Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Arijana Milat

Višeskalne metode konačnih elemenata za linearne probleme

Diplomski rad

Zagreb, listopad 2010.

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Arijana Milat

Višeskalne metode konačnih elemenata za linearne probleme

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mladen Jurak

Zagreb, listopad 2010.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. Doc.dr.sc. Marko Vrdoljak, predsjednik

2. Prof.dr.sc. Zvonimir Tutek, član

3. Prof.dr.sc. Josip Tambača, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Sadržaj

Uvod

Višeskalna metoda konačnih elemenata (MsFEM) je numerička metoda za konstrukciju aproksimativnog rješenja rubne zadaće za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu s jako oscilirajućim koeficijentima. Općenito, parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) predstavljaju matematičke modele mnogih fizičkih, kemijskih i bioloških pojava. Često su dosta komplicirane jednadžbe i nalaženje analitičkog rješenja je nemoguće ili nepraktično. Stoga se traže numeričke aproksimacije rješenja.

Kada se javljaju jako oscilirajući koeficijenti u PDJ, oni induciraju oscilacije rješenja same zadaće. Standardna metoda konačnih elemenata mora koristiti mrežu koja je dovoljno fina da može dovoljno kvalitetno prikazati oscilacije u koeficijentima kako bi dala kvalitetnu aproksimaciju oscilirajućeg rješenja. U mnogim situacijama takva mreža je suviše fina za numeričku simulaciju jer vodi na sustav jednadžbi suviše velike dimenzije. Te probleme možemo rješiti primjenom višeskalne metode. Osnovna ideja je da se bazne funkcije konstruiraju tako da reprezentiraju oscilacije na skali određenoj oscilacijama koeficijenata. To se može lako postići ako bazne funkcije definiramo tako da rješavaju pripadnu homogenu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Zatim uz pomoć višeskalnih baznih funkcija projiciramo fino-skalno rješenje na grubu mrežu. Time formuliramo globalnu formulaciju višeskalnih metoda konačnih elemenata.

U ovom radu ćemo opisati globalnu formulaciju upotrebom raznih metoda konačnih elemenata, konačnih volumena i mješovitih elemenata. Uglavnom ćemo se ograničiti na eliptične rubne zadaće, te ćemo pokazati kako se metoda jednostavno proširuje i na paraboličke zadaće.

U prvom poglavlju ukratko iznosimo teoriju linearnih rubnih zadaća za PDJ gdje ćemo pokazati kako dolazimo do varijacijske formulacije slabog rješenja, te ćemo dati neke osnovne rezultate o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja. Zatim ćemo uvesti homogenizacijsku teoriju koju koristimo u slučaju periodičnih koeficijenata.

Drugo poglavlje promatra metodu konačnih elemenata gdje konstruiramo konačnodimenzionalan prostor koji nas vodi do aproksimacijske zadaće. Isto tako, pokazat ćemo kako se konstruiraju aproksimacijski prostori u slučaju konačnih volumena i mješovitih metoda.

Zadnje poglavlje je o višeskalnim metodama. Ovdje je opisana konstrukcija višeskalnih baznih funkcija i globalna formulacija te se metoda primjenjuje na jedan jednodimenzionalan primjer. Pokazat ćemo neke generalizacije za metodu konačnih volumena, mješovitu metodu konačnih elemenata i analizirati poseban slučaj kada postoji tzv. separacija skala. Zatim ćemo dati neke usporedbe s drugim višeskalnim metodama.

U Dodatku se nalaze neke definicije i rezultati o Soboljevim prostorima.

Višeskalna metoda konačnih elemenata je relativno nedavno razvijena metoda koja se praktično koristi u svim područjima moderne znanosti i inženjerstva, kao na primjer, u složenim materijalima, poroznim sredinama, turbulentnim transportima itd.

Poglavlje I

Varijacijska teorija eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Neka je Ω otvorena, ograničena domena u $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$. Promatramo rubnu zadaću

$$\begin{cases} Lp = f & \text{u } \Omega \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

gdje je $p : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija, $p = p(x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je zadana funkcija, a L označava parcijalno diferencijalni operator drugog reda oblika

$$Lp = -\text{div}(k(x)\nabla p).$$

Kroz cijeli rad pretpostavljamo da je

$$\alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} k_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \beta|\xi|^2, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \Omega, \beta \geq \alpha > 0. \tag{1.0.2}$$

Klasično rješenje zadaće (1.0.1) je funkcija $p \in C^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu u svakoj točki domene i poništava se na rubu. Prostori $C^k(\Omega)$ i $C_0(\Omega)$ su uvedeni u Dodatku. U općem slučaju, egzistencija klasičnog rješenja nije uvijek garantirana jer ona zavisi o glatkoći ruba domene $\partial\Omega$ i glatkoći funkcija $k(x)$ i $f(x)$. Da bismo savladali nedostatke klasične teorije i da bismo se mogli baviti parcijalnim diferencijalnim jednadžbama s nedovoljno glatkim podacima generaliziramo pojam klasičnog rješenja. Rubnu zadaću formuliramo u obliku varijacijske jednadžbe čije rješenje nazivamo *slabo rješenje*. Egzistenciju slabog rješenja je lakše dokazati sredstvima funkcionalne analize te se pokazuje da je svako slabo rješenje ujedno i klasično ako ima dovoljnu glatkoću.

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se postavlja slaba (varijacijska) formulacija eliptične rubne zadaća za homogene i nehomogene Dirichletove rubne uvjete, te za periodički rubni uvjet koji koristimo u periodičkoj homogenizaciji.

1.1 Slaba formulacija rubne zadaće

Promatramo eliptičnu jednadžbu s Dirichletovim rubnim uvjetom

$$\begin{cases} -\text{div}(k(x)\nabla p) = f & \text{u } \Omega \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

gdje je Ω ograničena domena u $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$), $k(x)$ zadovoljava (1.0.2).

Da bismo generirali pojam rješenja zadaće (1.1.1) na slučaj kada f i k nisu neprekidne (glatke) funkcije, eliptičnu jednadžbu iz (1.1.1) množimo sa test funkcijom $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ i integriramo po Ω:

$$\int_\Omega (-\mathrm{div}(k(x)\nabla p))v\,dx = \int_\Omega fv\,dx, \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega).$$

Zatim iz

$$\mathrm{div}(k(x)\nabla p)v = \mathrm{div}(k(x)\nabla p\ v) - k(x)\nabla p \cdot \nabla v$$

dobivamo:

$$\int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v\,dx - \int_\Omega \mathrm{div}(k(x)\nabla p\ v)\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

Konačno, primjenom teorema o divergenciji dobivamo:

$$\int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega} (k(x)\nabla p \cdot \vec{n})v\,d\sigma = \int_\Omega fv\,dx,$$

gdje je $\vec{n}$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Test funkcija v se poništava na rubu domene pa se gubi drugi član lijeve strane i konačno dolazimo do *varijacijske formulacije* rubne zadaće (1.1.1): naći p koji zadovoljava,

$$\int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega). \tag{1.1.2}$$

U ovoj formulaciji se ne pojavljuju druge derivacije nepoznate funkcije p pa ju može zadovoljavati funkcija iz prostora $C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$. Nadalje, lako se pokazuje da je svako rješenje zadaće (1.1.2), koje je dva puta neprekidno derivabilno, ujedno i rješenje zadaće (1.1.1)(vidi [5]).

Uvedimo oznaku $V = C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ i definirajmo preslikavanja

$$a : V \times V \to \mathbb{R}, \quad F : V \to \mathbb{R},$$

formulama

$$a(p, v) = \int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v\,dx, \quad F(v) = \int_\Omega fv\,dx.$$

Zadaću (1.1.2) sada možemo zapisati apstraktno u obliku:

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in V \text{ takav da} \\ \forall v \in V, \qquad a(p, v) = F(v). \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Rješenje ove zadaće dobivamo primjenom Lax-Milgramove leme koja nam daje uvjete uz koje zadaća (1.1.2) ima jedinstveno rješenje.

Teorem 1.1.1. *(Lax-Milgramova lema[7]) Neka je V Hilbertov prostor s normom $\|\cdot\|$ te $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinearna forma sa sljedećim svojstvima:*

$$\exists M > 0 \quad \textit{takvo da je } \forall u, v \in V, \qquad |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \textit{(ograničenost)};$$

$$\exists \alpha > 0 \quad \textit{takvo da je } \forall v \in V, \qquad a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \textit{(koercitivnost)}.$$

Tada za svaki linearan i neprekidan funkcional $F \in V'$ zadaća

$$\begin{cases} \text{Naći } u \in V \\ \forall v \in V, \qquad a(u,v) = \langle F, v\rangle \end{cases} \tag{1.1.4}$$

ima jedinstveno rješenje $u \in V$ i vrijedi

$$\|u\| \le \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}.$$

Ovdje smo primjenu funkcionala F na element $v \in V$ označili s $\langle F, v\rangle$.

Napomena 1.1.1. *[6] Bilinearna forma $a(\cdot,\cdot)$ definira jedinstven linearan operator $A : V \to V'$ pomoću formule*

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle Au, v\rangle_{V',V} = a(u,v).$$

Stoga, zadaću (1.1.4) možemo zapisati u obliku operatorske jednadžbe

$$Au = F. \tag{1.1.5}$$

Problem (1.1.5) je dobro postavljen ili korektan ako ima jedinstveno rješenje u koje neprekidno ovisi o desnoj strani F. To znači da operator A mora biti bijekcija, a A^{-1} neprekidan operator. Prema teoremu o otvorenom preslikavanju (vidi [7]) neprekidnost bijektivnog operatora A povlači neprekidnost inverznog operatora, pa je stoga problem (1.1.5) dobro postavljen ako je operator A neprekidna bijekcija.

