SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Radošević

TEOREMI ULAGANJA SOBOLJEVLJEVIH PROSTORA I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, studeni 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teoremi ulaganja prostora Soboljeva važan su alat u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Govore pripada li funkcija iz nekog Soboljevljevog prostora i nekom drugom pogodnom prostoru, npr. prostoru neprekidnih funkcija, i daju neke korisne nejednakosti između normi. Posebno su korisni teoremi o kompaktnosti ulaganja prema kojima za ograničen niz u manjem prostoru možemo dobiti podniz koji konvergira u većem prostoru. To recimo omogućuje da rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe nađemo na limesu niza aproksimativnih rješenja (vidi primjer u 5.3).

Ovaj je rad zamišljen kao kratak prikaz teorema ulaganja Soboljevljevih prostora te njihove primjene u teoriji egistencije rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Dokazat ćemo teoreme ulaganja prostora $W^{m,p}(\Omega)$ za glatku ograničenu domenu Ω te Rellich-Kondrachovljev teorem koji govori o kompaktnosti određenih ulaganja pomoću kojeg ćemo u dva primjera dokazati egistenciju rješenja.

Poglavlje 1 prikaz je osnovnih pojmova i rezultata iz funkcionalne analize koje ćemo koristiti u glavnom dijelu rada. U Poglavlju 2 preko definicije L^p prostora i slabih derivacija dolazimo do definicije Soboljevljevih prostora, dok u Poglavlju 3 dokazujemo teoreme ulaganja Soboljevljevih prostora. Poglavlje 4 vezano je uz teoreme o fiksnoj točki (Brouwerov i Schauderov) potrebne za dokaz egzistencije rješenja primjera kojima ćemo se baviti u Poglavlju 5.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr. sc. Mladenu Juraku, na strpljenu i pomoći pri izradi ovog rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i notacija

1.1 Kompaktni operatori

Definicija 1.1.1. *Neka je X normirani prostor. Kažemo da je skup $S \subset X$* kompaktan *ako svaki niz u S ima konvergentan podniz s limesom u S.*

Napomena 1.1.2. *Može se pokazati da je skup $S \subset X$ kompaktan ako i samo ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač. Ova karakterizacija se uzima za definiciju kompaktnog skupa u općenitom topološkom prostoru.*

Definicija 1.1.3. *Neka je X normirani prostor. Skup $S \subset X$ je* relativno kompaktan *ako je njegov zatvarač $\overline{S}$ kompaktan skup.*

Napomena 1.1.4. *Vrijedi da je skup $S \subset X$ je relativno kompaktan ako i samo ako svaki niz elemenata iz S ima podniz koji konvergira u X.*

Ako je X još i potpun, imamo sljedeći rezultat:

Teorem 1.1.5. *Skup S je relativno kompaktan u Banachovom prostoru X ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$, takvi da je*

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ s ovom svojstvom zovemo konačnom ε-mrežom *za S.*

Definicija 1.1.6. *Neka su X, Y Banachovi prostori. Kažemo da je neprekidno preslikavanje $A : X \to Y$* kompaktno *ako je za svaki ograničen skup $U \subset X$ skup $A(U)$ relativno kompaktan u Y.*

Napomena 1.1.7. **(a)** *Neprekidno preslikavanje* $A : X \to Y$ *je kompaktno ako i samo ako za svaki ograničen niz* (x_n) *u* X *niz* $A(x_n)$ *ima konvergentan podniz.*

(b) *Da bi linearno preslikavanje* $A : X \to Y$ *bilo kompaktno dovoljno je zahtijevati da je za svaki ograničen skup* U *njegova slika* $A(U)$ *relativno kompaktan skup. U tom slučaju je* A *ograničen jer je relativno kompaktan skup uvijek ograničen. Kako je svaki ograničeni linearan operator neprekidan, tada je* A *neprekidan.*

(c) *Neka su* X, Y *i* Z *normirani prostori. Ako je* $A : X \to Y$ *neprekidan, a* $B : Y \to Z$ *kompaktan linearan operator, tada je i njihova kompozicija* $BA : X \to Z$ *kompaktan linearan operator. To vrijedi zato što je neprekidan linearan operator ograničen pa ograničen skup* U *preslikava u ograničen skup* $A(U)$ *stoga, zbog kompaktnosti,* B *preslikava taj skup u relativno kompaktan skup* $B(A(X))$*.*

Definicija 1.1.8. *Neka su* X *i* Y *Banachovi prostori i* $X \subset Y$*. Kažemo da je* X neprekidno uložen *u* Y *ako je linearno preslikavanje* $i : X \to Y$ *definirano sa* $i(x) = x,\ x \in X$ *neprekidno. Ako je preslikavanje* $i : X \to Y$ *još i kompaktno, tada kažemo da je* X kompaktno uložen *u* Y*, i pišemo* $X \subset\subset Y$*.*

Na kraju navodimo teorem koji nam daje kriterij kompaktnosti niza neprekidnih funkcija, a njegov dokaz se može pronaći u [4].

Teorem 1.1.9 (Arzela-Ascoli)**.** *Neka je* (f_k) *niz funkcija s* $\mathbb{R}^n$ *u* $\mathbb{R}$ *koji je*

(i) uniformno ograničen: *postoji konstanta* $M > 0$ *takva da vrijedi*

$$|f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

(ii) uniformno ekvineprekidan: *za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Tada postoji podniz $(f_{k_j}) \subset (f_k)$ *i neprekidna funkcija* f *takva da*

$$f_{k_j} \to f \quad \textit{uniformno na svakom kompaktnom podskupu od } \mathbb{R}^n.$$

1.2 Slaba konvergecija

Definicija 1.2.1. *Neka je* X *normirani prostor. Kažemo da niz* $(x_n) \subset X$ *konvergira slabo prema* $x \in X$ *ako za svaki* $f \in X'$ *niz* $(f(x_n))$ *konvergira prema* $f(x)$ *u* $\mathbb{R}$*, gdje je* X' *dualni prostor od* X*, tj. skup svih neprekidnih linearnih funkcionala s* X *u* $\mathbb{R}$*.*

Napomena 1.2.2. *U Hilbertovom prostoru H sa skalarnim produktom $(\cdot, \cdot)$, prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji funkcionala (vidi [6]), niz (x_n) konvergira slabo prema $x \in H$ ako i samo ako za svaki $y \in H$*

$$(x_n, y) \to (x, y).$$

Teorem 1.2.3. *Svaki ograničen niz u Hilbertovom prostoru ima slabo konvergentan podniz.*

Dokaz. Može se pronaći npr. u [2]. □

1.3 Prostori neprekidnih funkcija

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup. Tada je

$$C(\Omega) = \{\, u : \Omega \to \mathbb{R} \;:\; u \text{ je neprekidna na } \Omega \,\}$$

vektorski prostor uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja skalarom.

Radi jednostavnosti zapisa viših derivacija uvodimo pojam multiindeksa. Definiramo *multiindeks* kao n-torku nenegativnih cijelih brojeva $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ te njenu *duljinu* kao broj

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

i kažemo da je multiindeks α reda $|\alpha|$. Na skupu multiindeksa dan je parcijalni uređaj

$$\alpha \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i \leq \beta_i \; \forall i,$$

dok se zbrajanje i oduzimanje multiindeksa definira standardno po komponentama, $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n)$, uz uvjet da je kod oduzimanja $\beta \leq \alpha$. Derivaciju funkcije u reda $|\alpha|$ označavamo s

$$\partial^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Za $k \in \mathbb{N}$ definiramo potprostor

$$C^k(\Omega) = \{\, u \in C(\Omega) \;:\; \partial^\alpha u \in C(\Omega), \; \forall |\alpha| \leq k \,\}$$

te pišemo $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ i

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Funkcija $u \in C(\Omega)$ općenito nije ograničena i nije dobro definirana na $\partial\Omega$. Međutim, ako je $u \in C(\Omega)$ uniformno neprekidna na Ω, tada postoji jedinstveno ograničeno neprekidno proširenje do zatvarača $\overline{\Omega}$ od Ω. Za takve funkcije kažemo da su neprekidne na $\overline{\Omega}$.

Stoga definiramo vektorske prostore

$$C(\overline{\Omega}) = \{\, u : \Omega \to \mathbb{R} \ :\ u \text{ je neprekidna na } \overline{\Omega} \,\},$$
$$C^k(\overline{\Omega}) = \{\, u \in C(\overline{\Omega}) \ :\ \partial^\alpha u \in C(\overline{\Omega}),\ \forall |\alpha| \le k \,\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kao i prije koristimo oznake

$$C^0(\overline{\Omega}) \equiv C(\overline{\Omega}) \quad \text{i} \quad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Prostor $C^k(\overline{\Omega}),\ k \in \mathbb{N}$ je Banachov s normom

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)|.$$

S $C^k_0(\Omega)$ označavamo potprostor od $C^k(\overline{\Omega})$ koji se sastoji od funkcija $u \in C^k(\overline{\Omega})$ za koje je $u = 0$ na $\partial\Omega$.

Nosač funkcije $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je skup

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{\, x \in \Omega \ :\ u(x) \neq 0 \,\}}.$$

Zatim definiramo potprostore

$$C^k_c(\Omega) = \{\, u \in C^k(\Omega) \ :\ u \text{ ima kompaktan nosač} \,\}, \quad C^\infty_c(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k_c(\Omega).$$

Za funkciju $u : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da je *Lipschitzova* ako postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Za $0 < \gamma \le 1$ kažemo da je funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *Hölderova s eksponentom* γ ako postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y|^\gamma, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Sada definiramo prostore Hölderove prostore diferencijabilnih funkcija s

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) = \{\, u \in C^k(\overline{\Omega}) \ :\ \partial^\alpha u \text{ je Hölderova s eksponentom } \gamma,\ \forall |\alpha| = k \},$$

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < \gamma \le 1$. Na $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ definiramo polunormu

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

te normu

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Slično na $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ definiramo normu

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Pokazuje se da je s tom normom $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ potpun (vidjeti npr. [3]).

1.4 Regularnost granice

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domena, tj. otvoren i povezan skup. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je Ω ograničena.

Definicija 1.4.1. *Ograničena domena $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je Lipschitzova (klase C^k) ako za svaku točku $x \in \partial\Omega$ postoje okolina U i sustav ortogonalnih koordinata $y = (y', y_n), y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ takvi da vrijedi:*

(i) U novim koordinatama U je hiperkocka

$$U = \{\, y \in \mathbb{R}^n \; : \; -a_j < y_j < a_j, j = 1, 2, \dots, n \,\}.$$

(ii) Postoji Lipschitzova (klase C^k) funkcija ϕ definirana na

$$U' = \{\, y' \in \mathbb{R}^{n-1} : \; -a_j < y_j < a_j, j = 1, 2, \dots, n-1 \,\},$$

koja zadovoljava

$$\forall y' \in U', \quad |\phi(y')| \le \frac{a_n}{2}$$
$$\Omega \cap U = \{\, y \in \mathbb{R}^n \; : \; y_n > \phi(y') \,\}, \quad \partial\Omega \cap U = \{\, y \in \mathbb{R}^n \; : \; y_n = \phi(y') \,\}.$$

Značenje ove definicije je da se rub $\partial\Omega$ može lokalno prikazati kao graf Lipschitzove (klase C^k) funkcije te da se skup Ω lokalno nalazi s jedne strane granice. Kako je domena Ω ograničena njen rub Ω je kompaktan pa uvijek možemo naći konačno mnogo ovakvih karata koje pokrivaju cijeli $\partial\Omega$.

Regularnost granice ograničene domene Ω je bitna pretpostavka koju ćemo koristiti u nastavku ovog rada.

