_y \omega_i)_{Y_f},$$

te zaključujemo da je  $K^H$  simetričan tenzor. Sada komponentu  $K_{ij}^H$  možemo napisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} |Y|(K^*)^{-1}K_{ij}^H &= |Y_f|\delta_{ij} + (\partial_i\omega_j, 1)_{Y_f} \\ &= (\nabla_y y_j, \nabla_y y_i)_{Y_f} + (\partial_i\omega_j, 1)_{Y_f} + (\partial_j\omega_i, 1)_{Y_f} - (\partial_j\omega_i, 1)_{Y_f} \\ &= (\nabla_y y_j, \nabla_y y_i)_{Y_f} + (\nabla_y \omega_j, \nabla_y y_i)_{Y_f} + (\nabla_y \omega_i, \nabla_y y_j)_{Y_f} + (\nabla_y \omega_j, \nabla_y \omega_i)_{Y_f} \\ &= (\nabla_y (y_j + \omega_j), \nabla_y (y_i + \omega_i))_{Y_f}. \end{aligned}$$

Uzmimo sada  $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^3$ . Tada imamo

$$\begin{aligned} K^H \xi \cdot \xi &= \sum_{i,j=1}^3 K_{ij}^H \xi_i \xi_j = K^* \frac{1}{|Y|} \sum_{i,j=1}^3 (\nabla_y (y_j + \omega_j), \nabla_y (y_i + \omega_i))_{Y_f} \xi_i \xi_j \\ &= K^* \frac{1}{|Y|} \left( \sum_{j=1}^3 \xi_j \nabla_y (y_j + \omega_j), \sum_{i=1}^3 \xi_i \nabla_y (y_i + \omega_i) \right)_{Y_f} \geq 0, \end{aligned}$$

odnosno  $K^H$  je pozitivno semidefinitan. Definitnost slijedi iz povezanosti od  $Y_f$  i periodičnosti od  $\omega$ . Neka je ponovno  $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^3$  i pretpostavimo da vrijedi

$$0 = \sum_{i,j=1}^3 (\nabla_y (y_j + \omega_j), \nabla_y (y_i + \omega_i))_{Y_f} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^3 (\partial_i [\xi \cdot (y + \omega)], \partial_i [\xi \cdot (y + \omega)])_{Y_f}.$$

$Y_f$  je povezan, pa vrijedi da je  $\omega(y) \cdot \xi = \alpha - y \cdot \xi$ , za neku konstantu  $\alpha$ . Budući da je  $\omega$  periodična u  $y$ , nužno mora biti  $\xi = 0$ , jer inače funkcija na desnoj strani nije periodična. Zaključujemo da je  $K^H$  simetričan, pozitivno definitan tenzor. □

Gustoća frakturnog sustava  $\rho_f^0$  je neovisna o  $y$  i zadovoljava sljedeće jednadžbe

$$\Phi^H \partial_t \rho_f^0 - \operatorname{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^0 \right) = f - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \partial_t \rho_m^0 dy \quad \text{u } \Omega \times (0, T) \quad (3.51)$$

$$\rho_f^0 = \rho_{bd} \quad \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \quad (3.52)$$

$$\frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^0 \cdot \nu_\Omega = h \quad \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \quad (3.53)$$

$$\rho_f^0 = \rho_f^{init} \quad \text{na } \Omega \times \{0\}, \quad (3.54)$$

gdje je  $\nu_\Omega$  jedinična vanjska normala na  $\partial\Omega$ . Prva jednažba dobivena je iz (3.47) dijeljenjem s  $|Y|$ , a druga slijedi iz (3.30). Na  $Y_m$  vrijede sljedeće jednažbe za  $\rho_m^0$ :

$$\phi(y)\partial_t\rho_m^0(x, y, t) - \operatorname{div}_y\left(\frac{k(y)}{\mu c}\nabla_y\rho_m^0(x, y, t)\right) = f(x, t) \quad \text{u } \Omega \times Y_m \times (0, T) \quad (3.55)$$

$$\rho_m^0(x, y, t) = \rho_f^0(x, t) \quad \text{na } \Omega \times \partial Y_m \times (0, T) \quad (3.56)$$

$$\rho_m^0(x, y, 0) = \rho_m^{\text{init}}(x) \quad \text{na } \Omega \times Y_m \quad (3.57)$$

Jednažbe (3.51)-(3.57) predstavljaju makroskopski model dvostruke poroznosti. Pokazuje se da rješenje mikroskopskog modela  $(\rho_f^\varepsilon, \rho_m^\varepsilon)$  konvergira prema rješenju makroskopskog modela  $(\rho_f^0, \rho_m^0)$  kad  $\varepsilon \rightarrow 0$  u smislu slabe  $L^2$ -konvergencije. Dokaz se može vidjeti u [3].

Jednažba (3.51) predstavlja zakon sačuvanja mase kompresibilnog fluida u kojem su originalna poroznost i propusnost zamijenjene efektivnim vrijednostima  $\Phi^H$  i  $K^H$  koje uzimaju u obzir prisutnost blokova i fraktura. Pored toga jednažba ima dodatni član na desnoj strani

$$-\frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y)\partial_t\rho_m^0 dy,$$

koji predstavlja brzinu kojom fluid iz blokova ulazi u frakture. Da bismo izračunali taj član u točki  $x \in \Omega$  potrebno je riješiti zadaću (3.55)-(3.57) na  $Y_m \times (0, T)$ . Jednažbe (3.51)-(3.54) opisuju makroskopsko ponašanje frakturirane porozne sredine. U tom modelu dominiraju frakture, a blokovi su prisutni kroz izvorni član.

Zadaće (3.51)-(3.54) i (3.55)-(3.57) su vezane kroz rubni uvjet (3.56), te zbog ovisnosti  $\rho_f^0(x, t)$  o vremenu nije moguće izvršiti potpuno razdvajanje jednažbi. Kada funkcija  $\rho_f^0$  ne bi ovisila o  $t$ , odnosno kad bi vrijedilo  $\rho_f^0 = \rho_f^0(x)$ , separaciju bismo mogli provesti na sljedeći način. Neka je dana funkcija  $\bar{\rho}_m^0$  kao rješenje zadaće

$$\begin{cases} \phi(y)\partial_t\bar{\rho}_m^0(x, y, t) - \operatorname{div}_y\left(\frac{k(y)}{\mu c}\nabla_y\bar{\rho}_m^0(x, y, t)\right) = f(x, t) & \text{u } \Omega \times Y_m \times (0, T) \\ \bar{\rho}_m^0(x, y, t) = 0 & \text{na } \Omega \times \partial Y_m \times (0, T) \\ \bar{\rho}_m^0(x, y, 0) = 0 & \text{na } \Omega \times Y_m, \end{cases} \quad (3.58)$$

te funkcija  $\tilde{\rho}_m^0(y, t)$  kao rješenje zadaće

$$\begin{cases} \phi(y)\partial_t\tilde{\rho}_m^0(y, t) - \operatorname{div}_y\left(\frac{k(y)}{\mu c}\nabla_y\tilde{\rho}_m^0(y, t)\right) = 0 & \text{u } Y_m \times (0, T) \\ \tilde{\rho}_m^0(y, t) = 1 & \text{na } \partial Y_m \times (0, T) \\ \tilde{\rho}_m^0(y, 0) = 1 & \text{na } Y_m. \end{cases} \quad (3.59)$$

Sada za rješenje (3.55)-(3.57) vrijedi  $\rho_m^0(x, y, t) = \tilde{\rho}_m^0(y, t)\rho_f^0(x) + \bar{\rho}_m^0(x, y, t)$ , uz pretpostavku kompatibilnosti rubnog i početnog uvjeta,  $\rho_f^0(x) = \rho_f^{init}(x)$ . Separacija zadaća na  $Y_m$  i na  $\Omega$  je potpuna ukoliko je  $f \equiv 0$  jer tada zadaće (3.58) i (3.59) ne ovise o varijabli  $x$ . Ako je  $f \neq 0$  ta ovisnost ostaje u (3.58), ali ne kroz rješenje makroskopske jednadžbe (3.51)-(3.54) već samo kroz zadanu funkciju  $f(x, t)$ .

Ova ideja separacije nije provediva u realnom slučaju kada  $\rho_f^0$  ovisi o vremenu, ali se ipak može iskoristiti u numeričkoj aproksimaciji ako je rubni uvjet u (3.56) zamijenjen s po dijelovima konstantnom funkcijom u vremenu, kao što ćemo vidjeti u Poglavlju 4.

## Poglavlje 4

# Diskretizacija modela dvostruke poroznosti

U Poglavlju 3 smo iz modela na mikroskopskoj skali postupkom homogenizacije izveli model dvostruke poroznosti, te došli do sljedećih zadaća koje opisuju tok u frakturama

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi^H \partial_t \rho_f - \operatorname{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f \right) = f - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \partial_t \rho_m dy & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho_f = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f \cdot \mathbf{v}_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho_f = \rho_f^{init} & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

odnosno u matičnoj domeni

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(y) \partial_t \rho_m(x, y, t) - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m(x, y, t) \right) = f(x, t) & \text{u } \Omega \times Y_m \times (0, T) \\ \rho_m(x, y, t) = \rho_f(x, t) & \text{na } \Omega \times \partial Y_m \times (0, T) \\ \rho_m(x, y, 0) = \rho_m^{init}(x) & \text{na } \Omega \times Y_m. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Iako smo na prvi pogled dobili složeniji sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, glavna prednost modela dvostruke poroznosti je ta da ga je mnogo lakše numerički aproksimirati od sustava na mikroskopskoj skali. Naime, budući da je širina fraktura mnogo manja od širine matičnih blokova, da bismo numerički riješili sustav na mikroskopskoj skali potrebna nam je mreža s velikim brojem elemenata kako bismo dobili dovoljno dobru aproksimaciju toka u frakturama, odnosno matrici. Na primjer, ako bi imali domenu u kojoj je širina frakutra reda  $10^{-4}$ m, a širina matičnih blokova reda 1m triangulacija bi se

trebala sastojati od nekoliko milijardi elemenata kako bi dobili dovoljno dobra rješenja.

Da bismo dobili numerička rješenja zadaća (4.1) i (4.2) potrebno je provesti prostornu i vremensku diskretizaciju. Diskretizaciju modela provodimo prema [14]. Vremensku diskretizaciju provodimo primjenom implicitne Eulerove metode, a diskretizaciju po prostornim varijablama primjenom metode konačnih elemenata.

