

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Metoda konačnih elemenata	4
2.1	Slabo rješenje	4
2.2	Konstrukcija prostora V_h	7
2.3	Diskretan problem	8
3	Metoda konačnih volumena	11
3.1	Formulacija metode	11
3.2	Konstrukcija kontrolnih volumena	14
3.2.1	Voronoijev dijagram	15
3.2.2	Donaldov dijagram	18
3.3	Diskretizacija konačnim volumenima	19
3.3.1	Slučaj Voronoijevog dijagrama	20
3.3.2	Slučaj Donaldovog dijagrama	24
3.4	Usporedba difuzijskih članova	25
3.5	Svojstva diskretizacije	29
A	Dodatak	35
A.1	L^p prostori	35
A.2	Soboljevi prostori	36

Poglavlje 1

Uvod

Metoda konačnih volumena (MKV) je metoda za numeričko rješavanje diferencijalnih jednažbi. U usporedbi sa standardnim aparatom za diskretizaciju, tj. s metodom konačnih elemenata (MKE) i metodom konačnih diferencija (MKD), za MKV se često kaže da zauzima mjesto između, jer je se ponekad smatra generalizacijom MKD, a ponekad specijalnim slučajem MKE.

MKV se javlja 1960-ih godina za potrebe računanja kod zadaća povezanih s nuklearnim reaktorima i difuzijama neutrona. 1970-ih se razvija i za potrebe mehanike fluida. Ali tek u posljednja tri desetljeća je postala vrlo popularna te se danas najviše koristi u aerodinamici, mehanici fluida, fizici čvrstog stanja, kod istraživačkog modeliranja poluvodiča, itd.

MKV je široko primjenjiva kod diferencijalnih jednažbi divergentnog oblika. U ovom ćemo radu pokazati njenu primjenu na jednoj upravo takvoj klasi problema, tj. na klasi linearnih eliptičkih diferencijalnih jednažbi 2. reda koju općenito možemo zapisati ovako:

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{q}u) + ru = f, \quad (1.1)$$

gdje je $\mathbb{K}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ simetrična, pozitivno definitna matična funkcija, $\mathbf{q}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $r, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ domena (otvoren i povezan skup).

Mi ćemo se u ovom radu ograničiti na slučaj kada je $d = 2$, te kada je Ω poligonalna domena. Pretpostavljat ćemo da je domena Ω , kao kod MKE, triangulirana trokutima na kojima su definirani \mathbb{P}_1 elementi. Na takvoj trianguliranoj domeni konstruirat ćemo konačne volumene kojima ćemo diskretizirati zadaću (1.1) uz pretpostavku homogenog Dirichletovog rubnog uvjeta. Zatim ćemo pokazati dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja dobivene diskretne zadaće, za diskretno rješenje tipa \mathbb{P}_1 na trokutima.

Napomenimo da je za MKV dosta teško konstruirati matematičku teoriju konvergencije, zato se potpomažemo konačnim elementima, jer je za MKE ona dobro razvijena.

Još spomenimo neke prednosti i nedostatke MKV.

Prednosti: fleksibilnost metode obzirom na geometriju domene Ω (kao u MKE), dopuštene su nestrukturirane mreže (kao u MKE, posebno je to važno za adaptivne metode), jednostavno formiranje matrice sustava, lokalno sačuvanje mase, laka linearizacija nelinearnih problema (jednostavnija nego u MKE), jednostavna diskretizacija rubnih uvjeta, nema ograničenja prostorne dimenzije d domene Ω .

Nedostatci: manje područje primjene u usporedbi s MKE, teškoće kod konstrukcije metoda višeg reda (nije dopuštena tzv. p -verzija kao što je to dopušteno kod MKE), u višim prostornim dimenzijama ($d \geq 3$) konstrukcija nekih klasa ili tipova kontrolnih volumena može biti zamršena zadaća, teška matematička analiza (stabilnost, konvergencija, itd.).

Poglavlje 2

Metoda konačnih elemenata

U ovom poglavlju ćemo iznijeti samo osnove metode konačnih elemenata na primjeru homogene Dirichletove rubne zadaće. Većinu tvrdnji nećemo dokazivati, nego ćemo ih samo preuzeti iz [1] i [3] u kojima se mogu naći i dokazi. Za definicije uvedenih prostora funkcija vidi Dodatak.

Neka je zadana sljedeća homogena Dirichletova rubna zadaća:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{q}u) + ru = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ograničena i poligonalna domena, a $\partial\Omega$ njena granica, te gdje je $\mathbb{K}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simetrična, pozitivno definitna matricna funkcija, a $\mathbf{q}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $r, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zadane funkcije.

2.1 Slabo rješenje

Klasično rješenje zadaće (2.1) je funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ koja zadovoljava rubnu zadaću (2.1), pri tome su $\partial_i k_{ij}, q_i, r, f \in C(\overline{\Omega}), i, j = 1, 2$. Varijacijska formulacija će oslabiti uvjete na zadane funkcije, a dakako i na samo rješenje u .

MKE se temelje na varijacijskoj formulaciji rubne zadaće koja se u slučaju zadaće (2.1) dobiva množenjem jednadžbe (2.1)₁ test funkcijom $v \in C_0^\infty(\Omega)$ i integracijom po Ω :

$$\int_{\Omega} [-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u)v + \operatorname{div}(\mathbf{q}u)v + ruv] dx = \int_{\Omega} fv dx.$$

Parcijalnom integracijom prvog divergentnog člana dobijemo

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u)v dx = \int_{\Omega} [-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla uv) + \mathbb{K}\nabla u \cdot \nabla v] dx,$$

a raspisivanjem drugog divergentnog člana

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}u) v \, dx = \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\mathbf{q}uv) - (\mathbf{q} \cdot \nabla v)u] \, dx.$$

Sada cijeli izraz postaje

$$\int_{\Omega} [-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla uv) + \mathbb{K}\nabla u \cdot \nabla v + \operatorname{div}(\mathbf{q}uv) - (\mathbf{q} \cdot \nabla v)u + ruv] \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

te primjenom Gaussovog teorema o divergenciji

$$-\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbb{K}\nabla u v - \mathbf{q}uv) \, d\sigma + \int_{\Omega} [\mathbb{K}\nabla u \cdot \nabla v - (\mathbf{q} \cdot \nabla v)u + ruv] \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

gdje je $\boldsymbol{\nu}$ vanjska jedinična normala na $\partial\Omega$. Kako je $v = 0$ na $\partial\Omega$ to integral po $\partial\Omega$ propada pa dobijemo varijacijsku formulaciju rubne zadaće (2.1)

$$\int_{\Omega} [\mathbb{K}\nabla u \cdot \nabla v - (\mathbf{q} \cdot \nabla v)u + ruv] \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.2)$$

Uočimo da se ne pojavljuju druge derivacije nepoznate funkcije u .

Jasno je da klasično rješenje zadaće (2.1) zadovoljava varijacijsku zadaću (2.2). Može se pokazati da funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ koja zadovoljava (2.2) zadovoljava i (2.1), što nam pokazuje da je naša varijacijska jednadžba korektna generalizacija zadaće (2.1). Rješenje zadaće (2.2) zovemo *poopćeno* ili *slabo rješenje* homogene Dirichletove rubne zadaće (2.1).

Kako bismo mogli koristiti neke važne rezultate funkcionalne analize, kao što je npr. Lax-Milgramova lema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, zapišimo zadaću (2.2) u sljedećem obliku:

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.3)$$

gdje je $V = C_0^\infty(\Omega)$ linearan prostor funkcija, $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearan funkcional definiran s

$$a(u, v) := \int_{\Omega} [\mathbb{K}\nabla u \cdot \nabla v - (\mathbf{q} \cdot \nabla v)u + ruv] \, dx, \quad (2.4)$$

a $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional definiran s

$$F(v) := \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.5)$$

A sada zapišimo Lax-Milgramovu lemu. [10].

Teorem 2.1 (Lax-Milgramova lema) *Neka je V Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i induciranom normom $\|\cdot\|$, $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearan funkcional te $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional i neka su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

a je neprekidna, tj. $\exists M > 0$ t.d.

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.6)$$

a je V -eliptička, tj. $\exists \alpha > 0$ t.d.

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V, \quad (2.7)$$

F je neprekidan, tj. $\exists C > 0$ t.d.

$$|F(v)| \leq C \|v\|, \quad \forall v \in V. \quad (2.8)$$

Tada varijacijska jednadžba (2.3) ima jedinstveno rješenje.

Kako se za $V = C_0^\infty(\Omega)$ i prirodnu normu u njemu $\|\cdot\|_\infty$ Lax-Milgramovi uvjeti ne mogu zadovoljiti za našu rubnu zadaću, to moramo naći neki drugi prostor V i normu, te uvjete na zadane funkcije $\mathbb{K}, \mathbf{q}, r, f$ za koje će se Lax-Milgramovi uvjeti zadovoljiti. U [1] je dokazano koji su to prostor i norma, te uvjeti na zadane funkcije, a mi tu važnu tvrdnju ovdje samo iznosimo:

Teorem 2.2 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena poligonalna domena, neka je $V := H_0^1(\Omega)$ i neka vrijedi sljedeće: $k_{ij}, q_i, \operatorname{div} \mathbf{q}, r \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $i, j = 1, 2$, te neka je za (gotovo) svaki $x \in \Omega$*

$$r(x) + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{q}(x) \geq 0.$$

Tada varijacijska zadaća (2.3) ima jedinstveno slabo rješenje $u \in V$, gdje su funkcionali a i F zadani s (2.4), odnosno (2.5), respektivno.

Sada kada znamo uvjete za egzistenciju i jedinstvenost naše kontinuirane zadaće, sljedeći korak je zamjena kontinuirane zadaće diskretnom zadaćom, tj. moramo naći konačnodimenzionalni potprostor $V_h \subset V$ u kojem ćemo tražiti rješenje u_h koje će biti diskretna aproksimacija kontinuiranog rješenja u . Kako je V_h konačnodimenzionalan prostor, on je zatvoren, a kao zatvoren potprostor Hilbertovog prostora on je i sam Hilbertov u naslijeđenoj normi $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Zato diskretna varijacijska zadaća

$$\begin{cases} \text{naći } u_h \in V_h \\ \forall v \in V_h, a(u_h, v) = F(v) \end{cases} \quad (2.9)$$

ima jedinstveno rješenje kada su zadovoljene pretpostavke Teorema 2.2.