Poglavlje 2

Prostori Soboljeva

U ovom poglavlju uvodimo Soboljevljeve prostore $W^{m,p}$, za $m \in \mathbb{N}$ i $1 \leq p \leq \infty$, te navodimo neka njihova svojstva koja će nam biti potrebna u dokazima teorema ulaganja. Soboljevljevi prostori definiraju se kao potprostori L^p prostora koje ćemo obraditi u posebnom potpoglavlju.

2.1 L^p prostori

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup.

Definicija 2.1.1. *Za* $1 \leq p < \infty$ *definiramo*

$$L^p(\Omega) = \{\ u : \Omega \to \mathbb{R}\ :\ u \text{ je izmjeriva i } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty\ \}.$$

Pokazuje se da je $L^p(\Omega)$ vektorski prostor te je norma na $L^p(\Omega)$ dana s

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Funkcije u $L^p(\Omega)$ poistovjećujemo s klasama skoro svuda jednakih funkcija. Kažemo da su funkcije f i g jednake skoro svuda (s.s.), ako postoji skup A mjere nula takav da je

$$f(x) = g(x),\ \forall x \in A^c.$$

Definicija 2.1.2. *Za* $p = \infty$ *definiramo*

$$L^\infty(\Omega) = \{\ u : \Omega \to \mathbb{R}\ :\ u \text{ je izmjeriva i } \exists \text{ konstanta } C \text{ t.d. je } |u(x)| < C s.s.\ \}.$$

$L^\infty(\Omega)$ je vektorski prostor i norma na $L^\infty(\Omega)$ je dana s

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{\ C\ :\ |u(x)| < C\ s.s.\ \}.$$

Ako je u neprekidna funkcija, onda je

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Teorem 2.1.3. *Za $1 \leq p \leq \infty$ prostor $L^p(\Omega)$ je Banachov. Prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertov sa skalarnim produktom*

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Dokaz. Može se pronaći u [2]. □

Definicija 2.1.4. *Za funkciju u kažemo da je* lokalno integrabilna *na Ω ako je $u \in L^1(K)$ za svaki kompaktan podskup $K \subset \Omega$. Skup svih lokalno integrabilnih funkcija označavamo s $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definicija 2.1.5. *Za $1 \leq p \leq \infty$ definiramo* konjugirani eksponent *p' relacijom*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

uz dogovor da je $\frac{1}{\infty} = 0$.

Lema 2.1.6 (Youngova nejenakost)**.** *Neka su $a, b \geq 0$ i $1 < p < \infty$. Tada je*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Dokaz. Za $ab = 0$ tvrdnja je trivijalna, a za $a, b > 0$, jer je funkcija $x \mapsto e^x$ konveksna, imamo

$$\begin{aligned} ab = e^{\ln a + \ln b} &= e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{p'}\ln b^{p'}} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{p'}e^{\ln b^{p'}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}. \end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.7 (Hölderova nejednakost)**.** *Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Ako je $u \in L^p(\Omega)$ i $v \in L^{p'}(\Omega)$, tada je $uv \in L^1(\Omega)$ te vrijedi*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Za $p = 1$ i $p = \infty$ tvrdnja slijedi direktno iz definicija pripadnih normi. Stoga pretpostavimo da je $1 < p < \infty$. Nadalje, ukoliko je jedna od funkcija jednaka nuli, tvrdnja trivijalno vrijedi pa možemo pretpostaviti da su obje funkcije različite od nule. Iz Youngove nejednakosti dobivamo

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p\, dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v(x)|^{p'}\, dx = \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p'}\|v\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Sada, primjenom gornje nejednakosti na skalirane funkcije $u/\|u\|_{L^p(\Omega)}$ i $v/\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$, dobivamo

$$\frac{1}{\|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}}\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

Korolar 2.1.8 (Generalizirana Hölderova nejednakost)**.** *Neka su $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, za $i = 1, \dots, m$ te neka su $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ takvi da je*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

Tada je $u_1u_2\cdots u_m \in L^1(\Omega)$ te vrijedi

$$\int_\Omega |u_1(x)u_2(x)\cdots u_m(x)|\, dx \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}\dots\|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po m. Za $m = 1$ tvrdnja trivijalno vrijedi, a za $m = 2$ to je Hölderova nejednakost. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki m. Neka su $1 \leq p_1, \dots, p_{m+1} \leq \infty$ takvi da je $\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{p_i} = 1$ i neka su $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, za $i = 1, \dots, m+1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m$.

1. Prvo promotrimo slučaj $p_{m+1} = \infty$. Tada je $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i} = 1$ pa, prema pretpostavci indukcije i Hölderovoj nejednakosti, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_1(x)\cdots u_{m+1}(x)|\, dx &\leq \|u_1\cdots u_m\|_{L^1(\Omega)}\|u_{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)}\\ &\leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\dots\|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}\|u_{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

2. Za $p_{m+1} < \infty$ je $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i} = \frac{1}{p'_{m+1}}$, odnosno $\sum_{i=1}^{m}\frac{p'_{m+1}}{p_i} = 1$. Kako je $|u_i|^{p'_{m+1}} \in L^{p_i/p'_{m+1}}(\Omega)$, za $i = 1, \dots, m$, prema pretpostavci indukcije imamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_1(x)\cdots u_m(x)|^{p'_{m+1}}\, dx &\leq \|u_1^{p'_{m+1}}\|_{L^{p_1/p'_{m+1}}(\Omega)}\dots\|u_m^{p'_{m+1}}\|_{L^{p_m/p'_{m+1}}(\Omega)}\\ &= \left(\|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\dots\|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}\right)^{p'_{m+1}},\end{aligned}$$

odnosno

$$\|u_1 \cdots u_m\|_{L^{p'_{m+1}}(\Omega)} \le \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \ldots \|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}.$$

Konačno, primjenom Hölderove nejednakosti na funkcije $u_1 \cdots u_m \in L^{p'_{m+1}}(\Omega)$ i $u_{m+1} \in L^{p_{m+1}}(\Omega)$, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_1(x) \cdots u_{m+1}(x)|\, dx &\le \|u_1 \cdots u_m\|_{L^{p'_{m+1}}(\Omega)} \|u_{m+1}\|_{L^{p_{m+1}}(\Omega)} \\ &\le \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \ldots \|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} \|u_{m+1}\|_{L^{p_{m+1}}(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.9 (Interpolacijska nejednakost)**.** *Neka je* $1 \le p \le r \le q \le \infty$ *i*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{(1-\theta)}{q},$$

za neki $0 < \theta < 1$*. Ako je* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$*, tada je* $u \in L^r(\Omega)$ *te vrijedi*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \le \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

Dokaz. Kako je $\frac{\theta r}{p} + \frac{(1-\theta)r}{q} = 1$, primjenom Hölderove nejednakosti na funkcije $|u|^{\theta r} \in L^{p/(\theta r)}(\Omega)$ i $|u|^{(1-\theta)r} \in L^{q/((1-\theta)r)}(\Omega)$, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^r\, dx &= \int_\Omega |u|^{\theta r} |u|^{(1-\theta)r}\, dx \\ &\le \left(\int_\Omega |u|^{\theta r \frac{p}{\theta r}}\, dx\right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\theta)r\frac{q}{(1-\theta)r}}\, dx\right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}\end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

Lema 2.1.10 (Teorem ulaganja za L^p prostore)**.** *Neka je* $1 \le p \le q \le \infty$ *te neka je* $|\Omega| = \int_\Omega 1\, dx < \infty$*. Ako je* $u \in L^q(\Omega)$*, tada je* $u \in L^p(\Omega)$ *i*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Dokaz. Relacija (2.2) očito vrijedi ako je $p = q$ ili $q = \infty$. Stoga možemo pretpostaviti da je $1 \le p < q < \infty$. Tada Hölderova nejednakost daje

$$\int_\Omega |u|^p\, dx = \int_\Omega |u|^p \cdot 1\, dx \le \left(\int_\Omega |u|^{p\frac{q}{p}}\, dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega 1\, dx\right)^{1-\frac{p}{q}} = \|u\|^p_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$$

što povlači (2.2). □

Korolar 2.1.11. $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *za sve* $1 \le p \le \infty$ *i za svaku domenu* Ω.

U dosta slučajeva nam je bitna aproksimacija funkcija iz $L^p(\Omega)$ neprekidnim, ali i glatkim funkcijama.

Teorem 2.1.12. *Za* $1 \le p < \infty$ *je* $C_c(\Omega)$ *gust u* $L^p(\Omega)$.

Dokaz. Može se pronaći u [1]. □

Teorem 2.1.13. *Za* $1 \le p < \infty$ *prostor* $C_c^\infty(\Omega)$ *je gust u* $L^p(\Omega)$.

Dokaz. Može se pronaći u [1]. □

Napomena 2.1.14. **(a)** *Prethodna dva teorema ne vrijede u slučaju* $p = \infty$.

(b) *U dokazu Teorema 2.1.13 koristi se operator izglađivanja. Kako će nam kasnije trebati, sada navodimo njegovu definiciju.*

Definicija 2.1.15. *(i) Definiramo funkciju* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *s*

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{ako je } |x| < 1 \\ 0 & \text{ako je } |x| \ge 1, \end{cases}$$

gdje je $C > 0$ *konstanta takva da vrijedi* $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$. *Funkciju* η *zovemo* standardnim izglađivačem.

(ii) Za svaki $\varepsilon > 0$ *definiramo*

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

(iii) Na $L^1_{loc}(\Omega)$ *definiramo* operator izglađivanja *sa*

$$u \mapsto u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u.$$

To znači da je

$$u^\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)u(x-y)\, dy,$$

za $x \in \Omega_\varepsilon = \{ x \in \Omega \ : \ d(x, \partial\Omega) > \varepsilon \}$.

Napomena 2.1.16. **(a)** *Uočimo da su funkcije* η_ε *iz* C^∞ *s nosačem* $B(0,\varepsilon)$ *i vrijedi* $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1$.

(b) *Vrijedi*

- $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
- $u^\varepsilon \to u$ *s.s. kad* $\varepsilon \to 0$.
- *Ako je* $u \in C(\Omega)$, *onda* $u^\varepsilon \to u$ *uniformno na svakom kompaktnom podskupu od* Ω.
- *Ako je* $1 \le p < \infty$ *i* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, *onda* $u^\varepsilon \to u$ *u* $L^p_{loc}(\Omega)$.

2.2 Definicija i svojstva prostora Soboljeva

Prostori Soboljeva definiraju se pomoću pojma slabe parcijalne derivacije.

Definicija 2.2.1. *Za* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *kažemo da ima slabu parcijalnu derivaciju* $\partial^\alpha u$ *ako postoji* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *takva da je*

$$\int_\Omega u(x)\partial^\alpha \phi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

gdje je α *proizvoljan multiindeks. Funkciju* v *označavamo s* $\partial^\alpha u$ *i zovemo slabom parcijalnom derivacijom.*

Definicija 2.2.2. *Za* $1 \le p \le \infty$ *definiramo*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{\, u \in L^p(\Omega) \;:\; \partial^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \le k \,\}.$$

Na $W^{k,p}(\Omega)$ definiramo normu

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty \\ \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} &= \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Za $p = 2$ koristimo oznaku

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

Teorem 2.2.3. *Za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *i* $1 \le p \le \infty$ *prostor* $W^{k,p}(\Omega)$ *je Banachov.* $H^k(\Omega)$ *je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom*

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \partial^\alpha u(x)\partial^\alpha v(x)\,dx.$$

Dokaz. Vidjeti u [3]. □

Definicija 2.2.4. *S $W_0^{k,p}(\Omega)$ označavamo zatvarač prostora $C_c^\infty(\Omega)$ u $W^{k,p}(\Omega)$.*

Ponovno za $p = 2$ pišemo $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.
Uz određene uvjete na glatkoću domene Ω, može se pokazati da vrijedi

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{\ u \in W^{k,p}(\Omega)\ :\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega\ \},$$

gdje značenje uvjeta $u = 0$ na $\partial\Omega$ još treba definirati. Naime, za funkciju $u \in C(\overline{\Omega})$ su njene vrijednosti jednoznačno određene, stoga možemo definirati njenu restrikciju na rub $\partial\Omega$. Međutim, kod prostora $W^{1,p}(\Omega)$ je problem u tome što funkcije poistovjećujemo s klasama ekvivalencije skoro svuda jednakih funkcija. Kako je $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ skup (Lebesgueove) mjere nula, restrikcija ne rub $\partial\Omega$ ne može se neposredno definirati. Ipak, moguće je jednoznačno definirati vrijednosti funkcije iz $W^{1,p}(\Omega)$ na $\partial\Omega$. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.2.5 (Teorem o tragu)**.** *Neka je Ω ograničena domena s C^1 rubom. Tada postoji jedinstveni linearan operator $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ takav da*

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ ako je $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;

(ii) postoji konstanta $C > 0$, koja ovisi samo o p i Ω, takva da

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Operator T zove se operator traga *i kažemo da je Tu* trag *funkcije u na $\partial\Omega$.*

Dokaz. Vidjeti [3]. □

Aproksimacija glatkim funkcijama

Sada navodimo teoreme o aproksimaciji prostora Soboljeva glatkim funkcijama čiji se dokazi mogu pronaći u [3].