Neprekidnost linearnog operatora A bit će osigurana ako imamo ograničenost bilinearne forme, a injektivnost operatora nam osigurava uvjet koercitivnosti na bilinearnu formu $a(\cdot,\cdot)$. Koercitivnost nam osigurava i injektivnost operatora A, te zatvorenost njegove slike. Iz koercitivnosti se tada lako pokaže da je $\mathcal{R}(A) = V$, odnosno da je operator A surjektivan (vidi [7]).

Ako za prostor V uzmemo prostor neprekidno derivabilnih funkcija sa svojom prirodnom normom nije moguće postići koercitivnost bilinearne forme i takav prostor, pored toga, nije Hilbertov. Stoga moramo uzeti širi prostor, $H_0^1(\Omega)$, koji je iz klase prostora Soboljeva. Više o prostorima Soboljeva nalazi se u Dodatku. Prostor $H_0^1(\Omega)$ se definira kao upotpunjenje prostora $C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\Omega)$ u normi

$$\|v\| = \left(\int_\Omega |v(x)|^2\,dx + \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Prostor $H_0^1(\Omega)$ je potpun unitaran (Hilbertov) prostor sa skalarnim produktom

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx.$$

Nakon što smo definirali prostor V s odgovarajućom normom, možemo provjeriti uvjete Lax-Milgramove leme. Da bismo provjerili neprekidnost, odnosno ograničenost, uvedimo konstantu $M = \|k_{ij}\|_{L^\infty}$. Tada za sve $p, v \in H^1(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned}
|a(p,v)| &= \left| \int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v \, dx \right| \\
&\leq M \int_\Omega |\nabla p| \cdot |\nabla v| \, dx \\
&\leq M \left(\int_\Omega |\nabla p|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq M \|p\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sljedeće provjeravamo koercitivnost. Za sve $v \in H_0^1(\Omega)$ imamo:

$$|a(v,v)| = \int_\Omega k(x)\nabla v \cdot \nabla v \, dx \geq k_0 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Zbog Poincaréove nejednakosti postoji konstanta $C > 0$ takva da je za sve $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |v|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Time dobivamo da je

$$2 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq C_1 \left(\int_\Omega |v|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right),$$

gdje je $C_1 = \min\{1, 1/C\}$. Stoga je na prostor $H_0^1(\Omega)$ preslikavanje $v \mapsto \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}$ norme na $H_0^1(\Omega)$ ekvivalentno s normom naslijeđenom iz $H^1(\Omega)$. Zato imamo, za svako $v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(v,v)| \geq k_0 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

i koercitivnost je dokazana.

Napomena 1.1.2. *Bilinearna forma* $a(p,v) = \int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v \, dx$ *nije koercitivna na čitavom* $H^1(\Omega)$.

Sada kada se svi uvjeti Lax-Milgramove leme lako provjeravaju, to poopćena zadaća

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \end{cases} \tag{1.1.6}$$

ima jedinstveno rješenje.

Varijacijska formulacija nam daje temelj za konstrukciju numeričkog postupka za aproksimaciju rubnih zadaća koji nazivamo metoda konačnih elemenata. Osnovna ideja je zamijeniti beskonačan dimenzionalan prostor $H_0^1(\Omega)$ nekim njegovim konačnim potprostorom. Taj se postupak naziva varijacijska aproksimacija. Metoda konačnih elemenata konstruira konačnodimenzionalan potprostor kao prostor po dijelovima polinomijalnih funkcija.

Pretpostavimo da smo konstruirali konačnodimenzionalan potprostor $\mathcal{P}_h \subset H_0^1(\Omega)$. Dolazimo do aproksimativne varijacijske zadaće:

$$\begin{cases} \text{Naći } p_h \in \mathcal{P}_h \\ \forall v \in \mathcal{P}_h, \quad \displaystyle\int_\Omega k(x)\nabla p_h \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Ako su zadovoljeni svi uvjeti Lax-Milgramove leme za zadaću (1.1.6), onda ti uvjeti osiguravaju jedinstvenu rješivost zadaće (1.1.7). Jedina razlika između te dvije zadaće je u funkcijskom prostora. Kako je svaki konačnodimenzionalni potprostor Hilbertovog prostora i sam Hilbertov vidimo da su sve pretpostavke Lax-Milgramove leme ispunjene i za zadaću (1.1.7).

Prije nego što ćemo uvesti metodu konačnih elemenata pokazat ćemo kako se varijacijska formulacija generalizira za nehomogene i periodične rubne uvjete.

1.2 Nehomogena rubna zadaća

Promatramo nehomogenu rubnu zadaću

$$\begin{cases} Lp = f & \text{u } \Omega \\ p = g & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.1}$$

gdje su domena Ω i operator L kao i u slučaju homogenog rubnog uvjeta. Da bi postojalo klasično rješenje ove zadaće funkcija g mora imati barem jedno proširenje g_0 na $\bar{\Omega}$ koje je klase C^2. U tom slučaju zadaću možemo svesti na zadaću s homogenim rubnim uvjetom. Postupak homogenizacije rubnog uvjeta bazira se na tome da prijeđemo na ekvivalentnu zadaću za funkciju $w = p - g_0$:

$$\begin{cases} Lw = f_1 & \text{u } \Omega \\ w = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.2}$$

gdje je $f_1 = f - Lg_0$. Traženo rješenje je tada $p = w + g_0$.

Postupak homogenizacije rubnog uvjeta možemo provesti na slabom rješenju varijacijske zadaće. Tada formulacija ima sljedeći oblik:

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in H^1(\Omega),\ p = g \text{ na } \partial\Omega \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Ovdje rješenje više ne tražimo u prostoru test funkcija, $H_0^1(\Omega)$, već u linearnoj mnogostrukosti

$$g + H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = g \quad \text{na } \partial\Omega\}.$$

Da bi varijacijska zadaća (1.2.3) imala rješenje nužno moramo pretpostaviti da postoji barem jedna funkcija $g_0 \in H^1(\Omega)$ takva da je $g_0 = g$ na $\partial\Omega$. Time dolazimo do ekvivalentne zadaće za funkciju $w = p - g_0 \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \text{Naći } w \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega k(x)\nabla w \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx - \int_\Omega k(x)\nabla g_0 \cdot \nabla v\, dx. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Na homogenu rubnu zadaću (1.2.4) možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu koja daje egzistenciju i jedinstvenost rješenja te zadaće. Rješenje nehomogene zadaće (1.2.3) je tada $p = w + g_0$. Lako se pokazuje da je i to rješenje jedinstveno, odnosno da ne ovisi o izboru funkcije g_0. Time dolazimo do sljedećeg rezultata:

Teorem 1.2.1. *Neka su ispunjene sljedeće pretpostavke o operatoru L:*

$$\forall i,j \quad k_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega),$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \Omega, \quad \sum_{i,j=1}^d k_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^d \xi_i^2.$$

$$\forall x \in \Omega, \quad \textit{matrica } K(x) = (k_{ij}(x)) \textit{ je simetrična},$$

i neka je Ω Lipschitzova domena. Tada za svaku funkciju $g \in L^2(\partial\Omega)$ koja ima barem jedno proširenje $G \in H^1(\Omega)$, $G|_{\partial\Omega} = g$ varijacijska zadaća (1.2.3) ima jedinstveno rješenje u $H^1(\Omega)$.

Nehomogena Dirichletova zadaća nas vodi do prostora funkcija definiranih na $\partial\Omega$ koji definiramo na sljedeći način

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \quad \exists \Phi \in H^1(\Omega), \quad \Phi|_{\partial\Omega} = \phi\}.$$

Prostor $H^{1/2}(\Omega)$ nazivamo prostor tragova funkcija iz $H^1(\Omega)$, a trag funkcije je restrikcija funkcije iz prostora Soboljeva na rub domene. U teoriji prostora Soboljeva se pokazuje da je $H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$, s time da je inkluzija stroga. Time je nehomogena Dirichletova rubna zadaća rješiva za svaki rubni uvjet $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, ali ne i za svako $g \in L^2(\partial\Omega)$. U Dodatku se može naći Teorem o tragu.

Napomena 1.2.1. *Homogenizacija rubnog rješenja je nužna da bi se pokazalo da nehomogena zadaća ima rješenje. S druge strane, u numeričkom rješavanju homogenizacija rubnog uvjeta se najčešće ne izvodi u varijacijskoj forumulaciji već se sličan postupak radi na razini diskretne zadaće.*

1.3 Periodični rubni uvjeti

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ otvoren, ograničen skup i neka je $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ ćelija periodičnosti. Npr. u $d = 1$ ćelija periodičnosti je $Y = (0, l)$ i kažemo da je funkcija f Y-periodična ako ima period l tj. $f(x+l) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. U dvije prostorne dimenzije ćelija periodičnosti je oblika $Y = (0, l_1) \times (0, l_2)$, a funkcija f je Y-periodična ako vrijedi $f(x+l_1, y) = f(x, y)$ i $f(x, y + l_2) = f(x, y)$, za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Analogna definicija Y-periodičnosti vrijedi u svakoj dimenziji $d \geq 2$.