Greška aproksimacije rješenja u diskretnim rješenjem u_h ovisi o tome koliko V_h dobro aproksimira beskonačnodimenzionalni prostor V .

2.2 Konstrukcija prostora V_h

Prvi korak u konstrukciji prostora V_h je dekompozicija (triangulacija) domene Ω na jednostavne podskupove, uglavnom poligone.

Definicija 2.3 Triangulacija domene Ω je svaka konačna familija \mathcal{T}_h podskupova od $\overline{\Omega}$ koja ima ova svojstva:

$$(T1) \quad \overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K;$$

$$(T2) \quad \text{svaki } K \in \mathcal{T}_h \text{ je zatvoren poligonalan skup i } \text{Int}(K) \neq \emptyset;$$

$$(T3) \quad \text{za svaka dva } K_i, K_j \in \mathcal{T}_h, i \neq j, \text{ je } \text{Int}(K_i) \cap \text{Int}(K_j) = \emptyset;$$

a ako još ima i sljedeće svojstvo

$$(T4) \quad \text{svaka dva } K_i, K_j \in \mathcal{T}_h, i \neq j, \text{ za koje je } K_i \cap K_j \neq \emptyset, \text{ imaju ili zajednički brid ili zajednički vrh,}$$

onda takvu triangulaciju zovemo konformna triangulacija domene Ω .

Skupove iz \mathcal{T}_h nazivamo elementima.

Nas zanima slučaj kada su elementi trokuti. Uvedimo finoću triangulacije formulom $h := \max\{\text{diam}(K) : K \in \mathcal{T}_h\}$. Spomenimo samo da su za dobra aproksimacijska svojstva triangulacije osim svojstava (T1)-(T4) potrebna još i neka druga svojstva.

Definicija 2.4 Za familiju triangulacija $(\mathcal{T}_h)_h$ kažemo da je regularna ako postoji konstanta $\sigma > 0$ takva da za svaki $h > 0$ i svaki $K \in \mathcal{T}_h$ vrijedi

$$\varrho_K \geq \sigma h_K,$$

gdje je

$$\varrho_K := \sup\{\text{diam}(S) : S \text{ je krug u } \mathbb{R}^2 \text{ i } S \subset K\}, \quad h_K = \text{diam}(K).$$

Svakom elementu $K \in \mathcal{T}_h$ pridružujemo jedan konačnodimenzionalni linearni prostor funkcija koji označavamo s P_K . Zatim definiramo prostor

$$X_h := \{v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_K\},$$

a iz tog prostora uzmemo neprekidne funkcije te taj podskup označimo s V_h . Može se pokazati da je $V_h \subseteq H^1(\Omega)$, a $V_{0h} := \{v \in V_h : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \subseteq H_0^1(\Omega)$, vidi [3]. Radi jednostavnijeg računanja i dobrih aproksimacijskih

svojstava, zahtijeva se da prostor P_K sadrži polinome (ili funkcije bliske polinomima). Mi ćemo uzimati da je P_K prostor polinoma prvog stupnja, dakle, funkcija $v \in X_h$ će biti oblika

$$v|_K(x) = a_K + b_K x_1 + c_K x_2.$$

Kako je V_h prostor neprekidnih funkcija to ćemo imati ograničenja na koeficijente a_K , b_K , c_K za svaki $K \in \mathcal{T}_h$ (jer bi inače te funkcije imale prekide na presjecima susjednih trokuta).

Sada uzmimo proizvoljne trokute $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$, $i \neq j$, koji imaju zajedničku stranicu, npr. γ . S v_i označimo restrikciju funkcije $v|_{K_i}(x) = a_{K_i} + b_{K_i}x_1 + c_{K_i}x_2$ na γ , a s v_j restrikciju funkcije $v|_{K_j}(x) = a_{K_j} + b_{K_j}x_1 + c_{K_j}x_2$, također na γ . Obje su te funkcije affine na γ jer su affine na čitavim K_i , odnosno K_j , respektivno, ali su one općenito međusobno različite. Da bismo ih učinili jednakima na γ , dovoljno je zahtijevati da su jednake u vrhovima stranice γ (obje funkcije v_i i v_j su na γ affine funkcije jedne varijable pa su posve određene vrijednostima u dvije točke) pa je uz taj uvjet zadovoljen i uvjet neprekidnosti funkcije v na $K_i \cup K_j$.

Dakle, vrijednosti funkcije u vrhovima trokuta se nameću kao adekvatni stupnjevi slobode. Naime, ako zadamo vrijednosti funkcije $v \in V_h$ u vrhovima svih trokuta triangulacije \mathcal{T}_h , onda je ona time potpuno određena, tj. ona je neprekidna na Ω , a afina na svakom pojedinom trokutu $K \in \mathcal{T}_h$ (na svakom trokutu određena je s tri vrijednosti, a afina funkcija u \mathbb{R}^2 je jedinstveno određena vrijednostima u tri točke). Dimenzija prostora V_h je stoga jednaka broju vrhova triangulacije.

2.3 Diskretan problem

Da bismo efikasno konstruirali prostor V_h , moramo u njemu naći jednu bazu. Pokaže se (vidi [3]) da je jedna baza za V_h dana s

$$\varphi_i \in V_h, \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_h, \quad (2.10)$$

gdje je a_j j -ti vrh triangulacije, a \mathcal{N}_h broj svih vrhova triangulacije \mathcal{T}_h . Ovu bazu zovemo *nodalna baza* jer je pridružena vrhovima triangulacije.

Vezano za bazu (2.10) imamo baricentričke koordinate koje su restrikcije baznih funkcija na pojedini trokut.

Neka je K proizvoljan trokut triangulacije \mathcal{T}_h , te neka su $a_i, i \in 1, 2, 3$ vrhovi trokuta K . *Baricentričke koordinate* $\lambda_i = \lambda_i(x)$, $1 \leq i \leq 3$ bilo koje točke $x \in \mathbb{R}^2$, u odnosu na točke a_1, a_2, a_3 , je jedinstveno rješenje linearnog sustava

$$\begin{aligned} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 &= x \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Zbog nekolinearnosti točkaka $a_i, i \in 1, 2, 3$, sustav (2.11) ima jedinstveno rješenje. Iz definicije baricentričkih koordinata se lako vidi da koordinata λ_i je zaista restrikcija bazne funkcije φ_i na trokut K :

$$\lambda_i \in \mathbb{P}_1, \quad \lambda_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j, \\ 0 & \text{za } i \neq j, \end{cases}$$

gdje je \mathbb{P}_1 prostor polinoma prvog stupnja.

Bazna funkcija φ_i je afina na svakom trokutu i određena je svojim vrijednostima u vrhovima trokuta. Različita je od nule samo na onim trokutima koji imaju a_i kao jedan svoj vrh, stoga ima mali nosač.

Pogledajmo sada diskretnu zadaću (2.9): rješenje u_h zapišimo pomoću baznih funkcija

$$u_h = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_h} u_i \varphi_i, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

a za test funkcije $v \in V_h$ je dovoljno da uzmemo bazne funkcije $\varphi_j, j = 1, \dots, \mathcal{N}_h$. Uvrštavanjem u jednadžbu,

$$a\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_h} u_i \varphi_i, \varphi_j\right) = F(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}_h,$$

dobijemo sljedeći linearni sustav jednadžbi:

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (2.13)$$

gdje je

$$\mathbf{A} = (A_{ij}) = (a(\varphi_j, \varphi_i)) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_h \times \mathcal{N}_h}, \text{ tzv. matrica krutosti,}$$

$$\mathbf{U} = (u_i) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_h},$$

$$\mathbf{F} = (F_i) = (F(\varphi_i)) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_h}.$$

Sustav (2.13) zbog zadovoljenih Lax-Milgramovih uvjeta (matrica \mathbf{A} je pozitivno definitna) ima jedinstveno rješenje \mathbf{U} . Napomenimo da je matrica krutosti rijetka zbog malih nosača baznih funkcija.

Na kraju još uvedimo operator $I_h: C(\overline{\Omega}) \rightarrow V_h$ koji proizvoljnoj funkciji iz $C(\overline{\Omega})$ pridružuje funkciju iz prostora V_h takvu da je

$$(I_h v)(x) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_h} v(a_i) \varphi_i(x). \quad (2.14)$$

Takav operator zovemo *interpolacijski operator* u prostoru V_h , a on ima centralnu ulogu u ocjeni greške MKE.

Teorem 2.5 *Neka je dana regularna familija triangulacija trokutima $(\mathcal{T}_h)_h$. Tada postoji konstanta $C > 0$ neovisna o h , takva da za $v \in H^2(\Omega)$ vrijedi*

$$\|v - I_h(v)\|_1 \leq Ch|v|_2.$$

Ako je rješenje rubnog problema (2.1) iz prostora $H^2(\Omega)$, tada za diskretno rješenje u_h problema (2.9) imamo ocjenu

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch(|u|_2 + \|f\|_0).$$

Dokaz se može naći u [1].

Poglavlje 3

Metoda konačnih volumena

3.1 Formulacija metode

Sada ćemo opisati osnovne korake metode konačnih volumena primijenjene na jednadžbu (1.1) i pri tome ćemo se ograničiti samo na slučaj kada je $d = 2$.

Prvi korak je subdivizija domene Ω , tj. podjela domene Ω na M poddomena Ω_i takvih da vrijedi sljedeće:

1. svaki Ω_i je zatvoren, poligonalan ograničen skup,
2. $\text{Int}\Omega_i \cap \text{Int}\Omega_j = \emptyset$, za $i \neq j$,
3. $\cup_{i=1}^M \Omega_i = \overline{\Omega}$.

Te poddomene Ω_i se zovu *konačni* ili *kontrolni volumeni*. Spomenimo da postoje i metode konačnih volumena s dobro definiranim kontrolnim volumenima koji se preklapaju, dakle s narušenim drugim uvjetom.