Teorem 2.2.6 (Lokalna aproksimacija glatkim funkcijama)**.** *Neka je $u \in W^{k,p}(\Omega)$ za neki $1 \leq p < \infty$ te neka je*

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \quad \text{na } \Omega_\varepsilon,$$

gdje je $\Omega_\varepsilon = \{\ x \in \Omega\ :\ d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Tada

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ za svaki $\varepsilon > 0$,

(ii) $u^\varepsilon \to u$ u $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$, kad $\varepsilon \to 0$.

Napomena 2.2.7. *Kažemo da niz (u_m) konvergira u $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ prema u ako $u_m \to u$ u $W^{1,p}(U)$ za svaki $U \subset\subset \Omega$, odnosno za svaki U takav da je $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ i $\overline{U}$ je kompaktan.*

Teorem 2.2.8 (Globalna aproksimacija glatkim funkcijama do ruba)**.** *Neka je Ω ograničena domena klase C^1 te neka je $u \in W^{k,p}(\Omega)$ za neki $1 \leq p < \infty$. Tada postoji niz funkcija (u_m) u $C^\infty(\overline{\Omega})$ takav da*

$$u_m \to u \quad u\ W^{k,p}(\Omega).$$

Teorem o proširenju

Ako funkciju iz prostora $W^{1,p}(\Omega)$ proširimo nulom na $\mathbb{R}^n$, općenito nećemo dobiti funkciju iz prostora $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ jer bismo tako mogli dobiti prekid funkcije duž ruba $\partial\Omega$ zbog kojeg proširena funkcija ne bi imala prvu parcijalnu derivaciju. Međutim, možemo dobiti proširenje čiji je nosač unutar proizvoljnog ograničenog skupa $V \subset \mathbb{R}^n$ takvog da je $\Omega \subset V$. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.2.9. *Neka je Ω ograničena domena klase C^1 te neka je V otvoren ograničen skup takav da je $\Omega \subset\subset V$. Tada za $1 \leq p \leq \infty$ postoji ograničeni linearni operator*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

takav da za svaki $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vrijedi:

(i) *$Eu = u$ s.s. na Ω,*

(ii) *Eu ima nosač sadržan u V,*

(iii) *postoji konstanta $C > 0$, koja ovisi samo o p, Ω i V, takva da je*

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Kažemo da je Eu proširenje *od u na $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Vidjeti [3]. □

Teorem o proširenju, zajedno s teoremom o aproksimaciji glatkim funkcijama, primjenjivat ćemo u dokazima teorema ulaganja Soboljevljevih prostora kako bismo prešli na glatke funkcije s kompaktim nosačem za koje vrijedi nejednakost oblika

$$\|u\| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in C_c^1(\Omega),$$

gdje je $C > 0$ konstanta, a $\|\cdot\|$ norma nekog Hölderovog ili L^p prostora.

Poglavlje 3

Teoremi ulaganja prostora Soboljeva

Cilj nam je dokazati teoreme ulaganja Soboljevljevih prostora $W^{k,p}(\Omega)$ za $k \in \mathbb{N}$ i glatku ograničenu domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3.1 Soboljevljeve nejednakosti

U ovom potpoglavlju bavimo se neprekidnim ulaganjima Soboljevljevih prostora u L^p ili Hölderove prostore. U koji će prostor prostor $W^{k,p}$ biti uložen ovisit će o odnosu produkta kp i dimenzije prostora $\mathbb{R}^n$. Počet ćemo s prostorima $W^{1,p}$ za slučajeve $1 \leq p < n$ i $n < p \leq \infty$, a nakon toga dokazane teoreme proširiti prostore $W^{k,p}$, za $k \in \mathbb{N}$.

Gagliardo-Nirenberg-Soboljevljeva nejednakost

U ovom poglavlju pretpostavljamo da je

$$1 \leq p < n.$$

Htjeli bismo dobiti nejednakost oblika

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{3.1}$$

za neke konstante $C > 0$, $1 \leq q < \infty$.

Pretpostavimo da vrijedi nejednakost oblika (3.1). Uzmimo proizvoljnu funkciju $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0$ te primijenimo (3.1) na funkciju $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$:

$$||u_\lambda||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C||Du_\lambda||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Kako je

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, \mathrm{d}y$$

i
$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p \, \mathrm{d}x = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p \, \mathrm{d}x = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p \, \mathrm{d}y,$$
dobivamo
$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{n/p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$
odnosno
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$
Ako je eksponent $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, nakon puštanja λ ili u 0 ili u ∞ (ovisno o predznaku eksponenta) zaključujemo da je $u \equiv 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $u \not\equiv 0$. Prema tome, ako želimo imati nejednakost (3.1), nužno mora vrijediti $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$.

Definicija 3.1.1. *Za* $1 \leq p < n$*, definiramo* Soboljevljev eksponent *od* p *sa*
$$p^* := \frac{np}{n-p}. \tag{3.2}$$

Uočimo da je
$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p \tag{3.3}$$

Pokazali smo da nejednakost (3.1) može vrijediti samo za $q = p^*$. Sljedeći teorem nam govori da u tom slučaju nejednakost zaista vrijedi.

Teorem 3.1.2 (Gagliardo-Nirenberg-Soboljevljeva nejednakost)**.** *Neka je* $1 \leq p < n$*. Tada vrijedi*
$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$
gdje je $C = \frac{p(n-1)}{n-p}$*.*

Napomena 3.1.3. *Uvjet kompaktnosti nosača od* u *je nužan, što pokazuje primjer kada je* $u \equiv 1$*. Međutim, konstanta* C *ne ovisi o veličini nosača funkcije* u*.*

Dokaz. 1. Prvo promotrimo slučaj $p = 1$. Tada je $p^* = \frac{n}{n-1}$. Neka je $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Kako u ima kompaktan nosač, za sve $i = 1, \ldots, n$ i $x \in \mathbb{R}^n$ imamo
$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \, dy_i.$$

Slijedi da je
$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)| \, dy_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

pa imamo

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du(x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_n)|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integriramo gornju nejednakost po x_1

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\,dx_1\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\,dx_1\\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz generalizirane Hölderove nejednakosti za funkcije $u_i = \left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$ i $p_i = n-1$ $(i = 2,\ldots,n)$. Sada integracijom po x_2 dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}\,dx_2$$

za $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_1$, $I_i = \int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\,dy_i$ $(i = 3,\ldots,n)$. Ponovno, promjenom generalizirane Hölderove nejednakosti, dolazimo do

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_2\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ \prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\,dx_2\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

Dalje induktivno, integriranjem po $x_3,\ldots,x_n$, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx &\leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\ldots dy_i\ldots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|\,dx\right)^{\frac{n}{n-1}}\end{aligned} \tag{3.5}$$

odnosno

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

2. Pokažimo sada da tvrdnja vrijedi za $1 < p < n$. Neka je $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Primijenimo ocjenu (3.5) na funkciju $v = |u|^\gamma$, za $\gamma > 1$ (tada je $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$):

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\le \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma|\,dx = \gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma-1}|Du|\,dx\\ &\le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Zadnja nejednakost dobivena je iz Hölderove nejednakosti. Izaberemo γ takav da je $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$, odnosno $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$. Tada je $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$ i $\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}$ pa iz (3.6) slijedi

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

za $C = \frac{p(n-1)}{n-p}$. □

Teorem 3.1.4 (Ocjena za $W^{1,p}$, $1 \le p < n$)**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domena klase C^1 te neka je $u \in W^{1,p}(\Omega)$, za $1 \le p < n$. Tada je $u \in L^{p^*}(\Omega)$ te postoji konstanta $C > 0$, koja ovisi samo o p, n i Ω, takva da je*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Dokaz. Kako je ograničena domena Ω klase C^1, prema Teoremu 2.2.9, postoji operator proširenja $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ takav da za svaki $u \in W^{1,p}(\Omega)$ proširenje $Eu = \overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ima svojstva

$$\begin{cases} \overline{u} = u \text{ na } \Omega,\\ \overline{u} \text{ ima kompaktan nosač},\\ \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},\end{cases} \tag{3.8}$$

gdje konstanta C_1 ovisi samo o p i Ω. Budući da je nosač od $\overline{u}$ kompaktan, prema Teoremu 2.2.6, možemo odabrati niz (u_m) u $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ takav da

$$u_m \to \overline{u} \quad \text{u } W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.9}$$

što povlači

$$Du_m \to D\overline{u} \quad \text{u } L^p(\mathbb{R}^n). \tag{3.10}$$

Sada prema Teoremu 3.1.2, za sve $l, m \ge 1$ imamo ocjenu

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

pa je, zbog Cauchyjevosti niza (Du_m) u $L^p(\mathbb{R}^n)$, niz (u_m) Cauchijev u $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Zbog potpunosti prostora $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ i (3.9), slijedi

$$u_m \to \overline{u} \quad \text{u } L^{p^*}(\mathbb{R}^n). \tag{3.11}$$

Primjenom Teorema 3.1.2 na u_m, dobivamo

$$||u_m||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2||Du_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

gdje konstanta C_2 ovisi samo o n i p, pa (3.10) i (3.11) povlače

$$||\overline{u}||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2||D\overline{u}||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Konačno, gornja ocjena i (3.8) daju

$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} = ||\overline{u}||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq ||\overline{u}||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2||D\overline{u}||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_2||\overline{u}||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1C_2||u||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Teorem 3.1.5 (Ocjena za $W_0^{1,p}$, $1 \leq p < n$)**.** *Neka je Ω ograničen otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ za neki $1 \leq p < n$. Tada vrijedi ocjena*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)},$$

za svaki $1 \leq q \leq p^*$, gdje konstanta $C > 0$ ovisi samo o p, q, n i Ω.

Uočimo da Teorem 3.1.5 ne zahtjeva da je Ω klase C^1. To je zato što nije potrebno pozivati se na teorem o proširenju (Teorem 2.2.9), već direktno možemo iskoristili gustoću prostora $C_c^\infty(\Omega)$ u $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dokaz. Neka je $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Zbog gustoće prostora $C_c^\infty(\Omega)$ u $W_0^{1,p}(\Omega)$, postoji niz (u_m) funkcija iz $C_c^\infty(\Omega)$ koji konvergira prema u u $W_0^{1,p}(\Omega)$. Svaku funkciju u_m proširimo nulom na cijeli $\mathbb{R}^n$ te primijenimo Teorem 3.1.2. Time dobivamo $||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}$. Zbog $|\Omega| < \infty$, imamo $||u||_{L^q(\Omega)} \leq C||u||_{L^{p^*}(\Omega)}$ za $1 \leq q \leq p^*$ što daje traženu ocjenu. □

Napomena 3.1.6. (a) *U svjetlu Teorema 3.1.5, za $q = p < p^*$, $||Du||_{L^p(\Omega)}$ je norma na $W_0^{1,p}(\Omega)$ ekvivalentna normi $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$. To vidimo iz*

$$||u||_{L^p(\Omega)} + ||Du||_{L^p(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)} + ||Du||_{L^p(\Omega)} = (C+1)||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

(b) *Promotrimo slučaj*

$$p = n.$$

Teorem 3.1.4 i činjenica da $p^* = \frac{np}{n-p} \to +\infty$ kad $p \to n$, nameću nam pitanje: Vrijedi li $W^{1,n}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$?

