

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Andrea Lolić

Dvofazni protok fluida u poroznoj sredini

Diplomski rad

Zagreb, 2008.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODJEL

Andrea Lolić

Dvofazni protok fluida u poroznoj sredini

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, 2008.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik

2. _____, član

3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____

2. _____

3. _____

Sadržaj

Uvod	2
1 Jednadžbe dvofaznog toka fluida u poroznoj sredini	4
1.1 Jednadžbe mehanike fluida	4
1.2 Darcyjev zakon	5
1.2.1 Dvofazni tok	7
1.3 Jednadžba kontinuiteta u poroznoj sredini	8
1.4 Opća forma jednadžbi višefaznog toka	9
1.5 Izbor nezavisnih varijabli	11
1.6 "Fractional flow" formulacija dvofaznog toka	11
2 Hiperbolički zakoni sačuvanja	14
2.1 Integralna i diferencijalna forma zakona sačuvanja	14
2.2 Linearna jednadžba konvekcije	16
2.2.1 Domena ovisnosti	18
2.3 Jednadžbe s viskoznim članom	18
2.4 Nelinearni zakoni sačuvanja	20
2.4.1 Burgersova jednadžba	21
2.4.2 Formiranje šoka	22
2.5 Slaba rješenja	24
2.5.1 Rankine-Hugoniotov uvjet	25
2.6 Riemannov problem	27
2.7 Entropijske funkcije i uvjet entropije	29
2.8 Pravilo jednakih površina	34
2.9 Buckley-Leverettova jednadžba	35
2.10 Određivanje relativnih propusnosti	40

Uvod

Voda je jedan od preduvjeta za nastajanje, razvijanje i održavanje života na Zemlji. Podzemna voda često je najčišći oblik vode koji se nalazi u prirodi. Strujanje vode u tlu se, ovisno o sredini kroz koju voda protiče, dijeli na:

- strujanje u poroznim sredinama (stijene međuzrnske poroznosti - pijesak, šljunak),
- strujanje u stijenama sa pukotinskom poroznošću.

Mi ćemo promatrati općenitiji slučaj, tj. strujanje proizvoljnog fluida (ne nužno vode) u poroznoj sredini.

Za početak objasniti ćemo razliku između mikroskopskog i makroskopskog promatranja toka fluida.

Fluid i porozna sredina su i makroskopski i mikroskopski gledano nehomogeni. Makroskopska nehomogenost posljedica je tektonskih procesa koje je stijena prošla i razlike u fizikalnim svojstvima fluida, dok je mikroskopska nehomogenost posljedica molekularne strukture kod fluida te rasporeda pora kod porozne sredine.

Sve jednadžbe mehanike kontinuuma dane su na mikroskopskom nivou. Mi ćemo ih poopćiti, tj. dati makroskopske jednadžbe za gibanje fluida.

Porozni medij sastoji se od zrnastih čestica i međuprostora (pora) čiju geometriju u praktičnim slučajevima nije moguće definirati niti opisati. Zbog toga se kod makroskopskog promatranja strujanja fluida u poroznoj sredini promatraju samo usrednjene veličine (srednje brzine, srednji pritisci, srednja poroznost,..) pri čemu se usrednjenje vrši u tzv. reprezentativnom volumenu V (u daljnjem tekstu REV).

Najjednostavniji primjer gibanja u poroznoj sredini je tok podzemne vode. Podzemne vode struje vrlo malim brzinama koje su reda veličine $10^{-4}m/s$, a često puta i znatno manje. Takvo strujanje, koje je malih brzina i kod kojeg se čestice fluida gibaju po glatkim putanjama u infinitezimalno tankim slojevima (laminama) koji klize mirno jedan po drugom, naziva se **laminarno strujanje**.

U nezasićenim poroznim sredinama strujanje fluida se odvija u prostoru koji nije u potpunosti ispunjen samo fluidom od primarnog interesa već i nekim drugim, koji često zna biti u plinovitom agregatnom stanju. Za nezasićene sredine taj drugi fluid je u većini slučajeva zrak. Iz tog razloga, gibanje fluida nije više uzrokovano samo gravitacijskom silom već i silama površinskog djelovanja između fluida, zraka i porozne matrice. Kako bi se olakšalo opisivanje takvog toka, uvodi se pojam **faze**.

Fazu definiramo kao prostor koji zauzima neka tvar tekućeg, krutog ili plinovitog agregatnog stanja. Na taj način, faza je definirana kao homogeni dio prostora koji je odvojen od ostalih sličnih dijelova oštro definiranom granicom (međufazna granica). Unutar poroznog tijela može se nalaziti samo jedna plinovita faza, i to iz razloga što se takva stanja lako miješaju pa među njima ne postoji vidljiva granica. U slučaju miješanja dviju ili više tekućih faza, moguće ih je promatrati kao odvojene, ukoliko je jasno vidljiva granica koja ih separira.

1 Jednadžbe dvofaznog toka fluida u poroznoj sredini

1.1 Jednadžbe mehanike fluida

Naš cilj je doći do jednadžbi dvofaznog nemješivog toka fluida u poroznoj sredini. Te jednadžbe posljedica su Darcyjevog zakona i jednadžbe kontinuiteta za promatranu fazu.

Za početak ćemo definirati osnovne pojmove mehanike fluida kao što su deformacija, gibanje i nestlačivost.

Definicija 1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domena sa glatkom granicom. Preslikavanje $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zovemo deformacijom na Ω ako vrijedi:*

- i. φ je injektivno preslikavanje,*
- ii. φ je klase C^1 na Ω ,*
- iii. $\det(\nabla\varphi) > 0$, tj. φ čuva orijentaciju.*

Definicija 2. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domena sa glatkom granicom. Preslikavanje $\Phi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zovemo gibanje ako je $\Phi(\cdot, t) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deformacija, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Definicija 3. *Kažemo da je kontinuum Ω nestlačiv ako za svaki $\Theta \subset \Omega$ pri gibanju ne mijenja volumen.*

Da bi mogli postaviti jednadžbe za dvofazni tok prvo moramo opisati tok samo jednog fluida.

Neka je $\rho(x, t)$ gustoća fluida u točki x i trenutku t , a $\vec{v} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(\Phi^{-1}(x, t), t)$ brzina gibanja. Tada se iz zakona sačuvanja mase može doći do **jednadžbe kontinuiteta** : [Aga90]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (1)$$

Mi ćemo nadalje pretpostaviti da je gustoća fluida konstantna, što vodi do :

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0.$$

U poroznoj sredini ova se jednadžba koristi kako je pokazano u točki 1.3.

Ako zakon sačuvanja mase upotpunimo zakonom sačuvanja momenta količine gibanja doći ćemo do Navier-Stokesovih jednadžbi koje vežu brzinu fluida s tlakom u fluidu :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\nabla\vec{v})\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\vec{v} + \vec{f}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0. \quad (3)$$

Navier-Stokesovim jednadžbama (2), (3) opisuje se gibanje fluida na mikroskopskom nivou (u porama).

Na makroskopskom nivou zamjenjujemo ih jednadžbama koje opisuju vezu između "srednje brzine" i "srednjeg tlaka", koji se dobiju usrednjenjem mikroskopskih (stvarnih) brzina i tlakova u referentnom elementarnom volumenu (REV-u).

Jedna od takvih jednadžbi dana je Darcyjevim zakonom.

1.2 Darcyjev zakon

Zakon koji opisuje laminarni gravitacijski tok vode u poroznoj sredini, a ustanovljen je empirijski, zove se Darcyjev zakon (Henry Darcy, 1856).

Darcy je ustanovio da je količina vode koja protječe kroz cijev ispunjenu pijeskom proporcionalna s površinom cijevi i hidrauličkim gradijentom :

$$\vec{Q} = kF\nabla h$$

pri čemu je :

- \vec{Q} = protok (količina vode koja protječe kroz cijev)
- F = površina cijevi
- h = potencijal koji se naziva *piezometarska razina* te se računa po formuli: $h = \frac{p}{g\rho} + z$, gdje je z visina točke promatranja iznad referentne ravnine
- k = faktor proporcionalnosti koji nazivamo koeficijentom filtracije.

Omjer protoka i površine cijevi zove se **Darcyjeva brzina** :

$$\vec{v} = \frac{\vec{Q}}{F}$$

Darcyjeva brzina predstavlja volumen fluida koji u jedinici vremena proteče kroz jediničnu površinu (srednja volumetrijska brzina). Tok vode u poroznoj sredini ne odvija se cijelim volumenom koji promatramo, već samo kroz pore, pa da bi došli do stvarne brzine gibanja moramo uvesti pojam poroznosti.

Poroznost ϕ se definira kao omjer volumena pora kroz koje se odvija tok i ukupnog volumena :

$$\phi = \frac{V_p}{V}$$

Stvarna brzina strujanja fluida kroz porozni medij dobiva se sada dijeljenjem Darcyjeve brzine sa poroznošću :

$$\vec{v}_s = \frac{\vec{v}}{\phi}.$$

Koeficijent filtracije opisuje otpor toku fluida kroz neku poroznu sredinu. On ovisi o karakteristikama porozne sredine kroz koju se odvija strujanje kao i o karakteristikama fluida.

Poopćavajući slučaj gibanja fluida u cijevi na gibanje u poroznoj sredini dolazimo do sljedeće forme Darcyjevog zakona :

$$\vec{v} = -\frac{1}{\mu}\mathbb{K}(\nabla p - \rho\vec{g}),$$

gdje je :

- μ = dinamička viskoznost
- p = tlak
- ρ = gustoća fluida
- \mathbb{K} = apsolutna propusnost (permeabilnost).

Apsolutna propusnost karakterizira otpor koji porozna sredina pruža gibanju fluida, te ovisi o veličini i rasporedu pora. Općenito je \mathbb{K} simetrična matrica, ali se u izotropnom slučaju svede na skalar.

Na makroskopskom nivou porozna sredina je okarakterizirana sa dva parametra: poroznošću ϕ i propusnošću \mathbb{K} .

Poroznost opisuje koliko ima slobodnog prostora za gibanje fluida, dok propusnost kaže koliko je ta sredina pogodna za gibanje. Na primjer, poroznost sredine može biti vrlo velika (npr. $\phi = 0.3, 0.4$), a da je propusnost mala. Razlog tome je što su dimenzije pora vrlo male. Veće pore dati će, naravno, i veću propusnost.

Napomena 1. *Darcyjev zakon postulira jednostavnu linearnu vezu između Darcyjeve brzine i gradijenta tlaka, te je posljedica toga što trenje u poroznoj sredini dominira nad inercijskim silama.*

1.2.1 Dvofazni tok

U dvofaznom strujanju kroz poroznu sredinu u prostoru pora se istovremeno nalaze dva fluida (dvije faze) odvojena dobro definiranom granicom. Kada s mikroskopskog nivoa pređemo na makroskopski, granice među fazama se gube, no zato se uvode nove varijable koje daju količinu jedne, odnosno druge faze u reprezentativnom elementarnom volumenu.

Označimo li REV s V , volumni udio pora u V s V_p , te dio volumena V kojeg zauzima prvi tj. drugi fluid s V_1 , odnosno V_2 , imamo da je :

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_p}, \alpha = 1, 2$$

zasićenje fluidom α . Jasno je da su $S_\alpha, \alpha = 1, 2$ makroskopske veličine, dobro definirane na prostornoj skali znatno većoj od dimenzije pore, koje zadovoljavaju :

$$0 \leq S_\alpha \leq 1, S_1 + S_2 = 1.$$

Druga je jednakost posljedica činjenice da u pornom prostoru nema vakuuma, odnosno da fluidi zauzimaju čitav prostor.