Odaberimo  $t_0, \dots, t_N$  takve da vrijedi  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , te označimo

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N, \\ \rho_m^n(x, y) &= \rho_m(x, y, t_n), \quad \rho_f^n(x) = \rho_f(x, t_n), \quad n = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Ideja separacije jednadžbi u  $\Omega \times Y_m$  od onih u  $Y_m$  predstavljena je na kraju Poglavlja 3. Najprije funkciju  $\rho_f(x, t)$  aproksimiramo s po dijelovima konstantnom funkcijom u vremenu, odnosno

$$\rho_f(x, t) \approx \sum_{n=1}^N \rho_f^n(x) \mathbf{1}_{(t_{n-1}, t_n]}(t).$$

Aproksimacijom parcijalne derivacije po vremenu implicitnom Eulerovom metodom u zadaći (4.2) za  $n = 1, \dots, N$  dobivamo sljedeće jednadžbe u  $\Omega \times Y_m$

$$\phi(y) \frac{\rho_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t_n} - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^n \right) = f(x, t_n) \quad \text{u } \Omega \times Y_m \quad (4.3)$$

$$\rho_m^n(x, y) = \rho_f^n(x) \quad \text{na } \Omega \times \partial Y_m \quad (4.4)$$

$$\rho_m^0 = \rho_m^{\text{init}} \quad \text{u } \Omega \times Y_m. \quad (4.5)$$

Za fiksiran  $x$  jednadžba (4.3) je linearna parcijalna diferencijalna jednadžba u varijabli  $y$ . U jednadžbi (4.4) se pojavljuje  $\rho_f^n(x)$  kojeg bi trebali dobiti iz jednadžbi u domeni  $\Omega$ . Da bismo jednadžbe u  $\Omega \times Y_m$  odvojili od jednadžbi u  $\Omega$ , za fiksirani  $x \in \Omega$  definiramo funkciju  $\bar{\rho}_m^n(x, y)$  kao rješenje zadaće

$$\begin{cases} \phi(y) \frac{\bar{\rho}_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t_n} - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \bar{\rho}_m^n \right) = f(x, t_n) & \text{u } \Omega \times Y_m \\ \bar{\rho}_m^n = 0 & \text{na } \Omega \times \partial Y_m, \end{cases} \quad (4.6)$$

te funkciju  $\tilde{\rho}_m^n(y)$  kao rješenje zadaće

$$\begin{cases} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \tilde{\rho}_m^n \right) = 0 & \text{u } Y_m \\ \tilde{\rho}_m^n = 1 & \text{na } \partial Y_m, \end{cases} \quad (4.7)$$

za  $n = 1, \dots, N$ . Rješenje zadaće (4.3)-(4.4) sada je dano s

$$\rho_m^n(x, y) = \rho_f^n(x) \tilde{\rho}_m^n(y) + \bar{\rho}_m^n(x, y), \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.8)$$

Jednadžbu (4.1) aproksimiramo sljedećim izrazom

$$\Phi^H \frac{\rho_f^n - \rho_f^{n-1}}{\Delta t_n} - \operatorname{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^n \right) = f(x, t_n) - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\rho_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t_n} dy, \quad x \in \Omega. \quad (4.9)$$

Označimo

$$F^n(x) = f(x, t_n) - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\bar{\rho}_m^n - \bar{\rho}_m^{n-1}}{\Delta t_n} dy, \quad n = 1, \dots, N.$$

Uvrštavanjem  $\tilde{\rho}_m^n$  i  $\bar{\rho}_m^n$  u (4.9) dobivamo

$$\Phi^H \frac{\rho_f^n - \rho_f^{n-1}}{\Delta t_n} + \left( \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} dy \right) \rho_f^n - \operatorname{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^n \right) = F^n(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.10)$$

Ovoj jednadžbi dodajemo rubne uvjete

$$\rho_f^n = \rho_{bd} \quad \text{na } \Gamma_D \quad (4.11)$$

$$\frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^n \cdot \nu_\Omega = h \quad \text{na } \Gamma_N, \quad (4.12)$$

te inicijalni uvjet

$$\rho_f^0 = \rho_f^{init} \quad \text{na } \Omega. \quad (4.13)$$

Prostornu diskretizaciju jednadžbi početnih zadaći provodimo primjenom metode konačnih elemenata. Za diskretizaciju zadaće (4.7) definiramo

$$V(Y_m) = \{\varphi \in H^1(Y_m) : \varphi|_{\partial Y_m} = 1\}.$$

Varijacijska formulacija zadaće sada glasi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{naći } \tilde{\rho}_m^n \in V(Y_m) \\ \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} v(y) dy + \int_{Y_m} \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \tilde{\rho}_m^n \cdot \nabla_y v(y) dy = 0, \quad \forall v \in H_0^1(Y_m). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Neka je  $V_h(Y_m) \subset V(Y_m)$  prostor konačnih elemenata, te  $V_h^0(Y_m) = \{v \in V_h(Y_m) : v|_{\partial Y_m} = 0\}$ . Aproksimacijska zadaća je oblika

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{naći } \tilde{\rho}_{m,h}^n \in V_h(Y_m) \\ \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_{m,h}^n}{\Delta t_n} v(y) dy + \int_{Y_m} \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \tilde{\rho}_{m,h}^n \cdot \nabla_y v(y) dy = 0, \quad \forall v \in V_h^0(Y_m). \end{array} \right. \quad (4.15)$$



Ukoliko je vremenski korak konstantan zadaću (4.15) moramo riješiti samo jedanput.

U zadaći (4.6) imamo homogeni rubni uvjet, stoga je varijacijska zadaća oblika

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{naći } \bar{\rho}_m^n \in H_0^1(Y_m) \\ \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\bar{\rho}_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t_n} v(y) dy + \int_{Y_m} \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \bar{\rho}_m^n \cdot \nabla_y v(y) dy = \int_{Y_m} f(x, t) v(y) dy, \forall v \in H_0^1(Y_m), \end{array} \right. \quad (4.16)$$

odnosno aproksimacijska zadaća ima oblik:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{naći } \bar{\rho}_{m,h}^n \in V_h^0(Y_m) \\ \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\bar{\rho}_{m,h}^n - \rho_{m,h}^{n-1}}{\Delta t_n} v(y) dy + \int_{Y_m} \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \bar{\rho}_{m,h}^n \cdot \nabla_y v(y) dy = \int_{Y_m} f(x, t_n) v(y) dy \forall v \in V_h^0(Y_m). \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Za izvod varijacijske formulacije zadaće (4.10), za prostor test funkcija uzimamo  $V_0(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$ , te neka je  $V(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = \rho_{bd}\}$ . Varijacijska formulacija zadaće glasi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{naći } \rho_f^n \in V(\Omega) \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\Phi^H}{\Delta t_n} + \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} dy \right) \rho_f^n v(x) dx + \int_{\Omega} \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^n \cdot \nabla v(x) dx \\ = \int_{\Omega} \left( F^n(x) + \Phi^H \frac{\rho_f^{n-1}}{\Delta t_n} \right) v(x) dx + \int_{\Gamma_N} h(x) v(x) dx, \forall v \in V_0(\Omega) \\ \rho_f^0 = \rho_f^{init}. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Neka je  $V_h(\Omega) \subset V(\Omega)$  prostor konačnih elemenata, te neka je  $V_h^0(\Omega) = \{v \in V_h(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$ . Aproksimacijska zadaća (4.10) je

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{naći } \rho_{f,h}^n \in V_h(\Omega) \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\Phi^H}{\Delta t_n} + \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} dy \right) \rho_{f,h}^n v(x) dx + \int_{\Omega} \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_{f,h}^n \cdot \nabla v(x) dx \\ = \int_{\Omega} \left( F^n(x) + \Phi^H \frac{\rho_{f,h}^{n-1}}{\Delta t_n} \right) v(x) dx + \int_{\Gamma_N} h(x) v(x) dx, \forall v \in V_h^0(\Omega) \\ \rho_{f,h}^0 = \rho_{f,h}^{init} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

gdje je  $\rho_{f,h}^{init} \in V_h$  aproksimacija funkcije  $\rho_f^{init}$ .

Sada možemo navesti algoritam za pronalazak numeričkog rješenja modela dvostruke poroznosti:

1. Izračunati  $K^H$  i  $\Phi^H$ .
2. Pronaći  $\rho_f^0$  i  $\rho_m^0$  iz inicijalnih uvjeta.
3. Za svaki  $n = 1, \dots, N$  :
  - a) Pronaći rješenja  $\tilde{\rho}_m^n$  i  $\bar{\rho}_m^n$  od (4.6) i (4.7) pomoću  $\rho_m^{n-1}$  samo u onim točkama  $x \in \Omega$  u kojima diskretna shema zahtjeva vrijednost.
  - b) Pronaći rješenje  $\rho_f^n$  zadatice (4.10) pomoću  $\tilde{\rho}_m^n, \bar{\rho}_m^n, \rho_m^{n-1}$ .
  - c) Izračunati  $\rho_m^n$  iz  $\rho_f^n, \tilde{\rho}_m^n, \bar{\rho}_m^n$  i (4.8).

Na početku poglavlja smo spomenuli da je glavni nedostatak modela na mikroskopskoj skali potreba za velikim brojem elemenata u triangulaciji domene prilikom numeričkog traženja rješenja koje opisuje tok fluida u frakturama, odnosno matrici. Kod modela dvostruke poroznosti tražimo rješenje frakturnog sustava na domeni  $\Omega$ , te rješenja mnogo matičnih problema na domeni  $Y_m$ . Pri tome dijametar elemenata u triangulaciji domene  $\Omega$  može biti mnogo veći od širine fraktura. Kao što je već spomenuto matični problemi rješavaju se samo u točkama mreže u  $\Omega$ . U svakoj točki mreže se rješavaju dva matična problema, no njih je numerički relativno lagano za riješiti stoga nema potrebe za velikim brojem elemenata u triangulaciji domene  $Y_m$ . Ukupan broj točaka koji sudjeluju u rješavanju sustava kod modela dvostruke poroznosti znatno je manji nego kod modela na mikroskopskoj skali.

## Poglavlje 5

# Numerička usporedba modela

Kod direktne numeričke verifikacije modela dvostruke poroznosti značajno smo limitirani pri računanju heterogenog rješenja, tj. rješenja mikroskopskog modela. Naime, kako smanjujemo  $\varepsilon$  smanjuje se karakteristična duljina heterogenosti i povećavaju se diskontinuiteti sredine. Time heterogena zadaća postaje sve teže rješiva općom numeričkom metodom kao što je metoda konačnih elemenata. Stoga sa smanjenjem paramtera  $\varepsilon$  u heterogeonoj simulaciji ne možemo ići suviše daleko.

Za testiranja je korištena C++ biblioteka DUNE (Distributed and Unified Numerics Environment) za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi numeričkim metodama koje se temelje na prostorno-vremenskim mrežama. DUNE omogućuje jednostavnu implementaciju metode konačnih elemenata, konačnih volumena, te konačnih diferencija. Biblioteka DUNE je podijeljena u sljedeće module:

- **dune-common** sadrži osnovne klase koje koriste svi ostali moduli.
- **dune-geometry** se sastoji od klasa za referentni element, integracijske formule na referentnom elementu, te preslikavanja referentnog elementa.
- **dune-grid** omogućuje konstrukciju i rad s različitim vrstama mreža.
- **dune-istl** se sastoji od klasa koje modeliraju matrice, vektore, iterativne rješavače i prekondicionere.
- **dune-localfunctions** pruža klase za bazne funkcije na referentnom elementu.
- **dune-pdelab** pruža diskretizacijske metode za pdj.

Više detalja o biblioteci DUNE može se pronaći u [1]. U ovom poglavlju biblioteka DUNE je korištena za rješavanje paraboličkih diferencijalnih jednadžbi metodom konačnih eleme-

nata. Koristili smo modul dune-pdelab. Pri radu s ovim modulom potrebno je programirati asembliranje diskretnog sustava samo na referentnom elementu.

## 5.1 Numerički primjer

Zadaće (3.23) i (4.1)-(4.2) rješavamo na domeni  $\Omega = (0, 10) \times (0, 2)$ , koja predstavlja frakturiranu poroznu sredinu. Na djelu granice  $\Gamma_D = \{0\} \times [0, 2] \cup \{1\} \times [0, 2]$  zadajemo Dirichletov rubni uvjet, dok na ostatku granice  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$  zadajemo Neumannov rubni uvjet.  $\Gamma_N$  dijelimo na dva dijela  $\Gamma_{N_1}$  i  $\Gamma_{N_2}$ . Pretpostavljamo da na  $\Gamma_{N_1}$  fluid ulazi u  $\Omega$ , dok je  $\Gamma_{N_2}$  nepropusni dio granice. Neka je  $\Gamma_{N_1} = [3, 7] \times \{2\}$ , a  $\Gamma_{N_2} = [0, 10] \times \{0\} \cup [0, 3] \times \{2\} \cup (7, 10] \times \{2\}$ . Uzimamo da su funkcije  $f$ ,  $\rho_{bd}$ ,  $\rho^{init}$  i  $h$  sljedećeg oblika

$$\begin{aligned} f &= 0 && \text{na } \Omega \times (0, T) \\ \rho^{init} &= 10^3 && \text{na } \Omega \times \{0\} \\ \rho_{bd} &= 10^3 && \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \end{aligned}$$

$$h = \begin{cases} \frac{100}{86400} & \text{na } \Gamma_{N_1} \times (0, T) \\ 0 & \text{na } \Gamma_{N_2} \times (0, T). \end{cases}$$

Matrični blokovi imaju konstantnu poroznost  $\phi = 0.1$ , te propusnost  $k = 10^{-15}$ , dok je poroznost unutar fraktura  $\Phi^* = 0.5$ , a propusnost  $K^* = 10^{-12}$ . Rješenje zadaća tražimo na vremenskom intervalu  $(0, 864000)$  s parametrima  $\mu = 0.02$  i  $c = 10^{-7}$ .