U slučaju $n = 1$ za $u \in W^{1,1}(\Omega)$ je $u' \in L^1(\Omega)$ pa je u neprekidna i, za $a \in \Omega$, vrijedi

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt, \quad \forall x \in \Omega,$$

odnosno

$$|u(x)| \leq |u(a)| + \int_\Omega |u'(t)|\, dt \leq C, \forall x \in \Omega,$$

gdje konstanta C ne ovisi o x, pa slijedi da je $u \in L^\infty(\Omega)$. Neprekidnost ulaganja $W^{1,1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ slijedi iz

$$|u(x) - v(x)| = |\int_a^x (u'(t) - v'(t))\, dt| \leq \int_\Omega |u'(t) - v'(t)|\, dt \leq \|u - v\|_{W^{1,1}(\Omega)},$$

za $u, v \in W^{1,1}(\Omega)$.

Već za $n > 1$ odgovor je negativan. Na primjer, za $\Omega = B(0,1)$ funkcija $u = \ln\ln\Big(1 + \frac{1}{|x|}\Big)$ pripada $W^{1,n}(\Omega)$, ali ne i $L^\infty(\Omega)$.

Međutim, za $n > 1$, možemo zaključiti da je $W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, za svaki $1 \leq q < \infty$. Naime, za $1 \leq p < n$, zbog ograničenosti od Ω, imamo

$$L^n(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

pa Teorem 3.1.4 povlači

$$W^{1,n}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega).$$

Sada tvrdnja slijedi iz činjenice da $p^* = \frac{np}{n-p} \to +\infty$ kada $p \to n$ te ograničenosti od Ω. Sva ulaganja su neprekidna pa vrijedi i pripadna ocjena.

Morreyjeva nejednakost

Pretpostavimo sada da je

$$n < p \leq \infty. \tag{3.12}$$

Pokazat ćemo da ako je $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onda je u zapravo Hölderova, nakon eventualnog redefiniranja na skupu mjere nula.

Teorem 3.1.7 (Morreyjeva nejednakost)**.** *Neka je $n < p \leq \infty$. Tada postoji konstanta C, koja ovisi samo o p i n, takva da je*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.13}$$

za sve $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, gdje je

$$\gamma := 1 - \frac{n}{p}.$$

Dokaz. U slučaju $p = \infty$ je $\gamma = 1$ te za $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ imamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)| = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

i

$$\sup_{x\neq y}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\right\} \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|Du(x)| = \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

što povlači

$$\|u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Stoga dokažimo tvrdnju za $n < p < \infty$.

1. Neka je $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ proizvoljna kugla. Tvrdimo da postoji konstanta $C > 0$, koja ovisi samo o n, takva da je

$$⨍_{B(x,r)}|u(y)-u(x)|\,dy \le C\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,dy. \tag{3.14}$$

Fiksirajmo točku $w \in \partial B(x,1)$. Tada za $0 < s < r$ imamo

$$\begin{aligned}|u(x+sw)-u(x)| &= \left|\int_0^s \frac{d}{dt}u(x+tw)\,dt\right| = \left|\int_0^s Du(x+tw)\cdot w\,dt\right|\\ &\le \int_0^s |Du(x+tw)|\,dt.\end{aligned}$$

Integriranjem po $\partial B(0,1)$ te zamjenom varijabli $y = x + tw$ (dakle, $|y-x| = t$) dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,1)}|u(x+sw)-u(x)|\,dS_w &\le \int_0^s\int_{\partial B(0,1)}|Du(x+tw)|\,dS_w\,dt = \int_0^s\int_{\partial B(x,t)}\frac{|Du(y)|}{t^{n-1}}\,dS_y\,dt\\ &= \int_{B(x,s)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,dy \le \int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,dy.\end{aligned}$$

Pomnožimo nejednakost sa s^{n-1} i integriramo od 0 do r po varijabli s

$$\int_{B(x,r)}|u(y)-u(x)|\,dy \le \frac{r^n}{n}\int_{B(x,r)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,dy.$$

Dijeljenjem s $|B(x,r)| = r^n|\partial B(0,1)|$ dolazimo do nejednakosti (3.14).

2. Sada fiksirajmo $x \in \mathbb{R}^n$. Iz nejednakosti (3.14) te Hölderove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}|u(x)| &\le ⨍_{B(x,1)}|u(x)-u(y)|\,dy + ⨍_{B(x,1)}|u(y)|\,dy\\ &\le C_1\int_{B(x,1)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,dy + \frac{1}{|B(x,1)|}|B(x,1)|^{\frac{p-1}{p}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C_1\left(\int_{B(x,1)}|Du(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B(x,1)}\frac{1}{|y-x|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\,dy\right)^{\frac{p-1}{p}} + C_2\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Kako $p > n$ povlači $(n-1)\frac{p}{p-1} < n$, imamo da je

$$
\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} \frac{dy}{|y-x|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} &= \int_{B(0,1)} \frac{r^n\, dz}{|rz|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} \\
&= r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \int_0^1 \int_{\partial B(0,s)} \frac{1}{|z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\, dS_z\, ds \\
&= r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \int_0^1 \int_{\partial B(0,s)} \frac{1}{s^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\, dS_z\, ds \\
&= r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \int_0^1 \frac{1}{s^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} s^{(n-1)} |\partial B(0,1)|\, ds \\
&= r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} |\partial B(0,1)| \int_0^1 s^{n-1-(n-1)\frac{p}{p-1}}\, ds \\
&= \frac{|\partial B(0,1)|}{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}}, \quad \forall r > 0,
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

odnosno,

$$
\left(\int_{B(x,1)} \frac{1}{|y-x|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\, dy \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\frac{|\partial B(0,1)|}{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = C_3 < \infty.
$$

Stoga slijedi da je

$$
|u(x)| \le C_1 C_3 \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.16}
$$

gdje je $C = \max\{C_1C_3, C_2\}$ i ovisi samo o p i n. Kako je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan, zaključujemo

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| \le C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.17}
$$

3. Preostaje ocijeniti polunormu $[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}$. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni. Stavimo $r = |x-y|$ te $W = B(x,r) \cap B(y,r)$. Tada je

$$
|u(x) - u(y)| \le \fint_W |u(x) - u(z)|\, dz + \fint_W |u(y) - u(z)|\, dz. \tag{3.18}
$$

Činjenica da je $W \subset B(x,r)$, (3.14), Hölderova nejednakost te (3.15) povlače

$$
\begin{aligned}
\fint_W |u(x) - u(z)|\, dz &\le C_1 \fint_{B(x,r)} |u(x) - u(z)|\, dz \\
&\le C_2 \left(\int_{B(x,r)} |Du(z)|^p\, dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\, dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le C_3 \left(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_3 r^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Slično,

$$\fint_W |u(y) - u(z)|\, dz \le C_3 r^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dakle,

$$|u(x) - u(y)| \le 2C_3 r^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Prema tome,

$$[u]_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \right\} \le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ova nejednakost i (3.17) daju (3.13). □

Napomena 3.1.8. *Uočimo da, uz nešto bolju ocjenu u* (3.19)*, možemo dobiti*

$$|u(x) - u(y)| \le C r^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,2r)} |Du(z)|^p\, dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

za sve $u \in C^1(B(x, 2r)),\ y \in B(x, r),\ n < p < \infty.$

Teorem 3.1.9 (Ocjena za $W^{1,p}$, $n < p \le \infty$)**.** *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ograničena domena klase* C^1*. Pretpostavimo da je* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, za* $n < p \le \infty$*. Tada postoji funkcija* $u^* \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$*, za* $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$*, takva da je* $u^* = u$ *s.s. na* Ω *te vrijedi ocjena*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

za neku konstantu $C > 0$*, koja ovisi samo o* p*,* n *i* Ω*.*

Dokaz. Kako je ograničena domena Ω klase C^1, prema Teoremu 2.2.9, postoji operator proširenja $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ takav da za svaki $u \in W^{1,p}(\Omega)$ proširenje $Eu = \overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ima svojstva

$$\begin{cases} \overline{u} = u \text{ na } \Omega, \\ \overline{u} \text{ ima kompaktan nosač}, \\ \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{cases} \tag{3.20}$$

gdje konstanta C_1 ovisi samo o p i Ω. Budući da je nosač od $\overline{u}$ kompaktan, prema Teoremu 2.2.6, možemo odabrati niz (u_m) u $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ takav da

$$u_m \to \overline{u} \quad \text{u } W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{3.21}$$

Prema Teoremu 3.1.7, za sve $l, m \ge 1$ imamo ocjenu

$$\|u_m - u_l\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Zbog potpunosti prostora $C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, postoji $u^* \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ takav da

$$u_m \to u^* \quad \text{u } C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n). \tag{3.22}$$

Iz (3.21) i (3.22) slijedi da je $u^* = u$ s.s. na Ω. Sada primijenimo Teorem 3.1.7 na u_m

$$\|u_m\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

te, zbog (3.21),(3.22) i (3.20), zaključujemo

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{U})} \leq \|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 C_2 \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

□

Opće Soboljevljeve nejednakosti

Sada ćemo iskoristiti prethodne ocjene kako bismo dobili ocjene u općenitijem slučaju.

Teorem 3.1.10 (Opće Soboljevljeve nejednakosti)**.** *Neka je Ω ograničena domena klase C^1 te pretpostavimo da je $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(i) Ako je

$$kp < n, \tag{3.23}$$

onda je $u \in L^q(\Omega)$, gdje je

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Nadalje, vrijedi ocjena

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \tag{3.24}$$

za neku konstantu $C > 0$ koja ovisi samo o k, p, n i Ω.

(ii) Ako je

$$kp > n, \tag{3.25}$$

onda je $u \in C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1,\gamma}(\overline{\Omega})$, gdje je

$$\gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p} & \text{ako } \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \text{bilo koji pozitivan broj} < 1 & \text{ako } \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vrijedi ocjena

$$\|u\|_{C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \tag{3.26}$$

za neku konstantu $C > 0$ koja ovisi samo o k, p, n, γ i Ω.

Dokaz. 1. Neka vrijedi (3.23). Kako je $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ za sve $|\alpha| \leq k$, Teorem 3.1.4 povlači

$$\|\partial^\beta u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\partial^\beta u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

za sve $|\beta| \leq k-1$ i za neku konstantu C koja ovisi samo o p, n i Ω. Slijedi da je $u \in W^{k-1,p^*}(\Omega)$ te vrijedi ocjena

$$\|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

gdje je $C_1 = \sum_{|\beta|\leq k-1} C$, dakle ovisi samo o k, p, n i Ω. Jednako tako dobivamo da je $u \in W^{k-2,p^{**}}(\Omega)$ za $\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ te

$$\|u\|_{W^{k-2,p^{**}}(\Omega)} \leq C_2\|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq C_1C_2\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

gdje konstanta C_2 ponovno ovisi samo o k, p, n i Ω. Nastavljamo dalje istim zaključivanjem te nakon k koraka dolazimo do $u \in W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$ za $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ te

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

za konstantu $C = C_1C_2\cdots C_k$ koja ovisi samo o p, k, n i Ω.