Veliki broj eksperimenata vezanih za višefazne procese pokazao je da je Darcyjeva brzina za svaku fazu α u poroznom mediju dana generaliziranim Darcy-Muskatanovim zakonom :

$$\vec{v}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \mathbb{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \vec{g}), \quad (4)$$

gdje je :

- $k_{r\alpha}$ = relativna permeabilnost za fazu α
- μ_α = dinamička viskoznost faze α
- p_α = tlak faze α
- ρ_α = gustoća faze α .

Relativne propusnosti nam govore koliko je smanjena mobilnost jednog fluida zbog prisustva drugog. Stoga je :

$$0 \leq k_{r\alpha} \leq 1.$$

One se određuju eksperimentalno i uzima se da ovise o zasićenju. Budući da prisustvo jedne faze spriječava gibanje druge, to više što je više ima, ovisnost propusnosti o zasićenosti $S_\alpha \mapsto k_{r\alpha}(S_\alpha)$ je monotono rastuća funkcija.

Omjer relativne propusnosti i dinamičke viskoznosti za fazu α označit ćemo sa λ_α i to će nam predstavljati mobilnost faze α :

$$\lambda_\alpha(S_\alpha) = \frac{k_{r\alpha}(S_\alpha)}{\mu_\alpha}. \quad (5)$$

1.3 Jednadžba kontinuiteta u poroznoj sredini

Kada se zakon sačuvanja mase (str.4) primjeni na fluid u poroznoj sredini, onda treba uzeti u obzir da fluid zauzima samo prostor pora. Stoga dobivamo jednadžbu :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

Ako se u prostoru pora nalazi više faza onda se zakon sačuvanja mase treba primijeniti na svaku fazu posebno :

$$\frac{\partial(S_\alpha\phi\rho_\alpha)}{\partial t} + \text{div}(\rho_\alpha\vec{v}_\alpha) = 0,$$

gdje je :

- v_α = brzina faze α
- ρ_α = gustoća mase faze α .

Upravo taj oblik koristit ćemo u formulaciji jednadžbi višefaznog toka.

1.4 Opća forma jednadžbi višefaznog toka

Do sada smo za dvofazni nestlačivi tok postavili sljedeće jednadžbe :

$$\phi \rho_1 \frac{\partial S_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \vec{v}_1) = 0 \quad (6)$$

$$\phi \rho_2 \frac{\partial S_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (7)$$

$$\vec{v}_1 = -\lambda_1(S_1) \mathbb{K}(\nabla p_1 - \rho_1 \vec{g}) \quad (8)$$

$$\vec{v}_2 = -\lambda_2(S_2) \mathbb{K}(\nabla p_2 - \rho_2 \vec{g}) \quad (9)$$

$$S_1 + S_2 = 1. \quad (10)$$

Nepoznanice su S_1 , S_2 , p_1 , p_2 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , dok su ρ_1 , ρ_2 poznate konstante, a $\phi(x)$ i $\mathbb{K}(x)$ zadane funkcije prostorne varijable. Također su nam poznate i funkcije $S_i \mapsto \lambda_i(S_i)$ za $i = 1, 2$. Time smo dobili pet jednadžbi sa šest nepoznanica, te nam nedostaje još jedna jednadžba.

U mikroskopskom modelu u porama se nalaze dvije faze i svaka pri tome ima svoj tlak. U makroskopskom modelu tlakovi faza predstavljaju srednje vrijednosti tlakova faza u REV-u.

Iz fizike znamo da tlak pri prijelazu iz jednog u drugi fluid vrši skok koji je određen Laplaceovim zakonom :

$$p_2 - p_1 = \sigma_{12} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) = \frac{4\sigma_{12} \cos \alpha}{d}, \quad (11)$$

gdje je :

- α = kut između dvije faze
- σ_{12} = međupovršinska napetost
- d = radijus pore
- r_x, r_y = glavni radijusi zakrivljenosti separirajuće plohe.

Ova razlika tlakova naziva se **kapilarni tlak** i označava s p_c .

U sustavu dva fluida jedan uvijek prijanja uz stijenku više od drugog, pa za taj fluid kažemo da je **vlažeći**, dok je drugi **nevlažeći**. Jasno je da je tlak u nevlažećem fluidu veći od tlaka u vlažećem.

Dakle, može se zaključiti da makroskopski fazni tlakovi nisu neovisni jedan o drugom već da su vezani jednom relacijom koju zovemo **jednadžba kapilarnog tlaka**. Eksperimentalno je pokazano da je ta jednadžba oblika:

$$p_2 - p_1 = p_c(S_1),$$

gdje je $S_1 \mapsto p_c(S_1)$ eksperimentalno određena funkcija koja se zove (makroskopski) kapilarni tlak.

Uzmimo da je fluid 1 vlažeći, a fluid 2 nevlažeći, te umjesto oznaka 1 i 2 iskoristimo indekse w (wetting) i n (nonwetting). Tada je :

$$p_n - p_w = p_c(S_w) \tag{12}$$

i p_c je pozitivna funkcija. Analizom se može vidjeti i da je $\frac{\partial p_c}{\partial S_w} < 0$.

Iz Laplaceove jednadžbe (11) se odmah vidi da smanjenje radijusa pore dovodi do povećanja kapilarnog tlaka, tj. ako se vodom zasićeno tlo isušuje, vlažeća faza se povlači u manje pore. S druge strane, povećanjem radijusa pora dolazi do smanjivanja kapilarnog tlaka, u tom slučaju vlažeća faza ulazi u veće pore. Iz toga je jasno da povećanjem zasićenosti nevlažeće faze dolazi do povećanja kapilarnog tlaka. Također se može pokazati da je ta veza strogo monotona.

Jednadžbe (6)-(10) posve određuju dvofazni tok fluida u poroznoj sredini.

Napomena 2. *Ponekad je kapilarni tlak tako mali da ga možemo zanemariti pa je $p_n = p_w$. Tada u sustavu imamo samo jedan tlak. Broj jednadžbi i broj nepoznanica ponovno je jednak.*

Sustav jednadžbi (1)-(6) je nelinearan zbog nelinearne ovisnosti kapilarnog tlaka o zasićenosti i nekonstantnosti funkcije λ_α . Zbog toga su se razvile alternativne formulacije koje ovise o individualnom problemu i o učinkovitosti numeričkih metoda.

1.5 Izbor nezavisnih varijabli

Uočimo prvo da za jednu nezavisnu varijablu možemo odabrati jedno zasićenje, na primjer $S = S_w$. Tada je $S_n = 1 - S$, a funkcije λ_n , λ_w i p_c možemo izraziti kao funkcije zasićenja $S = S_w$. Nadalje, za drugu nezavisnu varijablu možemo uzeti tlak nevlažeće faze $p = p_n$. To vodi do sustava jednadžbi :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_w(S) \mathbb{K}(\nabla p - \nabla p_c(S) - \rho_w \vec{g})) = 0 \quad (13)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\lambda_n(S) \mathbb{K}(\nabla p - \rho_n \vec{g})) = 0. \quad (14)$$

To su evolucijske jednadžbe čiji tip nije moguće jednoznačno odrediti. Da bismo došli do sustava jasnijeg matematičkog tipa oduzet ćemo dvije jednadžbe kako bismo se riješili vremenske derivacije.

1.6 "Fractional flow" formulacija dvofaznog toka

Izaberemo nezavisne varijable kao u prethodnom poglavlju ($S = S_w$ i $p = p_n$). Jednadžbe kontinuiteta za vlažeću i nevlažeću fazu dane su sa :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_w) = 0 \quad (15)$$

$$\phi \frac{\partial(1 - S)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_n) = 0. \quad (16)$$

Definirajmo **ukupnu brzinu** dvofaznog sustava sa $\vec{v}_u = \vec{v}_w + \vec{v}_n$ i sumirajmo gornje dvije jednadžbe. Tako dobijemo jednu jednadžbu za ukupnu brzinu :

$$\operatorname{div}(\vec{v}_u) = 0.$$

Iz jednadžbe za kapilarni tlak znamo da je :

$$\nabla p_w = \nabla(p_n - p_c).$$

Tada je Darcyjev zakon za faze dan sa :

$$\begin{aligned} \vec{v}_w &= -\lambda_w(S) \mathbb{K}(\nabla p - \nabla p_c(S) - \rho_w \vec{g}) \\ \vec{v}_n &= -\lambda_n(S) \mathbb{K}(\nabla p - \rho_n \vec{g}). \end{aligned}$$

Uvedemo li oznake :

$$d(S) = \lambda_w(S) + \lambda_n(S) \quad (17)$$

$$f_n(S) = \frac{\lambda_n(S)}{d(S)} \quad (18)$$

$$f_w(S) = \frac{\lambda_w(S)}{d(S)} \quad (19)$$

$$\zeta(S) = f_w(S)\rho_w + f_n(S)\rho_n \quad (20)$$

dolazimo do druge jednadžbe za ukupnu brzinu :

$$\vec{v}_u = -d(S)\mathbb{K}(\nabla p - f_w(S)\nabla p_c(S) - \zeta(S)\vec{g}).$$

Brzine faza tada možemo zapisati preko ukupne brzine kao :

$$\begin{aligned} \vec{v}_w &= f_w(S)\vec{v}_u + \lambda_w(S)f_n(S)\mathbb{K}(\nabla p_c(S) + (\rho_w - \rho_n)\vec{g}) \\ \vec{v}_n &= f_n(S)\vec{v}_u - \lambda_n(S)f_w(S)\mathbb{K}(\nabla p_c(S) + (\rho_w - \rho_n)\vec{g}). \end{aligned}$$

Za konačne jednadžbe uzet ćemo jednadžbu za ukupnu brzinu :

$$\operatorname{div}(\vec{v}_u) = 0 \quad (21)$$

$$\vec{v}_u = -d(S)\mathbb{K}(\nabla p - f_w(S)\nabla p_c(S) - \zeta(S)\vec{g}) \quad (22)$$

i jednadžbu za vlažeću fazu :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S)\vec{v}_u + \lambda_w(S)f_n(S)\mathbb{K}(\rho_w\vec{g} - \rho_n\vec{g})) = -\operatorname{div}(\lambda_w(S)f_n(S)\mathbb{K}\nabla p_c)$$

Neki od termina u prethodnoj jednadžbi mogu se napisati u ovisnosti o zasićenosti :

$$\nabla p_c(S) = p'_c(S)\nabla S$$

$$\operatorname{div}(f_w(S)\vec{v}_u) = \vec{v}_u \nabla f_w(S) + f_w(S) \operatorname{div} \vec{v}_u = \vec{v}_u f'_w(S)\nabla S$$

te uz oznaku :

$$a(S) = -\lambda_w(S)f_n(S)p'_c(S) = -\frac{\lambda_w(S)\lambda_n(S)}{d(S)}p'_c(S) \geq 0 \quad (23)$$

$$b(S) = \lambda_w(S)f_n(S)(\rho_w - \rho_n) = \frac{\lambda_w(S)\lambda_n(S)}{d(S)}(\rho_w - \rho_n) \quad (24)$$

jednadžba za vlažeću fazu ima oblik :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S)\vec{v}_u + b(S)\mathbb{K}\vec{g}) = \operatorname{div}(a(S)\mathbb{K}\nabla S). \quad (25)$$

Ako je u jednađbi (22) poznato S , onda je (21), (22) eksplicitna jednađba za tlak p jer je ukupna mobilnost $d(S) \geq d_0 > 0, \forall S \in [0, 1]$. Ako su pak poznati tlak p i ukupna brzina \vec{v}_u , onda je (25) nelinearna parabolička jednađba za zasićenje S .