Promatramo sljedeću rubnu zadaću:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(k(x)\nabla p) = f & \text{u } Y \\ p \text{ je } Y\text{-periodična}, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

gdje je $k \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ Y-periodična funkcija, $k(x)$ zadovoljava (1.0.2) za svaki $x \in \mathbb{R}^d$, i $f \in L^2(Y)$. Problem promatramo samo na ćeliji Y. Uvodimo Soboljev prostor Y-periodičnih funkcija

$$H^1_\sharp(Y) = \{\text{upotpunjenje u } H^1(\Omega)\ Y\text{-periodičnih funkcija iz } C^\infty(\mathbb{R}^d)\}.$$

Varijacijsku formulaciju za ovu zadaću dobivamo tako da jednadžbu iz (1.3.1) pomnožimo sa glatkom periodičnom funkcijom $\psi \in H^1_\sharp(Y)$ i integriramo po Y. Time dobivamo

$$-\int_Y \mathrm{div}(k(x)\nabla p)\psi\, dy = \int_Y f\psi\, dy.$$

Zatim parcijalnom integracijom i primijenom teorema o divergenciji dobivamo

$$-\int_{\partial Y} k(x)\nabla p \cdot \vec{n}\psi\, d\sigma + \int_Y k(x)\nabla p \cdot \nabla\psi\, dy = \int_Y f\psi\, dy. \tag{1.3.2}$$

Prvi član u (1.3.2) isčezava zbog periodičnosti. Time smo došli do zadaće:

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in H^1_\sharp(Y) \text{ t.d.} \\ \\ \forall\psi \in H^1_\sharp(Y), \quad \displaystyle\int_Y k(x)\nabla p \cdot \nabla\psi\, dy = \int_Y f\psi\, dy. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Iz ove se zadaće lako vidi da je nužan uvjet za egzistenciju rješenja $\int_Y f\, dy = 0$. Kako je rješenje zadaće (1.3.3) jedinstveno do na aditivnu konstantu ne možemo direktno primijeniti Lax-Milgramovu lemu. Zato uvodimo prostor

$$\overset{0}{H^1_\sharp}(Y) = \{\psi \in H^1_\sharp(Y) : \quad \int_Y \psi\, dy = 0\}.$$

Sada varijacijsku formulaciju promatramo na prostoru $\overset{0}{H^1_\sharp}(Y)$

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in \overset{0}{H^1_\sharp}(Y) \text{ t.d.} \\ \\ \forall\psi \in \overset{0}{H^1_\sharp}(Y), \quad \displaystyle\int_Y k(x)\nabla p \cdot \nabla\psi\, dy = \int_Y f\psi\, dy. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Koercitivnost zadaće (1.3.4) dokazuje se pomoću verzije Poincaréove nejednakosti koja kaže da postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$\int_\Omega |v|^2 dx \le C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \tag{1.3.5}$$

za sve $v \in \overset{0}{H^1_\sharp}(Y)$. Dokaz koercitivnosti je analogan onom iznesenom u Sekciji 1.1.

Na zadaću (1.3.4) sada možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu koja nam daje jedinstveno rješenje. Ako funkcija p rješava zadaću (1.3.4), onda se lako vidi, radi uvjeta $\int_Y f(y)\, dy = 0$, da ona rješava i zadaću (1.3.3).

Zadaće s periodičnim rubnim uvjetima koristimo u homogenizacijskoj teoriji.

1.4 Homogenizacijska teorija

Homogenizacijska teorija se bavi parcijalnim diferencijalnim jednadžbama s oscilirajućim koeficijentima. Posebno, u okviru periodičke homogenizacije, promatraju se PDJ s periodičnim koeficijentima. Obično se pretpostavlja da je period oscilacije koeficijenata PDJ, ϵ, mala veličina.

Oscilacije koeficijenata PDJ induciraju oscilacije rješenja same jednadžbe. U slučaju periodičnih koeficijenata rubni uvjeti koji se promatraju obično nisu periodični tako da samo rješenje nije periodična funkcija. Svejedno, u njemu se nalaze oscilacije na skali određenoj s periodom ϵ, inducirane oscilacijama koeficijenata.

Homogenizacijska teorija, formalno, promatra što se događa s rješenjem p_ϵ kada $\epsilon \to 0$. U stvarnosti želi se identificirati srednje ponašanje rješenja p_0 koje isključuje oscilacije inducirane oscilatornim koeficijentima. To je složena zadaća stoga što oscilacije u koeficijentima utječu i na globalno ponašanje rješenja, a ne samo na oscilacije na ϵ-skali. Metoda homogenizacijske teorije je identifikacija takozvane efektivne diferencijabilne jednadžbe, s neoscilatornim koeficijentima, koja definira granično rješenje p_0.

Opisati ćemo homogenizacijsku teoriju promatrajući eliptičnu jednadžbu drugog reda

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\sum_{i,j=1}^{d} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x/\epsilon)\dfrac{\partial p_\epsilon}{\partial x_j}\right) & = & f & \text{u } \Omega \\ p_\epsilon|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array}\right. \tag{1.4.1}$$

gdje je $k_{ij} \in L^\infty(Y)$ Y-periodična funkcija, $Y = (0,1)^d$, te je zadovoljen uvjet eliptičnosti

$$\sum_{i,j=1}^{d} k_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{d} |\xi_i|^2,$$

gdje je $\alpha > 0$. U slučaju poroznih sredina k predstavlja tenzor propusnosti. Kako je ϵ po pretpostavci malen, koeficijenti k_{ij} će imati jako brze oscilacije.

Homogenizacijska teorija proučava ponašanje rješenja p_ϵ kada $\epsilon \to 0$. Ovdje se p_0 traži kao rješenje neoscilatorne zadaće

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\sum_{i,j=1}^{d} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k^*_{ij}\dfrac{\partial p_0}{\partial x_j}\right) & = & f & \text{u } \Omega \\ p_0|_{\partial\Omega} & = & 0. & \end{array}\right. \tag{1.4.2}$$

Koeficijenti k^*_{ij} su tzv. homogenizirani koeficijenti koji su neoscilatorni i u našem slučaju konstantni. Zovemo ih još *efektivni koeficijenti.* U ovoj Sekciji dajemo neke analitičke formule za konstrukciju efektivnih koeficijenata, pomoću kojih se onda, rješavanjem zadaće (1.4.2), određuje p_0.

Definirajmo bilinearnu formu

$$a^\epsilon(p,v) = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega k^\epsilon_{ij}(x)\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

Zadaća (1.4.1) se sada može formulirati kao varijacijski problem: Naći $p_\epsilon \in H^1_0(\Omega)$ takav da

$$a^\epsilon(p_\epsilon, v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega),$$

gdje je $\langle f, v\rangle$ L^2-skalarni produkt, $\int_\Omega f v\, dx$.

Zapisati ćemo $p_\epsilon(x)$ u formi asimptotskog razvoja po malom parametru ϵ

$$p_\epsilon(x) = p_0(x, x/\epsilon) + \epsilon p_1(x, x/\epsilon) + \epsilon^2 p_2(x, x/\epsilon) + \cdots , \tag{1.4.3}$$

gdje su $p_i(x, y)$ periodične u drugoj varijabli y, s periodom Y.

Označimo sa A^ϵ eliptičan operator drugog reda

$$A^\epsilon = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x/\epsilon)\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Diferencirajući funkciju $\phi(x, x/\epsilon)$ obzirom na x, imamo

$$\frac{d}{dx_j}\phi\,\Big|_{y=x/\epsilon} = \frac{\partial}{\partial x_j}\phi\,\Big|_{y=x/\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y_j}\phi\,\Big|_{y=x/\epsilon}.$$

U skladu s time, operator A^ϵ možemo raspisati na slijedeći način

$$A^\epsilon = \epsilon^{-2}A_1 + \epsilon^{-1}A_2 + \epsilon^0 A_3, \tag{1.4.4}$$

gdje su

$$A_1 = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(k_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

$$A_2 = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(k_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

$$A_3 = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Nadalje, supstitucijom razvoja za p_ϵ i A^ϵ u jednadžbu $A^\epsilon p_\epsilon = f$ i izjednačavanjem izraza uz iste potencije od ϵ dobivamo beskonačan niz jednadžbi

$$A_1 p_0 = 0 \tag{1.4.5}$$

$$A_1 p_1 + A_2 p_0 = 0 \tag{1.4.6}$$

$$A_1 p_2 + A_2 p_1 + A_3 p_0 = f \tag{1.4.7}$$

$$\cdots$$

Jednadžbu (1.4.5) možemo zapisati kao

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(k_{ij}(y)\frac{\partial p_0}{\partial y_j}(x, y)\right) = 0,$$

gdje je p_0 periodična u y. Teorija eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednadžba drugog reda s periodičkim rubnim uvjetima opisana u Sekciji 1.3, implicira da je $p_0(x, y)$ neovisan o y pa je $p_0(x, y) = p_0(x)$. To nam pojednostavljuje jednadžbu (1.4.6) za p_1,

$$A_1 p_1 = \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} k_{ij}(y)\right) \frac{\partial p_0}{\partial x_j}(x). \tag{1.4.8}$$

Zatim separiramo varijable kako bi funkciju p_1 prikazali na jednostavniji način. Za $j = 1, \ldots, d$, neka $\chi^j = \chi^j(y)$ rješava sljedeći problem:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i,k=1}^{d} \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(k_{ik}(y)\dfrac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y)\right) = \sum\limits_{i=1}^{d} \dfrac{\partial}{\partial y_i} k_{ij}(y) \quad \text{u } Y \\ \\ \chi^j \text{ je } Y\text{-periodična} \end{array}\right. \tag{1.4.9}$$