2. Pretpostavimo da vrijedi (3.25) te da $\frac{n}{p} \notin \mathbb{Z}$. Kao u prethodnom slučaju zaključujemo da je $u \in W^{k-l,r}(\Omega)$ te vrijedi

$$\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \tag{3.27}$$

za $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$, uz uvjet da je $lp < n$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Izaberimo $l = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. To znači da je $l < \frac{n}{p} < l+1$ pa je $r = \frac{pn}{n-pl} > \frac{pn}{p} = n$. Tada je, prema Teoremu 3.1.9 i (3.27), za sve $|\alpha| \leq k-l-1$ $\partial^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{r}}(\overline{\Omega})$ i

$$\|\partial^\alpha u\|_{C^{0,1-\frac{n}{r}}(\overline{\Omega})} \leq C_2\|\partial^\alpha u\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C_2\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \leq C_1C_2\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Stoga je $u \in C^{k-l-1,1-\frac{n}{r}}(\overline{\Omega})$ te

$$\|u\|_{C^{k-l-1,1-\frac{n}{r}}(\overline{\Omega})} \leq 2\max_{|\alpha|\leq k-l-1}\|\partial^\alpha u\|_{C^{0,1-\frac{n}{r}}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

za konstantu $C = 2C_1C_2$ koja ovisi samo o p, k, n i Ω. Uočimo da je $k-l-1 = k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$ i $1 - \frac{n}{r} = 1 - \frac{n}{p} + l = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p} = \gamma$, što znači da je $u \in C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1,\gamma}(\overline{\Omega})$ i vrijedi (3.26).

3. Preostaje slučaj kada je $k > \frac{n}{p}$ i $\frac{n}{p} \in \mathbb{Z}$. Stavimo $l = \frac{n}{p} - 1 = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$. Ponovno imamo $u \in W^{k-l,r}(\Omega)$ za $r = \frac{pn}{n-pl} = n$ i

$$\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Sada, prema Napomeni 3.1.6(b), slijedi da je $\partial^\alpha u \in L^q(\Omega)$ za sve $|\alpha| \leq k - l - 1 = k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ i $1 \leq q < \infty$ te imamo

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_2 \|\partial^\alpha u\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \leq C_1 C_2 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

odnosno

$$\|u\|_{W^{k-l-1,q}(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Teorem 3.1.9 povlači da je $\partial^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})$ za sve $|\alpha| \leq k - l - 2 = k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$ i $n < q < \infty$ te vrijedi

$$\|\partial^\alpha u\|_{C^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})} \leq \|\partial^\alpha u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C_4 \|u\|_{W^{k-l-1,q}(\Omega)} \leq C_3 C_4 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

pa iz toga, kao prije, zaključujemo da je $u \in C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor -1,\gamma}(\overline{\Omega})$ za sve $0 < \gamma < 1$ i

$$\|u\|_{C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor -1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

□

3.2 Kompaktnost ulaganja

U prethodnom smo potpoglavlju pokazali da za $1 \leq p < n$ i glatku ograničenu domenu Ω imamo ulaganje prostora $W^{1,p}(\Omega)$ u prostor $L^{p^*}(\Omega)$, gdje je $p^* = \frac{pn}{n-p}$. Sada ćemo pokazati da je za $1 \leq q < p^*$ ulaganje prostora $W^{1,p}(\Omega)$ u prostor $L^q(\Omega)$ čak i kompaktno što će biti ključno za dokaz egzistencije rješenja parcijalnih diferencijalni jednadžbi kojima ćemo se baviti u Poglavlju 5.

Teorem 3.2.1 (Rellich-Kondrachovljev teorem kompaktnosti)**.** *Neka je Ω ograničena domena klase C^1 i pretpostavimo da je $1 \leq p < n$. Tada je*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

za svaki $1 \leq q < p^*$.

Dokaz. Neka je $1 \leq q < p^*$. Zbog ograničenosti domene Ω, Teorem 3.1.4 povlači

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \subset L^q(\Omega).$$

Preostaje pokazati da za svaki ograničen niz (u_m) u $W^{1,p}(\Omega)$ postoji podniz (u_{m_j}) koji konvergira u $L^q(\Omega)$.

1. Zbog Teorema 2.2.9 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\Omega = \mathbb{R}^n$ te da funkcije (u_m) imaju kompaktan nosač unutar nekog ograničenog otvorenog skupa $V \subset \mathbb{R}^n$. Također, možemo pretpostaviti da je

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} = A < \infty. \tag{3.28}$$

2. Promotrimo prvo niz funkcija

$$u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m \quad (\varepsilon > 0, m = 1, 2, \dots),$$

gdje je η_ε standardni izglađivač. Za ε dovoljno mali nosači svih funkcija (u_m) sadržani su u V.

3. Pokažimo da

$$u_m^\varepsilon \to u_m \quad \text{u } L^q(V) \text{ kad } \varepsilon \to 0, \text{ uniformno po } m. \tag{3.29}$$

Za $u_m \in W^{1,p}(V)$ računamo

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B(0,1)} \eta(y)(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x))\, dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}(u_m(x-\varepsilon ty))\, dt\, dy \\ &= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_m(x-\varepsilon ty)\cdot y\, dt\, dy. \end{aligned}$$

Time dobivamo

$$\begin{aligned} \int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\, dx &\le \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x-\varepsilon ty)|\, dx\, dt\, dy \\ &\le \varepsilon \underbrace{\int_{B(0,1)} \eta(y)\, dy}_{=1} \underbrace{\int_0^1 dt}_{=1} \int_V |Du_m(z)|\, dz \\ &= \varepsilon \int_V |Du_m(z)|\, dz. \end{aligned}$$

Druga nejednakost slijedi iz pretpostavke da su nosači funkcija u_m^ε unutar skupa V. Sada, zbog ograničenosti od V, imamo

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \le \varepsilon \|Du_m\|_{L^1(V)} \le \varepsilon C \|Du_m\|_{L^p(V)} \le \varepsilon C \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} \le \varepsilon CA.$$

Stoga, zbog (3.28), zaključujemo

$$u_m^\varepsilon \to u_m \quad \text{u } L^1(V) \text{ kad } \varepsilon \to 0, \text{ uniformno po } m. \tag{3.30}$$

Kako je $1 \le q < p^*$, primjenom interpolacijske nejednakosti za L^p norme, slijedi

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \le \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta},$$

za $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}$, $0 < \theta < 1$. Sada (3.28) i Teorem 3.1.4 povlače

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta$$

pa (3.29) slijedi iz (3.30).

4. Dalje, pokažimo da je za svaki $\varepsilon > 0$ niz (u_m^ε) uniformno ograničen i ekvineprekidan. Za $x \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\, dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty,$$

za sve $m \in \mathbb{N}$. Slično dobivamo

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|\, dy \leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty,$$

za sve $m \in \mathbb{N}$. Sada iz ove dvije nejednakosti dobivamo uniformnu ograničenost i ekvineprekidnost; prva povlači uniformnu ograničenost, a druga ekvineprekidnost (uz Lagrangeov teorem srednje vrijednosti).

5. Neka $\delta > 0$ proizvoljan. Tvrdimo da postoji podniz $(u_{m_j}) \subset (u_m)$ takav da

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta. \tag{3.31}$$

Zbog (3.29) možemo odabrati $\varepsilon > 0$ dovoljno mali tako da

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \frac{\delta}{2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Sada zbog 4. te činjenice da funkcije (u_m^ε) imaju kompaktan nosač unutar nekog fiksnog ograničenog skupa $V \subset \mathbb{R}^n$, možemo iskoristiti Arzela-Ascoli kriterij kompaktnosti. Prema tome postoji podniz $(u_{m_j}^\varepsilon) \subset (u_m^\varepsilon)$ koji konvergira uniformno u V, pa konvergira i u $L^q(V)$ ($|V| < \infty$). U tom slučaju imamo

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} = 0 \tag{3.33}$$

pa je, zbog (3.32),

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta.$$

Kako je $\Omega \subset V$, dobivamo

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(\Omega)} \leq \delta. \tag{3.34}$$

6. Konačno, uvrštavanjem $\delta = \frac{1}{l}$ za $l = 1, 2, \ldots$ konstruiramo konvergentan podniz $(u_{m_j}) \subset (u_m)$. Za $\delta = 1$ možemo odabrati podniz $(m_j^{(1)}) \subset (m_j)$ takav da je

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j^{(1)}} - u_{m_k^{(1)}}\|_{L^q(\Omega)} \leq 1.$$

Dalje, za $\delta = \frac{1}{2}$ odaberemo podniz $(m_j^{(2)}) \subset (m_j^{(1)})$ takav da je

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j^{(2)}} - u_{m_k^{(2)}}\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{1}{2}.$$

Tako nastavimo dalje, za $\delta = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ te konstruiramo niz $(m_j^{(j)}) \subset (m_j)$. Za proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ i $k, j \geq N$ imamo

$$\|u_{m_j^{(j)}} - u_{m_k^{(k)}}\|_{L^q(\Omega)} = \|u_{m_{N_j}^{(N)}} - u_{m_{N_k}^{(N)}}\|_{L^q(\Omega)}$$

za neke $N_j \geq j$ i $N_k \geq k$. Kako $j, k \to \infty$ povlači $N_j, N_k \to \infty$, slijedi da je

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j^{(j)}} - u_{m_k^{(k)}}\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{1}{N}.$$

Na kraju pustimo $N \to \infty$ i dobivamo

$$\lim_{j,k\to\infty} \|u_{m_j^{(j)}} - u_{m_k^{(k)}}\|_{L^q(\Omega)} = \limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j^{(j)}} - u_{m_k^{(k)}}\|_{L^q(\Omega)} = 0.$$

Slijedi da je niz $(u_{m_j^{(j)}})$ Cauchyjev u potpunom prostoru $L^q(\Omega)$ pa je i konvergentan.

□

Napomena 3.2.2. **(a)** *Uočimo da ako je Ω kao u Teoremu 3.2.1, onda imamo ulaganje*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$$

za sve $1 \leq p < \infty$.

Dokaz. Očito uvijek imamo neprekidno ulaganje

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Dakle, potrebno je pokazati samo kompaktnost.

1. Za $1 \leq p < n$ je $p^* > p$ pa tvrdnja direktno slijedi iz Teorema 3.2.1.

2. Neka je $p > n$. Prema Teoremu 3.1.9, imamo neprekidno ulaganje

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$$

što povlači da je ograničen niz u $W^{1,p}(\Omega)$ ograničen i u $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Lako se vidi da su tada zadovoljeni uvjeti Arzela-Ascolijevog teorema pa je dalje dokaz isti kao za slučaj $p < n$.

3. Preostaje slučaj $p = n$. Kako je Ω ograničen, prema Lemi 2.1.10, za $p_1 < p_2$ imamo

$$||u||_{L^{p_1}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}||u||_{L^{p_2}(\Omega)}.$$

pa je ograničen niz (u_m) u $W^{1,n}(\Omega)$ ograničen i u $W^{1,p}(\Omega)$, za sve $1 \leq p < n$. Kako $p^* \to \infty$ kad $p \to n$, možemo odabrati $p < n$ takav da je $p^* > n$. Tada Teorem 3.2.1 daje egzistenciju podniza koji konvergira u $L^n(\Omega)$. U slučaju $n = 1$ tvrdnja isto vrijedi, ali je potreban drugačiji pristup (vidi [2]). □

(b) *Vrijedi*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega),$$

čak i ako ne zahtijevamo da je Ω klase C^1. To, kao i prije, slijedi zbog gustoće prostora $C_c^\infty(\Omega)$ u $W_0^{1,p}(\Omega)$.