Povezanost jednađbi (22) i (25) je vrlo snažna jer se u (22) nalazi i gradijent funkcije S . Ona se jako pojednostavljuje ako zanemarimo kapilarni tlak, tj. stavimo da je $p_c = 0$. Ispustimo li uz to i utjecaj gravitacije, jednađba (25) se svede na **Buckley-Leverettovu jednađbu** koja je hiperboličnog tipa :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}(f_w(S)\vec{v}_u) = 0,$$

dok jednađbe za tlak (21),(22) prelaze u :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}_u) &= 0 \\ \vec{v}_u &= -d(S)\mathbb{K}\nabla p. \end{aligned}$$

U jednoj prostornoj dimenziji dolazi do daljnjeg pojednostavljenja ovog sustava jer je tada brzina v_u konstantna po varijabli x (ona je funkcija vremena, ali ćemo zbog jednostavnosti uzeti da je konstanta) pa je zadana, na primjer, rubnim uvjetom. Sustav od dvije jednađbe svodi se na jednu jednađbu za zasićenje S :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + v_u \frac{\partial}{\partial x} f_w(S) = 0.$$

Uz pretpostavku da je S poznato, jednađba za tlak ima oblik :

$$p(x, t) = p(0, t) - v_u \int_0^x \frac{d\xi}{d(S(\xi, t))k(\xi)},$$

pri čemu je k apsolutna propusnost u jednoj dimenziji. Ukoliko je zadano v_u i $p(0, t)$ vidimo da je tlak jednoznačno određen. Uočimo još da je u ovoj situaciji :

$$v_w = f_w(S)v_u, \quad v_n = f_n(S)v_u.$$

2 Hiperbolički zakoni sačuvanja

Već smo u prvom poglavlju govorili o nekim osnovnim jednažbama mehanike kontinuuma. Ovdje ćemo promatrati zakon sačuvanja pri čemu posebnu pažnju posvećujemo skalarnoj jednažbi.

2.1 Integralna i diferencijalna forma zakona sačuvanja

Zakoni sačuvanja izražavaju svojstvo pojedinih fizikalnih polja da ostanu sačuvana tokom gibanja. Osnovni primjer je zakon sačuvanja mase. Promotrimo gibanje fluida gustoće $\rho(\mathbf{x}, t)$ brzinom $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Volumen Ω koji se nalazi unutar fluida u nekom vremenskom intervalu $(t - a, t + a)$ nazvamo **kontrolni volumen**. Ukupna masa fluida u kontrolnom volumenu jednaka je

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Pretpostavimo da do promjene mase dolazi jedino zbog ulaska i izlaska fluida iz kontrolnog volumena. Brzina ulaska/izlaska fluida kroz granicu kontrolnog volumena dana je plošnim integralom

$$- \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS,$$

gdje je $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$ u točki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, pa stoga dobivamo jednažbu

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = 0, \quad (26)$$

To je **integralna forma zakona sačuvanja**. Jednažba (26) mora vrijediti za svaki kontrolni volumen Ω . Ukoliko su polja ρ i \mathbf{v} dovoljno glatka, iz integralne formulacije slijedi diferencijalna:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (27)$$

To je jednažba kontinuiteta koja izražava zakon sačuvanja mase u diferencijalnoj formi. O toj jednažbi već smo govorili u prvom poglavlju. Važno je uočiti da je integralna forma zakona fundamentalnija od diferencijalne forme koju dobivamo tek u slučaju dovoljne glatkoće svih polja.

Sada ćemo promatrati jednodimenzionalno gibanje fluida kao najjedostavniji primjer gibanja. Brzina fluida stoga postaje skalar $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v(x, t)\mathbf{e}_1$, gdje je \mathbf{e}_1 jedinični vektor u smjeru gibanja.

Ponovit ćemo gornji izvod integralne forme zakona sačuvanja u jednoj dimenziji. Gustoća fluida je sada gustoća po jedinici duljine duž osi x pa za masu fluida između presjeka $x = x_1$ i $x = x_2$ imamo

$$m(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx.$$

Brzina promjene mase u kontrolnom volumenu (x_1, x_2) iznosi

$$\rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t), \quad (28)$$

pri čemu smo predznak odredili tako da je izraz (28) pozitivan kad fluid ulazi u kontrolni volumen. Stoga je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx &= \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t), \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx, \end{aligned}$$

odakle ponovo lagano slijedi

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (29)$$

Brzina v koja ulazi u jednadžbu (29) (ili (27)) dobiva se kao rješenje jednadžbe gibanja, pa je stoga (29) tek dio sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju gibanje fluida. U nekim specijalnim slučajevima brzina v se može izraziti kao funkcija gustoće ρ , tako da se (29) svode na jednu skalarnu jednadžbu

$$\rho_t + f_x(\rho) = 0, \quad (30)$$

gdje je $f(\rho) = \rho v(\rho)$. Posebno je jednostavan primjer gibanja s konstantnom brzinom: $f(\rho) = a\rho$, gdje je a brzina gibanja, pa jednadžba (30) ima oblik :

$$\rho_t + a\rho_x = 0.$$

2.2 Linearna jednađza konvekcije

Najjednostavnija parcijalna diferencijalna jednađza, a ujedno i najjednostavniji primjer hiperboličkog zakona sačuvanja, je linearna jednađza prvog reda s konstantnim koeficijentima ili jednađza konvekcije :

$$u_t + au_x = 0, \quad (31)$$

pri čemu je $a \in \mathbb{R}$, a u je realna funkcija dviju realnih varijabli.

Pogledajmo sada Cauchyjevu zadaću za našu jednađzu:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (32)$$

Ona se može zapisati i u obliku :

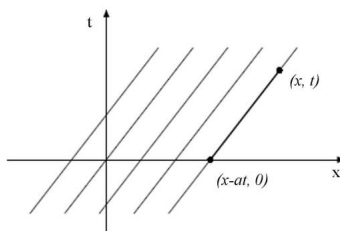
$$\nabla u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = 0,$$

što znači da derivacija funkcije u u smjeru vektora $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ iščezava. To ima za posljedicu da je $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ rješenje jednađze ako i samo ako je funkcija u konstantna na pravcima $x - at = \text{const}$. Ti pravci su integralne krivulje vektorskog polja $\partial_t + a\partial_x$ i nazivaju se **karakteristikama**. Time smo dokazali sljedeći teorem:

Teorem 1. *Ako je a realan broj, a $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onda postoji jedinstveno rješenje $u \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ Cauchyjeve zadaće (32), koje je dano formulom :*

$$u(x, t) = u_0(x - at).$$

Ako je funkcija u_0 klase C^k , onda je i rješenje u također klase C^k .



Sl. 1.1. Karakteristike linearne jednađze konvekcije.

Rješenje evoluira tako da se translacija brzinom a (ulijevo za $a < 0$ i udesno za $a > 0$) ne mijenjajući početni oblik.

Napomena 3. Karakteristike su krivulje u $x - t$ ravnini koje zadovoljavaju obične diferencijalne jednačbe :

$$\begin{aligned}x'(t) &= a \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Ako deriviramo $u(x, t)$ po jednoj od ovih krivulja, dobit ćemo brzinu promjene funkcije duž karakteristika :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) \\&= u_t + au_x \\&= 0.\end{aligned}$$

Time smo potvrdili da je u uistinu konstantna duž karakteristika.

Posve analogno se rješenje može naći u slučaju :

$$u_t + a(x)u_x = 0, \tag{33}$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{34}$$

Jednačba karakteristika tada će imati oblik :

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \tag{35}$$

$$x(0) = x_0. \tag{36}$$

Ukoliko je funkcija $a(x)$ takva da problem (35), (36) ima jedinstveno globalno rješenje na $(0, \infty)$, onda se može zaključiti da se karakteristike ne sijeku i da prekrivaju čitavu gornju (x, t) -poluravninu. Kako je rješenje konstantno na svakoj karakteristici, dobivamo rješenje u čitavoj gornjoj poluravnini.

2.2.1 Domena ovisnosti

Primjetimo da rješenje jednadžbe (31) ima sljedeće svojstvo : rješenje $u(x, t)$ u proizvoljnoj točki (\bar{x}, \bar{t}) ovisi o vrijednosti funkcije u_0 samo u jednoj točki (\bar{x}_0) , i to takvoj da (\bar{x}, \bar{t}) leži na karakteristici kroz \bar{x}_0 . Ako promijenimo vrijednost funkcije u_0 u bilo kojoj drugoj točki osim \bar{x}_0 , ne bi se promijenila vrijednost rješenja u u našoj točki (\bar{x}, \bar{t}) . Zbog toga se skup $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{t}) = \{\bar{x}_0\}$ zove **domena ovisnosti** točke (\bar{x}, \bar{t}) .

Ovdje se ta domena sastoji od samo jedne točke, dok je za sustav jednadžbi ona najčešće interval. Treba imati na umu da je za hiperboličke jednadžbe domena ovisnosti uvijek ograničeni interval. Rješenje u točki (\bar{x}, \bar{t}) određuje se iz početnog uvjeta u_0 u točki koja je na nekoj konačnoj udaljenosti od točke \bar{x} . Može se pokazati da se ta točka nalazi upravo u skupu $\mathcal{D} \subset \{x : |x - \bar{x}| \leq a_{max}\bar{t}\}$ za neku vrijednost a_{max} .

Obratno, vrijednost početne funkcije u bilo kojoj točki x_0 može utjecati na vrijednost rješenja samo unutar nekog konusa $\{x : |x - x_0| \leq a_{max}t\}$ u $x - t$ ravnini. To područje zovemo **područje utjecaja** točke x_0 .

Da zaključimo, rješenje hiperboličke jednadžbe ima konačnu brzinu širenja, tj. najveća brzina kojom informacija može putovati je a_{max} .

2.3 Jednadžbe s viskozim članom

Do sada smo pretpostavljali da je funkcija u diferencijabilna. Također, vidjeli smo da rješenje duž karakteristike ovisi samo o vrijednosti funkcije u_0 u jednoj točki. Zbog toga nije potrebno zahtijevati da je u_0 svugdje glatka, tj. možemo definirati rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe čak i ako u_0 nije glatka funkcija. Primjetimo da ako funkcija u_0 ima singularitet u nekoj točki x_0 (prekid funkcije u_0 ili neke njene derivacije), tada će i rješenje $u(x, t)$ imati singularitet istog reda kao i u_0 duž karakteristike koja prolazi kroz točku x_0 . Međutim, rješenje u će ostati glatko duž svih ostalih karakteristika, tj. onih koje ne prolaze kroz problematičnu točku. To je fundamentalno svojstvo linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi : singulariteti se šire samo duž karakteristika.