Ovaj problem ima rješenje χ^j, koje je jedinstveno do na aditivnu konstantu, jer je, zbog periodičnosti integral desne strana jednadžbe po Y jednak nuli. To nam daje nužan uvjet za egistenciju rješenja zadaće s periodičnim rubnim uvjetom. Tada je općenito rješenje za (1.4.8) dano s

$$p_1(x,y) = -\sum_{j=1}^{d} \chi^j(y)\frac{\partial p_0}{\partial x_j}(x) + \widetilde{p}_1(x), \tag{1.4.10}$$

gdje je $\widetilde{p}_1(x)$ za sada nepoznata funkcija. Konačno, jednadžba za p_2 je dana sa

$$A_1 p_2 = -A_2 p_1 - A_3 p_0 + f. \tag{1.4.11}$$

Kako je p_2 Y-periodična u drugoj varijabli y slijedi da jednadžba (1.4.11) ima rješenje jedino ako desna strana jednadžbe (1.4.11) ima integral po jediničnoj ćeliji $Y = [0,1]\times[0,1]$ jednak nuli:

$$\int_Y (A_2 p_1 + A_3 p_0 - f)\, dy = 0.$$

Slijedi da je

$$\int_Y (A_2 p_1 + A_3 p_0)\, dy = \int_Y f\, dy = f(x). \tag{1.4.12}$$

Uzimajući u obzir periodičnost i (1.4.10) dobivamo

$$\begin{aligned} \textstyle\int_Y A_2 p_1\, dy &= -\sum_{i,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_Y k_{ik}(y)\frac{\partial p_1}{\partial y_k}\, dy\right) \\ &= -\sum_{i,j,k=1}^{d}\left(\int_Y k_{ik}(y)\frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y)\, dy\right)\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Nadalje, imamo

$$\int_Y A_3 p_0\, dy = -\sum_{i,j=1}^{d}\left(\int_Y k_{ij}(y)\, dy\right)\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Sada ova dva izraza uvrstimo u jednadžbu (1.4.12) i dobivamo

$$-\sum_{i,j=1}^{d}\left(\int_Y \left(k_{ij}(y) - \sum_{k=1}^{d} k_{ik}(y)\frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y)\right) dy\right)\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i \partial x_j} = f(x).$$

Time smo došli do neoscilatorne zadaće:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\sum\limits_{i,j=1}^{d} k^*_{ij}\dfrac{\partial^2 p_0}{\partial x_i \partial x_j} &=& f & \text{u } \Omega \\ \\ p_0 &=& 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1.4.13}$$

gdje su

$$k_{ij}^* = \int_Y \left(k_{ij}(y) - \sum_{k=1}^{d} k_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) \right) \quad (i, j = 1, \ldots, d)$$

homogenizirani koeficijenti i χ^j rješava zadaću (1.4.9).

Da bismo pokazali da zadaća (1.4.13) ima jedinstveno rješenje treba pokazati pozitivnu definitnost matrice $k^* = (k_{ij}^*)$. Neka je $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$ proizvoljan vektor. Moramo pokazati da vrijedi

$$k^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} > 0, \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d,\ |\vec{\xi}| = 1.$$

$$\begin{aligned} k^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} k_{ij}^* \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_Y \left(k_{ij}(y) - \sum_{k=1}^{d} k_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) \right) \xi_i \xi_j \\ &\geq \alpha \sum_{i=1}^{d} |\xi_i|^2 - \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_Y \left(\sum_{k=1}^{d} k_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) \right) \xi_i \xi_j \qquad (1.4.14) \\ &> - \sum_{i,j,k=1}^{d} \int_Y \left(k_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) \right) \xi_i \xi_j . \end{aligned}$$

Iz zadaće na ćeliji: (ϕ periodična)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_Y \left(k_{ij}(y) \frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}(y) \right) \frac{\partial \phi}{\partial y_i}\, dy = \sum_{i=1}^{d} \int_Y k_{ik}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y_i}\, dy$$

množenjem s ξ_k te sumiranjem po k za funkciju $u = \sum_{k=1}^{d} \chi^k \xi_k$ izlazi

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_Y \left(k_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \right) \frac{\partial \phi}{\partial y_i}\, dy = \sum_{i,k=1}^{d} \int_Y k_{ik}(y) \xi_k \frac{\partial \phi}{\partial y_i}\, dy.$$

Sada stavimo $\phi = u$ i dobivamo

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_Y \left(k_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \right) \frac{\partial u}{\partial y_i}\, dy = \sum_{i,k=1}^{d} \int_Y k_{ik}(y) \xi_k \frac{\partial u}{\partial y_i}\, dy.$$

Desna strana je

$$\sum_{i,j,k=1}^{d} \int_Y k_{ik}(y) \xi_k \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} \xi_j\, dy$$

što je upravo izraz koji treba ocijeniti u (1.4.14), a lijeva strana je

$$\int_Y k(y) \nabla u \cdot \nabla u\, dy \geq k_{\min} \int_Y |\nabla u|^2 dy > 0$$

zato što su funkcije χ^k linearno nezavisne pa je svaka njihova netrivijalna kombinacija različita od nule. Iz toga slijedi da je matrica k^* pozitivno definitna.

Time smo dobili prvi član u asimptotskom razvoju (1.4.3) rješenja p_ϵ. Pored toga našli smo da drugi član ima oblik

$$p_1(x, x/\epsilon) = -\sum_{j=1}^{d} \chi^j(x/\epsilon) \frac{\partial p_0}{\partial x_j}(x) + \widetilde{p}_1(x),$$

gdje nam funkcija $\widetilde{p}_1(x)$ nije poznata, no ona ne sadrži oscilacije u članu $p_1(x, x/\epsilon)$.

Postupak identificiranja ostalih članova bi se mogao nastaviti na isti način na koji smo identificirali p_0, no taj način nećemo ovdje nastaviti (vidi [1]). Za naše potrebe dovoljno je poznavati strukturu oscilacija u članu $p_1(x, x/\epsilon)$.

Poglavlje II

Numeričke metode zasnovane na metodi konačnih elemenata

U ovom poglavlju iznosimo osnove različitih diskretizacijskih tehnika baziranih na metodama konačnih elemenata (MKE). Koncentrirat ćemo se na osnovnoj formulaciji i implementacijskim detaljima bez ulaženja u njihovu teoriju.

2.1 Konformna metoda konačnih elemenata

Numeričke metode za rješavanje diferencijalne zadaće se baziraju na diskretizaciji zadaće koja ima beskonačno mnogo stupnjeva slobode. Jedna od takvih metoda je i metoda konačnih elemenata.

Polazimo od varijacijske formulacije za zadaću (1.1.1), koju smo uveli u prvom poglavlju

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Naći } p \in H_0^1(\Omega) \\ \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad a(p,v) = \langle F, v\rangle \end{array}\right. \tag{2.1.1}$$

gdje su

$$a(p,v) = \int_\Omega k(x)\nabla p \cdot \nabla v \, dx, \quad F(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

Glavna ideja metode je prostor $H_0^1(\Omega)$ zamijeniti njegovim konačnodimenzionalnim potprostorom. Nakon što se konstruira konačnodimenzionalan potprostor možemo formulirati aproksimacijsku zadaću koja nas vodi do sustava s rijetkom matricom.

Pretpostavimo da je domena $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničen, poliedarski skup gdje smo dimenziju $d = 2$ odabrali radi jednostavnosti izlaganja. Prvi korak u konstrukciji konačnodimenzionalnog potprostora je triangulacija domene Ω tj. razbijanje domene na uniju disjunktnih poliedarskih skupova (elemenata) koji ju posve prekrivaju. Neka je $\mathcal{T}_H$ uobičajena particija od Ω na konačne elemente (to mogu biti trokuti, pravokutnici u dvije dimenzije, odnosno tetraedri, prizme ili paralelopipedi u tri dimenzije)

$$\Omega = \cup K, \quad K \in \mathcal{T}_H.$$

Prvo promatramo slučaj kada se triangulacija $\mathcal{T}_H$ sastoji od trokuta K. Svakom elementu $K \in \mathcal{T}_H$ pridružujemo jedan konačnodimenzionalan linearni prostor funkcija koji označavamo sa $P_r(K)$.

$$P_r(K) = \{p : \quad p \text{ je polinom stupnja} \leq r \text{ na } K\},$$

gdje je $r = 0, 1, 2, \ldots$. Općenito imamo, u dvije dimenzije,

$$P_r(K) = \{p : \quad p(x) = \sum_{0 \leq i+j \leq r} p_{ij} x_1^i x_2^j, \quad x \in K, p_{ij} \in \mathbb{R}\}, \quad r \geq 0.$$

Mi ćemo se ograničiti na prostor $P_1(K)$. Definiramo

$$\mathcal{P}_H = \{p : \quad p \text{ je neprekidna funkcija na } \Omega \text{ i } p|_K \in P_1(K),\ K \in \mathcal{T}_H\}.$$

Funkcije iz $\mathcal{P}_H$ su po dijelovima afine tj. na svakom trokutu $K \in \mathcal{T}_H$ funkcija $p \in \mathcal{P}_H$ je oblika $p(x) = a_K + b_K x_1 + c_K x_2$. Na granici susjednih elemenata funkcija $p(x)$ mora biti neprekidna te zato kao parametre ili stupnjeve slobode uzimamo vrijednosti funkcije u vrhovima trokuta. Time su funkcije iz $\mathcal{P}_H$ jedinstveno određene. Na svakom trokutu afina funkcija je posve određena svojim vrijednostima u vrhovima trokuta, a na stranicama koje povezuju susjedne trokute je neprekidna. Stoga je dimenzija prostora $\mathcal{P}_H$ jednaka broju vrhova triangulacije.

Da bismo efikasno konstruirali prostor $\mathcal{P}_H$ moramo naći jednu bazu u njemu. Ovdje se nameće nodalna baza koja je pridružena vrhovima triangulacije. Označimo vrhove trokuta sa x_i, $i = 1, \ldots, n_H$, gdje je n_H broj vrhova triangulacije. Svakom vrhu x_i pridružujemo baznu funkciju $\phi_i \in \mathcal{P}_H$ definiranu sa

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{ako } i = j, \\ 0 & \text{ako } i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, n_H. \tag{2.1.2}$$

To je funkcija sa malim nosačem jer je različita od nule samo na onim trokutima koji imaju x_i kao jedan svoj vrh.

Neprekidnost funkcija iz $\mathcal{P}_H$ smo postigli zahvaljujući tome što svaka dva susjedna trokuta imaju ili zajedničku čitavu stranicu, ili zajednički samo jedan vrh. Zbog toga zahtjevamo da svaka dva elementa K_1 i K_2 iz $\mathcal{T}_H$ za koje je $K_1 \cap K_2 \neq 0$ imaju ili zajedničku stranicu, ili zajednički brid, ili zajednički vrh.