Drugi korak metode je zajednički svim metodama konačnih volumena: integrira se jednadžba (1.1) po svakom kontrolnom volumenu Ω_i

$$\int_{\Omega_i} [-\text{div}(\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{q}u) + ru] dx = \int_{\Omega_i} f dx, \quad (3.1)$$

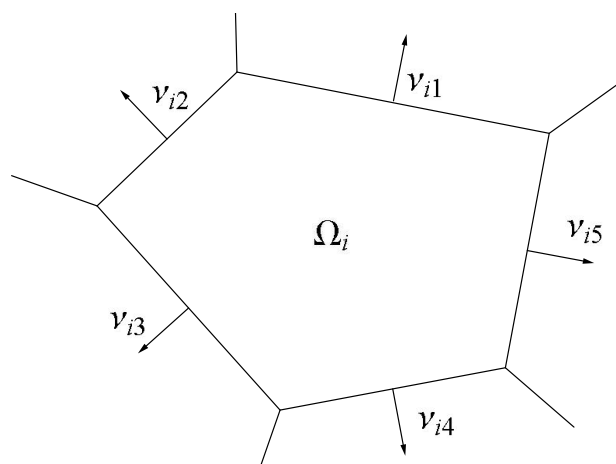
zatim se primijeni Gaussov teorem o divergenciji

$$-\int_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{q}u) d\sigma + \int_{\Omega_i} ru dx = \int_{\Omega_i} f dx,$$

gdje $\boldsymbol{\nu}$ označava jediničnu vanjsku normalu na $\partial\Omega_i$.

Prema prvom uvjetu particije, granica $\partial\Omega_i$ je sastavljena od ravnih segmenta Γ_{ij} ($j = 1, \dots, n_i$), duž kojih je normala $\boldsymbol{\nu}|_{\Gamma_{ij}}$ konstanta (vidi Sliku 1.). Zato se sada linijski integral može dekomponirati na sumu linijskih integrala što nam daje sljedeći rezultat:

$$-\sum_{j=1}^{n_i} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot (\mathbb{K}\nabla u - \mathbf{q}u) d\sigma + \int_{\Omega_i} ru dx = \int_{\Omega_i} f dx. \quad (3.2)$$



Slika 1. Kontrolni volumen

Treći je korak aproksimacija integrala iz (3.2), a to se može napraviti na puno različitih načina. Tako se dobiju različite konačne diskretizacije.

Metode konačnih volumena dijelimo prema načinu konstrukcije konačnog volumena i tipu aproksimativnog rješenja. [8]. Prva podjela uvodi dvije velike grupe metoda prema odnosu konačnog volumena i nodalnih točaka, tj. točaka u kojima aproksimiramo točno rješenje. Ukoliko prvo konstruiramo razdiobu domene na konačne volumene (ćelije), a zatim nodalne točke uvođimo u volumene, onda govorimo o metodi centriranoj u ćeliji (*cell-centred method*). Najjednostavniji predstavnik te klase je metoda u kojoj se nodalna točka smješta u centar kontrolnog volumena i rješenje se aproksimira funkcijom koja je konstantna na svakom pojedinom volumenu. Prve metode konačnih volumena bile su tog tipa. Unutar te klase moguće su različite varijante: nodalne točke mogu biti smještene u vrhove konačnog volumena (*cell vertex method*) ili na njegove stranice (*cell edge method*). Različiti načini razmještanja nodalnih točaka vode na različite tipove aproksimacije rješenja, koja je obično tipa konačnih elemenata (konformnih ili nekonformnih), no

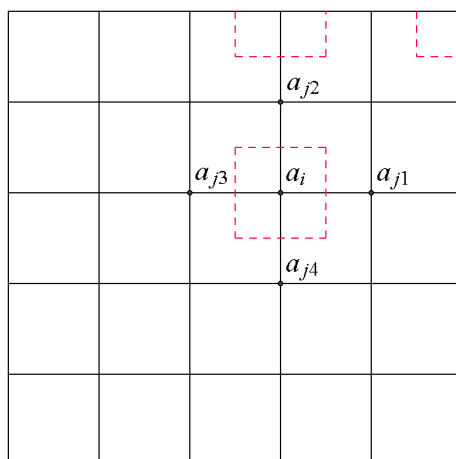
osnovno svojstvo ove metode je da postoji samo jedna razdioba domene – ona na kontrolne volumene.

Druga grupa metoda prvo uvodi nodalne točke, a zatim konstruira kontrolne volumene centrirane u nodalnim točkama. Za takve metode kažemo da su centrirane u nodalnim točkama (*vertex-centred methods*). Njih karakterizira prisustvo dviju različitih subdivizija domene. Jedna je ona koja nam daje nodalne točke, obično triangulacija domene tipa konačnih elemenata, i koja određuje tip aproksimacije rješenja, a druga je dana kontrolnim volumenima. Mi ćemo se nadalje baviti samo tim tipom metode i to u specijalnom slučaju kada se triangulacija domene sastoji od \mathbb{P}_1 elemenata na trokutima. Analizirat ćemo dva različita načina konstrukcije konačnih volumena u toj situaciji.

Pogledajmo jedan primjer metode KV koji se može smjestiti u klasu metoda centriranih u nodalnim točkama. Primarna mreža je pravokutna s aproksimacijom rješenja tipa \mathbb{Q}_1 (bilinearne funkcije), a kontrolni volumeni su pravokutnici centrirani u nodalnim točkama. Pokazat ćemo da se primjenom odgovarajućih formula numeričke integracije metoda KV svodi na klasičnu metodu konačnih diferencija.

Primjer 3.1 Zadan je homogeni Dirichletov problem za Poissonovu jednadžbu na jediničnom kvadratu:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & u & \Omega = (0, 1)^2, \\ u &= 0 & na & \partial\Omega. \end{aligned}$$



Slika 2. Varijable problema i kontrolni volumeni kod vertex-centred MKV

Varijable problema su vrijednosti $u(a_i)$, gdje su a_i čvorovi kvadratne mreže (tj. nodalne točke) s korakom $h > 0$.

Kontrolni volumeni su definirani s $\Omega_i := \{x \in \Omega : |x - a_i|_\infty \leq \frac{h}{2}\}$.

Za unutarnje kontrolne volumene Ω_i (to su oni za koje je $a_i \in \Omega$) jednadžba (3.2) postaje

$$-\sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_{ij_k}} \nu_{ij_k} \cdot \nabla u \, d\sigma = \int_{\Omega_i} f \, dx, \quad (3.3)$$

gdje je $\Gamma_{ij_k} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_{j_k}$. Ako bolje pogledamo derivacije u smjeru, vidimo da zapravo imamo

$$\nu_{ij_1} \cdot \nabla u = \partial_1 u, \quad \nu_{ij_2} \cdot \nabla u = \partial_2 u, \quad \nu_{ij_3} \cdot \nabla u = -\partial_1 u, \quad \nu_{ij_4} \cdot \nabla u = -\partial_2 u,$$

tj. to su samo parcijalne derivacije u odnosu na prvu i drugu varijablu po odgovarajućim dijelovima ruba. Aproksimacijom integrala po Γ_{ij_k} pravokutnom formulom i zamjenom parcijalnih derivacija diferencijskim kvocijentom, imamo

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_{ij_k}} \nu_{ij_k} \cdot \nabla u \, d\sigma &\approx -\sum_{k=1}^4 \nu_{ij_k} \cdot \nabla u \left(\frac{a_i + a_{j_k}}{2} \right) h \\ &\approx -\left[\frac{u(a_{j_1}) - u(a_i)}{h} + \frac{u(a_{j_2}) - u(a_i)}{h} - \frac{u(a_i) - u(a_{j_3})}{h} - \frac{u(a_i) - u(a_{j_4})}{h} \right] h \\ &= 4u(a_i) - \sum_{k=1}^4 u(a_{j_k}). \end{aligned}$$

Sada još možemo aproksimirati desnu stranu jednadžbe (3.3) s $f(a_i)h^2$ pa dobijemo sustav jednadžbi za $u(a_i)$

$$4u(a_i) - \sum_{k=1}^4 u(a_{j_k}) = f(a_i)h^2,$$

gdje su a_i unutarnje nodalne točke.

Kako zbog Dirichletovog rubnog uvjeta već znamo vrijednost funkcije u na $\partial\Omega$ tako znamo i vrijednosti $u(a_i)$, za $a_i \in \partial\Omega$ pa je to razlog što nismo trebali razmatrati rubne kontrolne volumene.

Time se MKV svela na metodu konačnih diferencija.

3.2 Konstrukcija kontrolnih volumena

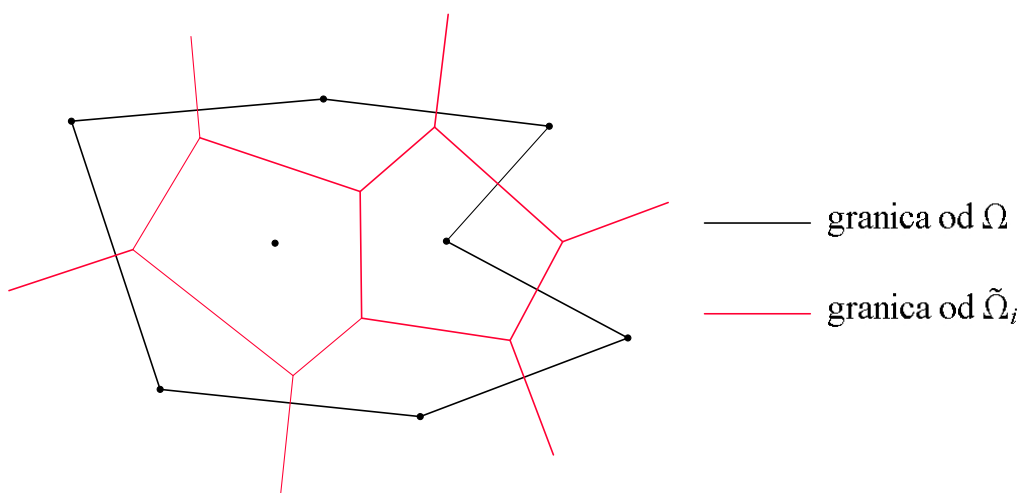
U ovoj sekciji dajemo dva tipa konstrukcije subdivizije domene na konačne volumene.