Ako funkcija u_0 nije diferencijabilna u nekoj točki, onda $u(x, t)$ više nije klasično rješenje. Jedan od načina na koji možemo pristupiti tom problemu je da aproksimiramo funkciju $u_0(x)$ nizom glatkih funkcija $u_0^\epsilon(x)$, tako da vrijedi :

$$\|u_0 - u_0^\epsilon\|_1 < \epsilon,$$

kako $\epsilon \rightarrow 0$. Ovdje je $\|\cdot\|_1$ 1-norma, definirana sa :

$$\|v\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)| dx.$$

Za linearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa glatkim početnim uvjetom u_0^ϵ znamo da imaju glatko klasično rješenje $u^\epsilon(x, t)$ za $\forall t \geq 0$. Sad možemo definirati generalizirano rješenje $u(x, t)$ na način :

$$u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(x, t).$$

Na primjer, problem (32) za svaki u_0^ϵ ima klasično glatko rješenje :

$$u^\epsilon(x, t) = u_0^\epsilon(x - at),$$

te vrijedi da je :

$$u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_0^\epsilon(x, t) = u_0(x, t)$$

kao što smo i očekivali.

Nažalost, ovaj pristup izgladivanja početnog uvjeta nije primjenjiv na nelinearne probleme. Kao što ćemo vidjeti, rješenja nelinearnih problema mogu imati singularitete čak i ako ih početni uvjet nema.

Bolji pristup, koji se može primjeniti i na nelinearne jednačbe, je da ne diramo početni uvjet, već da izmijenimo jednačbu tako da joj dodamo mali viskozni član :

$$u_t + au_x = \epsilon u_{xx} \tag{37}$$

za vrlo mali pozitivni ϵ . U daljnjem tekstu, jednačbe sa viskoznim članom zvat ćemo **viskozne jednačbe**.

Ako sad sa $u^\epsilon(x, t)$ označimo rješenje jednačbe (37) sa početnim uvjetom $u_0(x)$, onda je $u^\epsilon \in C^\infty((-\infty, \infty) \times (0, \infty))$ čak i ako $u_0(x)$ nije glatko rješenje. To je zbog toga što je (37) parabolická diferencijalna jednačba (vidi [Eva98]). Opet možemo djelovati limesom na $u^\epsilon(x, t)$ kad $\epsilon \rightarrow 0$ i dobit ćemo generalizirano rješenje $u(x, t)$ jednačbe (32).

2.4 Nelinearni zakoni sačuvanja

Promatramo hiperbolički zakon sačuvanja u obliku:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (38)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Metodu karakteristika možemo pokušati primijeniti i u nelinearnom slučaju postupajući po analogiji s linearnim. Definirat ćemo jednadžbu karakteristike:

$$x'(t) = f'(u(x(t), t)) \quad (40)$$

$$x(0) = x_0. \quad (41)$$

Ova jednadžba na prvi pogled nije rješiva jer sadrži u sebi nepoznatu funkciju $u(x, t)$. Ipak, ako pogledamo kako evoluira rješenje duž karakteristike, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + f'(u(x(t), t))\frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) = 0 \end{aligned}$$

i stoga zaključujemo da je $u(x, t)$ konstantna na karakteristici. Posljedično, iz (40) slijedi da su karakteristike pravci i stoga ih je moguće izračunati poznajući samo početni podatak. Karakteristika koja izlazi iz točke x_0 na x -osi ima jednadžbu :

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0.$$

Sada se postavlja pitanje možemo li konstruirati rješenje zadatce kao u linearnom slučaju. U tu svrhu morale bi karakteristike koje polaze s osi x imati svojstvo da se nikad ne sijeku te da prekrivaju čitavu gornju poluravninu. Međutim lako vidi da se karakteristike mogu sjeći. Dovoljno je uzeti funkciju f i početni uvjet u_0 takve da je $x \mapsto f'(u_0(x))$ padajuća funkcija.

Nadalje, pretpostavit ćemo da je f konveksna funkcija, $f''(u) > 0, \forall u$ (ili, sa istim učinkom, da je f konkavna, $f''(u) < 0, \forall u$). Nekonveksni slučaj je također važan u primjeni, ali je i matematički kompliciraniji pa ćemo ga promatrati poslije. Jedan takav primjer je upravo naša Buckley-Leverettova jednadžba.

2.4.1 Burgersova jednadžba

Najpoznatiji primjer nelinearnog zakona sačuvanja je **Burgersova jednadžba**, u kojoj je $f(u) = \frac{1}{2}u^2$

$$u_t + uu_x = 0. \quad (42)$$

U stvari bi se ova jednadžba trebala zvati "neviskozna Burgersova jednadžba", jer jednadžba koju je Burgers proučavao također sadrži viskozni član :

$$u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}. \quad (43)$$

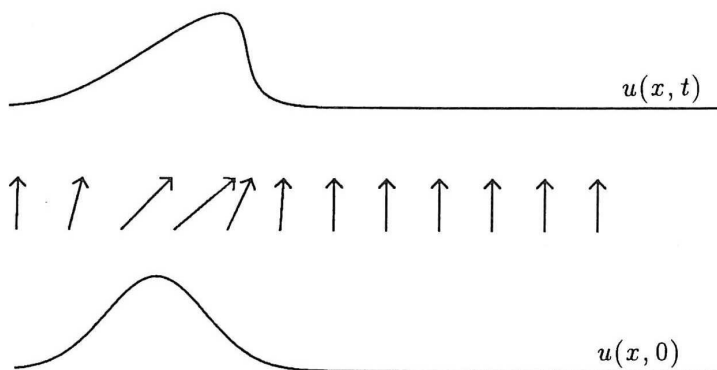
Promatrajmo sada "neviskoznu jednadžbu" (42) sa glatkim početnim uvjetom. Za male vrijednosti vremena t rješenje možemo konstruirati metodom karakteristika. Karakteristike sada zadovoljavaju :

$$x'(t) = u(x(t), t) \quad (44)$$

te kako je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) \\ &= u_t + uu_x \\ &= 0, \end{aligned}$$

duž svake karakteristike u je konstantna. Štoviše, kako je u konstantna duž karakteristika, nagib $x'(t)$ je konstantan zbog (44). Zbog toga su karakteristike ravne linije određene početnim uvjetom.



Sl. 1.2. Karakteristike i rješenje Burgersove jednadžbe za male vrijednosti t .

Ako je početni uvjet gladak, onda se to može iskoristiti da se odredi rješenje za male vrijednosti t za koje se karakteristike ne sijeku. Za svaki (x, t) možemo riješiti jednadžbu :

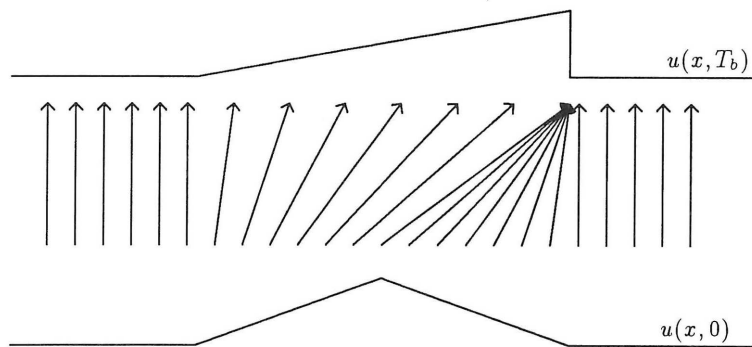
$$x = \xi + u(\xi, 0)t \quad (45)$$

za ξ i onda je :

$$u(x, t) = u(\xi, 0).$$

2.4.2 Formiranje šoka

U trenutku kada dolazi do presjecanja karakteristika u rješenju se formira diskontinuitet (jednadžba $x = \xi + u(\xi, 0)t$ nema jedinstveno rješenje). Karakteristike koje se sijeku donose u istu točku različite vrijednosti rješenja. Nakon tog trenutka nije više moguće konstruirati rješenje metodom karakteristika. Tradicionalno, diskontinuitete u rješenju nazivamo šokovima. Zbog nelinearnosti je moguće da se šokovi stvore iako je početni podatak potpuno gladak. To nije moguće u linearnoj jednadžbi, gdje diskontinuiteti mogu egzistirati jedino ako postoje u početnom uvjetu i tada se transportiraju po karakteristikama.



Sl. 1.3. Formiranje šoka u Burgersovoj jednadžbi.

Neka je T_b vrijeme kada se karakteristike prvi put presijeku. U tom trenutku funkcija $u(x, t)$ ima beskonačan nagib, te kažemo da se val "lomi" i formira se šok. Za vrijednosti vremena veće od T_b nema klasičnog rješenja jednadžbe, pa u tom slučaju tražimo slabo rješenje.

Za $t > T_b$ neke su se karakteristike presjekle, tj. postoje točke iz kojih više karakteristika vodi do $t = 0$. To znači da rješenje u u danoj točki (x, t) ima više vrijednosti. Međutim, u fizikalnim problemima to nema smisla. Na primjer, gustoća plina ne može nikako imati više vrijednosti u jednoj točki. Zanima nas što se onda dogodi u trenutku T_b .

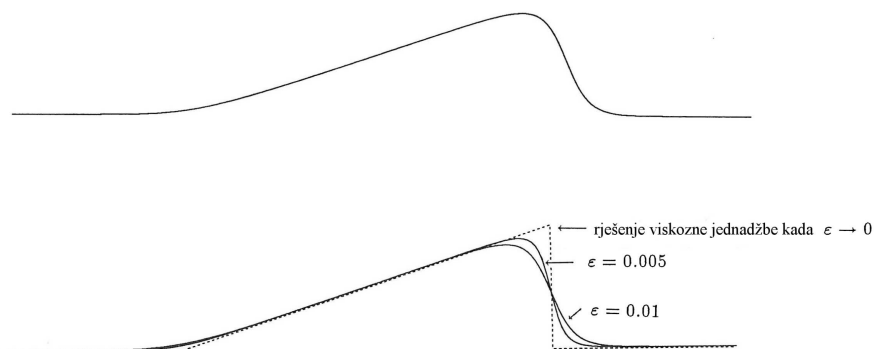
Možemo odrediti točno fizikalno ponašanje ako jednadžbi dodamo prethodno spomenuti viskozni član. Dakle, promatramo jednadžbe :

$$u_t + uu_x = 0 \quad (46)$$

$$u_t^\epsilon + uu_x^\epsilon = \epsilon u_{xx}^\epsilon. \quad (47)$$

Metodom karakteristika rješavamo jednadžbu (46), i kad dođe do loma vala prelazimo na jednadžbu (47). Ako je početni uvjet gladak i ϵ mali, prije nego što dođe do loma član ϵu_{xx}^ϵ je zanemariv prema ostalima u jednadžbi, tako da nam rješenja obje jednadžbe izgledaju gotovo identično. Međutim, kada se val počne lomiti druga derivacija u_{xx}^ϵ raste mnogo brže nego u_x^ϵ i ima značajnu ulogu u jednadžbi. Zbog tog člana je rješenje glatko za svaki t i on sprječava lom vala koji se dogodi u hiperboličkom slučaju.

Za male vrijednosti ϵ , rješenja jednadžbe (46) koja imaju prekid u trenutku T_b mogu se zamijeniti glatkom neprekidnom funkcijom, tj. rješenjem jednadžbe (47). Kako $\epsilon \rightarrow 0$ ono postaje sve oštrije i približava se rješenju jednadžbe (46).