(c) *Ukoliko domena Ω nije ograničena, ulaganje $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ općenito nije kompaktno. Na primjer, za $\Omega = \mathbb{R}$ promotrimo niz funkcija $(\varphi_m) \subset W^{1,p}(\Omega)$ definiranih sa*

$$\varphi_m(x) = \eta(x - 2m), \ m \in \mathbb{N},$$

gdje je η standardni izglađivač. Taj je niz ograničen u $W^{1,p}(\Omega)$ s $||\eta||_{W^{1,p}(\Omega)}$, ali nije Cauchyjev u $L^p(\Omega)$ zbog

$$||\varphi_m - \varphi_l||_{L^p(\Omega)} = 2||\eta||_{L^p(\Omega)} = C > 0, \quad \forall m \neq l.$$

(d) *Ulaganje $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^{p^*}(\Omega)$ nikad nije kompaktno, čak ni za ograničen Ω.*

(e) *Za Ω kao u Teoremu 3.2.1 ulaganje $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ je kompaktno.*

Dokaz. Neka je (u_k) ograničen niz u $H^2(\Omega)$. Tada je (u_k) ograničen u $H^1(\Omega)$ pa, zbog kompaktnosti ulaganja $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ postoji podniz (u_{k_j}) takav da

$$u_{k_j} \to u \quad \text{u } L^2(\Omega). \tag{3.35}$$

S druge strane, i niz $(\partial_i u_{k_j})$ $(i = 1, \dots, n)$ je ograničen u $H^1(\Omega)$ pa postoji podniz $(u_{k_{j_l}})$ takav da

$$\partial_i u_{k_{j_l}} \to u^{(i)} \quad \text{u } L^2(\Omega). \tag{3.36}$$

Pokažimo da je $u^{(i)} = \partial_i u$. Zbog neprekidnosti preslikavanja $u \mapsto \int_\Omega u\phi, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\partial_i\phi(x)\,dx &= \lim_{l\to\infty}\int_\Omega u_{k_{j_l}}(x)\partial_i\phi(x)\,dx = -\lim_{l\to\infty}\int_\Omega \partial_i u_{k_{j_l}}(x)\phi(x)\,dx \\ &= -\int_\Omega u^{(i)}(x)\phi(x)\,dx \quad \forall\phi \in C_c^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Dakle, $u^{(i)} = \partial_i u$, što znači da $\partial_i u_{k_{j_l}} \to \partial_i u$ u $L^2(\Omega)$ pa $u_{k_{j_l}} \to u$ u $H^1(\Omega)$. $\square$

Poglavlje 4

Teoremi o fiksnoj točki

Prije primjene teorema ulaganja, u ovom kratkom poglavlju navodimo neke teoreme o fiksnoj točki.

4.1 Brouwerov i Schauderov teorem o fiksnoj točki

Teorem 4.1.1 (Brouwerov teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je K neprazan, konveksan, zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je funkcija $u : K \to K$ neprekidna. Tada u ima fiksnu točku, tj. postoji $x \in K$ takav da je $u(x) = x$.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [3]. □

Proširujemo teorem na Banachove prostore. Dakle, od sad nadalje, X je realan Banachov prostor.

Teorem 4.1.2 (Schauderov teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je $K \subset X$ kompaktan i konveksan, te neka je $A : K \to K$ neprekidno preslikavanje. Tada A ima fiksnu točku u K.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Zbog kompaktnosti skupa $K \subset X$, možemo odabrati točke $u_1, \ldots, u_{N_\varepsilon} \in K$ takve da je

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(u_i, \varepsilon). \tag{4.1}$$

Neka je K_ε konveksna ljuska točaka $\{u_1, \ldots, u_{N_\varepsilon}\}$, odnosno

$$K_\varepsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i u_i \ : \ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i = 1,\ 0 \le \lambda_i \le 1, i = 1, \ldots, N_\varepsilon \right\}.$$

Tada je $K_\varepsilon \subset K$ jer je K konveksan. Definiramo funkciju P_ε na K formulom

$$P_\varepsilon(u) = \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))u_i}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))}, \ u \in K.$$

Zbog (4.1), nazivnik je uvijek različit od nule pa je definicija dobra. Uočimo da je za svaki $u \in K$ $P_\varepsilon(u)$ konveksna kombinacija točaka $u_1, \dots, u_{N_\varepsilon}$, što zanči da je $P_\varepsilon(u) \in K_\varepsilon$, odnosno P_ε je preslikavanje s K u K_ε. Funkcija $P_\varepsilon : K \to K_\varepsilon$ je očito neprekidna (funkcija udaljenosti točke od zatvorenog skupa je neprekidna) te za svaki $u \in K$ imamo

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon(u) - u\| &= \left\| \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))(u_i - u)}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))} \right\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))\|u_i - u\|}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))\, \varepsilon}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d(u, K \setminus B(u_i, \varepsilon))} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sada definiramo operator $A_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ s

$$A_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(A(u)), \ u \in K_\varepsilon.$$

Operator A_ε je neprekidan kao kompozicija neprekidnih operatora i skup K_ε je neprazan, konveksan, zatvoren i ograničen pa prema Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki postoji $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ takav da je

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon) = u_\varepsilon.$$

Za niz ε-a dobivamo niz (u_ε) u K. Kako je K kompaktan, postoji podniz $\varepsilon_j \to 0$ i točka $u \in K$ takva da $u_{\varepsilon_j} \to u$ u X. Pokažimo da je upravo u fiksna točka operatora A. Iz (4.2) slijedi

$$\|u_{\varepsilon_j} - A(u_{\varepsilon_j})\| \leq \|A_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j}) - A(u_{\varepsilon_j})\| \leq \|P_{\varepsilon_j}(A(u_{\varepsilon_j})) - A(u_{\varepsilon_j})\| \leq \varepsilon_j.$$

Zbog neprekidnosti od A, $A(u_{\varepsilon_j}) \to A(u)$ pa iz

$$\|u - A(u)\| \leq \|u - u_{\varepsilon_j}\| + \|u_{\varepsilon_j} - A(u_{\varepsilon_j})\| + \|A(u) - A(u_{\varepsilon_j})\|$$

slijedi da je $A(u) = u$. □

Transformirat ćemo Schauderov teorem o fiksnoj točki u oblik koji je često korisniji za primjene na nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Teorem 4.1.3 (Schaeferov teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je $A : X \to X$ neprekidno i kompaktno preslikavanje te neka je skup*

$$\{ u \in X \ : \ u = \lambda A(u) \text{ za neki } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

ograničen. Tada A ima fiksnu točku.

Dokaz. Prema pretpostavci teorema postoji $M > 0$ takav da je

$$\|u\| < M, \quad \text{ako je } u = \lambda A(u) \text{ za neki } 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{4.3}$$

Definramo $\tilde{A} : \overline{B(0, M)} \to \overline{B(0, M)}$ s

$$\tilde{A}(u) = \begin{cases} A(u) & \text{ako je } \|A(u)\| \leq M \\ \frac{MA(u)}{\|A(u)\|} & \text{ako je } \|A(u)\| \geq M. \end{cases} \tag{4.4}$$

Označimo s K zatvorenu konveksnu ljusku skupa $\tilde{A}(\overline{B(0, M)})$. Kako je A kompaktan, kompaktan je i $\tilde{A}$ pa je skup K kompaktan i konveksan podskup od X. Sada prema Schauderovom teoremu o fiksnoj točki, za preslikavanje $\tilde{A} : K \to K$ postoji točka $u \in K$ takva da je

$$\tilde{A}(u) = u. \tag{4.5}$$

Tvrdimo da je u fiksna točka od A. Naime, ako nije, onda zbog (4.4) i (4.5) mora biti

$$\|A(u)\| > M$$

pa je

$$\|\tilde{A}(u)\| = M. \tag{4.6}$$

Međutim,

$$u = \frac{M}{\|A(u)\|} A(u) = \lambda A(u),$$

za $\lambda = \frac{M}{\|A(u)\|} < 1$ pa je, prema (4.3) i (4.5), $\|\tilde{A}(u)\| = \|u\| < M$ što je u kontradikciji s (4.6). Dakle, u je fiksna točka preslikavanja A. □

Za kraj navodimo jednu lemu koja će nam koristiti u nastavku, a posljedica je Brouwerovog teorema o fiksnoj točki.

Lema 4.1.4. *Neka je X konačnodimenzionalan prostor sa skalarnim produktom $(\cdot, \cdot)$ i s normom $\|\cdot\|$ induciranom tim skalarnim produktom. Pretpostavimo da je $P : X \to X$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava*

$$(P(\xi), \xi) > 0, \quad \textit{za } \|\xi\| = k > 0. \tag{4.7}$$

Tada postoji $\xi \in \overline{B(0, k)}$ takav da je $P(\xi) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo, suprotno tvrdnji, da P nema nultočku unutar kugle $\overline{B(0, k)}$. Tada je s

$$\xi \mapsto S(\xi) = -k \frac{P(\xi)}{\|P(\xi)\|}$$

dobro definirano preslikavanje sa $\overline{B(0,k)}$ u $\overline{B(0,k)}$. Kako je kugla $\overline{B(0,k)}$ neprazan, konveksan, zatvoren i ograničen skup u konačnodimenzionalnom prostoru te je, zbog neprekidnosti od P, S neprekidno preslikavanje, zadovoljeni su uvjeti Brouwerovog teorema o fiksnoj točki. Stoga postoji $\xi_0 \in \overline{B(0,k)}$ takav da je

$$-k\frac{P(\xi_0)}{||P(\xi_0)||} = \xi_0.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da je $||\xi_0|| = k$ te, množenjem skalarno s ξ_0, dobivamo

$$-k\frac{(P(\xi_0), \xi_0)}{||P(\xi_0)||} = ||\xi_0||^2.$$

Dakle, imamo

$$(P(\xi_0), \xi_0) < 0 \quad \text{i} \quad ||\xi_0|| = k,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom (4.7).

$\square$

Poglavlje 5

Primjena teorema ulaganja

5.1 Linearna eliptička PDJ

Promotrimo Dirichletovu rubnu zadaću

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f & \text{na } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i povezan skup, a $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija. Pretpostavljamo da su funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ i konstanta $\mu > 0$ zadane. Klasično rješenje zadaće (5.1) je funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ koja zadovoljava jednadžbu $(5.1)_1$ u svakoj točki domene Ω. Stoga, da bi takvo rješenje postojalo, funkcija f mora biti neprekidna na Ω.

Pretpostavimo da je u rješenje zadaće (5.1). Pomnožimo jednadžbu $(5.1)_1$ test funkcijom $v \in C_c^\infty(\Omega)$ i integriramo po Ω:

$$\int_\Omega (-\Delta u + \mu u) v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$-\int_{\partial\Omega} (Du \cdot \mathbf{n}) v \, dS + \int_\Omega (Du \cdot Dv + \mu uv) \, dx = \int_\Omega f v \, dx,$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Kako je $v = 0$ na $\partial\Omega$, dobivamo

$$\int_\Omega (Du \cdot Dv + \mu uv) \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

što je, zbog gustoće prostora $C_c^\infty(\Omega)$ u $H_0^1(\Omega)$, ekvivalentno s

$$\int_\Omega (Du \cdot Dv + \mu uv) \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.2}$$

To je varijacijska formulacija zadaće (5.1). Uočimo da (5.2) ima smisla za $u \in H_0^1(\Omega)$ i $f \in L^2(\Omega)$.

Definicija 5.1.1. *Neka je $f \in L^2(\Omega)$. Za funkciju $u \in H_0^1(\Omega)$ koja zadovoljava* (5.2) *kažemo da je* slabo rješenje *zadaće* (5.1).

Pokazali smo da je klasično rješenje ujedno i slabo rješenje zadaće (5.1), no vrijedi i obrat. Naime, ako funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ zadovoljava (5.2), onda je ona i klasično rješenje zadaće (5.1).

Teorem 5.1.2 (Lax-Milgramova lema)**.** *Neka je V Hilbertov prostor s normom $||\cdot||$ te neka je $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinearna forma (linearna u obje varijable) koja je*

ograničena: $\exists M > 0$ *takav da je* $\forall u, v \in V$, $|a(u, v)| \leq M||u||||v||$ *i*

koercitivna: $\exists \alpha > 0$ *takav da je* $\forall v \in V$, $|a(v, v)| \geq \alpha||v||^2$.