3.2.1 Voronoijev dijagram

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničen poligonalan skup, a $\{a_i\}_{i \in \bar{\Lambda}} \subset \bar{\Omega}$ skup točaka u $\bar{\Omega}$ koji sadrži sve vrhove poligona, gdje je $\bar{\Lambda}$ odgovarajući skup indeksa. Točke a_i su smještene na one pozicije u kojima će $u(a_i)$, vrijednosti egzaktnog rješenja biti aproksimirane. **Skup**

$$\tilde{\Omega}_i := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - a_i| \leq |x - a_j|, \quad \forall j \neq i\}$$

se zove *Voronoijev poligon* (ili Dirichletova domena, Wigner-Seitz ćelija (u fizici čvrstog stanja), Thiessenov poligon (u meteorologiji), itd.). Familija $\{\tilde{\Omega}_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$ se zove *Voronoijev dijagram* skupa točaka $\{a_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$.



Slika 3. Voronoijev dijagram

Voronoijevi poligoni su konveksni skupovi, ali nisu nužno ograničeni (vidi na Slici 3. situaciju blizu ruba od Ω). Vrhove Voronoijevih poligona zovemo *Voronoijevi vrhovi*.

Može se pokazati (vidi [2]) da se u svakom Voronoijevom vrhu diraju najmanje tri Voronoijeva poligona. Uzimajući to svojstvo u obzir, Voronoijevi vrhovi se klasificiraju na *regularne* i *degenerativne* Voronoijeve vrhove: u regularnim Voronoijevim vrhovima se spajaju točno tri Voronoijeva poligona, dok u degenerativnim najmanje četiri. U potonjem slučaju su svi odgovarajući čvorovi a_i smješteni na nekoj kružnici, tj. kocičički su (vidi [2]).

Kontrolne volumene Ω_i definiramo s

$$\Omega_i := \tilde{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}, \quad i \in \bar{\Lambda}.$$

Ako Ω nije konveksan skup, ovako definirani Ω_i nisu nužno konveksni (vidi Sliku 3.).

Nadalje će se koristiti sljedeća notacija :

$$\Lambda_i := \{j \in \bar{\Lambda} \setminus \{i\} : \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \emptyset\}, \quad i \in \bar{\Lambda},$$

za skup indeksa susjednih čvorova;

$$\Gamma_{ij} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j, \quad j \in \Lambda_i,$$

za zajedničke dijelove granica susjednih kontrolnih volumena;

$$m_{ij} := \text{duljina granice } \Gamma_{ij}.$$

Dualni graf Voronoijevog dijagrama je definiran skupom točaka $\{a_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$ i skupom bridova definiranih na sljedeći način: *proizvoljan par točaka* a_i, a_j , *takvih da je* $\partial\tilde{\Omega}_i \cap \partial\tilde{\Omega}_j \neq \emptyset$, *čini brid grafa, tj. povezan je ravnom dužinom.*

Sljedeći teorem kaže da je dualni graf jedna dobra triangulacija.

Teorem 3.1 *Ako su svi Voronoijevi vrhovi regularni, tada se dualni graf podudara s triangulacijom konveksne ljuske skupa $\{a_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$.*

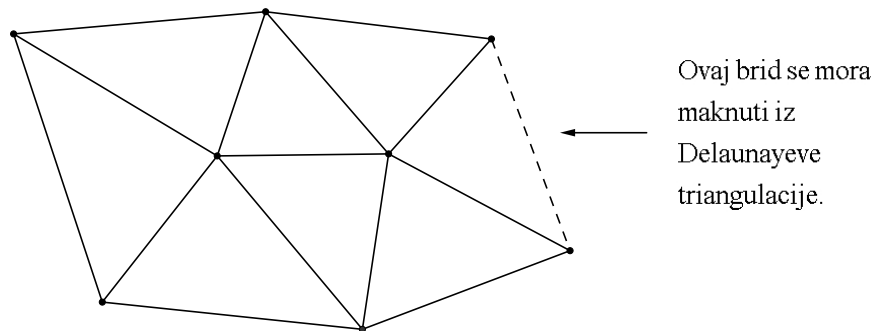
Dokaz se može naći u [5].

Iz definicije Voronoijevog poligona se lako vidi da je svaki Voronoijev vrh jednako udaljen od barem 3 nodalne točke iz $\{a_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$. Zato te iste nodalne točke jedinstveno određuju tzv. *opisani krug* sa središtem u datom Voronoijevom vrhu. Unutrašnjost opisanog kruga ne sadrži nodalne točke $a_i, i \in \bar{\Lambda}$ (za dokaz vidi [9]).

Definicija 3.2 *Za triangulaciju \mathcal{T} od Ω kažemo da ima Voronoijevo svojstvo akko unutrašnjost trokutu $K \in \mathcal{T}$ opisanog kruga ne sadrži vrhove triangulacije. Takva triangulacija se zove Delaunayeva triangulacija.*

Dakle, ako su svi Voronoijevi vrhovi regularni, onda je dualni graf Delaunayeva triangulacija. ??? jel tako kažemo, ili kažemo da se dualni graf podudara s triangulacijom, buduci je dualni graf skup vrhova i bridova, a ne skup trokuta kao sto je to triangulacija??? DA. Ne treba suviše formalizirati!

Napomenimo da ako je domena Ω konveksna, onda je Delaunayeva triangulacija i triangulacija od Ω , a ako domena Ω nije konveksna, njena triangulacija se dobije izbacivanjem iz Delaunayeve triangulacije onih trokuta koji nisu u Ω .



Slika 4. Delaunayeva triangulacija pridružena Voronoijevom dijagramu sa Slike 3.

??? jel se moze na slici reci da se makne brid iz triangulacije, ili se mora reci da se makne taj cijeli trokut???? Razumljivo je i kad se kaže da se miče brid!

Već smo spomenuli da je za dobra aproksimacijska svojstva MKE i MKV bitno da triangulacija zadovoljava neka dodatna svojstva. Jedno od tih svojstava je tzv. max-min uvjet na kut. Sljedeća lema upravo o tome govori. Ali prije same leme definirajmo za proizvoljnu triangulaciju \mathcal{T} i proizvoljni trokut $K \in \mathcal{T}$

$$\alpha(\mathcal{T}) := \min_{K \in \mathcal{T}} \alpha_{\min}(K),$$

gdje je $\alpha_{\min}(K)$ najmanji kut trokuta K .

Lema 3.3 *Neka je dan skup nodalnih točkaka $\{a_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$ i Voronoijev dijagram na njemu te pretpostavimo da su svi Voronoijevi vrhovi regularni. Tada, od svih triangulacija određenih skupom $\{a_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$, Delaunayeva triangulacija maksimizira $\alpha(\mathcal{T})$.*

Za dokaz vidi [6].

Sljedeći teorem neposredno karakterizira Delaunayevu triangulaciju.

Teorem 3.4 *Ako konformna triangulacija ne sadrži niti jedan trokut s tupim kutom, tada je to Delaunayeva triangulacija, a pripadajući Voronoijev dijagram se može konstruirati na osnovu okomica kroz polovišta rubova.*

Za dokaz vidi [7].

Spomenimo da je centar opisane kružnice trokuta koji nema tupi kut smješten unutar tog trokuta.

U analizi MKV je važna sljedeća relacija:

Lema 3.5 Dan je trokut K koji ne sadrži tupi kut i čiji su vrhovi $a_{i_k}, k \in \{1, 2, 3\}$. Tada za odgovarajuće dijelove kontrolnog volumena $\Omega_{i_k}, \Omega_{i_k, K} := \Omega_{i_k} \cap K$ imamo

$$\frac{1}{4}|K| \leq |\Omega_{i_k, K}| \leq \frac{1}{2}|K|, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Za dokaz vidi [2].

3.2.2 Donaldov dijagram

U suprotnosti s Voronoijevim dijagramom, gdje konstrukcija počinje od zadanog skupa nodalnih točaka, ovdje polazimo od triangulacije od Ω , a ona smije sadržavati i trokute s tupim kutom.

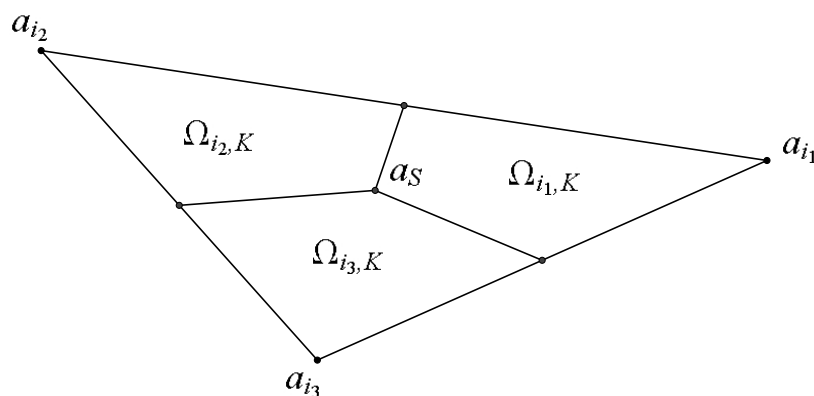
Neka je K trokut s vrhovima $a_{i_k}, k \in \{1, 2, 3\}$. Definiramo

$$\Omega_{i_k, K} := \{x \in K : \lambda_j(x) < \lambda_k(x), j \neq k\},$$

gdje λ_k označava baricentričke koordinate u odnosu na a_{i_k} . Očito baricentar zadovoljava $a_S = \frac{1}{3}(a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3})$ i

$$3|\Omega_{i_k, K}| = |K|, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Ova relacija je jednostavna posljedica geometrijske interpretacije baricentričkih koordinata kao koordinata površine (vidi [2]).



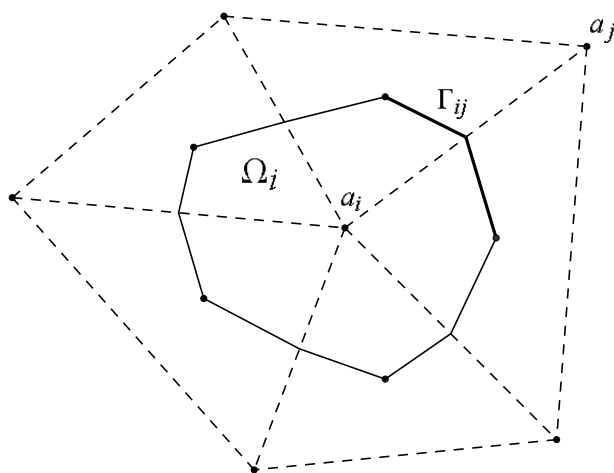
Slika 5. Poddomena $\Omega_{i_k, K}$

Traženi kontrolni volumeni su definirani na sljedeći način (vidi Sliku 5.):

$$\Omega_i := \bigcup_{K: \partial K \ni a_i} \bar{\Omega}_{i,K}, \quad i \in \bar{\Lambda}.$$

Familija $\{\Omega_i\}_{i \in \bar{\Lambda}}$ se zove *Donaldov dijagram*. Veličine Λ_i , Γ_{ij} i m_{ij} su definirane analogno onima u slučaju Voronoijevog dijagrama.