Sl. 1.4. Rješenje viskozne Burgersove jednadžbe u trenutku T_b i konvergencija rješenja u^ϵ k rješenju obične Burgersove jednadžbe.

2.5 Slaba rješenja

Vidjeli smo da rješenje nelinearnog zakona sačuvanja ne mora nužno biti neprekidno, čak i kad je početni uvjet beskonačno gladak. Svojstvo rješenja da razvija šokove u konačnom vremenu čini diferencijalnu formulaciju problema neprikladnom; potrebno je stoga koristiti integralnu formulaciju. S matematičkog stajališta integralna formulacija ima svojih nedostataka zbog kojih se zamjenjuje ekvivalentnim ali pogodnijim zapisom, tzv. varijacijskom jednačkom. Varijacijska se jednačba formira tako da se diferencijalna jednačba pomnoži s odgovarajućom **test funkcijom** i da se sve parcijalne derivacije parcijalnom integracijom prebace na test funkciju.

U našem slučaju koristit ćemo test funkcije $\varphi \in \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, gdje je \mathbb{C}_0^1 prostor glatkih funkcija s kompaktnim nosačem. Posljednji uvjet znači da je funkcija $\varphi(x, t)$ jednaka nuli izvan nekog ograničenog skupa.

Ako jednačbu $u_t + f(u)_x = 0$ pomnožimo sa $\varphi(x, t)$ i onda integriramo po vremenu i prostoru, imamo :

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\varphi u_t + \varphi f(u)_x] dx dt = 0.$$

Parcijalnom integracijom dobijemo :

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\varphi_t u + \varphi_x f(u)] dx dt = - \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) u(x, 0) dx. \quad (48)$$

Definicija 4. Funkciju $u(x, t)$ zovemo slabim rješenjem ako (48) vrijedi za sve test funkcije $\varphi \in \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Rješenje koje smo dobili rješavanjem viskozne jednačbe i prijelazom na limes $\epsilon \rightarrow 0$, je slabo rješenje u smislu (48), tako da ova definicija uključuje rješenje koje mi tražimo. Nažalost, slaba rješenja često nisu jedinstvena, pa se javlja dodatni problem raspoznavanja koje slabo rješenje odgovara viskoznom.

2.5.1 Rankine-Hugoniotov uvjet

Pretpostavimo da je slabo rješenje $u(x, t)$ jednodimenzionalnog zakona sačuvanja (38), (39) po dijelovima glatka funkcija u sljedećem smislu: $u(x, t)$ je funkcija klase C^1 u gornjoj poluravnini svugdje osim na konačno mnogo po dijelovima glatkih krivulja, na kojima ima skokove prve vrste (sa svake strane krivulje ima konačne limese). Krivulju prekida ćemo parametrizirati s vremenom: $\Sigma = \{(x(t), t) : t \in I\}$, gdje je I neki vremenski interval. Vrijednosti funkcije $u(x, t)$ s lijeva i zdesna na krivulji skoka označavamo s u_l i u_d . Pri tome je lijevo i desno moguće definirati kad se uvede orijentacija krivulje.

Teorem 2. Osnovni teorem o slabim rješenjima

Neka je $u(x, t)$ po dijelovima glatko slabo rješenje Cauchyjeve zadaće

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (49)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (50)$$

Tada vrijedi:

- (i) $u(x, t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu izvan krivulja prekida;
- (ii) Na krivuljama prekida $u(x, t)$ zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet

$$s(u_d - u_l) = f(u_d) - f(u_l), \quad (51)$$

gdje su u_l i u_d vrijednosti funkcije u slijeva i zdesna u točki na krivulji prekida, te je $s = x'(t)$.

Obratno, ako po dijelovima glatka funkcija zadovoljava (50), (i) i (ii), tada je ona slabo rješenje Cauchyjevog problema ((49), (50)).

Dokaz. Pokazat ćemo da svako po dijelovima glatko slabo rješenje $u(x, t)$ zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet na linijama diskontinuiteta. Dokaz da zadovoljava diferencijalnu jednadžbu u području glatkoće provodi se jednostavno, parcijalnom integracijom.

Odaberimo točku (\bar{x}, \bar{t}) , $\bar{t} > 0$ na krivulji diskontinuiteta Σ te uzmimo krug D s centrom u (\bar{x}, \bar{t}) , dovoljno malog radijusa da ga krivulja Σ dijeli na dva dijela D_d i D_l , na kojima je funkcija $u(x, t)$ glatka. Za $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ imamo :

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt = \int_{D_d} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx + \int_{D_l} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx$$

te parcijalnom integracijom dobivamo:

$$0 = - \int_{D_d} (u_t + f(u)_x) \phi \, dx dt + \int_{D \cap \Sigma} (u_d n_t^d + f(u_d) n_x^d) \phi \, ds \\ - \int_{D_l} (u_t + f(u)_x) \phi \, dx dt + \int_{D \cap \Sigma} (u_l n_t^l + f(u_l) n_x^l) \phi \, ds$$

gdje smo vanjsku normalu na D_l , D_d označili s $\mathbf{n}^l = (n_x^l, n_t^l)$, $\mathbf{n}^d = (n_x^d, n_t^d)$. Kako je diferencijalna jednadžba zadovoljena u područjima glatkoće rješenja, imamo :

$$\int_{D \cap \Sigma} (u_d n_t^d + f(u_d) n_x^d) \phi \, ds + \int_{D \cap \Sigma} (u_l n_t^l + f(u_l) n_x^l) \phi \, ds = 0,$$

odnosno :

$$\int_{D \cap \Sigma} ((u_d - u_l) n_t^d + (f(u_d) - f(u_l)) n_x^d) \phi \, ds = 0.$$

Budući da to vrijedi za svaku test funkciju s nosačem u D , zaključujemo da u točki (\bar{x}, \bar{t}) mora vrijediti :

$$(u_d - u_l) n_t^d + (f(u_d) - f(u_l)) n_x^d = 0$$

Parametrizirajmo krivulju Σ u okolini točke (\bar{x}, \bar{t}) sa $(x(t), t)$, za neku funkciju $x(t)$. Tada možemo uzeti $\mathbf{n}(t) = (1, -x'(t)) = (1, -s)$ pa dobivamo¹ :

$$s(u_d - u_l) = (f(u_d) - f(u_l)).$$

To je tražena relacija. Obrat se dokazuje analogno. □

Uočimo da se posve isti dokaz prenosi i na sustave jednodimenzionalnih zakona sačuvanja. Na linijama diskontinuiteta mora vrijediti Rankine-Hugoniotov uvjet :

$$s(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_d) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_d). \quad (52)$$

U ovom slučaju nema uvijek rješenja, već samo kad su vektori $\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_d$ i $\mathbf{f}(\mathbf{u}_l) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_d)$ linearno zavisni.

¹Uočimo da izbor orijentacije krivulje nije bitan.

2.6 Riemannov problem

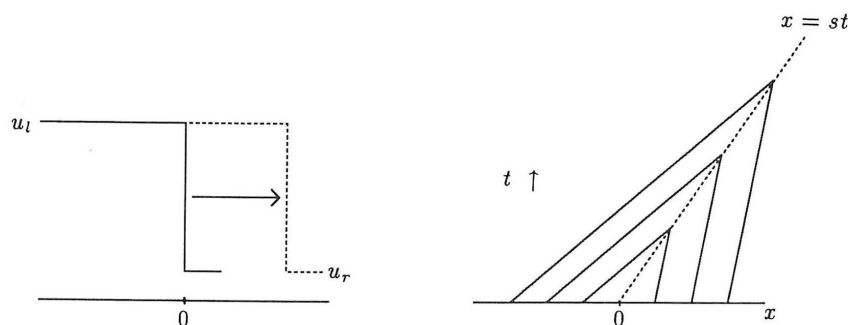
Cauchyjevu zadaću oblika :

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (53)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{za } x < 0 \\ u_d & \text{za } x > 0 \end{cases} \quad (54)$$

nazivamo Riemannov problem. On je od velike važnosti za konstrukciju numeričkih metoda.

Uzmimo Burgersovu jednadžbu $u_t + uu_x = 0$ sa početnim uvjetom (54). Oblik rješenja ovisi o vezi između u_l i u_d .



Sl. 1.5. Šok za $u_l > u_d$.

Slučaj I. $u_l > u_d$

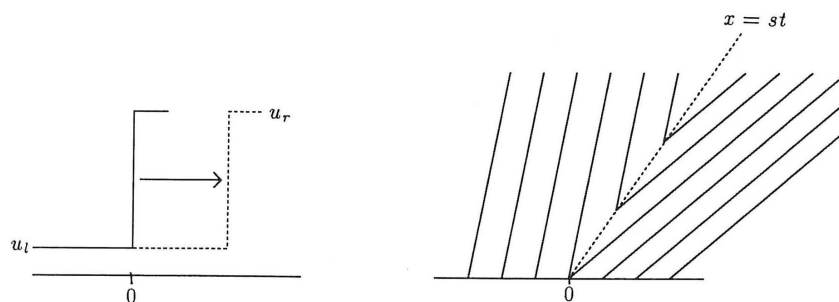
U ovom slučaju postoji jedinstveno slabo rješenje koje se konstruira metodom konstantnih stanja. Naime, prema Teoremu 2 rješenje koje se sastoji od konstantnih stanja, da bi bilo slabo rješenje zadaće, mora samo na linijama prekida zadovoljavati Rankine-Hugoniotov uvjet. To rješenje je oblika :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x < st \\ u_d & x > st \end{cases} \quad (55)$$

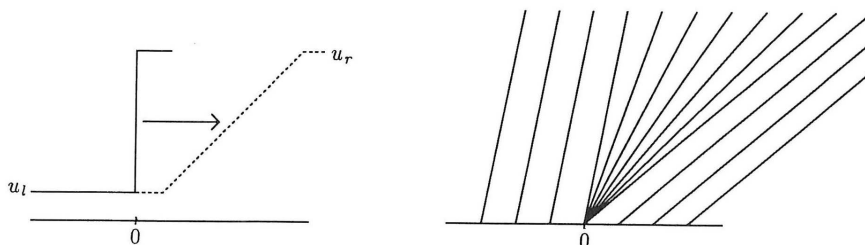
gdje je

$$s = \frac{u_l + u_d}{2} \quad (56)$$

brzina šoka, tj. brzina kojom putuje prekid. Očito je da s zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet, tj. da je (55) uistinu naše slabo rješenje. Primjetimo da karakteristike svakog dijela na kojem je $u(x, 0)$ konstantna ulaze u šok.



Sl. 1.6. Šok za $u_l < u_d$.



Sl. 1.7. Lepeza za $u_l < u_d$.

Slučaj II. $u_l < u_d$

U ovom slučaju možemo naći više slabih rješenja. Jedno će opet biti (55), u kojem prekid putuje brzinom s danom s (56), samo što sada karakteristike "izlaze" iz šoka. Također, rješenje nam nije stabilno na perturbacije, odnosno, ako malo promijenimo početni uvjet ili dodamo mali viskozni član rješenje se u potpunosti promijeni.

Drugo slabo rješenje za $u_l < u_d$ možemo konstruirati na osnovu simetrije koja postoji u zakonu sačuvanja. To rješenje je takozvana "lepeza", te je oblika :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x < u_l t \\ \frac{x}{t} & u_l t \leq x \leq u_d t \\ u_d & x > u_d t \end{cases}$$

Ono je stabilno na perturbacije i može se pokazati da se podudara s rješenjem

$$u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(x, t),$$

gdje je u^ϵ rješenje jednadžbe s viskoznim članom.