Sada možemo formulirati aproksimacijsku zadaću

$$\begin{cases} \text{Naći } p_H \in \mathcal{P}_H \text{ takav da je} \\ \\ \forall v \in \mathcal{P}_H, \quad a(p_H, v) = \langle F, v \rangle \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Funkciju p_H možemo zapisati kao linearnu kombinaciju elemenata baze prostora $\mathcal{P}_H$ tj.

$$p_H(x) = \sum_{j=1}^{n_H} p_j \phi_j(x), \qquad x \in \Omega,$$

gdje su p_j vrijednosti funkcije u nodalnim točkama triangulacije $p_j = p_H(x_j)$, $i = 1, \ldots, n_H$. Sada funkciju p_H kao takvu supstituiramo u aproksimacijsku jednadžbu. Time dobivamo:

$$a(\sum_{j=1}^{n_H} p_j \phi_j, v) = \langle F, v \rangle.$$

Zbog bilinearnosti forme $a(\cdot,\cdot)$ slijedi

$$\sum_{j=1}^{n_H} p_j a(\phi_j, v) = \langle F, v\rangle.$$

Nadalje, uzimajući za test funkciju $v = \phi_i$, dobivamo sustav:

$$\sum_{j=1}^{n_H} p_j a(\phi_j, \phi_i) = \langle F, \phi_i\rangle, \qquad i = 1, \dots, n_H.$$

Označimo sa $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \sum_K \int_K k\nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i \, dx,$$

$$p_{nodal} = (p_1, \dots, p_{n_H})$$

i sa $b = (b_i)$

$$b_i = \langle F, \phi_i\rangle = \int_\Omega f\phi_i \, dx.$$

Time dobivamo sljedeći linearan sustav:

$$Ap_{nodal} = b, \tag{2.1.4}$$

Matricu A nazivamo *matrica krutosti* i ona je pozitivno definitna zbog koercitivnosti bilinearnog funkcionala. Ima vrlo malo elemenata različitih od nule te stoga ima oblik rijetke matrice. To nam olakšava numeričko rješavanje dobivenog sustava pomoću iterativnih metoda.

Napomena 2.1.1. *Integrali koje rješavamo u dobivenom sustavu se općenito računaju numerički pomoću integracijskih formula. Mogu se izračunati eksplicitno ako su k i f konstantne po elementima.*

Napomena 2.1.2. *U slučaju nehomogenih rubnih uvjeta polazimo od sljedeće varijacijske formulacije*

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in H^1(\Omega),\ p|_{\partial\Omega} = g \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad a(p, v) = \langle F, v\rangle \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Uz prostor $\mathcal{P}_H$ uvodimo i prostor $\mathcal{P}_H^0$ definiran kao

$$\mathcal{P}_H^0 = \{v \in \mathcal{P}_H : \ v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Formuliramo varijacijsku aproksimaciju

$$\begin{cases} \text{Naći } p_H \in \mathcal{P}_H,\ p_H|_{\partial\Omega} = g_H \\ \forall v \in \mathcal{P}_H^0, \qquad a(p_H, v) = \langle F, v\rangle, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

gdje je g_H po dijelovima linearna interpolacija funkciji g (koja mora biti neprekidna). Neka je m $(m < n_H)$ broj unutarnjih čvorova triangulacije. Radi jednostavnosti unutarnje *čvorove ćemo uzeti kao prvih m čvorova. Neka su ϕ_i $(i = 1, \ldots, n_H)$ bazne funkcije prostora $\mathcal{P}_H$. Tada svaka funkcija $v \in \mathcal{P}_H^0$ ima prikaz*

$$v(x) = \sum_{i=1}^{m} v_i \phi_i(x), \qquad x \in \Omega,$$

gdje $v_i = v(x_i)$. Rješenje p_H možemo zapisati kao

$$p_H(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j \phi_j(x) + \sum_{k=m+1}^{n_H} g_k \phi_k(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.1.7}$$

gdje $g_k = g(x_k)$. Konačno, uzimajući za testnu funkciju ϕ_i i supstituirajući izraz (2.1.7) dobivamo sustav

$$\sum_{j=1}^{m} p_j a(\phi_j, \phi_i) = \langle F, \phi_i \rangle - \sum_{k=m+1}^{n_H} g_k a(\phi_k, \phi_i), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Označimo sa

$$A = (a_{ij})_{ij=1}^{n_H}, \; a_{ij} = a(\phi_j, \phi_i),$$

$$p_{nodal} = (p_1, \ldots, p_{n_H})$$

$$b = (b_i), \; b_i = \langle F, \phi_i \rangle - \sum_{k=m+1}^{n_H} g_k a(\phi_k, \phi_i), \; i = 1, \ldots, m.$$

Tada:

$$Ap_{nodal} = b,$$

Sada ukratko promatramo slučaj kada se triangulacija sastoji od četverokuta. Detaljnije se može pronaći u [3]. To ćemo više koristiti u metodi konačnih volumena. Neka je $\mathcal{K}_H$ particija od Ω na disjunktne četverokute takve da su im horizontalni i vertikalni rubovi paralelni sa x_1- i x_2-koordinatom, redom. Zahtjevamo da niti jedan vrh četverokuta ne leži na rubu drugog četverokuta osim u nekom njegovom vrhu. Koristimo oznake,

$$Q_r(K) = \{p : \quad p(x) = \sum_{0 \le i,j \le r} p_{ij} x_1^i x_2^j, \quad x \in K, p_{ij} \in \mathbb{R}\}, \quad r \ge 0.$$

Za $r = 1$ definiramo

$$\mathcal{P}_H = \{p : \quad p \text{ je neprekidna funkcija na } \Omega \text{ i } p|_K \in Q_1(K), \; K \in \mathcal{T}_H\}.$$

Funkcija $p \in Q_1(K)$ je bilinearna i ima oblik

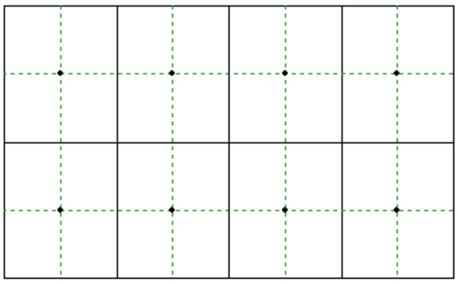
$$p(x) = p_{00} + p_{10} x_1 + p_{01} x_2 + p_{11} x_1 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in K, p_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Kao i u slučaju trokuta, pokaže se da je funkcija $p \in \mathcal{P}_H$ jedinstveno određena sa svojim vrijednostima u četiri vrha četverokuta K. Takvim odabirom stupnjeva slobode smo osigurali neprekidnost. Nadalje, slijedimo teoriju za trokute.

2.2 Metoda konačnih volumnih elemenata

Za razliku od metode konačnih elemenata koja slijedi iz varijacijske formulacije, metoda konačnih volumena dolazi od integralne formulacije eliptične rubne zadaće.

Kao i ranije promatramo zadaću (1.1.1). Prvo je potrebno napraviti triangulaciju $\mathcal{T}_H$ domene Ω kao u slučaju metode konačnih elemenata. Zatim konstruiramo dualnu mrežu $\mathcal{T}_H^*$. Označimo sa $\overline{N_H}$ skup svih čvorova triangulacije, a $N_H = \overline{N_H} \cap \Omega$ skup svih čvorova u unutrašnjosti domene Ω. Za čvor $x_i \in \overline{N_H}$ označimo sa $\Pi(i)$ skup svih susjednih čvorova od x_i. Pri tome je x_j susjedni čvor sa x_i ako je $[x_i, x_j]$ stranica elementa koji sadrži x_i i x_j. U svakom trokutu $K \in \mathcal{T}_H$ koji sadrži čvor x_i uzmimo baricentar (težište) q i na svakoj stranici $\overline{x_i x_j}$ njeno polovište x_{ij}. Zatim ravnom linijom $\gamma_{ij,K}$ spojimo točku q sa svakom točkom x_{ij}. Poligon koji dobijemo spajajući segmente $\gamma_{ij,K}$ u svim elementima K koji sadrže vrh x_i predstavlja konačni volumen oko točke x_i. Označimo ga sa V_i. Njegovi bridovi su $\gamma_{ij,K}$, gdje je $x_i \in K$ i $x_j \in \Pi(i)$. Isti postupak napravimo oko svake točke i time je definirana dualna mreža kao skup svih konačnih volumena. Na Slici 2.2.1 je prikazan primjer dualne mreže.



Slika 2.2.1: Punom crtom je prikazana triangulacija $\mathcal{T}_H$, a isprekidanom dualna mreža $\mathcal{T}_H^*$

Pretpostavimo da je V_i proizvoljana dualna ćelija oko i-tog vrha i integrirajmo diferencijalnu jednadžbu (1.1.1)

$$-\int_{V_i} \operatorname{div}(k(x)\nabla p)\, dx = \int_{V_i} f(x)\, dx.$$

Primjenom teorema o divergenciji dobivamo

$$-\int_{\partial V_i} k(x)\nabla p \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{V_i} f(x)\, dx. \tag{2.2.1}$$

Htjeli bismo doći do formulacije problema preko diskretne bilinearne forme kako bi mogli primijeniti osnovni rezultat Lax-Milgramove leme.