Napomenimo da rubni dijelovi Γ_{ij} nisu nužno ravni, ali su općenito poligonalni (vidi Sliku 6.).



Slika 6. Donaldov konačni volumen

3.3 Diskretizacija konačnim volumenima

Model donjeg razmatranja je specijalan slučaj jednadžbe (1.1). Umjesto matričnog difuzijskog koeficijenta K radi jednostavnosti ćemo uzeti skalarni koeficijent $k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, t.d. $\mathbb{K} = kI$. Još ćemo pretpostaviti i da su zadovoljeni homogeni Dirichletovi rubni uvjeti. Zapišimo model:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(k\nabla u - \mathbf{q}u) + ru &= f & \text{u } \Omega, \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdje su $k, r, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{q}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.

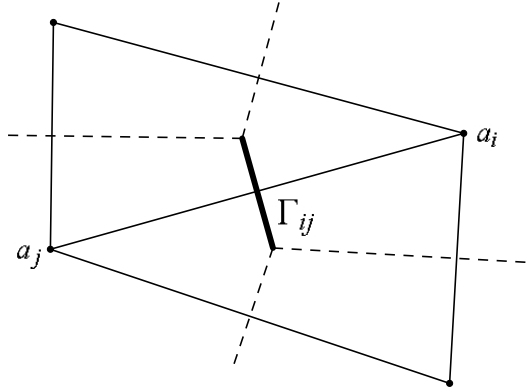
3.3.1 Slučaj Voronoijevog dijagrama

Neka je domena Ω particionirana Voronoijevim dijagramom i pripadajućom Delaunayevom triangulacijom. Zbog homogenog Dirichletovog rubnog uvjeta dovoljno je razmatrati samo one kontrolne volumene Ω_i koji su pridruženi unutarnjim čvorovima $a_i \in \Omega$. Sukladno tome, označimo skup indeksa svih unutarnjih čvorova s

$$\Lambda := \{i \in \bar{\Lambda} : a_i \in \Omega\}.$$

U sekciji 3.1 smo za proizvoljan $i \in \Lambda$ dobili

$$-\sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot (k \nabla u - \mathbf{q}u) d\sigma + \int_{\Omega_i} ru dx = \int_{\Omega_i} f dx. \quad (3.5)$$



Slika 7. Rub Γ_{ij}

Najprije, koeficijente k i $\boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q}$ aproksimiramo na Γ_{ij} konstantama $\mu_{ij} > 0$, odnosno γ_{ij} , respektivno:

$$k|_{\Gamma_{ij}} \approx \mu_{ij} = \text{const} > 0, \quad \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q}|_{\Gamma_{ij}} \approx \gamma_{ij} = \text{const}.$$

U najjednostavnijem slučaju, aproksimacija se može realizirati odgovarajućom vrijednosti u srednjoj točki $a_{\Gamma_{ij}}$ na segmentu Γ_{ij} .

Bolji izbor je

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{m_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q} d\sigma, & m_{ij} > 0, \\ \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q}(a_{\Gamma_{ij}}), & m_{ij} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Na taj način dobijemo

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div}(k\nabla u - \mathbf{q}u) dx \approx \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\Gamma_{ij}} [\mu_{ij}(\boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \nabla u) - \gamma_{ij}u] d\sigma.$$

Normalna derivacija se aproksimira diferencijskim kvocijentom; tako je

$$\boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \nabla u \approx \frac{u(a_j) - u(a_i)}{d_{ij}}, \quad \text{gdje je } d_{ij} := |a_i - a_j|.$$

Ova formula je egzaktna za one funkcije koje su linearne duž segmenta $[a_i, a_j]$. Još ostaje aproksimirati integral od u po Γ_{ij} . Za to uzmemo konveksnu kombinaciju vrijednosti od u u točkama a_i i a_j :

$$u|_{\Gamma_{ij}} \approx t_{ij}u(a_i) + (1 - t_{ij})u(a_j),$$

gdje je $t_{ij} \in [0, 1]$ naknadno definiran parametar. Općenito, t_{ij} ovisi o μ_{ij} , γ_{ij} i d_{ij} .

Skupivši sve gornje aproksimacije došli smo do sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(k\nabla u - \mathbf{q}u) dx \\ & \approx \sum_{j \in \Lambda_i} \left\{ \mu_{ij} \frac{u(a_j) - u(a_i)}{d_{ij}} - \gamma_{ij} [t_{ij}u(a_i) + (1 - t_{ij})u(a_j)] \right\} m_{ij}. \end{aligned}$$

Za aproksimaciju ostatka integrala iz (3.1) koriste se sljedeće formule:

$$\int_{\Omega_i} ru dx \approx r(a_i)u(a_i)m_i =: r_i u(a_i)m_i, \quad m_i := |\Omega_i|,$$

$$\int_{\Omega_i} f dx \approx f(a_i)m_i =: f_i m_i.$$

Umjesto $r_i = r(a_i)$ i $f_i = f(a_i)$, također se mogu koristiti aproksimacije

$$r_i := \frac{1}{m_i} \int_{\Omega_i} r dx \quad \text{i} \quad f_i := \frac{1}{m_i} \int_{\Omega_i} f dx, \quad (3.7)$$

respektivno.

Označivši nepoznate aproksimirane vrijednosti od $u(a_i)$ s u_i , dobijemo sljedeći linearni sustav jednažbi

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Lambda_i} \left\{ \mu_{ij} \frac{u_i - u_j}{d_{ij}} + \gamma_{ij} [t_{ij}u_i + (1 - t_{ij})u_j] \right\} m_{ij} + r_i u_i m_i \\ = f_i m_i, \quad i \in \Lambda. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ovaj prikaz jasno pokazuje sličnost MKV s MKD. Za kasnije analize je pogodnije zapisati ovaj sustav jednadžbi u terminima diskretne varijacijske jednakosti.

Množeći i -tu jednadžbu u (3.8) proizvoljnim brojevima $v_i \in \mathbb{R}$ i sumirajući ih po $i \in \Lambda$, dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Lambda} v_i \left\{ \sum_{j \in \Lambda_i} \left\{ \mu_{ij} \frac{u_i - u_j}{d_{ij}} + \gamma_{ij} [t_{ij} u_i + (1 - t_{ij}) u_j] \right\} m_{ij} + r_i u_i m_i \right\} \\ = \sum_{i \in \Lambda} f_i v_i m_i. \end{aligned}$$

Zatim, s V_h označimo prostor neprekidnih po dijelovima afinih funkcija na (Delaunayevoj) triangulaciji od Ω koje na rubu $\partial\Omega$ iščezavaju. Tada se vrijednosti u_i i v_i mogu interpolirati u V_h , tj.

$$\exists! u_h, v_h \in V_h \quad \text{t.d.} \quad u_h(a_i) = u_i, \quad v_h(a_i) = v_i, \quad \forall i \in \Lambda.$$

Stoga se sada na $V_h \times V_h$ mogu definirati sljedeće diskretne bilinearne forme:

$$a_h^0(u_h, v_h) := \sum_{i \in \Lambda} v_i \sum_{j \in \Lambda_i} \mu_{ij} (u_i - u_j) \frac{m_{ij}}{d_{ij}}, \quad (3.9)$$

$$b_h(u_h, v_h) := \sum_{i \in \Lambda} v_i \sum_{j \in \Lambda_i} [t_{ij} u_i + (1 - t_{ij}) u_j] \gamma_{ij} m_{ij}, \quad (3.10)$$

$$d_h(u_h, v_h) := \sum_{i \in \Lambda} r_i u_i v_i m_i, \quad (3.11)$$

$$a_h(u_h, v_h) := a_h^0(u_h, v_h) + b_h(u_h, v_h) + d_h(u_h, v_h). \quad (3.12)$$

Konačno, za dvije neprekidne funkcije $v, w \in C(\bar{\Omega})$, stavimo

$$\langle w, v \rangle_{0,h} := \sum_{i \in \Lambda} w_i v_i m_i,$$

gdje je $v_i := v(a_i)$, $w_i := w(a_i)$.

Napomena 3.6 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0,h}$ je skalarni produkt na V_h .

Specijalno, može se uvesti sljedeća norma:

$$\|v_h\|_{0,h} := \sqrt{\langle v_h, v_h \rangle_{0,h}}, \quad v_h \in V_h. \quad (3.13)$$

Sada imamo diskretnu varijacijsku formulaciju MKV:

$$\begin{cases} \text{naći } u_h \in V_h \text{ t.d.} \\ a_h(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_{0,h}, \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.14)$$

Dosada je izbor težinskih parametara t_{ij} ostao otvoren. Za to se općenito mogu izabrati dva slučaja:

1. Postoji par indeksa $(i, j) \in \Lambda \times \bar{\Lambda}$ t.d. $\mu_{ij} \ll |\gamma_{ij}| d_{ij}$.
2. Ne postoji par $(i, j) \in \Lambda \times \bar{\Lambda}$ t.d. $\mu_{ij} \ll |\gamma_{ij}| d_{ij}$.

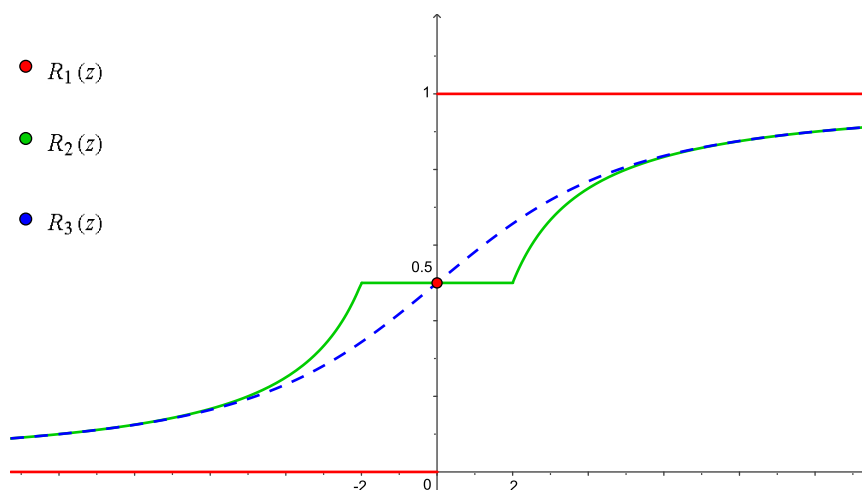
U drugom slučaju, približan izbor je $t_{ij} \equiv \frac{1}{2}$.