Napomena 4. Za konstrukciju gornjeg rješenja (lepeze) treba uočiti da je Riemannov problem ((53),(54)) invarijantan u odnosu na transformaciju

$$(x, t) \mapsto (ax, at), \quad a > 0.$$

Stoga problem mora imati rješenje koje ovisi samo o x/t . Da bismo to provjerili, uvrstimo u (53) rješenje oblika $u(x, t) = v(x/t)$ i dobit ćemo jednadžbu

$$\xi = f'(v(\xi)),$$

gdje smo uveli novu varijablu $\xi = x/t$. Ako je funkcija $f'(u)$ strogo monotona, dakle ako je $f(u)$ strogo konveksna ili strogo konkavna funkcija, onda će $v(\xi)$ biti moguće izračunati kao inverz funkcije $f'(u)$. Na primjer, u slučaju Burgersove jednadžbe imamo da je $v(\xi) = \xi$.

2.7 Entropijske funkcije i uvjet entropije

Kao što smo vidjeli, postoje situacije u kojima slabo rješenje nije jedinstveno. Tada su potrebni dodatni uvjeti da bi izdvojili ono rješenje koje ima fizikalnog smisla. Vidjeli smo da se rješenje koje tražimo, tj. koje ima fizikalnog smisla, podudara s limesom rješenja viskozne jednadžbe. Međutim, taj način traženja jedinstvenog slabog rješenja može biti dosta zahtjevan. Zanima nas postoji li jednostavniji način da izdvojimo pravo rješenje.

Entropija je funkcija stanja sustava koja nosi informaciju o količini nereda u sustavu i njegovoj mogućnosti da obavlja koristan rad. Vrijedi da, što je nered veći, to je sustav manje sposoban obavljati koristan rad. Za zatvorene sustave nered se može samo povećati ili ostati konstantan.

Pojava šoka u rješenju označava porast entropije u sustavu kojeg promatramo. Ta činjenica dati će nam uvjet pomoću kojeg ćemo izdvojiti pravo rješenje.

Iz nelinearnog zakona sačuvanja (38) možemo formirati nove zakone sačuvanja na sljedeći način. Pomnožimo jednadžbu (38) s funkcijom $\eta'(u)$:

$$\eta'(u)u_t + \eta'(u)f'(u)u_x = 0.$$

Definiramo funkciju ψ relacijom :

$$\psi'(u) = \eta'(u)f_x(u) \quad (57)$$

i time dobivamo novi zakon sačuvanja :

$$\eta_t(u) + \psi_x(u) = 0, \quad (58)$$

odnosno za glatke funkcije u

$$\eta'(u)u_t + \psi'(u)u_x = 0.$$

Funkciju η zovemo **entropijska funkcija**, dok ψ zovemo **entropijski tok**.

Zahtijevat ćemo i da je entropijska funkcija η konveksna, tj. $\eta'' > 0$. Naravno, gornji račun vrijedi samo za glatka rješenja u . Kako je cilj doći do slabog rješenja koje se podudara sa rješenjem viskozne jednačbe kad limes pustimo u nulu, promatrat ćemo nelinearni zakon sačuvanja s viskozni članom:

$$u_t^\epsilon + f_x(u^\epsilon) = \epsilon u_{xx}^\epsilon. \quad (59)$$

Kako je rješenje ove jednačbe uvijek glatko, možemo ponoviti isti postupak kao i za glatka rješenja neviskozne jednačbe. Množeći jednačbu (59) s $\eta'(u^\epsilon)$ dobijemo :

$$\eta_t(u^\epsilon) + \psi_x(u^\epsilon) = \epsilon \eta'(u^\epsilon)u_{xx}^\epsilon.$$

Transformacijom desne strane dobivamo :

$$\eta_t(u^\epsilon) + \psi_x(u^\epsilon) = \epsilon \eta(u^\epsilon)_{xx} - \epsilon \eta''(u^\epsilon)(u_x^\epsilon)^2. \quad (60)$$

Jednačbu (60) pomnožimo s pozitivnom test funkcijom $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, integriramo je po prostoru i vremenu te nakon primjene parcijalne integracije izlazi :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(\eta_t(u^\epsilon) + \psi_x(u^\epsilon)) dx dt &= \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\varphi \epsilon \eta(u^\epsilon)_{xx} - \varphi \epsilon \eta''(u^\epsilon)(u_x^\epsilon)^2) dx dt = \\ &= \epsilon \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta(u^\epsilon) \varphi_{xx} dx dt - \epsilon \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi \eta''(u^\epsilon)(u_x^\epsilon)^2 dx dt \end{aligned}$$

Prvi član na desnoj strani iščezava kako $\epsilon \rightarrow 0$ jer $u^\epsilon \rightarrow u$ (u je rješenje koje ima skok ali je ograničeno, pa je i u^ϵ ograničeno) i jer funkcija φ ima kompaktan nosač. Drugi član je negativan jer je funkcija η konveksna, $\epsilon > 0$ i $(u_x^\epsilon)^2 > 0$, pa na limesu kada $\epsilon \rightarrow 0$ imamo:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\eta_t(u) + \psi_x(u)) \varphi dx dt \leq 0, \quad \forall \varphi \geq 0.$$

Time smo dokazali sljedeći teorem :

Teorem 3. Uvjet entropije

Funkcija $u(x, t)$ je entropijsko rješenje jednadžbe (38) ako za svaku konveksnu entropijsku funkciju η i odgovarajuće entropijske tokove ψ vrijedi

$$\eta_t(u) + \psi_x(u) \leq 0. \quad (61)$$

Slično kao i u dokazu Rankine-Hugoniotova teorema može se pokazati da vrijedi :

$$s(\eta(u_l) - \eta(u_d)) \geq \psi(u_l) - \psi(u_d)$$

ili kraće zapisano :

$$s[\eta(u)] \geq [\psi(u)] \quad (62)$$

gdje je $x(t)$ parametrizacija krivulje diskontinuiteta, a $s = x'(t)$ brzina šoka, dok $[\cdot]$ predstavlja skok funkcije u promatranoj točki.

Napomena 5. *Zbog jednostavnosti i Rankine-Hugoniotov uvjet možemo kraće pisati kao :*

$$s[u] = [f(u)]. \quad (63)$$

Gore navedene nejednakosti biti će dovoljne da se eliminiraju nefizikalni šokovi.

Da zaključimo, rješenja koja tražimo (a to su ona koja su fizikalno prihvatljiva) moraju zadovoljavati uvjet entropije, čime smo dobili kriterij za odabir rješenja.

Entropijske nejednakosti nam omogućavaju da u slučaju skalarnog jednodimenzionalnog zakona sačuvanja konstruiramo jedinstveno entropijsko rješenje Riemannovog problema. Vidjeli smo da takvo rješenje možemo konstruirati pomoću šokova koji povezuju konstantna stanja i lepeza, rješenja koja ovise o varijabli x/t . Problem je bio u tome što je pomoću šokova moguće konstruirati rješenja koja nisu viskozna, tj. koja ne zadovoljavaju entropijsku nejednakost (61).

Podsjetimo se da u jednodimenzionalnom slučaju svako po dijelovima glatko slabo rješenje zadaće :

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

na svakom šoku mora zadovoljavati Rankine-Hugoniotov uvjet (63), a da bi imalo fizikalnog smisla mora k tome zadovoljavati entropijsku nejednakost (62). Iduća propozicija dat će nam geometrijske informacije o dopustivim šokovima.

Propozicija 1. Neka po dijelovima glatka funkcija $u(x, t)$ zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet (63) na nekoj liniji prekida (šoku). Na tom prekidu ona zadovoljava entropijsku nejednakost (62), za svaki entropijski par (η, ψ) , akko vrijedi jedan od ova tri uvjeta:

$$s \geq \frac{f(u_d) - f(k)}{u_d - k} \quad \text{za sve } k \in \mathbb{R} \text{ između } u_l \text{ i } u_d \quad (64)$$

$$s \leq \frac{f(u_l) - f(k)}{u_l - k} \quad \text{za sve } k \in \mathbb{R} \text{ između } u_l \text{ i } u_d \quad (65)$$

$$\begin{cases} (i) f(\alpha u_l + (1 - \alpha)u_d) \geq \alpha f(u_l) + (1 - \alpha)f(u_d) & \text{za } u_d > u_l \\ (ii) f(\alpha u_l + (1 - \alpha)u_d) \leq \alpha f(u_l) + (1 - \alpha)f(u_d) & \text{za } u_d < u_l \end{cases} \quad (66)$$

za $0 \leq \alpha \leq 1$.

Za dokaz vidi [LeV92].

Propozicija 1 kaže da je za $u_l < u_d$ šok dopustiv ako graf funkcije $f(u)$ leži iznad spojnice točaka $(u_l, f(u_l))$ i $(u_d, f(u_d))$. Za diskontinuitet $u_l > u_d$ graf funkcije mora ležati ispod spojnice. Posebno, odavde dobivamo da su kod konveksnog fluksa dopustivi jedino šokovi oblika $u_l > u_d$, dok je za konkavni fluks obratno.

Nadalje, iz (64) i (65) slijedi :

$$f'(u_d) \leq s \leq f'(u_l).$$

Taj uvjet u nekim slučajevima vrijedi u jačoj formi :

$$f'(u_d) < s < f'(u_l)$$

(na primjer kod strogo konveksnog ili konkavnog fluksa). Geometrijski on kaže da brzina šoka mora biti između karakterističnih brzina slijeva i zdesna te da karakteristike moraju *ulaziti* u šok.

Konačno, pomoću šokova i lepeza možemo konstruirati entropijsko rješenje Riemannovog problema. Uzmimo da je na primjer $u_l < u_d$. Početni diskontinuitet može evoluirati u lepezu ili šok, ovisno o položaju spojnice točaka $(u_l, f(u_l))$ i $(u_d, f(u_d))$ u odnosu na graf funkcije. Ako graf funkcije leži iznad spojnice, onda je dozvoljiv šok, dok u suprotnom moramo koristiti lepezu. Rješenje oblika lepeze može se konstruirati samo na dijelovima grafa funkcije $f(u)$ na kojima je ona konveksna pa stoga trebamo promatrati donju konveksnu ovojnici f_c funkcije f . Interval (u_l, u_d) bit će podijeljen na intervale lepeze tamo gdje je fluks strogo konveksan i affine dijelove koji odgovaraju entropijskim šokovima. U slučaju $u_l > u_d$ treba promatrati gornju konkavnu ovojnici.