Definiramo konačnodimenzionalni prostor

$$\mathcal{P}_H = \{p \in C(\overline{\Omega}) : p|_K \text{ je linearna za sve } K \in \mathcal{T}_H \text{ i } p|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Sada rješenje tražimo u prostoru $\mathcal{P}_H$. Neka je taj prostor razapet baznim funkcijama ϕ_j. Tada aproksimativno rješenje možemo zapisati kao

$$p_H = \sum_{x_j \in N_H} p_j \phi_j.$$

Time dolazimo do diskretne zadaće

$$\begin{cases} \text{Naći } p_H \in \mathcal{P}_H \text{ takvo da} \\ \\ -\sum\limits_{x_j \in N_H} p_j \int\limits_{\partial V_i} k(x)\nabla\phi_j \cdot \vec{n} d\sigma = \int\limits_{V_i} f(x)\,dx, \quad \forall i \in N_H. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Ova zadaća predstavlja jedan linearni sustav, analogan sustavu (2.1.4), ali se u njemu elementi matrice i vektor desne strane računaju drugačije.

Osnovna prednost metode konačnih volumena je u tome što ona po svojoj konstrukciji zadovoljava lokalno sačuvanje mase koje grubo govoreći kaže da je količina "fluida" koji izađe iz volumena V_i jednaka količini koja je ušla u susjedni volumen.

2.3 Mješovita metoda konačnih elemenata

Mješovitu metodu konačnih elemenata koristimo kada primarno ne želimo aproksimirati tlak p, već želimo dobru aproksimaciju za flux $\vec{q}$. Darcyjev zakon nam daje vezu između tlaka i fluxa

$$\vec{q} = -k(x)\nabla p.$$

Našu zadaću možemo zapisati kao sustav prvog reda

$$\begin{cases} \text{div}\vec{q} = f & \text{u } \Omega \\ \vec{q} = -k(x)\nabla p & \text{u } \Omega \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

gdje je Ω otvorena, ograničena domena i $k(x)$ zadovoljava (1.0.2), $f \in L^2(\Omega)$. Tražimo varijacijsku formulaciju za (2.3.1) gdje se $\vec{q}$ i p tretiraju kao nezavisne varijable. Želimo slabije aproksimirati p, npr. sa po dijelovima konstantnim funkcijama.

Uvodimo novi prostor

$$H(\text{div}, \Omega) = \{\vec{v} \in L^2(\Omega) : \ \text{div}\vec{v} \in L^2(\Omega)\}.$$

Prostor $H(\text{div}, \Omega)$ je linearan Hilbertov prostor sa pridruženim skalarnim produktom

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega \vec{u} \cdot \vec{v}\,dx + \int_\Omega (\text{div}\vec{u})(\text{div}\vec{v})\,dx.$$

Sada tražimo flux $\vec{q}$ iz prostora $H(\text{div}, \Omega)$. Prvu jednadžbu iz (2.3.1) množimo funkcijom iz $L^2(\Omega)$ i integriramo po Ω. Time dolazimo do slabe formulacije prve jednadžbe

$$\begin{cases} \text{Naći } \vec{q} \in H(\text{div}, \Omega) \text{ takav da} \\ \\ \int_\Omega \text{div}\vec{q}\,w\,dx = \int_\Omega f w\,dx \quad \forall w \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Drugu jednadžbu iz (2.3.1) ćemo pomnožiti sa $\vec{v} \in H(\text{div}, \Omega)$ i integrirati po Ω. Time smo dobili

$$\int_\Omega \frac{1}{k(x)}\vec{q} \cdot \vec{v}\,dx = -\int_\Omega \nabla p \cdot \vec{v}\,dx.$$

Parcijalnom derivacijom desne strane i primjenom teorema o divergenciji imamo

$$\int_\Omega \frac{1}{k(x)} \vec{q} \cdot \vec{v} \, dx = \int_\Omega p \, \mathrm{div} \vec{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} p \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Drugi član desne strane iščezava zbog rubnih uvjeta pa nam ostaje

$$\int_\Omega \frac{1}{k(x)} \vec{q} \cdot \vec{v} \, dx = \int_\Omega p \, \mathrm{div} \vec{v} \, dx.$$

Mješovita formulacija sada glasi

$$\begin{cases} \text{Naći } \vec{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega), p \in L^2(\Omega) \text{ t.d.} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{div} \vec{q} \, w \, dx = \int_\Omega f w \, dx \quad \forall w \in L^2(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{k(x)} \vec{q} \cdot \vec{v} \, dx - \int_\Omega p \, \mathrm{div} \vec{v} \, dx = 0, \quad \forall \vec{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega). \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Ova formulaciju koristimo kao polaznu točku za mješovitu metodu konačnih elemenata. Treba odabrati prostor $W_H \subset L^2(\Omega)$ i $V_H \subset H(\mathrm{div}, \Omega)$ te definirati varijacijsku aproksimaciju

$$\begin{cases} \text{Naći } \vec{q}_H \in V_H, p_H \in W_H \text{ t.d.} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{div} \vec{q}_H \, w \, dx = \int_\Omega f w \, dx \quad \forall w \in W_H \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{k(x)} \vec{q}_H \cdot \vec{v} \, dx - \int_\Omega p_H \mathrm{div} \vec{v} \, dx = 0, \quad \forall \vec{v} \in V_H. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Prostor W_H i V_H odabrat ćemo na sljedeći način. Neka je $\mathcal{T}_H$ triangulacija poligonalne domene Ω. Za prostor W_H odaberemo prostor funkcija koje su konstantne na svakom trokutu triangulacije

$$W_H = \{w : \Omega \to \mathbb{R} : \quad \forall K \in \mathcal{T}_H, \quad w|_K = \mathrm{const}\},$$

a za prostor V_H odaberemo Raviart-Thomas prostor konačnih elemenata najnižeg reda

$$V_H = \{v \in H(\mathrm{div}, \Omega) : \quad v|_K = (b_K x_1 + a_K, b_K x_2 + c_K), \quad a_K, b_K, c_K \in \mathbb{R} \quad K \in \mathcal{T}_H\}.$$

Da bi opisali funkciju iz V_H uzimamo stupnjeve slobode koji su dani sa

$$\vec{v} \cdot \vec{\nu}|_e = \mathrm{konst}, \quad e \in \partial K,$$

gdje je $\vec{\nu}$ vanjska jedinična normala na $e \in \partial K$. Time je funkcija iz V_H jedinstveno određena i dimenzija prostora V_H jednaka je broju stupnjeva slobode, u našem slučaju $\mathrm{dim} V_H = 3$. Ovakav odabir stupnjeva slobode nam omogućava inkluziju $V_H \subset H(\Omega, \mathrm{div})$.

Može se pokazati da zadaće (2.3.3) i (2.3.4) imaju jedinstveno rješenje (npr. vidi [3]).

Nadalje, formiramo sustav algebarskih jednadžbi. Neka je $\{x_i\}$ skup svih polovišta rubova u $\mathcal{T}_H$. Svakoj točki x_i pridružujemo jediničan vektor normale. Za $x_i \in \partial\Omega$, ν_i

je vanjska jedinična normala na $\partial\Omega$, a za $x_i \in e = \overline{K_1} \cap \overline{K_2}$, $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_H$, neka je ν_i proizvoljan jediničan vektor ortogonalan na e. Definiramo bazne funkcije za V_H sa

$$(\phi_i \cdot \nu_i)(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Tada svaka funkcija $\vec{q}_H \in V_H$ ima jedinstven prikaz

$$\vec{q}_H(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i \phi_i(x) \quad x \in \Omega$$

gdje je $q_i = (\vec{q}_H \cdot \nu_i)(x)$. Bazne funkcije $\psi_i \in W_H$, $i = 1, \ldots, n_H$ su definirane sa

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in K_i \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

te svaka funkcija $p_H \in W_H$ ima prikaz

$$p_H(x) = \sum_{i=1}^{n_H} p_i \psi_i(x) \quad x \in \Omega,\ p_i = p_H|_{K_i}.$$

Uvrstivši ova dva prikaza u zadaću (2.3.4) dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix} \tag{2.3.5}$$

gdje je

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \quad a_{ij} = \int_\Omega \frac{1}{k(x)} \phi_i \phi_j \, dx$$

$$B = (b_{jk})_{j=1,\ldots,m,k=1,\ldots,n_H} \quad b_{jk} = -\int_\Omega \psi_k \mathrm{div}(\phi_j) \, dx$$

$$f = (f_j)_{j=1,\ldots,n_H} \quad f_j = \int_\Omega f \psi_j$$

$$Q = (q_i)_{i=1,\ldots,m}$$

$$p = (p_k)_{k=1,\ldots,n_H}$$

Sustav koji smo dobili je indefinitan i stoga se mora rješavati nekom od iterativnih metoda adaptiranih za indefinitne sustave. Računanje nam je olakšano jer su matrice A i B rijetke, a uz to matrica A je simetrična i pozitivno definitna.

Napomena 2.3.1. *Mješoviti linearan sustav (2.3.5) se uobičajeno rješava upotrebom tzv. hibridne formulacije. U toj formulaciji sustav (2.3.5) je lokaliziran uvodeći dodatan skup nepoznanica koje postavljaju p na granicu elementa mreže. Obavljanjem nekih jednostavnih algebarskih operacija dobivamo pozitivno definitan sustav koji je rješiv za granični pritisak. Konačno, rješenje od (2.3.5) se može izračunati iz rješenja hibridnog sustava tako da obavimo lokalne algebarske operacije.*

Poglavlje III

Višeskalna metoda konačnih elemenata

Višeskalni problemi se javljaju u mnogim znanstvenom i inžinjerskim primjenama kao što su tok fluida u poroznim sredinama, kompozitnim materijalima, turbulentnim transportima i drugim. Kompletna analiza takvih problema je izrazito komplicirana. Kod analize toka kroz porozne sredine problem treba zapisati u domeni sastavljenoj od šupljina koje su fluidu na raspolaganju za gibanje i koji dopunjujemo nekim rubnim uvjetima. Kako su velike razlike u dimenzijama domene sastavljene od šupljina i domene u kojoj promatramo strujanje fluida, javljaju se dvije prostorne dimenzije, mikroskopska i makroskopska. Općenito, direktno numeričko rješavanje problema na mikroskopskoj skali je teško čak i pojavom superkompjutera jer iziskuje upotrebu velike količine memorije. Upotrebom paralelnih računala možemo smanjiti težinu rješavanja, ali to nam ne reducira veličinu diskretnog problema. Stoga je potrebna metoda koja će prikazati mikroskopske efekte na makroskopskoj skali. Takva metoda je višeskalna metoda konačnih elemenata.