Prvi slučaj odgovara dominantno konvektivnoj situaciji i zahtijeva brižljivi izbor težinskih parametara t_{ij} . Općenito su težinski parametri sljedeće strukture:

$$t_{ij} = R\left(\frac{\gamma_{ij}d_{ij}}{\mu_{ij}}\right), \quad (3.15)$$

gdje je $R: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ neka funkcija koja će biti specificirana. Argument $\frac{\gamma_{ij}d_{ij}}{\mu_{ij}}$ se zove *lokalni Pécletov broj*. Tipični primjeri za funkciju R su

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \frac{1}{2}[\text{sign}(z) + 1], & \text{puni "upwinding"}, \\ R_2(z) &= \begin{cases} (1 - \tau(z))/2, & z < 0, \\ 1 + \tau(z)/2, & z \geq 0, \end{cases} & \tau(z) := \max\left\{0, 1 - \frac{2}{|z|}\right\}, \\ R_3(z) &= 1 - \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z}{e^z - 1}\right), & \text{eksponencijalni "upwinding"}. \end{aligned}$$



Slika 8. Primjeri funkcije R

Sve tri funkcije imaju mnoga zajednička svojstva. Npr., za svaki $z \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & [1 - R(z) - R(-z)] z = 0, \\
 (P2) \quad & [R(z) - \frac{1}{2}] z \geq 0, \\
 (P3) \quad & 1 - [1 - R(z)] z \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Primijetimo da konstantna funkcija $R = \frac{1}{2}$ zadovoljava uvjete (P1) i (P2), ali ne i (P3).

3.3.2 Slučaj Donaldovog dijagrama

Neka je domena Ω triangulirana kao kod MKE. Tada, slijedeći objašnjenja dana u točki 3.2.2 možemo kreirati odgovarajući Donaldov dijagram.

Ako jednadžbu (3.4) integriramo po kontrolnom volumenu Ω_i

$$- \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(k \nabla u) \, dx + \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(\mathbf{q}u) \, dx + \int_{\Omega_i} ru \, dx = \int_{\Omega_i} f \, dx, \quad i \in \Lambda,$$

te ako sve članove gornje jednadžbe, osim prvog člana na lijevoj strani, apoksimiramo na isti način kao što smo to napravili kod Voronoijevog slučaja i zapišemo ga u varijacijskom obliku, također kao kod Voronoijevog slučaja, dobit ćemo

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(k \nabla u_h) \, dx + \sum_{i \in \Lambda} v_i \sum_{j \in \Lambda_i} \left\{ \gamma_{ij} [t_{ij} u_i + (1 - t_{ij}) u_j] m_{ij} + r_i u_i m_i \right\} \\
 = \sum_{i \in \Lambda} f_i v_i m_i.
 \end{aligned}$$

Prvi član na desnoj strani ne možemo aproksimirati kao što smo u Voronoijevom slučaju zato što Γ_{ij} nije ravna, nego je poligonalna pa nam više nije jednostavno aproksimirati derivaciju u smjeru vektora jedinične normale na Γ_{ij} . Zato ćemo ga sada diskretizirati kao u MKE, odnosno zamijenit ćemo član

$$- \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(k \nabla u_h) \, dx$$

članom

$$\int_{\Omega} k \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx,$$

gdje su, naravno, $u_h, v_h \in V_h$ funkcije koje odgovaraju nodalnim vrijednostima u_i, v_i .

Sada napokon imamo diskretnu bilinearnu formu definiranu s

$$a_h(u_h, v_h) := \langle k \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_0 + b_h(u_h, v_h) + d_h(u_h, v_h),$$

gdje je skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ definiran s

$$\langle g, h \rangle_0 := \int_{\Omega} g \cdot h \, dx,$$

za funkcije $g, h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. b_h, d_h i prostor V_h definirani su kao u prethodnoj točki 3.3.1.

3.4 Usporedba difuzijskih članova

Kako bismo usporedili dva različita načina diskretizacije difuzijskog člana, Voronijev i Donaldov slučaj, potreban nam je sljedeći tehnički rezultat.

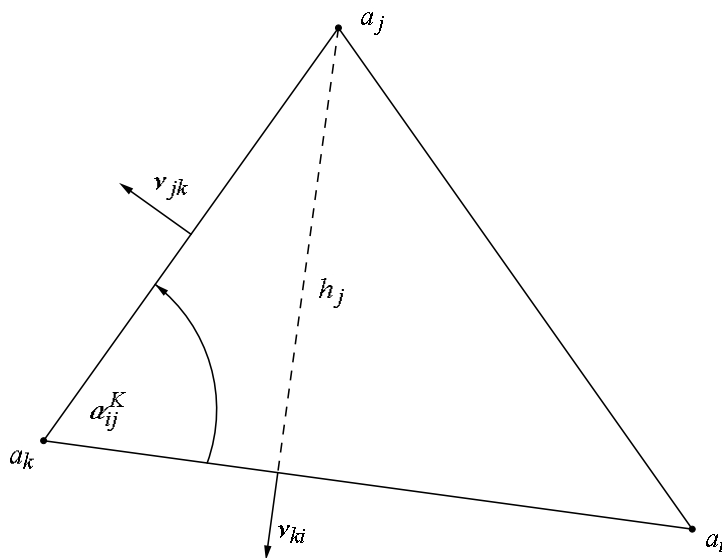
S $\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}$ smo označili bazne funkcije prostora V_h neprekidnih, po dijelovima linearnih funkcija na odgovarajućoj triangulaciji domene Ω .

Lema 3.7 *Neka je \mathcal{T}_h konformna triangulacija od Ω . Tada za proizvoljni trokut $K \in \mathcal{T}_h$ s vrhovima $a_i, a_j, i \neq j$ vrijedi sljedeće:*

$$\int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = -\frac{1}{2} \cot \alpha_{ij}^K,$$

gdje je α_{ij}^K unutarnji kut od K nasuprot stranici određenoj točkama a_i, a_j .

Dokaz: Pretpostavimo da su a_i, a_j i a_k vrhovi trokuta K (vidi Sliku 9.).



Slika 9. Notacija za dokaz Leme 3.7

Na stranici nasuprot točki a_j imamo

$$\varphi_j \equiv 0.$$

Stoga, $\nabla\varphi_j$ ima smjer vektora normale na tu stranicu i uzevši u obzir u kojem smjeru φ_j raste – orijentacija suprotna od vektora vanjske normale $\boldsymbol{\nu}_{ki}$, to je

$$\nabla\varphi_j = -|\nabla\varphi_j|\boldsymbol{\nu}_{ki}, \quad \text{gdje je } |\boldsymbol{\nu}_{ki}| = 1. \quad (3.17)$$

Kako bismo izračunali $|\nabla\varphi_j|$ koristimo sljedeće: Iz (3.17) dobivamo

$$|\nabla\varphi_j| = -\nabla\varphi_j \cdot \boldsymbol{\nu}_{ki},$$

tj. moramo izračunati derivaciju u smjeru. Iz jednakosti $\varphi_j(a_j) = 1$ imamo

$$\nabla\varphi_j \cdot \boldsymbol{\nu}_{ki} = \frac{0 - 1}{h_j} = -\frac{1}{h_j},$$

gdje h_j označava visinu od K spuštenu iz a_j na nasuprotnu stranicu. Tako smo dobili relaciju

$$\nabla\varphi_j = -\frac{1}{h_j}\boldsymbol{\nu}_{ki}$$

pa imamo

$$\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i = \frac{\boldsymbol{\nu}_{ki} \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk}}{h_j h_i} = -\frac{\cos \alpha_{ij}^K}{h_j h_i}.$$

Sada zbog

$$2|K| = h_j|a_k - a_i| = h_i|a_j - a_k| = |a_k - a_i||a_j - a_k| \sin \alpha_{ij}^K$$

dobijemo

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i &= -\frac{\cos \alpha_{ij}^K}{4|K|^2} |a_k - a_i||a_j - a_k| \\ &= -\frac{1}{2} \cot \alpha_{ij}^K \frac{1}{|K|}, \end{aligned}$$

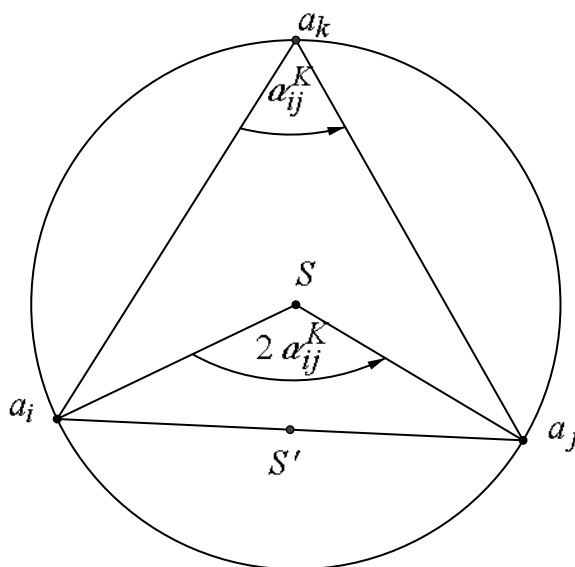
te tvrdnja leme slijedi integriranjem po K . ■

Lema 3.8 *Neka je \mathcal{T}_h konformna triangulacija od Ω takva da niti jedan trokut triangulacije nema tupi kut. Razmatramo odgovarajući Voronojev dijagram u skladu s Teoremom 3.4. Tada za proizvoljan trokut $K \in \mathcal{T}_h$ s vrhovima $a_i, a_j, i \neq j$, vrijedi sljedeća relacija:*

$$\int_K \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, dx = -\frac{m_{ij}^K}{d_{ij}},$$

gdje je m_{ij}^K duljina segmenta Γ_{ij} koji presijeca K .