### Mikroskopski model za $\varepsilon = 1$

Zadaću najprije rješavamo na mikroskopskoj skali uz  $\varepsilon = 1$ , dakle rješavamo zadaću

$$\begin{cases} \Phi^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \rho^\varepsilon - \operatorname{div} \left( \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \right) = f & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nu_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho^{init} & \text{na } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Neka je  $Y = (0, 1) \times (0, 1)$ . Uzmimo da je  $Y_m = [0.2, 0.8] \times [0.2, 0.8]$ , te neka je  $Y_f = Y \setminus Y_m$ . Naša domena  $\Omega$  je  $\varepsilon Y$ -periodička, odnosno može se zapisati u sljedećem obliku

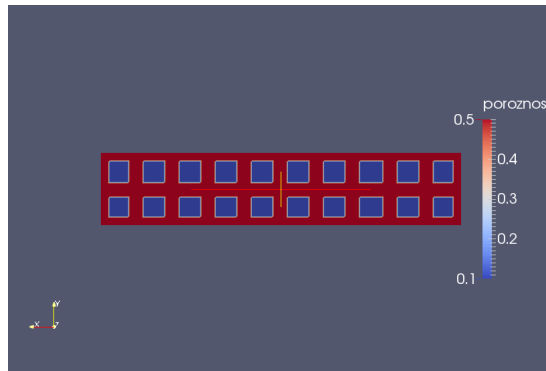
$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\xi \in \gamma^\varepsilon} \varepsilon(\bar{Y} + \xi),$$

gdje je  $\gamma^\varepsilon \subset \mathbb{Z}^2$ . Uzmimo da se unutar domene  $\Omega$  nalazi 20 matričnih blokova. Neka je broj blokova u smjeru osi  $x$ , u oznaci  $N_x$ , jednak 10, a broj blokova u smjeru osi  $y$ , u oznaci  $N_y$ , jednak 2. Funkcije  $\Phi^\varepsilon$  i  $K^\varepsilon$  su za  $\varepsilon = 1$  sljedećeg oblika

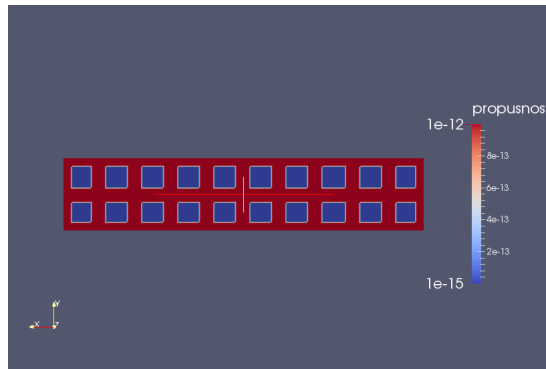
$$\Phi^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0.5 & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ 0.1 & x \in \Omega_m^\varepsilon, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$K^\varepsilon(x) = \begin{cases} 10^{-12} & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ 10^{-15} & x \in \Omega_m^\varepsilon. \end{cases} \quad (5.2)$$

Poroznost i propusnost su prikazane na slikama 5.1 i 5.2.



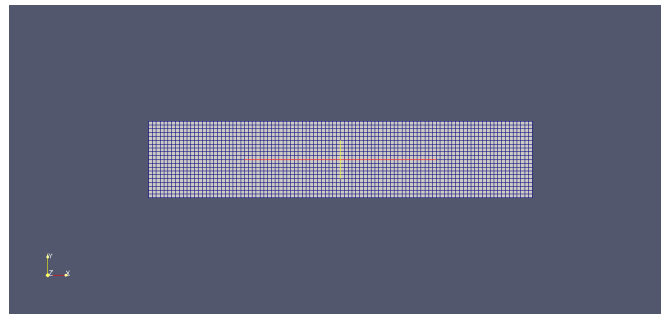
Slika 5.1: Poroznost. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .



Slika 5.2: Propusnost. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .

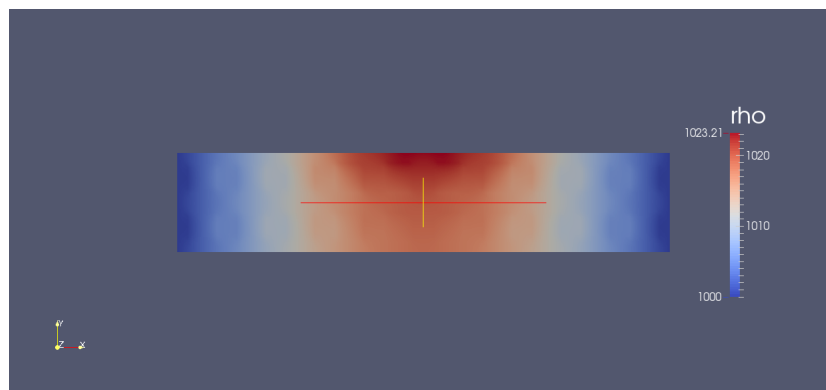
Postupak koji smo primijenili za pronalazak rješenja je sljedeći

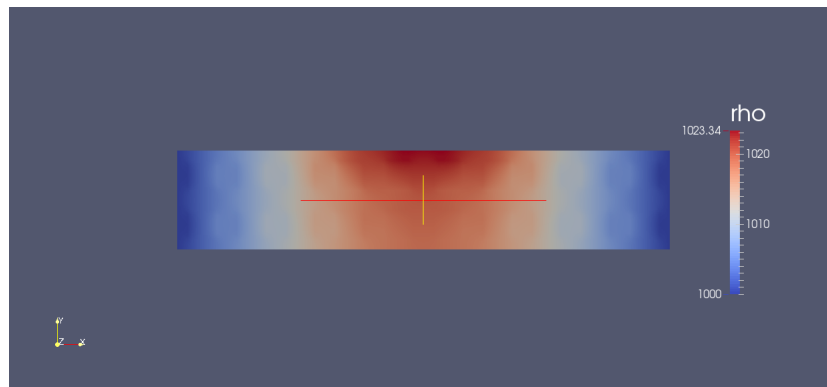
- Konstrukciju i triangulaciju domene  $\Omega$  smo napravili pomoću klase `Dune::YaspGrid`. Triangulacija domene se sastoji od 2000 pravokutnih elemenata i prikazana je na slici 5.3.

Slika 5.3: Triangulacija domene  $\Omega$ . Slučaj  $\varepsilon = 1$ .

- Zatim smo konstruirali prostor konačnih elemenata. Koristili smo  $Q_1$  elemente na pravokutnicima.
- U vremenskoj diskretizaciji smo uzeli konstantan vremenski korak. U svakom vremenskom koraku rješavamo linearni sustav koji dobijemo nakon diskretizacije polazne zadaće metodom konačnih elemenata i implicitnom Eulerovom metodom.

Rješenja mikroskopskog modela koja dobivamo nakon prvog dana, te nakon desetog dana s korakom  $dt = 3600s$  su prikazana na slikama 5.4 i 5.5.

Slika 5.4: Gustoća fluida nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .

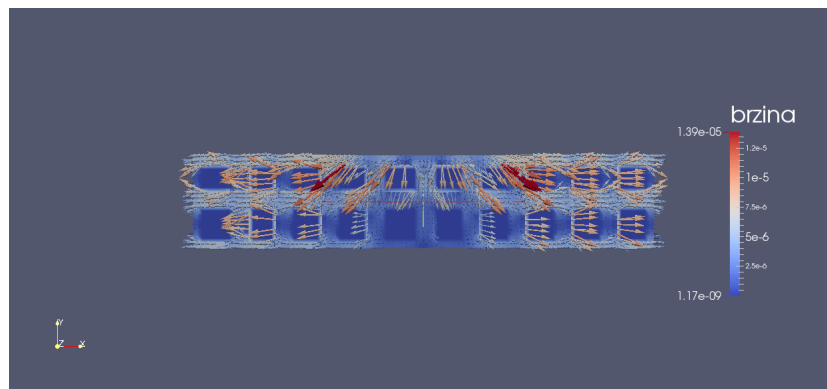


Slika 5.5: Gustoća fluida nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .

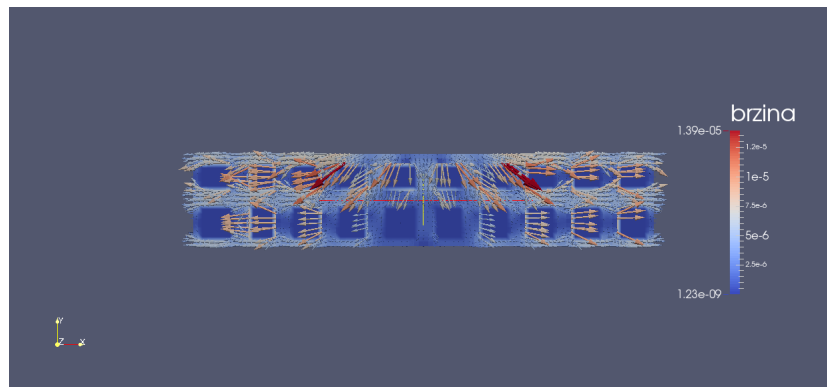
- Iz gustoće računamo brzinu fluida u tlu pomoću sljedeće formule

$$\mathbf{v}(x) = -\frac{K^\varepsilon(x)}{\mu c} \frac{1}{\Phi^\varepsilon(x)\rho^\varepsilon(x)} \nabla \rho^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega,$$

te dobivamo rješenja prikazana na slikama 5.6 i 5.7

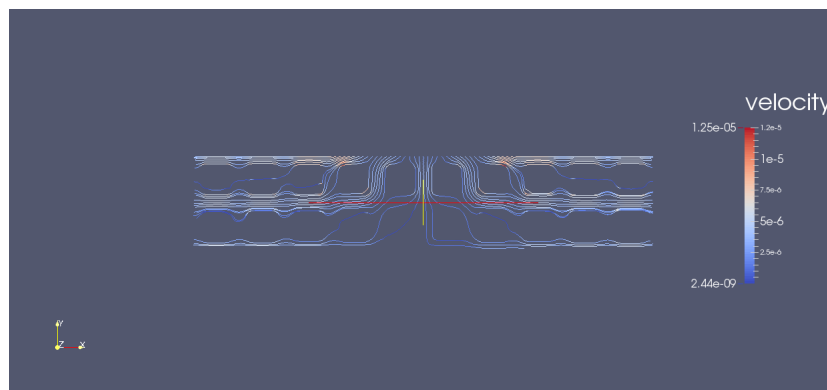


Slika 5.6: Brzina fluida nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .



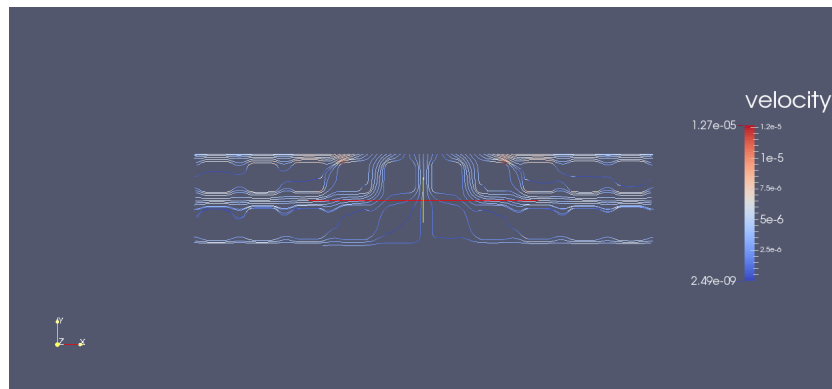
Slika 5.7: Brzina fluida nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .

Na slikama 5.8 i 5.9 su prikazane strujnice brzine iz kojih se najbolje vidi da se najveći dio transporta fluida u frakturiranoj poroznoj sredini odvija kroz frakture.



Slika 5.8: Strujnice nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .



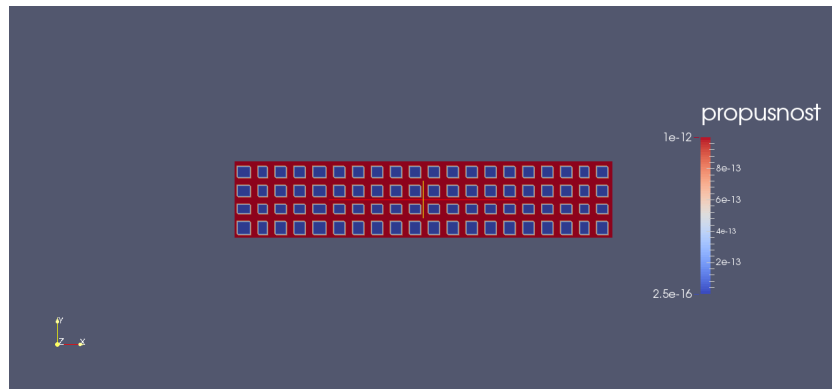
Slika 5.9: Strujnice nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 1$ .

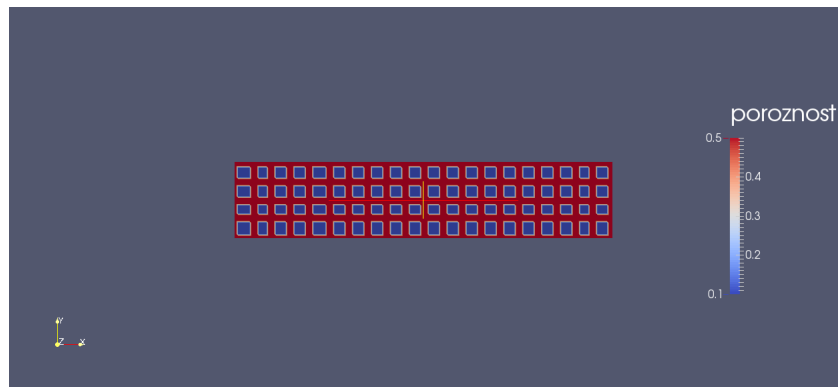
### Mikroskopski model za $\varepsilon = 0.5$

Ako u mikroskopskom modelu uzmemo  $\varepsilon = 0.5$ , broj blokova u smjeru osi  $x$   $N_x$  iznosi 20, a broj blokova u smjeru osi  $y$   $N_y$  iznosi 4. Tada je funkcija propusnosti  $K^\varepsilon$  sljedećeg oblika

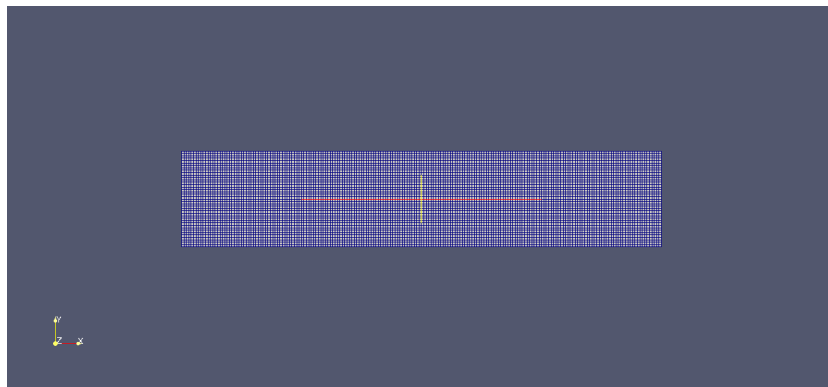
$$K^\varepsilon(x) = \begin{cases} 10^{-12} & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ 2.5 \cdot 10^{-16} & x \in \Omega_m^\varepsilon \end{cases}$$

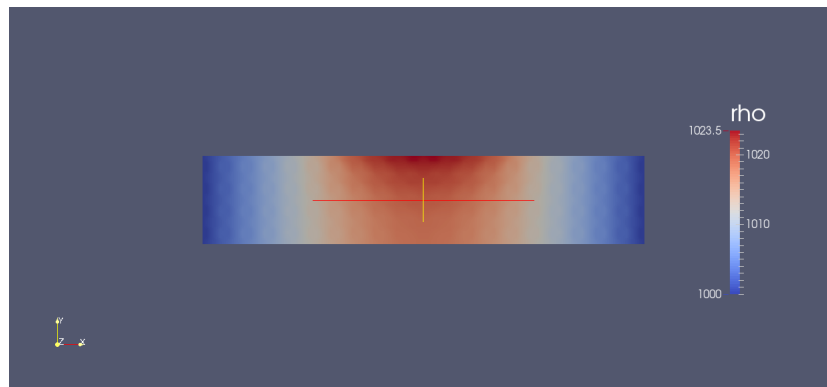
Na slikama 5.10 i 5.11 su prikazane funkcije propusnosti i poroznosti za ovaj izbor  $\varepsilon$ -a.

Slika 5.10: Propusnost. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .

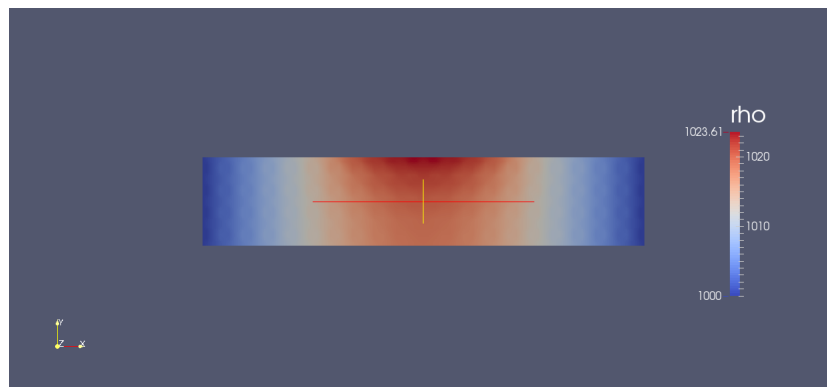
Slika 5.11: Poroznost. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .

Postupak traženja rješenja je isti kao i za  $\varepsilon = 1$ , s tim da se triangulacija domene sada sastoji od 8000 pravokutnih elemenata, te je prikazana na slici 5.12. Gustoće fluida koje dobijemo u slučaju  $\varepsilon = 0.5$  su prikazane na slikama 5.13 i 5.14, dok su brzine prikazane na slikama 5.15 i 5.16.

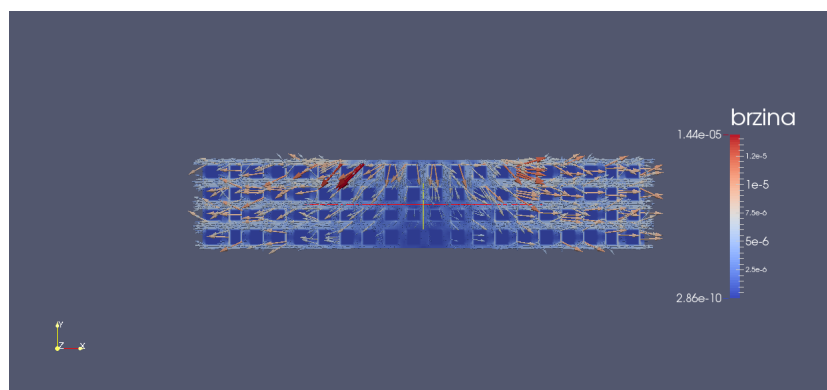
Slika 5.12: Triangulacija domene  $\Omega$ . Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .



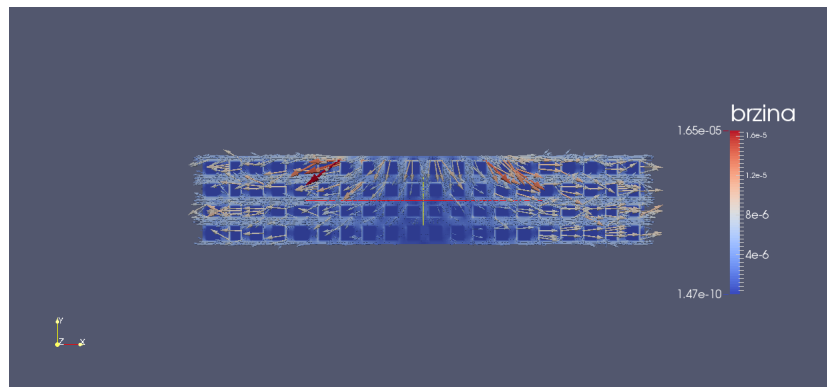
Slika 5.13: Gustoća fluida nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .



Slika 5.14: Gustoća fluida nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .

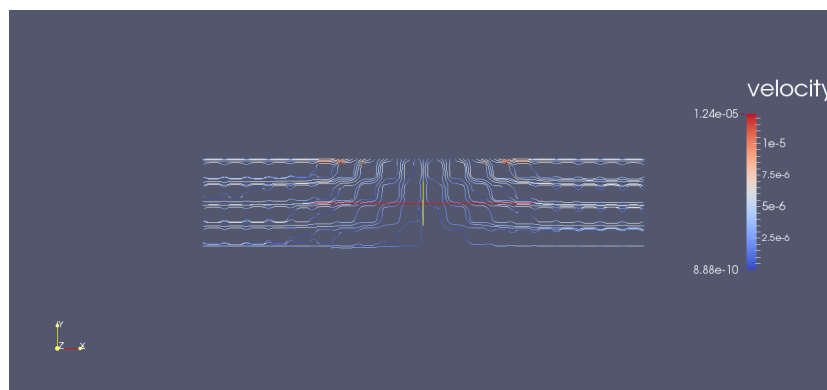


Slika 5.15: Brzina fluida nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .

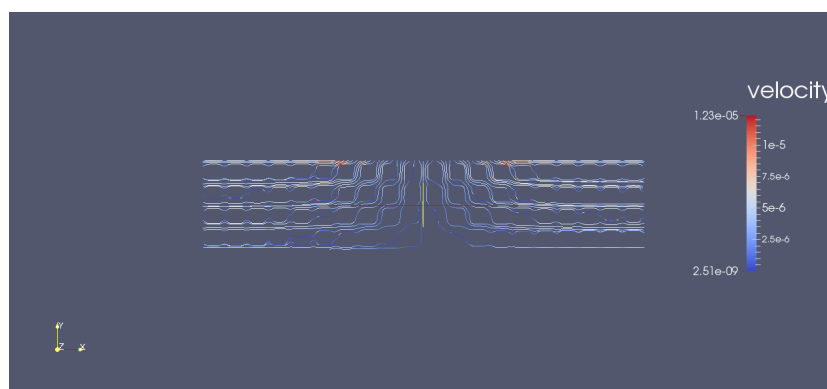


Slika 5.16: Brzina fluida nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .

Strujnice koje dobivamo u slučaju  $\varepsilon = 0.5$  su prikazane na slikama 5.17 i 5.18.



Slika 5.17: Strujnice nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .



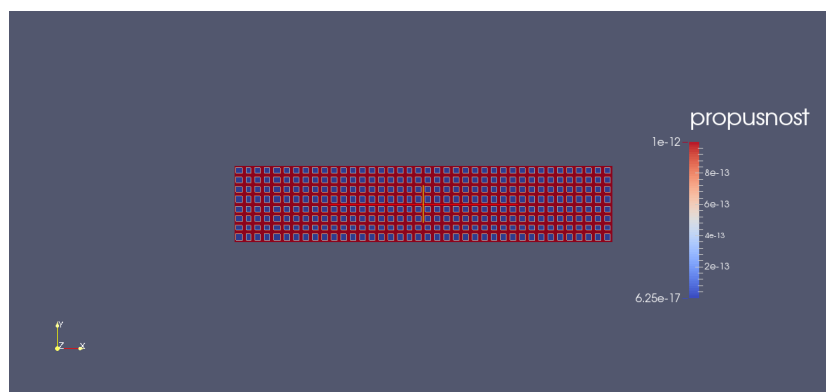
Slika 5.18: Strujnice nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.5$ .

### Mikroskopski model $\varepsilon = 0.25$

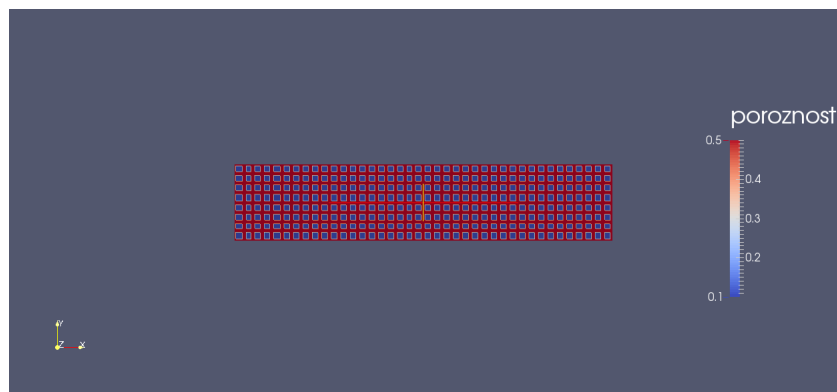
Za slučaj  $\varepsilon = 0.25$  uzimamo da je  $N_x = 40$ , a  $N_y = 8$ , odnosno imamo ukupno 320 blokova u  $\Omega$ . Propusnost za ovaj izbor  $\varepsilon$ -a iznosi

$$K^\varepsilon(x) = \begin{cases} 10^{-12} & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ 6.25 \cdot 10^{-17} & x \in \Omega_m^\varepsilon. \end{cases}$$

Na slikama 5.19 i 5.20 su prikazane propusnost i poroznost.

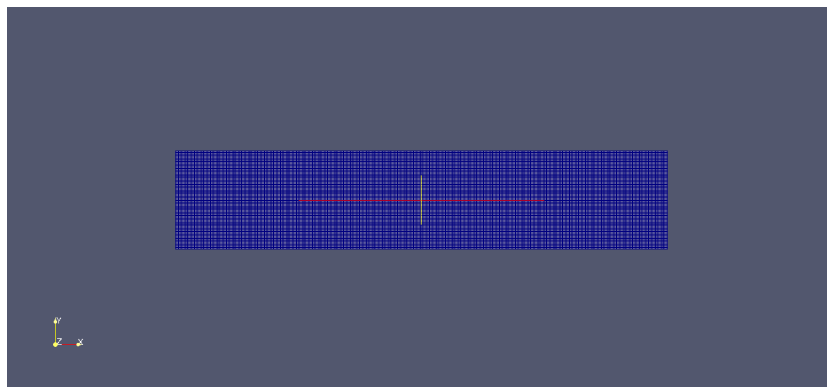


Slika 5.19: Propusnost. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .

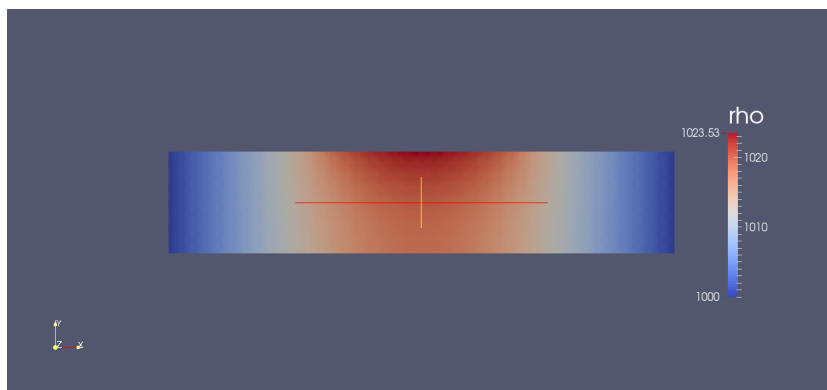


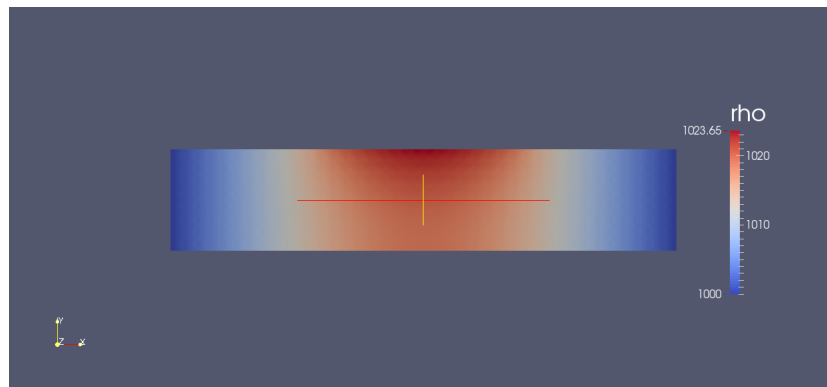
Slika 5.20: Poroznost. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .

Triangulacija domene se sastoji od 32000 elemenata i prikazana je na slici 5.21.

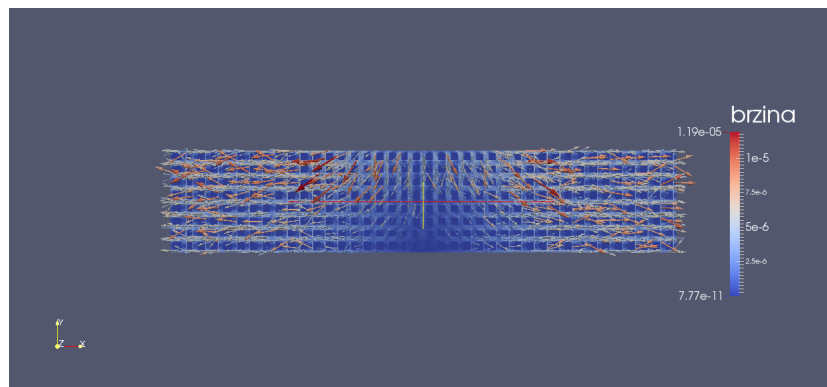
Slika 5.21: Triangulacija domene  $\Omega$ . Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .

Gustoće koje smo dobili nakon prvog dana, te nakon desetog dana prikazana su na slikama 5.22 i 5.23. Brzine su prikazane na slikama 5.24 i 5.25.

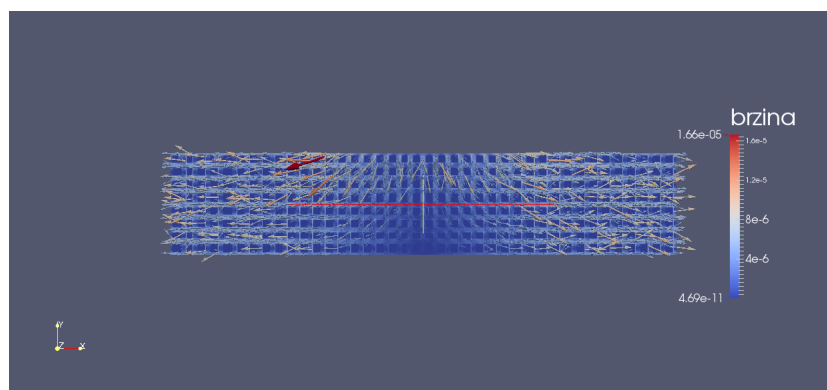
Slika 5.22: Gustoća fluida nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .



Slika 5.23: Gustoća fluida nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .

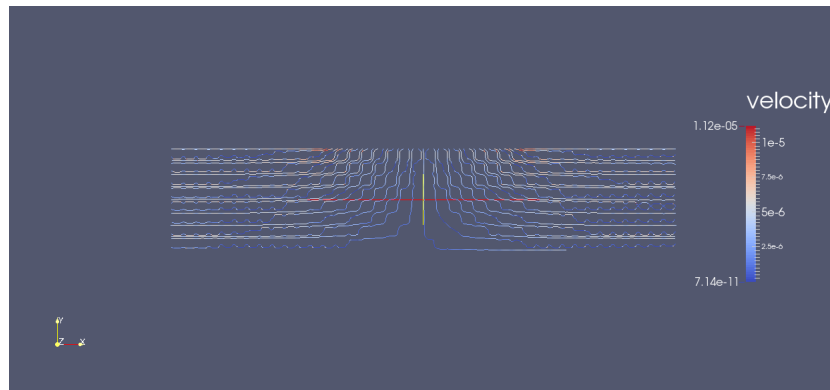


Slika 5.24: Brzina fluida nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .

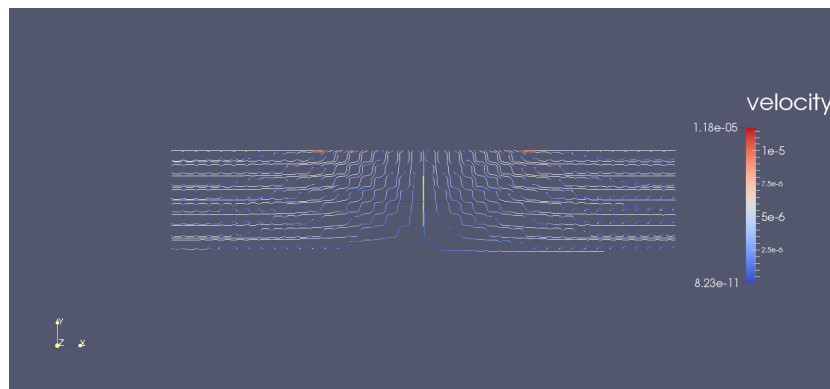


Slika 5.25: Brzina fluida nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .

Strujnice koje dobivamo u slučaju  $\varepsilon = 0.5$  su prikazane na slikama 5.26 i 5.27.



Slika 5.26: Strujnice nakon prvog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .



Slika 5.27: Strujnice nakon desetog dana. Slučaj  $\varepsilon = 0.25$ .