Tada za svaki funkcional $F \in V'$ zadaća

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Naći } u \in V \\ a(u, v) = \langle F, v \rangle, \ \forall v \in V \end{array} \right. \tag{5.3}$$

ima jedinstveno rješenje $u \in V$ te vrijedi

$$||u|| \leq \frac{1}{\alpha}||F||_{V'}.$$

Dokaz. Vidjeti u [2]. □

Lako se pokaže da bilinearna forma

$$a(u, v) = \int_\Omega (Du \cdot Dv + \mu uv)\, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

i linearan funkcional

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega fv\, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

zadovoljavaju uvjete Lax-Milgramove leme. Stoga postoji jedinstveno slabo rješenje zadaće (5.1) te vrijedi ocjena

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)} \tag{5.4}$$

($\alpha = 1$).

Ako pretpostavimo da je domena Ω klase C^2, može se pokazati da je $u \in H^2(\Omega)$ i da vrijedi

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C(||f||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)}),$$

gdje konstanta C ovisi samo o Ω i μ. Prema tome, za slabo rješenje $u \in H_0^1(\Omega)$ zadaće (5.1) imamo ocjenu

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.5}$$

Promotrimo linearani operator $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definiran s $Tf = u$, gdje je u rješenje zadaće (5.1). Operator T je ograničen, zbog (5.4), i kompaktan ako vrijedi (5.5), zbog kompaktnosti ulaganja $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, kao kompozicija neprekidnog i kompaktnog linearnog operatora. To je tipičan način upotrebe kompaktnosti ulaganja što ćemo demonstrirati u dokazu egzistencije rješenja kvazilinearne elipdičke jednadžbe.

5.2 Kvazilinearna eliptička PDJ

Promatramo jednadžbu

$$\begin{cases} -\Delta u + b(Du) + \mu u = 0 & \text{na } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.6}$$

gdje je Ω ograničena domena klase C^2. Pretpostavljamo da je $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzova te zadovoljava uvjet na rast

$$|b(p)| \leq C(|p| + 1) \tag{5.7}$$

za neki C i za sve $p \in \mathbb{R}^n$.

Teorem 5.2.1. *Ako je $\mu > 0$ dovoljno velik, tada postoji funkcija $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ koja je (slabo) rješenje zadaće* (5.6).

Dokaz. Fiksiramo $u \in H_0^1(\Omega)$ te stavimo $f = -b(Du)$. Zbog (5.7), vidimo da je $f \in L^2(\Omega)$ pa postoji jedinstveno slabo rješenje $w \in H_0^1(\Omega)$ linearne zadaće

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f & \text{na } \Omega \\ w = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.8}$$

Štoviše, znamo da je $w \in H^2(\Omega)$ te vrijedi ocjena

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.9}$$

za neku konstantu C. Uočimo da w ovisi o u kroz f. Sada definiramo preslikavanje $u \mapsto A(u) = w$, gdje je w dobiven na prethodno opisan način (definicija je dobra zbog jedinstvenosti rješenja zadaće (5.8)). Kad bi preslikavanje $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ imalo fiksnu točku, ona bi bila slabo rješenje zadaće (5.6). Zato provjerimo uvjete Teorema 4.1.3.

Pokažimo prvo da je preslikavanje $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ neprekidno. Neka je niz (u_k) takav da

$$u_k \to u \quad \text{u } H_0^1(\Omega). \tag{5.10}$$

Kako su $A(u)$ i $A(u_k)$ rješenja zadaće (5.8) za $f = -b(Du)$, odnosno $f = -b(Du_k)$, i funkcija $A(u) - A(u_k) \in H_0^1(\Omega)$ je rješenje iste zadaće uz $f = -(b(Du) - b(Du_k))$. Sada, iz (5.4) te Lipschitzovosti funkcije b slijedi

$$\begin{aligned} \|A(u) - A(u_k)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|b(Du) - b(Du_k)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq L\|Du - Du_k\|_{L^2(\Omega)} = L\|u - u_k\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Prema tome, (5.10) povlači $A(u_k) \to A(u)$ u $H_0^1(\Omega)$ pa je A neprekidno.

Pokažimo sada da je A kompaktno. Neka je niz (u_k) ograničen u $H_0^1(\Omega)$. (5.7) i (5.9) povlače

$$\|A(u_k)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|Du_k\|_{L^2(\Omega)} + 1) = C(\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} + 1) \tag{5.11}$$

pa je

$$\sup_k \|w_k\|_{H^2(\Omega)} < \infty \tag{5.12}$$

za $w_k = A(u_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Zbog kompaktnosti ulaganja $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, postoji podniz (w_{k_j}) takav da

$$w_{k_j} \to w \quad \text{u } H^1(\Omega).$$

Kako je $w_{k_j} \in H_0^1(\Omega)$ i $H_0^1(\Omega)$ je zatvoren potprostor od $H^1(\Omega)$, slijedi da

$$w_{k_j} \to w \quad \text{u } H_0^1(\Omega). \tag{5.13}$$

Dakle, preslikavanje $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ je kompaktno.

Preostaje pokazati da je, za dovoljno velik μ, skup

$$S = \{\, u \in H_0^1(\Omega) \;:\; u = \lambda A(u) \text{ za neki } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

ograničen u $H_0^1(\Omega)$. Stoga uzmimo proizvoljan $u \in H_0^1(\Omega)$ takav da je

$$u = \lambda A(u) \quad \text{ za neki } 0 < \lambda \leq 1$$

(za $\lambda = 0$ je $u = 0$ pa je svaka ograda dobra). Tada je $\frac{u}{\lambda} = A(u)$, što znači da je $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ te vrijedi

$$-\Delta u + \mu u = -\lambda b(Du) \quad \text{s.s. na } \Omega.$$

Množenjem ove jednakosti s u te integracijom po Ω dobivamo

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Du|^2 + \mu|u|^2\,dx &= -\int_\Omega \lambda b(Du)u\,dx \\ &\leq \int_\Omega C_1(|Du| + 1)|u|\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx + C_2\int_\Omega (|u|^2 + 1)\,dx, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti koristili $\lambda \le 1$ i (5.7), a u drugoj nejednakost $ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$. Dakle,

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le 2(C-\mu)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C.$$

Uočimo da C ne ovisi o λ pa, za $\mu \ge C$, imamo

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le C \quad \text{za svaki } u \in S.$$

Zaključujemo da je skup S ograničen.

Prema Schaeferovom teoremu o fiksnoj točki, $A : H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ ima fiksnu točku. Preciznije, zbog $A(H^1_0(\Omega)) \subset H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, postoji $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ takav da je $A(u) = u$, odnosno u je rješenje zadaće (5.6).

□

5.3 Stacionarna Navier-Stokesova zadaća

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena klase C^1 s rubom Γ te neka je $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ zadana funkcija. Promatramo zadaću

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + (D\mathbf{u})\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{na } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{na } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{na } \Gamma, \end{cases} \tag{5.14}$$

gdje su vektorska funkcija $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ i skalarna funkcija p tražene funkcije koje pedstavljaju brzinu, odnosno tlak fluida. Radi jednostavnosti uzmimo da je $n \le 4$.

Definiramo prostore

$$\mathscr{V} = \{ \mathbf{u} \in C^\infty_c(\Omega)^n \ : \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \} \tag{5.15}$$

i

$$V = \text{zatvarač prostora } \mathscr{V} \text{ u } H^1_0(\Omega)^n. \tag{5.16}$$

Prostor V je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_\Omega D\mathbf{u} \cdot D\mathbf{v}\, dx, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$$

kao zatvoren potprostor Hilbertovog protora $H^1_0(\Omega)$. Budući da je Ω ograničena domena klase C^1, može se pokazati da je

$$V = \{ \mathbf{u} \in H^1_0(\Omega)^n \ : \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \}$$

(vidi [7]).

Ako su $\mathbf{u}$, p i $\mathbf{f}$ glatke funkcije koje zadovoljavaju (5.14) množenjem jednadžbe $(5.14)_1$ s $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ i integracijom po Ω dobivamo

$$\int_\Omega (-\mu\Delta\mathbf{u} + (D\mathbf{u})\mathbf{u} + \operatorname{grad} p) \cdot \mathbf{v}\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx$$

i parcijalnom integracijom

$$\int_\Omega (\mu D\mathbf{u} \cdot D\mathbf{v} + (D\mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx.$$

Integrali po rubu su jednaki nula jer se $\mathbf{v}$ poništava na rubu, a član s p je nestao zbog $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Dakle,

$$\mu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V}$$

za

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega (D\mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i(\partial_i v_j) w_j\, dx.$$

Navodimo neka svojstva forme b.

Lema 5.3.1. *Forma b je dobro definirana trilinearna neprekidna forma na $H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n$ pa i na $V \times V \times V$.*

Dokaz. Forma b je očito trilinearna, ako je dobro definirana. Neka su $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$.

Promotrimo slučajeve $n = 3, 4$. Neka su $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ proizvoljni indeksi. Tada je $\partial_i v_j \in L^2(\Omega)$ ($v_j \in H_0^1(\Omega)$) , $w_j \in L^n(\Omega)$ i $u_i \in L^{2n/(n-2)}(\Omega)$ (prema Teoremu 3.1.5, zbog $2 < n \leq 2^* = \frac{2n}{n-2}$). Prema generaliziranoj Hölderovoj nejednakosti slijedi da je $u_i(\partial_i v_j) w_j \in L^1(\Omega)$ i vrijedi

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega u_i(\partial_i v_j) w_j\, dx \right| &\leq \|u_i\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \|\partial_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^n(\Omega)} \\ &\leq C\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|Dv_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

za konstantu C koja ovisi samo o n i Ω, gdje druga nejednakost proizlazi iz neprekidnosti ulaganja $H_0^1(\Omega) \subset L^n(\Omega)$ i $H_0^1(\Omega) \subset L^{2n/(n-2)}(\Omega)$. Slijedi da je forma b dobro definirana i vrijedi

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq C\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

što povlači neprekidnost.

Za $n = 2$ su za $i, j \in \{1, \dots, n\}$, prema Napomeni 3.1.6(b), $u_i, w_j \in L^4(\Omega)$ i kao prije $\partial_i v_j \in L^2(\Omega)$. Ponovno primjenom generalizirane Hölderove nejednakosti te zbog neprekidnosti ulaganja $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ dobivamo

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u_i(\partial_i v_j) w_j \, dx\right| &\leq \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|D v_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

gdje je C konstanta koja ovisi samo o n i Ω. To, kao prije, povlači da je trilinearna forma b dobro definirana i neprekidna. Slično se dokaže slučaj $n = 1$.

□

Lema 5.3.2. *Vrijedi*

(i) $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$;

(ii) $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$

Dokaz. Ako vrijedi (i) zbog linearnosti b po drugoj i trećoj varijabli imamo

$$\begin{aligned}0 &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= \underbrace{b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v})}_{=0} + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \underbrace{b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w})}_{=0} \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

odakle slijedi (ii). Prema tome preostaje dokazati (i). Zbog gustoće prostora $\mathscr{V}$ u V i prostora $C_c^\infty(\Omega)^n$ u $H_0^1(\Omega)^n$ te neprekidnosti forme b, dovoljno je dokazati da tvrdnja vrijedi za $\mathbf{u} \in \mathscr{V}$ i $\mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega)^n$. Tada imamo

$$\int_\Omega u_i(\partial_i v_j) v_j \, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega u_i \partial_i (v_j^2) \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_i u_i) v_j^2 \, dx$$

iz čega slijedi da je

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (\underbrace{\operatorname{div} \mathbf{u}}_{=0}) v_j^2 \, dx = 0$$

□

Lema 5.3.3. *Ako* $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ *u* V *slabo i* $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ *u* $L^2(\Omega)^n$ *jako, tada*

$$b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \to b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ proizvoljan. Prema Lemi 5.3.2 imamo da je

$$b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = -b(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}, \mathbf{u}_m) = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_{mi} u_{mj} \partial_i v_j \, dx.$$

Kako u_{mi} konvergira prema u_i u $L^2(\Omega)$ te kako je $\partial_i v_j \in L^\infty(\Omega)$ zbog

$$|\int_\Omega u_i u_j \partial_i v_j \, dx| \le \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|u_j\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_i v_j\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall u_i, u_j \in L^2(\Omega)$$

slijedi da

$$\int_\Omega u_{mi} u_{mj} \partial_i v_j \, dx \to \int_\Omega u_i u_j \partial_i v_j \, dx.$$

Prema tome $b(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}, \mathbf{u}_m)$ konvergira prema $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$, za svaki $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Budući da je $\mathbf{u} \in V$ (jer $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ u V slabo), vrijedi $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, dakle $b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \to b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. □

Varijacijska formulacija zadaće (5.14) glasi

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in V \\ \mu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \ \forall \mathbf{v} \in V \end{cases} \tag{5.17}$$

Pokažimo da zadaća (5.17) ima rješenje.