Dokaz: Neka su vrhovi trokuta K a_i , a_j i a_k , kao na Slici 10. i neka je kut α_{ij}^K kut u vrhu a_k .



Slika 10. Notacija za dokaz Leme 3.8

Kako je sjecište simetrala stranica trokuta ujedno središte trokutu opisane kružnice, to vidimo da je točka S sa Slike 10. jedan Voronoijev vrh, tj. da je dužina $\overline{SS'}$ zapravo m_{ij}^K . Primijetimo da je kut u vrhu a_k obodni kut, a u vrhu S središnji kut nad lukom $a_i a_j$. Sada iz trokuta $SS'a_j$ imamo

$$\cot \alpha_{ij}^K = \frac{2 m_{ij}^K}{d_{ij}},$$

te primjenom Leme 3.7 slijedi tvrdnja ove leme. ■

Korolar 3.9 *Pod pretpostavkama Leme 3.8, za $k = \text{const}$ imamo*

$$\langle k \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_0 = a_h^0(u_h, v_h), \quad \forall u_h, v_h \in V_h.$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati relaciju za $v_h = \varphi_i$ i proizvoljan $i \in \Lambda$. Prvo, vidimo da je

$$\langle \nabla u_h, \nabla \varphi_i \rangle_0 = \sum_{K \subset \text{supp } \varphi_i} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx &= \sum_{j:\partial K \ni a_j} u_j \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx \\ &= u_i \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_i \, dx + \sum_{j \neq i:\partial K \ni a_j} u_j \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx. \end{aligned}$$

Zbog

$$1 = \sum_{j:\partial K \ni a_j} \varphi_j \quad \text{po } K,$$

slijedi

$$\nabla \varphi_i = - \sum_{j:\partial K \ni a_j} \nabla \varphi_j. \quad (3.18)$$

To je, prema značenju Leme 3.8

$$\begin{aligned} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx &= \sum_{j \neq i:\partial K \ni a_j} (u_j - u_i) \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx \\ &= \sum_{j \neq i:\partial K \ni a_j} (u_i - u_j) \frac{m_{ij}^K}{d_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Zbrajajući po cijelom $K \subset \text{supp } \varphi_i$, dobivamo

$$\langle \nabla u_h, \nabla \varphi_i \rangle_0 = \sum_{j \in \Lambda_i} (u_i - u_j) \frac{m_{ij}}{d_{ij}} = a_h^0(u_h, \varphi_i).$$

■

Napomena 3.10 *Kod sofisticiranijeg dokazivanja može se pokazati da gornji korolar vrijedi i kada je difuzni koeficijent k konstanta po trokutima $K \in \mathcal{T}_h$ (ali nije konstanta na čitavom Ω), a kada su aproksimacije μ_{ij} izabrane u skladu s*

$$\mu_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{m_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} k \, d\sigma = \frac{k|_K m_{ij}^K + k|_{K'} m_{ij}^{K'}}{m_{ij}}, & m_{ij} > 0 \\ 0, & m_{ij} = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

gdje su K, K' trokuti sa zajedničkim vrhovima a_i, a_j .

3.5 Svojstva diskretizacije

Ovdje ćemo dati kratak pregled osnovnih svojstava MKV: egzistenciju i jedinstvenost rješenja te ocjenu greške.

Radi jednostavnosti ograničit ćemo se na slučaj konstantnog skalarnog difuzijskog koeficijenta $k > 0$. Tada, posebno, je korisno staviti $\mu_{ij} := k$, za svaki $i \in \Lambda, j \in \Lambda_i$. U ovom slučaju, prema Korolaru 3.9 prethodne dvije metode se poklapaju ako u triangulaciji nema trokuta s tupim kutom. Stoga uzimamo tu pretpostavku pa je dovoljno analizirati samo jedan slučaj. Za egzistenciju i jedinstvenost rješenja moramo pokazati da su zadovoljeni Lax-Milgramovi uvjeti. Neprekidnost bilinearne forme a_h i linearnog funkcionala $\langle f, v_h \rangle_{0,h}$ je lako dokazati, pa ćemo ovdje samo dokazati netrivialnu koercitivnost od a_h .

Lema 3.11 *Pretpostavimo da aproksimacije γ_{ij} od $\boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q}|_{\Gamma_{ij}}$ zadovoljavaju $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}$ i da su t_{ij} definirani s (3.15), gdje funkcija R zadovoljava (P1). Tada imamo za sve $u_h, v_h \in V_h$*

$$\begin{aligned} b_h(u_h, v_h) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} u_i v_i \gamma_{ij} m_{ij} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \left[\left(t_{ij} - \frac{1}{2} \right) (u_i - u_j)(v_i - v_j) + \frac{1}{2} (u_j v_i - u_i v_j) \right] \gamma_{ij} m_{ij}. \end{aligned}$$

Dokaz: Prvo napomenimo da se b_h može zapisati kao

$$\begin{aligned} b_h(u_h, v_h) &= \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} v_i \left[(1 - t_{ij}) u_j - \left(\frac{1}{2} - t_{ij} \right) u_i \right] \gamma_{ij} m_{ij} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} u_i v_i \gamma_{ij} m_{ij}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

U prvom članu mijenjamo redoslijed sumacije i preimenujemo indekse:

$$\begin{aligned} b_h(u_h, v_h) &= \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} v_j \left[(1 - t_{ji}) u_i - \left(\frac{1}{2} - t_{ji} \right) u_j \right] \gamma_{ji} m_{ji} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} u_i v_i \gamma_{ij} m_{ij}. \end{aligned}$$

Zatim iskoristimo sljedeće relacije, koje su jednostavan rezultat iz $d_{ji} = d_{ij}$ i pretpostavke na γ_{ij} i t_{ij} :

$$(1 - t_{ji}) \gamma_{ji} = -t_{ij} \gamma_{ij}, \quad \left(\frac{1}{2} - t_{ji} \right) \gamma_{ji} = \left(\frac{1}{2} - t_{ij} \right) \gamma_{ij}.$$

Tako dobijemo, zbog $m_{ji} = m_{ij}$.

$$\begin{aligned} b_h(u_h, v_h) &= \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} v_j \left[-t_{ij} u_i - \left(\frac{1}{2} - t_{ij} \right) u_j \right] \gamma_{ij} m_{ij} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} u_i v_i \gamma_{ij} m_{ij}. \end{aligned}$$

Uzimajući aritmetičku sredinu oba prikaza b_h , dolazimo do

$$\begin{aligned} b_h(u_h, v_h) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} u_i v_i \gamma_{ij} m_{ij} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \left[(1 - t_{ij}) u_j v_i - t_{ij} u_i v_j - \left(\frac{1}{2} - t_{ij} \right) (u_i v_i + u_j v_j) \right] \gamma_{ij} m_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} \left[\left(\frac{1}{2} - t_{ij} \right) (u_j v_i + u_i v_j - u_i v_i - u_j v_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (u_j v_i - u_i v_j) \right] \gamma_{ij} m_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} u_i v_i \gamma_{ij} m_{ij}. \end{aligned}$$

Sada lako slijedi tvrdnja leme. ■

Korolar 3.12 *Neka su $q_1, q_2, \operatorname{div} \mathbf{q} \in C(\overline{\Omega})$. Pod pretpostavkama Leme 3.11 i također pretpostavke svojstva (P2) za funkciju R , bilinearna forma b_h zadovoljava za svaki $v_h \in V_h$ ocjenu*

$$b_h(v_h, v_h) \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 \left[\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx + \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\Gamma_{ij}} (\gamma_{ij} - \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q}) \, d\sigma \right] \quad (3.22)$$

Dokaz: Budući da zbog svojstva (P2) u (3.16) vrijedi $(t_{ij} - \frac{1}{2})\gamma_{ij} \geq 0$, iz Leme 3.11 direktno slijedi

$$b_h(v_h, v_h) \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda_i} v_i^2 \gamma_{ij} m_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} m_{ij}.$$

Za unutarnju sumu možemo pisati

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} m_{ij} &= \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\Gamma_{ij}} \gamma_{ij} \, d\sigma \\ &= \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q} \, d\sigma + \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\Gamma_{ij}} (\gamma_{ij} - \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q}) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Prvi član može biti zapisan kao integral po rubu od Ω_i , tj.

$$\sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{\nu}_{ij} \cdot \mathbf{q} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{q} \, d\sigma.$$

Iz Gaussovog teorema o divergenciji slijedi

$$\int_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{q} \, dx = \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx$$

■

Napomena 3.13 *Ako su aproksimacije γ_{ij} izabrane u skladu s (3.6), tada vrijedi $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}$ i (3.22) se pojednostavljuje u*

$$b_h(v_h, v_h) \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx.$$

Koristeći sličan dokaz kao u postupku s članom $\sum_{j \in \Lambda_i} \gamma_{ij} m_{ij}$ u dokazu Korolara 3.12, veličina $d_h(v_h, v_h)$ može se prikazati kao

$$\begin{aligned} d_h(v_h, v_h) &= \sum_{i \in \Lambda} r_i v_i^2 m_i = \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 \int_{\Omega_i} r_i \, dx \\ &= \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 \int_{\Omega_i} r \, dx + \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 \int_{\Omega_i} (r_i - r) \, dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Drugi član nestaje ako su aproksimacije r_i definirane kao u (3.7).

Teorem 3.14 *Neka su t_{ij} definirani s (3.15) s tim da R zadovoljava svojstva (P1) i (P2). Pretpostavimo da je $k > 0$, $q_1, q_2, \operatorname{div} \mathbf{q}, r \in C(\bar{\Omega})$, $r + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{q} \geq r_0 = \text{const} \geq 0$ na Ω i da su aproksimacije γ_{ij} i r_i respektivno, izabrane u skladu s (3.6) i (3.7). Pod pretpostavkama Leme 3.8 imamo za svaki $v_h \in V_h$*

$$a_h(v_h, v_h) \geq k \langle \nabla v_h, \nabla v_h \rangle_0 + r_0 \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 m_i = k |v_h|_1^2 + r_0 \|v_h\|_{0,h}^2,$$

to jest, bilinearna forma a_h je uniformno V_h -eliptička.