## Makroskopski model

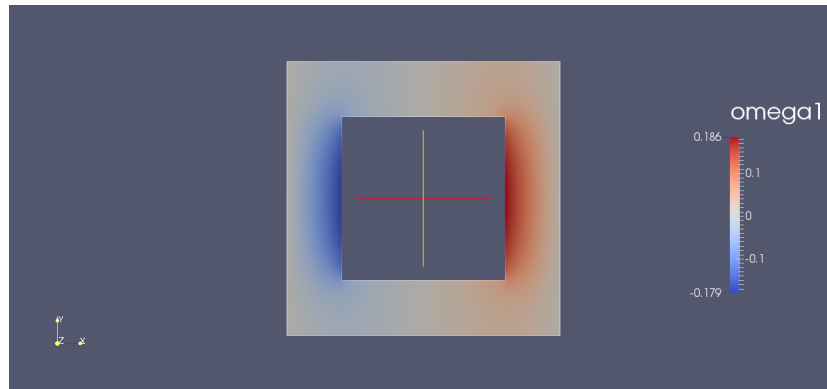
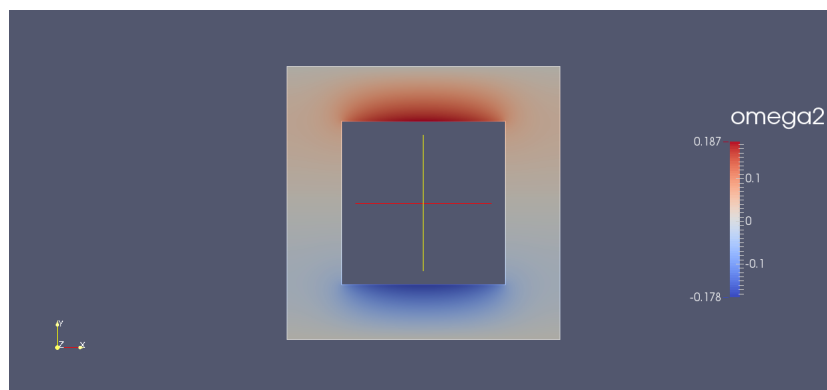
Sada prelazimo na model dvostruke poroznosti. Uz  $Y_m$  i  $Y_f$  odabrane kao i u mikroskopskom modelu rješavamo zadaće (4.1) i (4.2) na način opisan u Poglavlju 4. Postupak traženja rješenja makroskopskog modela je bitno složeniji nego kod mikroskopskog modela:

- Najprije smo pomoću paketa FreeFem++[2] pronašli  $Y$ -periodično rješenje zadaće

$$\begin{cases} \Delta_y \omega_j = 0 & \text{u } Y_f \\ \nabla_y \omega_j \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v} & \text{na } \partial Y_m. \end{cases}$$



za  $j = 1, 2$ . Dobivena rješenja su prikazana na slikama 5.28 i 5.29. U ovom koraku smo koristili FreeFem++ umjesto DUNE biblioteke zbog lakše implementacije periodičkog rubnog uvjeta.

Slika 5.28:  $\omega_1$ Slika 5.29:  $\omega_2$ 

- Zatim smo izračunali tenzor propusnosti  $K^H$  pomoću formule

$$K^H = K^* \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} ((\nabla_y \omega(y))^\tau + \mathbb{I}) dy,$$

ponovno korištenjem programa FreeFem++. Dobili smo sljedeću matricu

$$K^H = 10^{-12} \begin{bmatrix} 0.450072 & 1.2575 \cdot 10^{-6} \\ 1.2575 \cdot 10^{-6} & 0.450072 \end{bmatrix}.$$

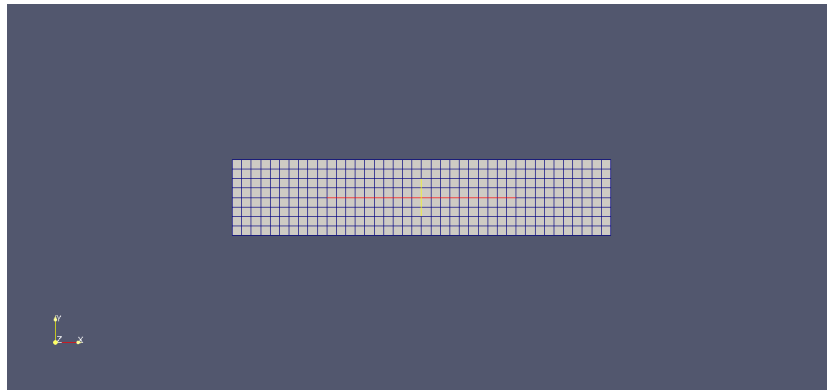
Budući da su vandijagonalni elementi reda  $10^{-18}$ , daljnja računanja provodimo sa skalarnom matricom  $K^H = 0.45 \cdot 10^{-12}$ .

- U nastavku metodu implementiramo pomoću biblioteke DUNE. Iz formule

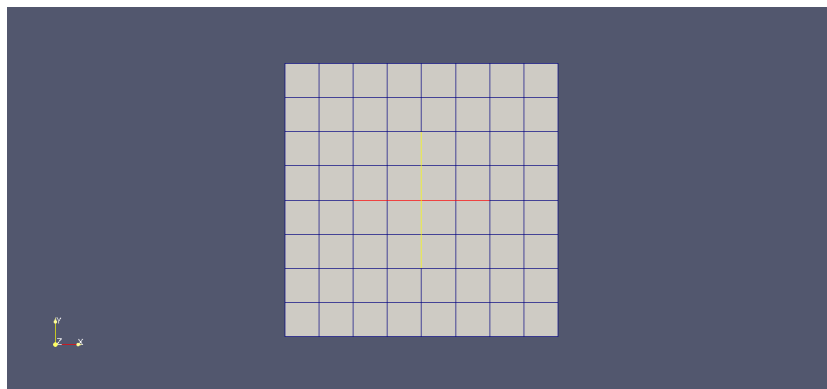
$$\Phi^H = \frac{|Y_f|}{|Y|} \Phi^*$$

smo izračunali makroskopsku poroznost  $\Phi^H$  i dobili vrijednost  $\Phi^H = 0.32$ .

- Slijedi konstrukcija domena  $\Omega$  i  $Y_m$ . Domenu  $\Omega$  smo ponovno konstruirali pomoću klase `Dune::YaspGrid`, dok smo domenu  $Y_m$  konstruirali pomoću klase `Dune::ALU-CubeGrid`. Triangulacija domene  $\Omega$  je napravljena s 320 elemenata, odnosno 369 točaka u mreži, a triangulacija domene  $Y_m$  se sastoji od 64 elementa, odnosno 81 točke u mreži. Triangulacije su prikazane na slikama 5.30 i 5.31.



Slika 5.30: Triangulacija domene  $\Omega$



Slika 5.31: Triangulacija domene  $Y_m$

- U sljedećem koraku smo konstruirali prostore konačnih elemenata na domenama. Na obje domene koristili smo  $Q_1$  elemente na pravokutnicima.

- U nastavku rješavamo zadaću

$$\begin{cases} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \tilde{\rho}_m^n \right) = 0 & \text{u } Y_m \\ \tilde{\rho}_m^n = 1 & \text{na } \partial Y_m. \end{cases}$$

Budući da smo u vremenskoj diskretizaciji odabrali konstantan vremenski korak  $dt = 3600s$ , zadaću ćemo riješiti samo jedanput. Nakon što smo izračunali  $\tilde{\rho}_m$ , možemo izračunati integral po  $Y_m$  s lijeve strane jednakosti

$$\Phi^H \frac{\rho_f^n - \rho_f^{n-1}}{\Delta t_n} + \left( \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} dy \right) \rho_f^n - \operatorname{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^n \right) = f - \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\bar{\rho}_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t_n} dy, \quad (5.3)$$

koji će nam poslije trebati za računanje  $\rho_f^n$ , za  $n \geq 1$ . Označimo izračunatu vrijednost integrala s  $\tilde{a}_n$ ,

$$\tilde{a}_n = \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\tilde{\rho}_m^n}{\Delta t_n} dy. \quad (5.4)$$

- Označimo skup svih vrhova  $x$  iz mreže na  $\Omega$  sa  $\mathcal{F}_h^\Omega$ , te skup svih vrhova iz mreže na  $Y_m$  sa  $\mathcal{F}_h^{Y_m}$ . Funkciju  $\rho_m^n$ , za  $n \geq 0$ , računamo pomoću formule

$$\rho_m^n(x, y) = \rho_f^n(x) \tilde{\rho}_m^n(y) + \bar{\rho}_m^n(x, y), \quad (5.5)$$

s tim da u početnom trenutku, odnosno za  $n = 0$ , uzimamo  $\tilde{\rho}_m^0(y) = 1$ , te  $\bar{\rho}_m^0(x, y) = 0$ , za svaki  $x \in \Omega$  i za svaki  $y \in Y_m$ . Funkciju  $\rho_m^n$  spremamo u vektor koji ima  $|\mathcal{F}_h^\Omega|$  elemenata. Elementi u ovom vektoru su ponovno vektori koji imaju  $|\mathcal{F}_h^{Y_m}|$  elemenata. U ove vektore spremamo vrijednosti funkcije  $\rho_m^n(x, y)$  u svim točkama  $y \in \mathcal{F}_h^{Y_m}$  za fiksiran  $x \in \mathcal{F}_h^\Omega$ . Za fiksiran  $x \in \mathcal{F}_h^\Omega$  vrijednosti spremamo u polaznom vektoru na mjesto s indeksom koji odgovara globalnom indeksu točke  $x$  u  $\mathcal{F}_h^\Omega$ .

- U svakom vremenskom koraku najprije obilazimo sve vrhove  $x \in \mathcal{F}_h^\Omega$ , te za svaki  $x \in \mathcal{F}_h^\Omega$  tražimo rješenje  $\bar{\rho}_m^n$  zadaće

$$\begin{cases} \phi(y) \frac{\bar{\rho}_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t_n} - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \bar{\rho}_m^n \right) = f(x, t_n) & \text{u } Y_m \\ \bar{\rho}_m^n = 0 & \text{na } \partial Y_m. \end{cases}$$

Vektor koeficijenata rješenja spremamo u novi vektor ponovno na mjesto s indeksom koji odgovara indeksu vrha  $x$ .

- Nakon što smo izračunali  $\bar{\rho}_m^n$  u vrhu  $x \in \mathcal{F}_h^\Omega$ , napravimo diskretnu funkciju na mreži od odgovarajućeg vektora koeficijenata u  $\rho_m^{n-1}$ . Sada možemo izračunati integral s desne strane jednakosti (5.3) u vrhu  $x$ , te rješenje spremimo u vektor  $\mathbf{f}$  ponovno na mjesto s indeksom koji odgovara indeksu vrha  $x \in \mathcal{F}_h^\Omega$  odnosno

$$\mathbf{f}[\text{index}(x)] = \int_{Y_m} \phi(y) \frac{\bar{\rho}_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t_n} dy. \quad (5.6)$$

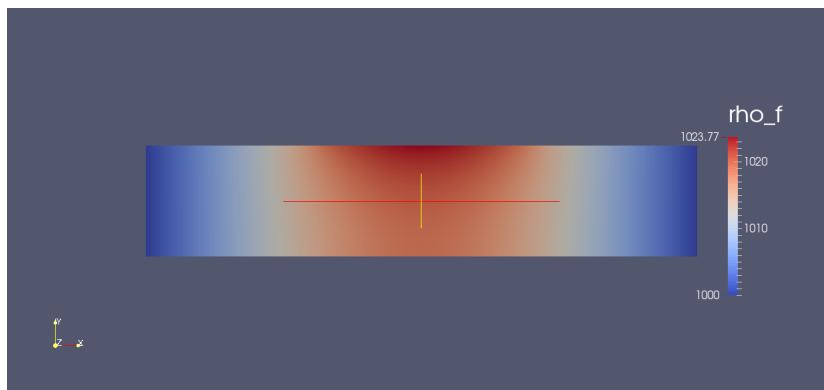
- Nakon obilaska svih vrhova mreže na  $\Omega$ , od vektora  $\mathbf{f}$  napravimo diskretnu funkciju  $f_{int}$  na mreži  $\Omega$ , te pomoću ove funkcije i iz (5.4) izračunate vrijednosti  $\tilde{a}_n$  računamo  $\rho_f^n$ , odnosno za  $n \geq 1$  rješavamo sljedeću zadaću

$$\begin{cases} \Phi^H \frac{\rho_f^n - \rho_f^{n-1}}{\Delta t_n} + \tilde{a}_n \rho_f^n - \text{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^n \right) = f - f_{int} & \text{u } \Omega \\ \rho_f^n = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \\ \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^n \cdot \mathbf{v}_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \\ \rho_f^0 = \rho_f^{init} & \text{u } \Omega. \end{cases}$$

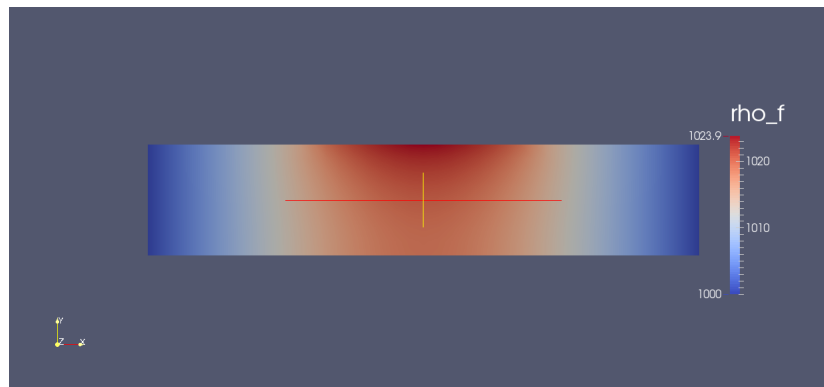
- Pomoću izračunatog  $\rho_f^n$  računamo vektor  $\rho_m^n$  za sljedeći korak pomoću formule (5.5) na već opisani način. Brzinu  $\mathbf{v}^n$  u makroskopskom modelu računamo iz sljedeće formule

$$\mathbf{v}^n(x) = -\frac{K^H}{\mu c} \frac{1}{\Phi^H \rho_f^n(x)} \nabla \rho_f^n(x), \quad x \in \Omega, n \geq 0.$$

Na slikama 5.32 i 5.33 prikazane su funkcije gustoće nakon prvog i desetog dana koje dobijemo rješavanjem makroskopskog sustava opisanim algoritmom.