Primjer 1. Ako Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = 0$$

pomnožimo s $2u$ dobijemo :

$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0, \quad (67)$$

($\eta(u) = u^2$, $\psi(u) = 2u^3/3$). Te dvije jednadžbe imaju ista glatka rješenja. Međutim, imaju različita slaba rješenja, što se vidi iz Riemannovog problema. Naime, vidi se da je u Burgersovoj jednadžbi brzina šoka jednaka :

$$s = \frac{u_l + u_d}{2},$$

dok je za jednadžbu (67) brzina šoka jednaka :

$$s = \frac{2u_r^3 - u_l^3}{3u_r^2 - u_l^2}.$$

Zaključak je, stoga, da entropijska funkcija η i entropijski tok ψ neće nužno zadovoljavati zakon sačuvanja (58) ako u ima diskontinuitete. Međutim, zanima nas kada će za funkcije $\eta(u) = u^2$ i $\psi(u) = 2u^3/3$ biti zadovoljen uvjet entropije

$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x \leq 0.$$

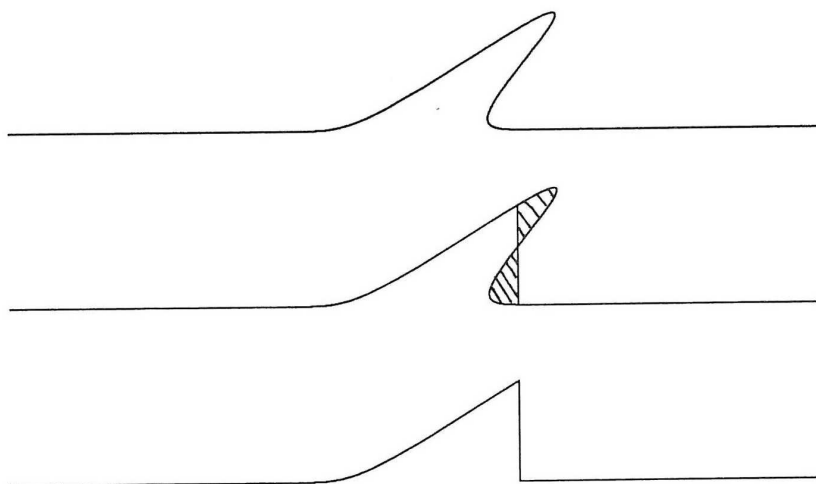
Kao što smo vidjeli gore, za glatke funkcije u vrijedi jednakost, tj. one zadovoljavaju zakon sačuvanja. Ako imamo funkcije s prekidima onda, integrirajući po malom pravokutniku, dobijemo :

$$\int_{x_1}^{x_2} u^2(x, t) dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} u^3(x, t) dt \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{6} (u_l - u_d)^3 \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

pa za male vrijednosti $\Delta t > 0$, uvjet entropije bit će zadovoljen ako i samo ako vrijedi $u_l > u_d$, kao što predviđa Teorem 3 (jer je $f(u^2) = 2/3(u^2)^{3/2}$ konveksna funkcija).

2.8 Pravilo jednakih površina

Radi se o tehnici kojom se ručno određuje slabo rješenje. Krenemo od rješenja dobivenog metodom karakteristika. To rješenje može imati više vrijednosti u jednoj točki (ako se karakteristike sjeku), koje eliminiramo umetanjem šokova. Šok dodamo tako da osječana područja s obje njegove strane imaju jednaku površinu. To je posljedica zakona sačuvanja jer vrijednosti integrala ispod krivulja na slikama a) i c) moraju biti jednake.



Sl. 1.8. Pravilo jednakih površina za eliminiranje šokova.

2.9 Buckley-Leverettova jednađba

Buckley-Leverettova jednađba predstavlja model dvofaznog toka kroz poroznu sredinu. Jednostavan primjer je simulacija rezervoara s naftom. Kada se pronade podzemni izvor nafte, zbog velikog pritiska određena količina odmah izađe na površinu. Međutim, i nakon toga velika količina nafte ostane pod zemljom. Standardna metoda za ekstrakciju preostalog dijela nafte je da se upumpava voda u naftno polje kroz jedne bušotine, tjerajući naftu van kroz druge. U ovom slučaju dvofazni tok čine voda i nafta, a porozni medij stijene ili pijesak.

U prvom poglavlju dali smo izvod i formulu Buckley-Leverettove jednađbe :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + v_u \frac{\partial}{\partial x} f_w(S) = 0.$$

Uzet ćemo da su brzina i poroznost konstantne, time dobivamo jednađbu :

$$S_t + f_x(S) = 0,$$

koja je upravo nelinearni zakon sačuvanja. Podsjetimo se, funkcija f_w je funkcija toka vode, pa funkcija f ima oblik:

$$f(S) = \frac{v_u}{\phi} f_w(S) = \frac{v_u}{\phi} \cdot \frac{\lambda_w(S)}{d(S)}$$

pri čemu su :

- S - zasićenost vodom, $S \in [0, 1]$
- $\lambda_w(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w}$ - mobilnost vode
- $d(S) = \lambda_w(S) + \lambda_o(S)$ - zbroj mobilnosti vode i mobilnosti nafte

Jednostavnim raspisom dobije se :

$$f(S) = \frac{v_u}{\phi} \cdot \frac{k_{rw}(S)}{k_{rw}(S) + \frac{\mu_w}{\mu_n} k_{rn}(S)}.$$

Mi ćemo proučavati jednostavan slučaj kad je veza propusnosti i zasićenosti kvadratna :

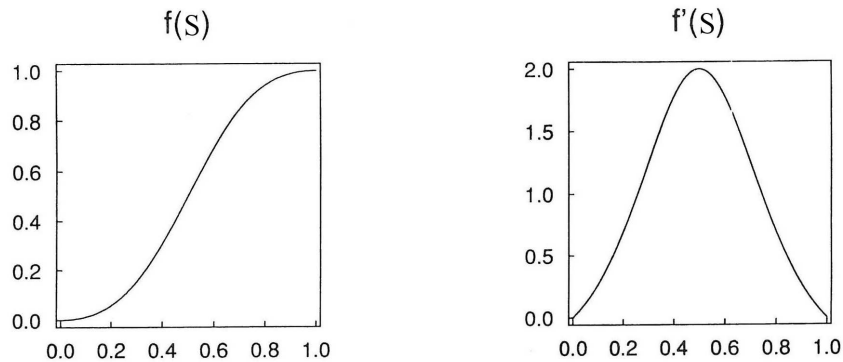
$$k_{rw}(S) = S^2, \quad k_{ro}(S) = (1 - S)^2.$$

Dakle promatramo funkciju toka f oblika :

$$f(S) = \frac{v_u}{\phi} \cdot \frac{S^2}{S^2 + a(1 - S)^2} \quad (68)$$

gdje je $a = \frac{\mu_w}{\mu_n}$ konstanta koja odgovara omjeru viskoznosti vode i nafte. Lako se vidi da je

$$f'(S) = \frac{v_u}{\phi} \cdot \frac{2aS(1 - S)}{[S^2 + a(1 - S)^2]^2}.$$



Sl. 1.9. Funkcija toka vode i njena derivacija za $a = \frac{1}{2}$ i $\frac{v_u}{\phi} = 1$.

Proučavamo tok do kojeg dolazi zbog utiskivanja čiste vode ($S = 1$), u točki $x = 0$ s pozitivnom ukupnom brzinom v_u , u čistu naftu ($S = 0$). To odgovara Riemannovom problemu oblika :

$$S_t + f(S)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$S(x, 0) = \begin{cases} S_l = 1 & \text{za } x < 0 \\ S_d = 0 & \text{za } x > 0 \end{cases} \quad (69)$$

Vidjeli smo da, kada je f konveksna (konkavna) funkcija, rješenje Riemannovog problema ima oblik ili šoka ili lepeze. Ako, pak, f nije konveksna funkcija, kao u našem slučaju, u rješenju se mogu naći oba oblika.

Rješenje krenemo konstruirati metodom karakteristika. Jednadžba karakteristika dana je sa :

$$x'(t) = f'(S(x(t), t))$$

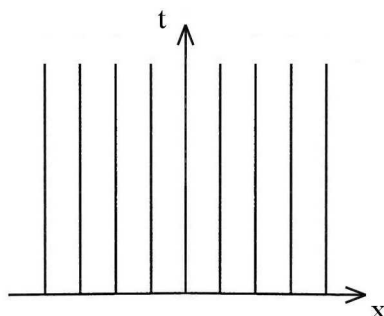
a pokazali smo da je rješenje konstantno na karakteristikama, pa stoga imamo:

$$x'(t) = f'(S(x(0), 0))$$

tj.

$$x(t) = x(0) + f'(S(x(0), 0))t.$$

Zbog (69) i toga što derivacija funkcije toka f' u točkama 0 i 1 ima vrijednost 0, karakteristike su svugdje, osim u $x(0) = 0$, paralelne s osi t u $x - t$ koordinatnom sustavu.



Sl. 1.10. Karakteristike Buckley-Leverettove jednadžbe.

Uočimo prvo da $S(x, t) = 1$ za $x < 0$ i $S(x, t) = 0$ za $x > 0$ nije slabo rješenje jer diskontinuitet $x = 0$ ne zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet.

Prema Propoziciji 1, stanje $S_d = 0$ možemo spojiti šokom s nekim drugim stanjem $S^* > 0$, a da ne narušimo uvjet entropije (spojnica leži iznad grafa funkcije), dok $S_l = 1$ ne možemo spojiti entropijskim šokom niti s jednim stanjem $S^* < 1$. Stoga ćemo stanje $S_l = 1$ spojiti lepezom sa stanjem $0 < S^* < 1$, a ovo međustanje spajamo šokom sa stanjem $S_d = 0$.

Još je samo ostalo odrediti položaj točke S^* . Znamo da rješenje na šoku mora zadovoljavati Rankine-Hugoniotov uvjet, tj. da za brzinu šoka s^* vrijedi :

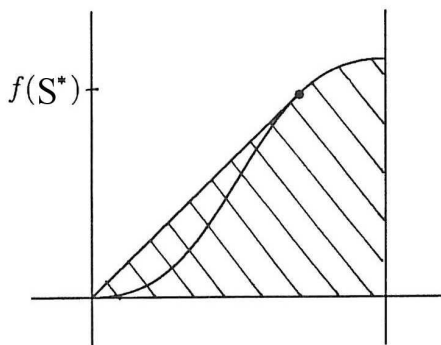
$$s^* = \frac{f(S^*) - 0}{S^* - 0} = \frac{f(S^*)}{S^*}.$$

S druge strane, lepeza je definirana jednačbom $\xi = f'(\hat{S}(\xi))$, pa za $S = S^*$ mora vrijediti $s^* = f'(S^*)$, gdje je s^* brzina šoka koji izlazi iz $x = 0$. Time dolazimo do jednačbe :

$$f'(S^*) = \frac{f(S^*)}{S^*},$$

tj. pravac kroz $(0, 0)$ i $(S^*, f(S^*))$ je tangenta na graf funkcije f .

Napomena 6. Točka S^* određena tangentom na graf funkcije f zove se **Welgeova** točka (vidi [Wel]).



Sl. 1.11. Konveksna ljuska funkcije f , pri čemu afin dio predstavlja šok, a konveksni dio lepezu.

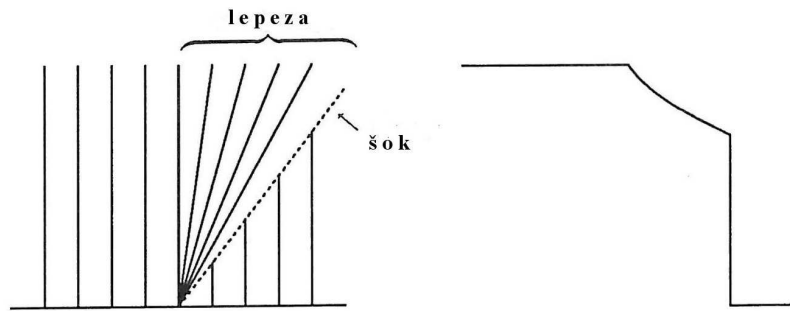
Lako se pokaže da je $S^* = \sqrt{\frac{a}{1+a}}$, tj. ovisi samo o omjeru viskoznosti a . Da bismo pokazali da se na dijelu $[S^*, 1]$ može konstruirati lepeza treba vidjeti da je $S^* \geq S^{**}$, gdje je S^{**} maksimum prve derivacije $f'(S)$, jer je na $[S^{**}, 1]$ funkcija f' strogo padajuća (f je strogo konkavna). Iz geometrijske situacije je pak jasno da funkcija f' u S^* mora biti padajuća.