Matematičko modeliranje višeskalnih problema nas vodi na rubne zadaće u kojima imamo jako oscilirajuće koeficijente. U višeskalnoj metodi konačnih elemenata želimo riješiti numerički rubnu zadaću na mreži koja nije dovoljno fina da reprezentira oscilacije u rješenju. Ideja je ugraditi oscilacije u bazne funkcije.

U ovom poglavlju ćemo se ograničiti na zadaću s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k(x)\nabla p) = f & \text{u } \Omega \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.0.1}$$

gdje je Ω domena u $\mathbb{R}^d$ $d = 1, 2, 3$ i $k(x)$ je oscilatorna funkcija. Uzimamo da tenzor $k(x) = k_{ij}(x)$ po pretpostavci zadovoljava (1.0.2).

Oscilatorni koeficijenti diferencijalne jednadžbe će proizvesti oscilatorno rješenje. Ako numerička mreža nije dovoljno fina da pokaže oscilacije rješenja (i koeficijenta) onda je nužno ugraditi oscilacije u bazne funkcije koje se koriste u MKE.

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako konstruirati takve bazne funkcije te kako ih iskoristiti za formiranje numeričkog postupka.

3.1 Konstrukcija višeskalnih baznih funkcija

Neka je Ω otvorena, ograničena domena. Prvi korak u konstrukciji višeskalnih baznih funkcija je triangulacija domene $\mathcal{T}_H$. Ovu triangulaciju ćemo zvati gruba mreža. Na gruboj mreži konstruiramo bazne funkcije ϕ_i^H kao u metodi konačnih elemenata. Uzimamo polinome iz P_1. Standardni prostor konačnih elemenata označit ćemo sa

$$\mathcal{P}_H = \mathrm{span}\{\phi_i^H\}.$$

Neka je dimenzija prostora $\mathcal{P}_H$ jednaka n_H. Zatim na svakom elementu triangulacije K konstruiramo višeskalne bazne funkcije ϕ_i^V.

Označimo sa $S_i = \mathrm{supp}(\phi_i^H)$ nosač od ϕ_i^H i definiramo ϕ_i^V sa nosačem u S_i na sljedeći način:

$$\begin{cases} \mathrm{div}(k(x)\nabla\phi_i^V) = 0 & \text{u } K \\ \\ \phi_i^V = \phi_i^H & \text{na } \partial K, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

za svaki $K \in \mathcal{T}_H$, $K \subset S_i$, $i = 1, \ldots, n_H$.

Višeskalne bazne funkcije su koincidentne sa standardnim baznim funkcijama konačnih elemenata na granicama elemenata grube mreže i osciliraju u unutrašnjosti svakog elementa grube mreže. Iako izbor ϕ_i^H može biti posve proizvoljan, kao glavnu pretpostavku uzimamo da bazne funkcije zadovoljavaju homogenu jednadžbu vodećeg reda. Ideja je da tako definirane bazne funkcije imaju istu strukturu oscilacija kao i rješenje zadaće (3.0.1). Zadaća (3.1.1) za višeskalne bazne funkcije je nehomogena zadaća za koju dobivamo sljedeću varijacijsku formulaciju

$$\begin{cases} \text{Naći } \phi_i^V \in H^1(K),\ \phi_i^V = \phi_i^H \text{ na } \partial K \\ \\ \forall v \in H_0^1(K), \qquad \displaystyle\int_K k(x)\nabla\phi_i^V \cdot \nabla v\, dx = 0. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Egzistenciju i jedinstvenost rješenja ϕ_i^V osigurava Lax-Milgramova lema. Da bismo numerički izračunali bazne funkcije moramo u svaki element K uvesti triangulaciju i primjeniti, na primjer, standardnu metodu konačnih elemenata. Računanje baznih funkcija je jedan niz međusobno nezavisnih zadaća male dimenzije koji se mogu riješiti paralelno, ukoliko su na raspolaganju cluster računala.

Jednom kada su bazne funkcije konstruirane, označimo sa $\mathcal{P}_H^V$ prostor konačnih elemenata razapetih sa ϕ_i^V

$$\mathcal{P}_H^V = \mathrm{span}\{\phi_i^V\}.$$

Višeskalna zadaća sada glasi:

$$\begin{cases} \text{Naći } p_V \in \mathcal{P}_H \\ \\ \forall v \in \mathcal{P}_H, \qquad \displaystyle\int_\Omega k(x)\nabla p_V \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Za prostor test funkcija uzima se prostor $\mathcal{P}_H$ umjesto $\mathcal{P}_H^V$ radi jednostavnosti računanja.

3.2 Globalna formulacija

Uočimo da profinjavanjem svakog elementa grube mreže $\mathcal{T}_H$ dolazimo do jedne puno finije mreže $\mathcal{T}_h$ koja je u principu dovoljno fina za reprezentaciju oscilacija u koeficijentu diferencijalne jednadžbe, a onda i u rješenju rubne zadaće.

Željeli bismo usporediti višeskalno rješenje s rješenjem na pripadnoj finoj mreži. Zato rješenje zadaće na finoj mreži projiciramo na grubu mrežu tako da uzimamo test funkciju grube mreže. Time dolazimo do globalne formulacije višeskalne metode konačnih elemenata

$$\begin{cases} \text{Naći } p_V \in \mathcal{P}_H^V \\ \forall v \in \mathcal{P}_H^V, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \int_K k(x) \nabla p_V \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Naime, rješenje $p_V \in \mathcal{P}_H^V$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju elemenata baze prostora

$$p_V = \sum_{j=1}^{n_H} p_j \phi_j^V(x) \tag{3.2.2}$$

gdje su p_j aproksimativne vrijednosti rješenja u nodalnim točkama grube mreže. Kao takvo ga supstituiramo u jednadžbu zadaće (3.1.3)

$$\sum_{j=1}^{n_H} p_j \int_\Omega k(x) \nabla \phi_j^V \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Za test funkciju v uzimamo standardne bazne funkcije na gruboj mreži ϕ_i^H. Tada imamo:

$$\sum_{j=1}^{n_H} p_j \int_\Omega k(x) \nabla \phi_j^V \cdot \nabla \phi_i^H \, dx = \int_\Omega f \phi_i^H \, dx, \quad i = 1, \ldots, n_H. \tag{3.2.3}$$

Kako višeskalne bazne funkcije ϕ_j^V rješavaju problem (3.1.2) na finoj mreži, možemo ih zapisati kao

$$\phi_j^V(x) = \sum_{k \in J(j)} \xi_{jk} \phi_k^h(x),$$

gdje su ξ_{jk} vrijednosti višeskalne bazne funkcije u nodalnim točkama fine mreže na elementu K grube mreže. Supstituirajući taj izraz u (3.2.3) imamo

$$\sum_{j=1}^{n_H} \sum_{k \in J(j)} p_j \xi_{jk} \int_\Omega k(x) \nabla \phi_k^h \cdot \nabla \phi_i^H \, dx = \int_\Omega f \phi_i^H \, dx, \quad i = 1, \ldots, n_H.$$

Time dobivamo linearan sustav:

$$A^V \Xi^\tau \tilde{p} = \tilde{b}, \tag{3.2.4}$$

gdje su

$$\Xi = (\xi_{jk}), \ \xi_{jk} = \phi_j^V(x_k), \ j = 1, \ldots, n_H, \ k \in J(j)$$

$$A^V = (a_{ik}), \ a_{ik} = \sum_K \int_K k(x) \nabla \phi_k^h \cdot \nabla \phi_i^H \, dx, \ k = 1, \ldots, n_h, \ i = 1, \ldots, n_H$$

$$\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_{n_H})$$

$$\tilde{b} = (b_i), \; b_i = \int_\Omega f \phi_i^H dx, \; i = 1, \ldots, n_H.$$

Usporedbom sustava (3.2.4) koji se dobiva višeskalnom metodom i sustavom

$$A^h p = b$$

koji se dobiva standardnom metodom na finoj mreži vidimo da dolazi do određene "projekcije" rješenja s fine na grubu mrežu koja je određena prvenstveno matricom Ξ.

Primijetimo da računanje matrice krutosti zahtjeva izračunavanje integrala za računanje koeficijenata a_{ik} i b_i. Računanje a_{ik} zahtjeva aproksimaciju integrala na finoj mreži. Možemo uzeti jednostavnu integracijsku formulu, na primjer, jednu točku za svaki element fine mreže. U tom slučaju,

$$\sum_K \int_K k(x) \nabla \phi_j^V \nabla \phi_i^H \, dx \approx \sum_{k \in J(j)} \sum_{\tau \subset K} (k(x) \nabla \phi_k^h)|_\tau \cdot \nabla \phi_i^H \xi_{jk},$$

gdje τ označava element fine mreže i $(k \nabla \phi_k^h)|_\tau$ je vrijednost toka unutar elementa fine mreže τ. Matrica $k(x)$ se aproksimira kao konstanta po elementima fine mreže.

Općenito, globalnu formulaciju možemo lako modificirati i tako izvesti razne globalne formulacije bazirane na konačnim volumenima, mješovitim konačnim elementima, diskontinuiranim Galerkin konačnim elementima, i drugim metodama.