Slika 5.32: Gustoća fluida nakon prvog dana



Slika 5.33: Gustoća fluida nakon desetog dana

Relativna greška između heterogene i homogene simulacije je dana izrazom

$$E_{rel} = \frac{\|\rho_f - \rho^\varepsilon\|_{L^2}}{\|\rho_f\|_{L^2}},$$

gdje homogenom simulacijom nazivamo simulaciju dobivenu pomoću modela dvostruke poroznosti. Dobivene vrijednosti dane su u tablici 5.1.

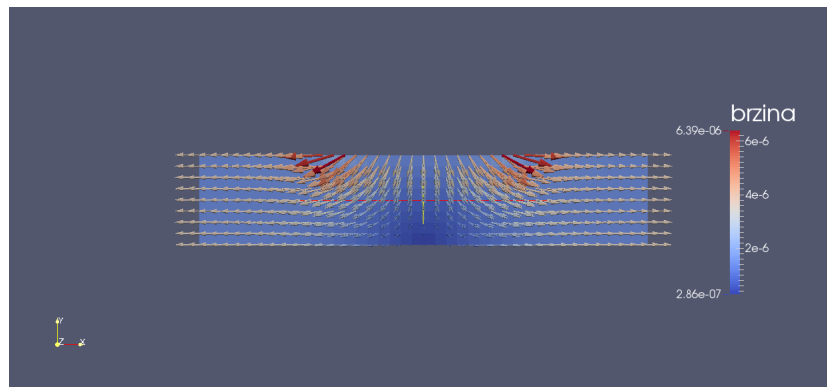
$\varepsilon$	1. dan	10. dan
1	$3.87 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-4}$
0.5	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$2.45 \cdot 10^{-4}$
0.25	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$

Tablica 5.1:  $E_{rel}$ 

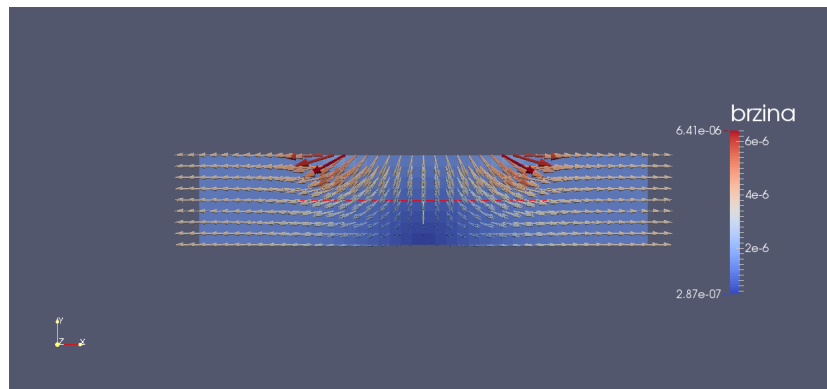
Tablica 5.1 pokazuje numeričku konvergenciju koja je nešto sporija od linearne. Preciznija provjera nije moguća zbog nemogućnosti rješavanja heterogene zadaće. Naime, sljedeći korak  $\varepsilon = 0.125$  bi bio suviše zahtjevan za numeričko rješavanje.

**Napomena 5.1.1.** Numerička rješenja mikroskopskog modela za  $\varepsilon = 1$ , te makroskopskog modela smo tražili i s vremenskim koracima  $dt = 1800s, 4h, 8h$ . Relativna greška koju smo dobili s ovim vremenskim koracima je ponovno bila nakon prvog dana približno  $3.87 \cdot 10^{-4}$ , a nakon desetog dana približno je iznosila  $3.89 \cdot 10^{-4}$ .

Brzine koje dobijemo rješavanjem makroskopskih jednažbi su prikazane na slikama 5.34 i 5.35.

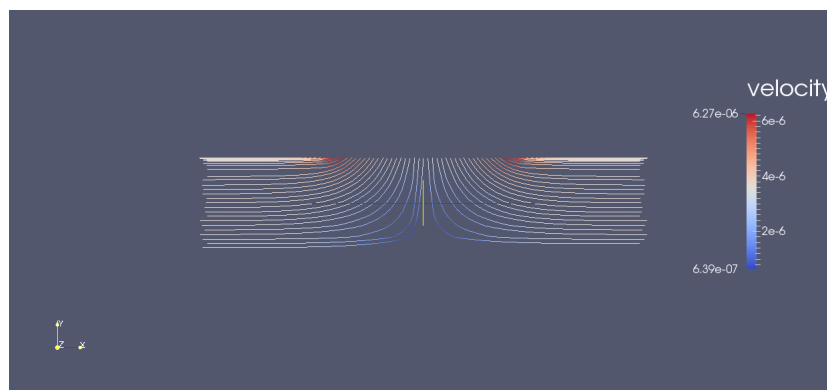


Slika 5.34: Brzina fluida nakon prvog dana

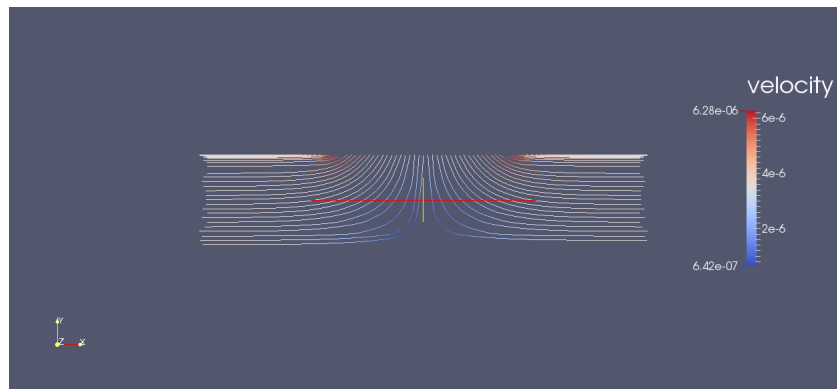


Slika 5.35: Brzina fluida nakon desetog dana

Izgled strujnica prikazan je na slikama 5.36 i 5.37.



Slika 5.36: Strujnice nakon prvog dana



Slika 5.37: Strujnice nakon desetog dana

## Zaključak

Homogeno rješenje ima istu strukturu kao i heterogeno bez oscilacija između blokova. Djelomično provjerena numerička konvergencija potvrđuje teorijske rezultate. Model dvostruke poroznosti se pokazao neusporedivo jednostavnijim za numeričku simulaciju.

# Poglavlje 6

## Dodatak

U ovom poglavlju donosimo pregled oznaka i rezultata koje koristimo u radnji.

**Definicija 6.0.2.** *Neka su  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$  i  $\alpha$  multiindeks. Kažemo da je  $v$  slaba derivacija  $\partial^\alpha u$  od  $u$  ako vrijedi*

$$\int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Slaba parcijalna derivacija  $\partial^\alpha u$  funkcije  $u$  je jedinstveno određena do na skup mjere nula.

**Definicija 6.0.3.** *Soboljev prostor  $W^{m,p}(\Omega)$  je prostor*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Norma u  $W^{m,p}(\Omega)$  je dana s

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{\infty}, & p = \infty. \end{cases}$$

**Napomena 6.0.4.** *Ako je  $p = 2$ , obično pišemo*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

*Slovo  $H$  se koristi budući da je  $H^k$  Hilbertov prostor za svaki  $k \in \mathbb{N}_0$  sa skalarnim produktom*

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx.$$



**Definicija 6.0.5.**  $W_0^{m,p}(\Omega)$  je upotpunjenje prostora  $C_c^\infty(\Omega)$  u normi prostora  $W^{m,p}(\Omega)$ .

**Napomena 6.0.6.** Ako je  $p = 2$ , obično pišemo

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

**Teorem 6.0.7** (Teorem o tragu). Neka je  $\Omega$  ograničena domena klase  $C^1$ . Tada postoji neprekidan, linearan operator  $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  takav da vrijedi

$$(i) \quad Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ za } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$(ii) \quad \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{1,p}, \text{ za svaki } u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ gdje konstanta } C > 0 \text{ ovisi samo o } p \text{ i } \Omega.$$

**Definicija 6.0.8.**  $Tu$  nazivamo tragom od  $u$  na  $\partial\Omega$ .

U prostoru  $W^{m,p}$  definiramo polunormu

$$|u|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{za } 1 \leq p < \infty.$$

**Teorem 6.0.9** (Poincaréova nejednakost). Ako je  $\Omega$  ograničena domena, postoji konstanta  $C = C(\Omega, p)$  takva da za svaki  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  vrijedi

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|u|_{1,p}, \quad \text{za } 1 \leq p < \infty.$$

**Teorem 6.0.10** (Poincaré-Wirtingerova nejednakost). Pretpostavimo da je  $\Omega$  povezana domena. Tada postoji konstanta  $C = C(\Omega)$  takva da vrijedi

$$\|u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

**Teorem 6.0.11** (Lax-Milgramova lema). Neka je  $V$  Hilbertov prostor s normom  $\|\cdot\|$ , te neka je  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinearna forma sa sljedećim svojstvima

$$(i) \quad \exists M > 0 \text{ takav da za svaki } u, v \in V, |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|;$$

$$(ii) \quad \exists \alpha > 0 \text{ takav da za svaki } v \in V, |a(v, v)| \geq \alpha\|v\|^2;$$

Tada za svaki linearan i neprekidan funkcional  $F \in V'$  zadaća

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ a(u, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in V \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje  $u \in V$  i vrijedi

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}.$$

## Periodični rubni uvjeti

Neka je  $Y = [0, 1]^n$ , te neka je  $Y = Y_m \cup Y_f \cup \partial Y_m$ . Označimo sa  $C_{per}^\infty(Y_f) \subset C^\infty(Y_f)$  koji se sastoji od  $Y$ -periodičnih funkcija. Sa  $H_{per}^1(Y_f)$  označavamo upotpunjenje  $C_{per}^\infty(Y_f)$  u normi prostora  $H^1$ .