To što je spojnica $[f(S_a), f(S^*)]$ upravo tangenta na funkciju f u točki S^* znači da kod konstrukcije rješenja treba promatrati konkavnu ljusku funkcije f (još se naziva i gornja konkavna ovojnica).

Dakle, Riemannovo rješenje uključuje i šok i lepezu. Da je funkcija f imala više točaka infleksije, rješenje bi se sastojalo od više šokova i više lepeza.

Napomena 7. Brzina gibanja diskontinuiteta je konstantna i ovisi samo o omjeru $\frac{v_u}{\phi}$, viskoznosti i propusnosti :

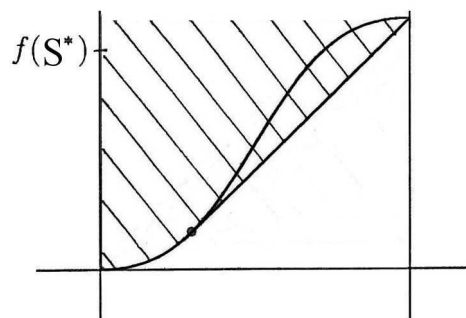
$$s^* = \frac{v_u}{\phi} \cdot \frac{f_w(S^*)}{S^*}.$$



Sl. 1.12. Karakteristike i rješenje Buckley-Leverettove jednadžbe za $S_l > S_d$.

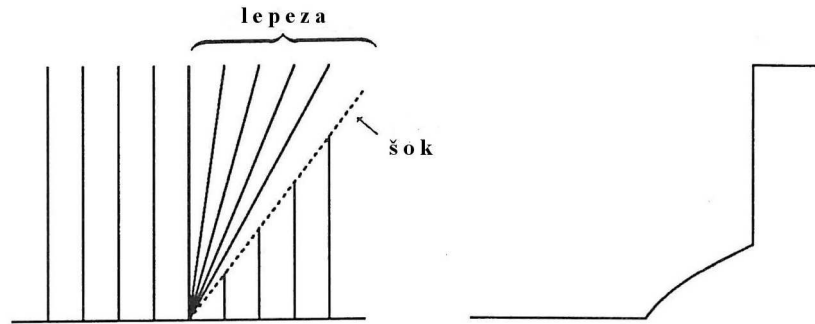
S fizikalne strane to znači da voda, kako se utiskuje u tlo, trenutno istisne određenu količinu nafte. Period tijekom kojeg izlazi čista nafta odgovara lepezi u našem rješenju. Trenutak nakon šoka predstavlja istjecanje mješavine nafte i vode, sa sve manje i manje nafte kako vrijeme odmiče. Ovom tehnikom nemoguće je istisnuti svu naftu.

Ako je $S_l < S_d$ može se primjeniti isti postupak, samo što u ovom slučaju gledamo konveksnu ljusku skupa iznad grafa, $\{(x, y) : S_d < x < S_l \text{ i } y \geq f(x)\}$ (donja konveksna ovojnica).



Sl. 1.13. Konveksna ljuska funkcije f kada je $S_l < S_d$.

Rješenje će u ovom slučaju imati oblik:



Sl. 1.14. Karakteristike i rješenje Buckley-Leverettove jednadžbe za $S_l < S_d$.

2.10 Određivanje relativnih propusnosti

Pretpostavimo da se tok fluida odvija u homogenoj poroznoj sredini gdje su k i ϕ konstante. Promatramo eksperiment utiskivanja vode u uzorak porozne sredine koji je oblika izduženog valjka duljine L (karote) i zasićen naftom. Neka je površina presjeka karote jednaka $|A| > 0$ te pretpostavimo da je brzina utiskivanja vode $v_u > 0$ konstantna.

Cilj sljedećeg računa je odrediti relativne propusnosti iz postavljenog eksperimenta.

1. Izračunajmo srednju vrijednost zasićenja vodom u karoti. Iz Buckley-Leverettove jednadžbe :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + v_u \frac{\partial}{\partial x} f_w(S) = 0$$

integrirajući po varijabli x dobijemo :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L S(x,t) dx = -\frac{v_u}{\phi} [f_w(S(L,t)) - f_w(S(0,t))] = -\frac{v_u}{\phi} [f_w(S(L,t)) - 1],$$

jer je $S(0,t) = 1$ i $f_w(1) = 1$, i potom integriramo po vremenu :

$$\frac{1}{L} \int_0^L S(x,t) dx - \frac{1}{L} \int_0^L S(x,0) dx = -\frac{v_u}{L\phi} \left[\int_0^t f_w(S(L,\tau)) - 1 \right]. \quad (70)$$

Uočimo da je $S(x, 0) = 0, \forall x \in \langle 0, L \rangle$. Ako količinu vode koja se akumulira na izlazu iz karote (što znači da je lako mjeriva veličina) označimo s Q_w :

$$Q_w(t) = \int_0^t |A|v_w(L, \tau)d\tau = \int_0^t |A|f_w(S(L, \tau))v_u d\tau \quad (71)$$

dobijemo :

$$\int_0^t v_u f_w(S(L, \tau))d\tau = \frac{Q_w(t)}{|A|}, \quad (72)$$

tj. kad se vratimo u jednadžbu (70) imamo da je srednja vrijednost zasićenja dana s :

$$\frac{1}{L} \int_0^L S(x, t)dx = -\frac{1}{L\phi} \left[\frac{Q_w(t)}{|A|} - v_u t \right]. \quad (73)$$

2. Da bismo mogli izračunati zasićenje S , promatrajmo prvo trenutak $t > t^*$, gdje je t^* prvi trenutak u kojem je voda počela izlaziti iz karote, odnosno u kojem je šok stigao do točke $x = L$. Rješenje unutar karote dano je tada lepezom, tj. jednadžbom :

$$\frac{v_u}{\phi} f'_w(S(x, t)) = \frac{x}{t}. \quad (74)$$

Uzimajući to u obzir dobijemo :

$$\frac{\partial}{\partial x} f_w(S(x, t)) = f'_w(S(x, t)) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = \frac{\phi}{v_u} \frac{x}{t} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}.$$

Zatim, integriramo po prostornoj varijabli i primjenimo parcijalnu integraciju:

$$f_w(S(L, t)) = 1 + \frac{L\phi}{v_u t} S(L, t) + \frac{1}{v_u t} \left[\frac{Q_w(t)}{|A|} - v_u t \right].$$

Nadalje, iz (72) izlazi :

$$\frac{Q'_w(t)}{|A|} = v_u f_w(S(L, t)) \quad (75)$$

pa kako je $Q'_w(t)$ izmjeriva veličina dobivamo :

$$\frac{Q'_w(t)}{|A|v_u} = \frac{L\phi}{tv_u} S(L, t) + \frac{Q_w(t)}{v_u |A|t},$$

a iz toga slijedi jednadžba za zasićenje u točki $x = L$:

$$S(L, t) = \frac{1}{L|A|\phi} [tQ'_w(t) - Q_w(t)]. \quad (76)$$

3. Sljedeća lako mjeriva veličina je razlika tlakova na ulazu i izlazu :

$$P(t) = - \int_0^L \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} dx = p(0, t) - p(L, t). \quad (77)$$

Prema Darcyjevom zakonu znamo da za tlak vrijedi :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = - \frac{v_u}{kd(S(x, t))}$$

pa stoga imamo :

$$P(t) = \int_0^L \frac{v_u}{kd(S(x, t))} dx. \quad (78)$$

Sada gledamo trenutak $t > t^*$ za koji vrijedi (74) te napravimo zamjenu varijabli $\xi = \frac{x}{t}$ (za fiksni t) u jednadžbi (78), iz čega slijedi :

$$P(t) = \int_0^{L/t} \frac{v_u}{kd(\hat{S}(\xi))} t d\xi.$$

Ovisnost o vremenu je sada eksplicitna. Kako je $P(t)$ izmjeriva veličina tako je to i $P'(t)$:

$$P'(t) = \int_0^{L/t} \frac{v_u}{kd(\hat{S}(\xi))} d\xi + \frac{v_u}{kd(\hat{S}(L/t))} \left(-\frac{L}{t^2}\right) t = \frac{P(t)}{t} - \frac{L}{t} \frac{v_u}{kd(S(L, t))},$$

pa dobijemo jednadžbu za sumu mobilnosti :

$$\frac{1}{d(S(L, t))} = \frac{kt}{Lv_u} \left[\frac{P(t)}{t} - P'(t) \right]. \quad (79)$$

Sada iz funkcije toka vode možemo izračunati relativnu propusnost :

$$\frac{k_w(S(L, t))}{\mu_w} = f_w(S(L, t)) d(S(L, t)) = \frac{Q'_w(t)}{|A|} \frac{L}{k[P(t) - P'(t)t]}.$$

Time smo dobili konačne jednadžbe za relativnu propusnost i zasićenje :

$$k_{rw}(S(L, t)) = \mu_w \frac{Q'_w(t)}{|A|} \frac{L}{k[P(t) - P'(t)t]} \quad (80)$$

$$S(L, t) = \frac{1}{L|A|\phi} [tQ'_w(t) - Q_w(t)]. \quad (81)$$

Ove dvije funkcije određuju vezu $S \rightarrow k_{rw}(S)$. Za niz trenutaka $t^* < t_1 < t_2 < \dots$ mjerimo veličine $Q_w(t)$, $P(t)$, $Q'_w(t)$ i $P'(t)$, te pomoću formula (80) i (81) možemo izračunati $k_{rw}(S)$ i S . Na taj način za svaki vremenski trenutak dobivamo jednu točku na krivulji funkcije k_{rw} . Cijela krivulja se, zatim, može konstruirati metodom interpolacije za izračunate vrijednosti. Isti postupak vrijedi i za relativnu propusnost nafte $k_{ro}(S)$.

Literatura

- [Aga90] I. Aganović, K. Veselić. *Uvod u analitičku mehaniku*. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-Matematički Fakultet, Matematički Odjel, Zagreb, 1990.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [Hel97] Rainer Helmig. *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface, 2nd ed.* Springer, Berlin, 1997.
- [HM81] M. Heinrich-Miletić, P. Miletić. *Uvod u Kvantitivnu hidrogeologiju*. RGN-Fakultet Sveučilišta u Zagrebu-OOOUR Studij geotehnike Varaždin, Varaždin, 1981.
- [Jur] Mladen Jurak. Metoda konačnih diferencija,
<http://web.math.hr/~jurak/metodakd.pdf>.
- [LeV92] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Verlag, Basel, 1992.
- [Mar72] Charles Marle. *Cours de production. Tome IV. Les écoulements polyphasiques en milieu poreux*. 1972.
- [Wel] Karl H. Welge. *A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive*. TRANS. AIME, 1952, vol.195. p.91.