Teorem 5.3.4. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena domena klase C^1 i neka je $f \in L^2(\Omega)^n$. Tada postoji rješenje $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ zadaće* (5.17).

Dokaz. Egzistenciju funkcije $\mathbf{u}$ dokazujemo pomoću Galerkinove metode: konstruirat ćemo niz aproksimativnih rješenja od (5.17) te ćemo na limesu dobiti rješenje.

Prostor V je separabilan Hilbertov prostor kao potprostor separabilnog Hilbertovog prostora $H_0^1(\Omega)$. Tada, jer je $\mathcal{V}$ gust u V, postoji niz $(\mathbf{w}_k)$ linearno nezavisnih elemenata iz $\mathcal{V}$ takav da je linearna ljuska $\mathcal{L}(\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_k}, \ldots)$ gust potprostor od V.

Za svaki $m \ge 1$ definiramo aproksimativno rješenje $\mathbf{u}_m$ zadaće (5.17) s

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} \mathbf{w}_i, \ \xi_{i,m} \in \mathbb{R}^n \tag{5.18}$$

$$\mu((\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k)) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_k)_{L^2(\Omega)}, \ k = 1, \ldots, m. \tag{5.19}$$

Jednadžbe (5.18)-(5.19) predstavljaju sustav nelinearnih jednadžni za $\xi_{1,m}, \ldots, \xi_{m,m}$. Egzistenciju rješenja $\mathbf{u}_m$ tog sustava pokazujemo pomoću Leme 4.1.4. Neka je $X = \mathcal{L}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ sa skalarnim produktom naslijeđenim iz V te neka je preslikavanje $P = P_m$ definirano s

$$((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{v})) = \mu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X.$$

P_m je očito neprekidno, zato pokažimo da postoji $k > 0$ takav da je $(P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})_{H_0^1(\Omega)} > 0$ za sve $\mathbf{u} \in \partial B(0, k)$. Imamo

$$\begin{aligned}((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) &= \mu((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} = \text{(Lema 5.3.2(i))}\\ &= \mu((\mathbf{u}, \mathbf{u})) - (\mathbf{f}, \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} \geq \mu\|\mathbf{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)}\\ &= \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)}(\mu\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)} - \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Slijedi da je za $k > \frac{1}{\mu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$ $((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) > 0$ na $\partial B(0, k)$ pa, prema Lemi 4.1.4, postoji rješenje $\mathbf{u}_m$ sustava (5.18)-(5.19).

Sada množenjem jednadžbi (5.19) sa $\xi_{k,m}$ te zbrajanjem odgovarajućih jednadžbi dobivamo

$$\mu\|\mathbf{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \underbrace{b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)}_{=0} = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_{L^2(\Omega)}$$

pa je

$$\mu\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{u}_m\|.$$

Dakle, dobili smo apriornu ocjenu

$$\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu}\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Slijedi da je niz $(\mathbf{u}_m)$ ograničen u Hilbertovom prostoru V pa postoji podniz $(\mathbf{u}_{m_k})$ takav da $\mathbf{u}_{m_k} \to \mathbf{u}$ u V slabo.

Prema teoremu kompaktnosti ulaganja prostora Soboljeva (Teorem 3.2.1, odnosno napomeni iza teorema), ulaganje $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ je kompaktno. Zbog neprekidnosti ulaganja $V \subset H_0^1(\Omega)$ (norme su na njima jednake) slijedi da je i ulaganje $V \subset L^2(\Omega)$ kompaktno. Stoga postoji podniz $(\mathbf{u}_{m_{k_j}}) \subset (\mathbf{u}_{m_k})$ koji konvergira prema $\mathbf{u}$ jako u $L^2(\Omega)$.

Pustimo li $m \to \infty$ u (5.19), zbog Leme 5.3.3, dobivamo

$$\mu((\mathbf{u}, \mathbf{w}_k)) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_k) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_k)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall k. \tag{5.20}$$

Jednakost (5.20) vrijedi i za sve linearne kombinacije od $\mathbf{w}_k$, $k \in \mathbb{N}$ pa, zbog gustoće u prostoru V i neprekidnosti skalarnih produkata i forme b, jednakost (5.20) vrijedi za svaki $\mathbf{v} \in V$. Dakle, $\mathbf{u}$ je rješenje zadaće (5.17).

□

Napomena 5.3.5 (rekonstrukcija tlaka)**.** *Uočimo da smo množenjem jednadžbe* (5.14)$_1$ *s* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *izgubili izraz za tlak p. Međutim, tlak možemo rekonstruirati iz rješenja* $\mathbf{u} \in V$ *zadaće 5.17 pomoću sljedećeg teorema.*

Teorem 5.3.6. *Ako je* $\mathbf{f}$ *neprekidan linearni funkcional na* $H_0^1(\Omega)$ *takav da vrijedi*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

onda postoji $p \in L^2(\Omega)^n$*, jedinstven do na aditivnu konstantu, takav da je*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \langle \operatorname{grad} p, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega).$$

Dokaz. Vidi [5]. □

Sada za rješenje $\mathbf{u} \in V$ *definiramo funkcional* $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *s*

$$\langle F, \mathbf{v} \rangle = \mu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n.$$

F je očito linearan, a neprekidnost slijedi iz neprekidnosti skalarnih produkata i forme b. Kako je $\mathbf{u} \in V$ *rješenje zadaće 5.17, slijedi da je* $\langle F, \mathbf{v} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{v} \in V$ *pa, prema gornjem teoremu, postoji* $p \in L^2(\Omega)$ *takav da je*

$$\mu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n.$$

Napomena 5.3.7. *U općenitom slučaju kada je* $n \in \mathbb{N}$ *dokaz je sličan. Razlika je jedino u tome što za* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *izraz* $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ *ne mora imati smisla pa se uvodi potprostor od* V

$$\tilde{V} = \text{zatvarač prostora } \mathscr{V} \text{ u } H_0^1(\Omega)^n \cap L^n(\Omega)^n,$$

gdje je norma na $H_0^1(\Omega)^n \cap L^n(\Omega)^n$ *dana s*

$$\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^n(\Omega)},$$

te se forma b definira na $V \times V \times \tilde{V}$. *Uočimo da je za* $n = 2, 3, 4$ *zapravo* $\tilde{V} = V$:

- *Za* $n = 2$ *imamo slučaj* $p = n$ *za koji, prema Napomeni 3.1.6(b), vrijedi ocjena*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

- *Za* $n = 3$ *je* $2^* = 6$ *pa prema Teoremu 3.1.5 i Lemi 2.1.10 imamo neprekidna ulaganja* $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ *što daje ocjenu*

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

- *Za* $n = 4$ *je* $2^* = 4$ *pa prema Teoremu 3.1.5 dobivamo ocjenu*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Iz gornjih ocjena vidimo da je norma prostora $\tilde{V}$ *ekvivalentna normi prostora* V *iz čega po definiciji tih prostora slijedi da su oni jednaki.*

Bibliografija

[1] R. Adams, J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[3] L. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.

[4] G. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, 2013.

[5] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer, 1986.

[6] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza: elementi teorije operatora*, Školska knjiga, 1990.

[7] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

Sažetak

U ovom radu dokazali smo teoreme ulaganja Soboljevljevih prostora $W^{k,q}$ u L^p prostore (ili čak Hölderove prostore, ako je $kq > n$, gdje je n dimenzija prostora $\mathbb{R}^n$) na ograničenim (dovoljno glatkim) domenama. Među njima je posebno važan Rellich-Kondrachovljev teorem, koji osigurava kompaktnost određenih ulaganja, što smo u dva primjera iskoristili za dokaz egzistencije rješenja nelinearnih rubnih zadaća. Prvi je primjer kvazilinearna eliptička PDJ s homogenim rubim uvjetom

$$\begin{cases} -\Delta u + b(Du) + \mu u = 0 & \text{na } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

gdje je Ω ograničena domena klase C^2. Pretpostavili smo da je $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzova te zadovoljava uvjet na rast

$$|b(p)| \leq C(|p| + 1)$$

za neki C i za sve $p \in \mathbb{R}^n$. Egzistencija rješenja $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ove zadaće pokazana je pomoću Schauderovog teorema o fiksnoj točki, čija je pretpostavka kompaktnosti odgovarajućeg operatora osigurana kompaktnošću ulaganja $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

Drugi je primjer stacionarna Navier-Stokesova zadaća, također s homogenim rubnim uvjetom, na ograničenoj glatkoj domeni Ω,

$$\begin{cases} -\mu\Delta \mathbf{u} + (D\mathbf{u})\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{na } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{na } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{na } \Gamma, \end{cases}$$

gdje su vektorska funkcija $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ i skalarna funkcija p tražene funkcije, dok je $\mathbf{f}$ zadana. Ovdje je egzistencija rješenja pokazana pomoću Galerkinove metode, dakle konstruirali smo ograničen niz aproksimativnih rješenja te na limesu nekog njegovog podniza dobili rješenje. Za to nam je bila potrebna kompaktnost ulaganja $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Summary

In this thesis we proved the Sobolev embedding theorems of spaces $W^{k,q}(\Omega)$ in L^p spaces (or even Hölder spaces, when $kq > n$, where n is the dimension of $\mathbb{R}^n$) on bounded (smooth enough) domains. Among them, the Rellich-Kondrachov Theorem is particularly important, since it provides compactness of certain embeddings, which we have used in two examples to prove the existence of solutions of nonlinear boundary problems.

The first example is the quasilinear elliptic PDE with homogeneous boundary condition

$$\begin{cases} -\Delta u + b(Du) + \mu u = 0 & \text{on } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain of class C^2. We assumed that $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is Lipschitz continous and satisfies the growth condition

$$|b(p)| \leq C(|p| + 1)$$

for some C and all $p \in \mathbb{R}^n$. The existence of a solution $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ of this problem is shown using Schauder's Fixed Point Theorem, whose assumption of compactness of the corresponding operator is secured by the compactness of the embedding $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

The second example is the stationary Navier-Stokes problem, also with homogeneous boundary condition, on a bounded smooth domain Ω,

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + (D\mathbf{u})\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{on } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{on } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

where the vector function $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ and the scalar function p are required functions, while $\mathbf{f}$ is given. Here the existence of a solution is shown using the Galerkin method, i.e. we have constructed a bounded sequence of approximate solutions and got the solution as the limit of its subsequence. To do this, we needed the compactness of the embedding $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$.

Životopis

Ana Radošević rođena je 29. svibnja 1990. godine u Zagrebu, gdje je pohađala osnovnu (OŠ Ive Andrića) i srednju školu (XV. gimnazija). Nakon završetka srednje škole, 2009. godine upisuje preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka istog 2012. godine upisuje diplomski studij Primijenjene matematike na istom fakultetu.