Dokaz: Počinjemo razmatranjem $a_h^0(v_h, v_h)$. Uslijed Korolara 3.9 vrijedi

$$a_h^0(v_h, v_h) = k \langle \nabla v_h, \nabla v_h \rangle_0 = k |v_h|_1^2.$$

Nadalje, iz Napomene 3.13 i jednadžbe (3.23) imamo

$$b_h(v_h, v_h) + d_h(v_h, v_h) \geq \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{q} + r \right) dx \geq r_0 \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 m_i.$$

Budući da je po definiciji

$$a_h(v_h, v_h) = a_h^0(v_h, v_h) + b_h(v_h, v_h) + d_h(v_h, v_h),$$

obje relacije daju tvrdnju teorema. ■

Sljedeći rezultat je standardan u metodi konačnih elemenata i nećemo ga dokazivati (vidi [1]).

Napomena 3.15 *Neka je familija triangulacija $(\mathcal{T}_h)_h$ regularna. Tada su norme $\|\cdot\|_{0,h}$ i $\|\cdot\|_0$ uniformno ekvivalentne na V_h , tj. postoje konstante $C_1, C_2 > 0$, neovisne o h , takve da je*

$$C_1\|v\|_0 \leq \|v\|_{0,h} \leq C_2\|v\|_0, \quad \forall v \in V_h.$$

Korolar 3.16 *Pod pretpostavkama Teorema 3.14 i za regularnu familiju triangulacija $(\mathcal{T}_h)_h$ postoji konstanta $\alpha > 0$ neovisna o h takva da vrijedi*

$$a_h(v_h, v_h) \geq \alpha\|v_h\|_1^2, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Dokaz: Iz Napomene 3.15 i Teorema 3.14

$$a_h(v_h, v_h) \geq k|v_h|_1^2 + r_0C_1^2\|v_h\|_0^2 \geq \alpha\|v_h\|_1^2,$$

gdje za α možemo uzeti $\min\{k, r_0C_1^2\}$.

S druge strane, ako iskoristimo Poincaréovu nejednakost¹ i homogeni rubni uvjet, onda nam ne treba uvjet na triangulaciju budući da ne moramo iskoristiti prethodnu napomenu. Ovdje predstavljen dokaz je primijenjiv i na druge rubne uvjete. ■

Primjenom Lax-Milgramovog teorema dobivamo:

Korolar 3.17 *U uvjetima Teorema 3.14 metoda konačnih volumena (3.14) ima jedinstveno rješenje.*

Teorem 3.14 (ili Korolar 3.16) dokazuje stabilnost metode konačnih volumena. To je osnovni rezultat za dokaz ocjene greške.

Teorem 3.18 *Neka je $(\mathcal{T}_h)_{h \in (0, \bar{h}]}$ regularna familija konformnih triangulacija, gdje se u slučaju Voronoijevog dijagrama uz to traži i da niti jedan trokut nema tupi kut. Nadalje, pretpostavimo u (3.4) $k > 0$, $q_1, q_2, \operatorname{div} \mathbf{q}, r \in C(\bar{\Omega})$, $r + \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{q} \geq r_0 = \operatorname{const} \geq 0$ na Ω , $f \in C^1(\bar{\Omega})$, i da su aproksimacije γ_{ij} , odnosno r_i izabrane u skladu s (3.6), odnosno (3.7) respektivno. Neka je t_{ij} definiran s (3.15), s tim da R zadovoljava (P1) i (P2). Ako egzaktno rješenje u od (3.4) pripada prostoru $\mathbf{H}^2(\Omega)$ i s $u_h \in V_h$ označimo rješenje od (3.14), onda vrijedi*

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch [\|u\|_2 + |f|_{1,\infty}], \quad (3.24)$$

gdje je konstanta $C > 0$ neovisna o h .

¹Vidi Dodatak

Dokaz: Označimo li s $I_h: C(\overline{\Omega}) \rightarrow V_h$ interpolacijski operator definiran u (2.14), te stavimo li $v_h := u_h - I_h(u)$, imamo

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &= a_h(u_h, v_h) - a_h(I_h(u), v_h) \\ &= \langle f, v_h \rangle_{0,h} - a_h(I_h(u), v_h) \\ &= \langle f, v_h \rangle_{0,h} - \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} f \, dx + \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} f \, dx - a_h(I_h(u), v_h). \end{aligned}$$

Iz definicije diskretne forme $\langle f, v_h \rangle_{0,h}$ te iz diferencijalne jednadžbe (3.4), razmatrajući kao jednadžbe u $L^2(\Omega)$ dobivamo

$$a_h(v_h, v_h) = \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} (f_i - f) \, dx + \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} Lu \, dx - a_h(I_h(u), v_h),$$

gdje je $Lu = -\operatorname{div}(k\nabla u - \mathbf{q}u) + ru$.

Za $f \in C^1(\overline{\Omega})$ i izbor $f_i := f(a_i)$, lako je vidjeti da je

$$|f_i - f(x)| \leq |f|_{1,\infty} \max_{K: a_i \in K} h_k \leq Ch|f|_{1,\infty}, \quad \forall x \in \Omega_i.$$

Stoga slijedi

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} (f_i - f) \, dx \right| &\leq Ch|f|_{1,\infty} \sum_{i \in \Lambda} |v_i| m_i \\ &\leq Ch|f|_{1,\infty} \left\{ \sum_{i \in \Lambda} v_i^2 m_i \right\}^{1/2} \underbrace{\left\{ \sum_{i \in \Lambda} m_i \right\}^{1/2}}_{\leq \sqrt{|\Omega|}} \\ &\leq Ch|f|_{1,\infty} \|v_h\|_{0,h}. \end{aligned}$$

Za drugi izbor vrijednosti f_i (vidi (3.7)) trivijalno je zadovoljena ista ocjena. Teški dio dokaza je dobiti ocjenu greške konzistencije.

$$\left| \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} Lu \, dx - a_h(I_h(u), v_h) \right|.$$

Dokaz je vrlo opsežan pa ćemo izostaviti detalje. Kompletan dokaz sljedećeg rezultata je dan u [4]:

$$\left| \sum_{i \in \Lambda} v_i \int_{\Omega_i} Lu \, dx - a_h(I_h(u), v_h) \right| \leq Ch\|u\|_2 \{ |v_h|_1^2 + \|v_h\|_{0,h}^2 \}^{1/2}$$

Uzimajući u obzir obje dobivene ocjene, te Napomenu 3.15, dolazimo do

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &\leq Ch [\|u\|_2 + |f|_{1,\infty}] \{ \|v_h\|_1^2 + \|v_h\|_{0,h}^2 \}^{1/2} \\ &\leq Ch [\|u\|_2 + |f|_{1,\infty}] \|v_h\|_1 . \end{aligned}$$

Iz toga i Korolara 3.16 imamo

$$\|v_h\|_1 \leq Ch [\|u\|_2 + |f|_{1,\infty}] .$$

Još ostaje primijeniti nejednakost trokuta i standardnu ocjenu greške za interpolacijski operator (vidi Teorem 2.5)

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - I_h(u)\|_1 + \|v_h\|_1 \leq Ch [\|u\|_2 + |f|_{1,\infty}] .$$

■

Istaknimo da je greška u H^1 -polunormi istog reda kao kod MKE s linearnim konačnim elementima.

Napomena 3.19 *Može se pokazati da je ocjena (3.24) optimalna. Za razliku od metode konačnih elemenata gdje u optimalnu ocjenu ulazi samo L^2 -norma funkcije f , kod MKV nužno ulazi norma koja sadrži prvu derivaciju funkcije f .*

Dodatak A

Dodatak

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena domena.

A.1 L^p prostori

Prostor

$$L^2(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty\}$$

je Hilbertov u skalarnom produktu

$$\langle u, v \rangle_0 = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

a norma u $L^2(\Omega)$ je dana s $\|u\|_0 = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_0}$.

Prostor

$$L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \exists C > 0, |u(x)| \leq C, \forall x \in \Omega\}$$

je Banachov u normi

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ svugdje,} \\ \text{osim eventualno na skupu mjere nula}\}$$

Za u neprekidne funkcije je ta norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

A.2 Soboljevi prostori

Prostor

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2\}$$

je Hilbertov uz skalarni produkt

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx,$$

a pripadna norma je $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_1}$.

Polunorma je definirana s

$$|u|_1 = |u|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Ako definiramo prostor

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\},$$

onda je $H_0^1(\Omega)$ kao potprostor od $H^1(\Omega)$, uz naslijeđeni skalarni produkt također Hilbertov prostor.

Prostor

$$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), i, j = 1, 2\},$$

je uz skalarni produkt

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_2 = \langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx + \\ &+ \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx \end{aligned}$$

također Hilbertov.

Pripadna norma je $\|u\|_2 = \|u\|_{H^2(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_2}$.

Polunorma je definirana s

$$|u|_2 = |u|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Još definirajmo za $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ polunormu

$$|u|_{1,\infty} = \max_{1 \leq i \leq 2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\infty}$$

Teorem A.1 (Poincaréova nejednakost) *Ako je domena Ω ograničena, onda postoji konstanta $c = c(\Omega)$ takva da za svako $u \in H_0^1(\Omega)$ vrijedi*

$$\|u\|_{L^2} \leq c|u|_{H^1(\Omega)}.$$

Za dokaz vidi [3].

Bibliografija

- [1] P. Knabner, L. Angermann: *Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations*, Texts in Applied Mathematics 44, Springer, 2003.
- [2] L. Angermann: *An introduction to finite volume methods for linear elliptic equations of second order*, Universität Erlangen-Nürnberg.
- [3] P.G. Ciarlet: *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] L. Angermann: *Error estimates for the finite-element solution of an elliptic singularly perturbed problem. IMA J. Numer. Anal.*, 15:161–196, 1995.
- [5] S. Fortune: *Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. In D.-Z. Du and F.K. Hwang, editors, Computing in Euclidean geometry, 193–233*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1992.
- [6] C. L. Lawson: *Software for C^1 surface interpolation. In J. R. Rice, editor, Mathematical Software III, 161–194*, Academic Press, New York, 1977.
- [7] M. Bern and D. Eppstein: *Mesh generation and optimal triangulation. In D.-Z. Du and F.K. Hwang, editors, Computing in Euclidean geometry, 23–90*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1992.
- [8] K.W. Morton: *Numerical solution of Convection-Diffusion Problems*, Chapman & Hall, London, 1996.
- [9] F.P. Preparata and M.I. Shamos, *Computational geometry*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.
- [10] Svetozar Kurepa: *Funkcionalna analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.