Poincaréova nejednakost ne vrijedi u prostoru  $H_{per}^1(Y_f)$ , stoga definiramo novi prostor

$$H_{\#}^1(Y_f) = \left\{ u \in H_{per}^1(Y_f) : \frac{1}{|Y_f|} \int_{Y_f} u dx = 0 \right\}.$$

Tada iz Poincaré-Wirtingerove nejednakosti dobivamo da vrijedi

$$\|u\|_{L^2(Y_f)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(Y_f)},$$

stoga na prostoru  $H_{\#}^1(Y_f)$  za normu uzimamo

$$\|u\|_{H_{\#}^1(Y_f)} = \|\nabla u\|_{L^2(Y_f)}.$$

S ovom normom  $H_{\#}^1(Y_f)$  je Hilbertov prostor. Skalarni produkt je dan s

$$(u, v)_{H_{\#}^1(Y_f)} = \int_{Y_f} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Promotrimo sada sljedeću rubnu zadaću

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{u } Y_f \\ \nabla u \cdot \nu = h & \text{na } \partial Y_m \\ u Y - \text{periodična.} \end{cases} \quad (6.1)$$

Rješenje zadaje tražimo u prostoru  $H_{\#}^1(Y_f)$ . Definiramo bilinearnu formu  $a : H_{\#}^1(Y_f) \times H_{\#}^1(Y_f) \rightarrow \mathbb{R}$  sa

$$a(u, v) = \int_{Y_f} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

te funkcional  $F : H_{\#}^1(Y_f) \rightarrow \mathbb{R}$  sa

$$F(v) = \int_{\partial Y_m} h(x)v(x) dS.$$

Pripadna varijacijska zadaća sada glasi

$$\begin{cases} \text{naći } u \in H_{\#}^1(Y_f) \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_{\#}^1(Y_f). \end{cases} \quad (6.2)$$

Integracijom (6.1)<sub>1</sub> po  $Y_f$ , te primjenom teorema o divergenciji dobivamo nužan uvjet egzistencije rješenja

$$\int_Y \nabla u \cdot \nu + \int_{\partial Y_m} h dS = 0.$$

Prvi integral je nula zbog periodičnosti rješenja, stoga nužan uvjet egzistencije rješenja glasi

$$\int_{\partial Y_m} h dS = 0.$$

**Teorem 6.0.12.** *Neka je  $h \in L^2(\partial Y_m)$ . Tada zadaća (6.2) ima jedinstveno rješenje.*

*Dokaz.* Provjeravamo ograničenost i koercitivnost bilinearne forme  $a$

$$|a(u, v)| = \left| \int_{Y_f} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(Y_f)} \|\nabla v\|_{L^2(Y_f)} = \|u\|_{H_{\#}^1(Y_f)} \|v\|_{H_{\#}^1(Y_f)}, \quad \forall u, v \in H_{\#}^1(Y_f)$$

$$a(v, v) = \int_{Y_f} \nabla v \cdot \nabla v dx = \|u\|_{H_{\#}^1(Y_f)}^2, \quad \forall v \in H_{\#}^1(Y_f),$$

te neprekidnost funkcionala  $F$

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_{\partial Y_m} h(x)v(x)dS \right| \leq \|h\|_{L^2(\partial Y_m)} \|v\|_{L^2(\partial Y_m)} \leq \|h\|_{L^2(\partial Y_m)} \|v\|_{L^2(\partial Y_f)} \\ &\leq \|h\|_{L^2(\partial Y_m)} \|v\|_{H_{\#}^1(Y_f)}, \quad \forall v \in H_{\#}^1(Y_f). \end{aligned}$$

U zadnjoj nejednakosti koristili smo teorem o tragu. Pokazali smo da je  $a$  ograničena i koercitivna bilinearne forma, te da je  $F$  neprekidan linearan funkcional, stoga egzistencija i jedinstvenost rješenja zadaće (6.2) slijedi primjenom Lax-Milgramove leme.  $\square$

# Bibliografija

- [1] <http://www.dune-project.org/>.
- [2] <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [3] Todd Arbogast, Jim Douglas, Jr i Ulrich Hornung, *Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **21** (1990), br. 4, 823–836.
- [4] Todd Arbogast, Jim Douglas Jr, Y Jim Douglas, Ulrich Hornung i Ulrich Hornungz, *Modeling of naturally fractured reservoirs by formal homogenization techniques*, (1991).
- [5] Peter Bastian, Markus Blatt, Andreas Dedner, Christian Engwer, Robert Klöforn, Martin Nolte, Mario Ohlberger i Oliver Sander, *The Distributed and Unified Numerics Environment (DUNE) Grid Interface HOWTO*, 2009.
- [6] Jacob Bear i AH D Cheng, *Modeling groundwater flow and contaminant transport*, sv. 23, Springer, 2010.
- [7] Guy Chavent i Jérôme Jaffré, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation: single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media*, Elsevier, 1986.
- [8] Zhangxin Chen, Guanren Huan i Yuanle Ma, *Computational methods for multiphase flows in porous media*, sv. 2, Siam, 2006.
- [9] Doina Cioranescu i Patrizia Donato, *Introduction to homogenization*, (2000).
- [10] Robert Dautray i Jacques Louis Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 3 Spectral Theory and Applications*, sv. 3, Springer, 2000.

- [11] J Douglas i T Arbogast, *Dual porosity models for flow in naturally fractured reservoirs*, IN: Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Media. Academic Press, Inc., San Diego, California. 1990. p 177-221, 13 fig, 36 ref. (1990).
- [12] Lawrence C Evans, *Partial differential equations*, (1998).
- [13] Ulrich Hornung, *Applications of the homogenization method to flow and transport in porous media*, Summer School on Flow and Transport in Porous Media (1992), 167–222.
- [14] Ulrich Hornung, *Homogenization and porous media*, sv. 6, Springer, 1997.
- [15] George F Pinder i Michael A Celia, *Subsurface hydrology*, John Wiley & Sons, 2006.
- [16] Alfio Quarteroni i Alberto Valli, *Numerical approximation of partial differential equations*, sv. 23, Springer, 2008.
- [17] Dune Team, *dune-pdelab Howto*, (2013).

# Sažetak

U ovom radu smo izveli model dvostruke poroznosti koji opisuje gibanje fluida kroz frakturiranu poroznu sredinu. Frakturirana porozna sredina  $\Omega$  je porozna sredina koja se sastoji od matrice poroznih blokova  $\Omega_m^\varepsilon$ , koja je okružena sustavom fraktura  $\Omega_f^\varepsilon$ , gdje parametar  $\varepsilon$  predstavlja veličinu matičnog bloka. U radu smo najprije opisali model jednofaznog toka fluida na mikroskopskoj skali. Dobili smo sljedeću inicijalno rubnu zadaću

$$\begin{cases} \Phi^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \rho^\varepsilon - \operatorname{div} \left( \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \right) = f & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nu_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho^{init} & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

gdje  $\rho^\varepsilon$  predstavlja gustoću fluida unutar  $\Omega$ , a  $\Phi^\varepsilon$  i  $K^\varepsilon$  su funkcije poroznosti i propusnosti fluida

$$\Phi^\varepsilon(x) = \begin{cases} \Phi^* & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ \phi^\varepsilon(x) & x \in \Omega_m^\varepsilon, \end{cases}$$
$$K^\varepsilon(x) = \begin{cases} K^* & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ \varepsilon^2 k^\varepsilon(x) & x \in \Omega_m^\varepsilon. \end{cases}$$

Pomoću teorije homogenizacije izveli smo model na makroskopskoj skali gdje smo funkcije  $\Phi^\varepsilon$  i  $K^\varepsilon$  zamijenili sljedećim funkcijama

$$\Phi^H = \frac{|Y_f|}{|Y|} \Phi^*$$
$$K^H = K^* \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} (\nabla_y \omega(y) + \mathbb{I}) dy,$$

te smo dobili model dvostruke poroznosti

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi^H \partial_t \rho_f^0 - \operatorname{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^0 \right) = f - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \partial_t \rho_m^0 dy & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho_f^0 = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^0 \cdot \mathbf{v}_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho_f^0 = \rho_f^{init} & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(y) \partial_t \rho_m^0(x, y, t) - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \right) = f(x, t) & \text{u } \Omega \times Y_m \times (0, T) \\ \rho_m^0(x, y, t) = \rho_f^0(x, t) & \text{na } \Omega \times \partial Y_m \times (0, T) \\ \rho_m^0(x, y, 0) = \rho_m^{init}(x) & \text{na } \Omega \times Y_m. \end{array} \right.$$

Prostornu i vremensku diskretizaciju modela smo proveli primjenom metode konačnih elemenata, odnosno implicitne Eulerove metode. Numeričku usporedbu modela proveli smo pomoću DUNE-a, software-a za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Došli smo do zaključka da je model na makroskopskoj skali manje zahtjevan za numeričko rješavanje, jer zahtjeva manji broj elemenata u triangulaciji domene  $\Omega$ . Modele smo testirali za različite vrijednosti parametra  $\varepsilon$ , te smo primijetili da se relativna greška numeričkih rješenja makroskopskog i mikroskopskog modela smanjuje sa smanjenjem parametra  $\varepsilon$ .

# Summary

In this paper we derived double porosity model of flow in fractured porous media. Fractured porous media  $\Omega$  contains system of fracture planes  $\Omega_f^\varepsilon$  dividing the porous rock into collection of blocks  $\Omega_m^\varepsilon$ . In this paper we first have described model of single phase flow on a microscopic scale. Single phase flow is described by following equations

$$\begin{cases} \Phi^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \rho^\varepsilon - \operatorname{div} \left( \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \right) = f & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^\varepsilon}{\mu c} \nabla \rho^\varepsilon \cdot \nu_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho^\varepsilon = \rho^{init} & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

where  $\rho^\varepsilon$  denotes fluid density.  $\Phi^\varepsilon$  and  $K^\varepsilon$  are porosity and permeability functions

$$\Phi^\varepsilon(x) = \begin{cases} \Phi^* & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ \phi^\varepsilon(x) & x \in \Omega_m^\varepsilon, \end{cases}$$

$$K^\varepsilon(x) = \begin{cases} K^* & x \in \Omega_f^\varepsilon \\ \varepsilon^2 k^\varepsilon(x) & x \in \Omega_m^\varepsilon. \end{cases}$$

Macroscopic model is derived from homogenization theory. We have replaced  $\Phi^\varepsilon$  and  $K^\varepsilon$  by following functions

$$\Phi^H = \frac{|Y_f|}{|Y|} \Phi^*$$

$$K^H = K^* \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} (\nabla_y \omega(y) + \mathbb{I}) dy.$$



Double porosity model is given by

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi^H \partial_t \rho_f^0 - \operatorname{div} \left( \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^0 \right) = f - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \phi(y) \partial_t \rho_m^0 dy & \text{u } \Omega \times (0, T) \\ \rho_f^0 = \rho_{bd} & \text{na } \Gamma_D \times (0, T) \\ \frac{K^H}{\mu c} \nabla \rho_f^0 \cdot \nu_\Omega = h & \text{na } \Gamma_N \times (0, T) \\ \rho_f^0 = \rho_f^{init} & \text{na } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(y) \partial_t \rho_m^0(x, y, t) - \operatorname{div}_y \left( \frac{k(y)}{\mu c} \nabla_y \rho_m^0(x, y, t) \right) = f(x, t) & \text{u } \Omega \times Y_m \times (0, T) \\ \rho_m^0(x, y, t) = \rho_f^0(x, t) & \text{na } \Omega \times \partial Y_m \times (0, T) \\ \rho_m^0(x, y, 0) = \rho_m^{init}(x) & \text{na } \Omega \times Y_m. \end{array} \right.$$

We applied finite element method for spatial discretization and backward Euler for discretization in time. Numerical model comparison is done by DUNE, modular toolbox for solving partial differential equations. We have concluded that double porosity model is much easier to approximate computationally because it requires less grid elements. Models have been tested for different  $\epsilon$  values. We have noticed that relative error decreases as  $\epsilon$  decreases.

# Životopis

Ivana Radišić, rođena je 17.11.1990. godine u Zagrebu. U Čitluku je pohađala Osnovnu školu fra Didaka Buntića, te Srednju školu dr. fra Slavka Barbarića, smjer opća gimnazija. Školovanje je nastavila u Zagrebu, gdje je 2012. godine završila Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Pri istom fakultetu je upisala Diplomski sveučilišni studij Primijenjene matematike.