Izbor rubnih uvjeta u definiranju višeskalnih baznih funkcija igra ključnu ulogu u aproksimiranju rješenja. Intuitivno, rubni uvjeti za višeskalne bazne funkcije bi trebale reflektirati višeskalne oscilacije rješenja p kroz rub elementa grube mreže. Odabirom linearnih rubnih uvjeta za baznu funkciju, stvaramo neslaganje između egzaktnog rješenja p i aproksimacije konačnih elemenata kroz rubove elementa.

Napomena 3.2.1. *Komentar o matrici krutosti kada za testnu funkciju uzimamo višeskalnu baznu funkciju. Pretpostavimo da višeskalne bazne funkcije ϕ_i^V mogu biti napisane kao*

$$\phi_j^V = \sum_{k \in J(j)} \xi_{jk} \phi_k^h,$$

gdje je $\Xi = (\xi_{jk})$ matrica i ϕ_k^h su bazne funkcije konačnih elemenata na finoj mreži. j-ti redak ove matrice sadrži prikaz j-te višeskalne bazne funkcije na finoj mreži. Supstituiranjem ovog izraza u formulu za matricu krutosti a_{kj}, imamo

$$a_{ij} = \int_\Omega k(x) \nabla \phi_j^V \cdot \nabla \phi_i^V \, dx = \sum_{k,l} \xi_{jk} \int_\Omega \left(k(x) \nabla \phi_k^h \cdot \nabla \phi_l^h \, dx \right) \xi_{jl}.$$

Označimo li matricu krutosti za problem na finoj mreži sa

$$A^h = (a_{kl}^h), \quad a_{kl}^h = \int_\Omega k \nabla \phi_k^h \nabla \phi_l^h dx$$

imamo

$$A^V = \Xi A^h \Xi^\tau.$$

3.3 Jednodimenzionalan primjer

U jednodimenzionalnom slučaju, bazne funkcije i matricu krutosti možemo izračunati gotovo eksplicitno. Promatramo sljedeću rubnu zadaću:

$$\begin{cases} -(k(x)p')' = f & \text{u } \Omega = (0,1) \\ p(0) = p(1) = 0. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Varijacijska formulacija za ovu jednadžbu glasi:

$$\begin{cases} \text{Naći } p \in H_0^1(0,1) \\ \forall v \in H_0^1(0,1), \quad \int_0^1 k(x)p'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Da bi aproksimirali rješenje ove zadaće uvodimo konačno dimenzionalan prostor $\mathcal{P}_H^V \subset H_0^1(0,1)$ koji predstavlja aproksimaciju prostora $H_0^1(0,1)$ i formiramo novu zadaću:

$$\begin{cases} \text{Naći } p_V \in \mathcal{P}_H^V \\ \forall v \in \mathcal{P}_H^V, a(p_V, v) = F(v), \end{cases} \tag{3.3.3}$$

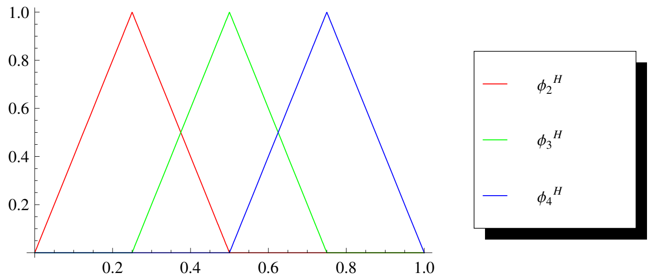
gdje je

$$a(p_V, v) = \int_0^1 k(x)p_V'v'\,dx, \quad F(v) = \int_0^1 fv\,dx.$$

Za konstrukciju prostora $\mathcal{P}_H^V$ prvo formiramo grubu mrežu na domeni $(0,1)$ tako da interval $[0,1]$ podijelimo na n_H segmenata

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{n_H} = 1.$$

Zatim konstruiramo standardne bazne funkcije na gruboj mreži koje uzimamo kao "kroviće" nad segmentom $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.



Slika 3.3.1: Standardne bazne funkcije na ekvidistantoj mreži, $n_H = 4$

Definirane su na slijedeći način:

$$\phi_i^H(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \cap [0,1] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [0,1]. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Iz ove definicije vidimo da je ϕ_i^H funkcija sa svojstvom $\phi_i^H(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n_H$.

Nadalje, konstruiramo višeskalne bazne funkcije koje su za čvor j dane jednadžbom

$$(k(x)(\phi_j^V)')' = 0 \tag{3.3.5}$$

sa nosačem u $[x_{j-1}, x_{j+1}] \cap [0,1]$, a rubni uvjeti su zadani standardnim baznim funkcijama definiranim sa (3.3.4). Time dobivamo:

$$\begin{cases} (k(x)(\phi_j^V)')' = 0 \quad \text{u } [x_{j-1}, x_j] \\ \phi_j^V(x_{j-1}) = \phi_j^H(x_{j-1}) = 0, \quad \phi_j^V(x_j) = \phi_j^H(x_j) = 1 \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} (k(x)(\phi_j^V)')' = 0 \quad \text{u } [x_j, x_{j+1}] \\ \phi_j^V(x_j) = \phi_j^H(x_j) = 1, \quad \phi_j^V(x_{j+1}) = \phi_j^H(x_{j+1}) = 0 \end{cases}$$

Nakon što smo dobili bazne funkcije možemo konstruirati prostor $\mathcal{P}_H^V$ razapet tim funkcijama tj. $\mathcal{P}_H^V = \text{span}\{\phi_j^V\}$. Vratimo se sada diskretnom problemu (3.3.3). Rješenje p_H možemo raspisati po vektorima baze

$$p_H = \sum_{j=1}^{n_H} p_j \phi_j^V(x)$$

te ga kao takvo supstituiramo u jednadžbu zadaće (3.3.3). Ako za test funkciju v uzmemo baznu funkciju ϕ_i^H na gruboj mreži dobivamo:

$$\sum_{j=1}^{n_H} p_j a(\phi_j^V, \phi_i^H) = F(\phi_i^H), \quad i = 1, \ldots, n_H.$$

Time smo došli do linearnog sustava

$$A^H p_{nodal} = b,$$

gdje je

$$A^H = (a_{ij}),\ a_{ij} = a(\phi_j^V, \phi_i^H) = \int_0^1 k(\phi_j^V)'(\phi_i^H)'\, dx,$$
$$p_{nodal} = (p_1, \ldots, p_{n_H}),$$
$$b = (b_i),\ b_i = F(\phi_i^H) = \int_0^1 f\phi_i^H\, dx.$$

Primijetimo da za izračunavanje elemenata matrice krutosti A^H, ne trebamo eksplicitan izraz za ϕ_j^V već umjesto toga računamo $k(x)(\phi_j^V)'$. Iz (3.3.5), jednostavno je uočiti da je $k(x)(\phi_j^V)' = \text{const}$ na svakom mikro elementu, gdje se konstante razlikuju u $[x_{j-1}, x_j]$ i $[x_j, x_{j+1}]$. Konstante možemo lako izračunati tako da napišemo $(\phi_j^V)' = \text{const}/k(x)$ i integriramo taj izraz po segmentu $[x_{j-1}, x_j]$ i $[x_{j-1}, x_j]$. To nam daje

$$k(x)(\phi_j^V)' = \frac{1}{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{dx}{k(x)}}$$

na $[x_{j-1}, x_j]$ i

$$k(x)(\phi_j^V)' = -\frac{1}{\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{k(x)}}$$

na $[x_j, x_{j+1}]$. Tada su elementi matrice krutosti A dani sa

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x)(\phi_j^V)'(\phi_i^H)'\,dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x)(\phi_j^V)'(\phi_i^H)'\,dx \\ &= \frac{1}{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{dx}{k(x)}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\phi_i^H)'\,dx - \frac{1}{\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{k(x)}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\phi_i^H)'\,dx. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Uzimajući u obzir

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_{i-1}^H)'\,dx = -1, \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i^H)'\,dx = 1, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i^H)'\,dx = -1, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{i+1}^H)'\,dx = 1,$$

imamo

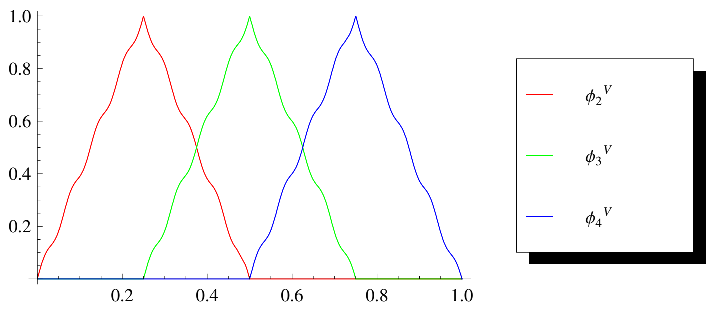
$$a_{i,i-1} = -\frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}},$$

$$a_{i,i} = \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}} + \frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}},$$

$$a_{i,i+1} = -\frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}}.$$

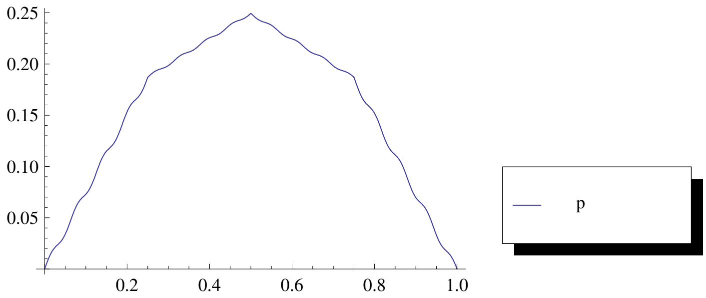
Zbog toga, matrica krutosti ima tridijagonalnu formu.

U programu Mathematica smo za konkretan primjer konstruirali višeskalne bazne funkcije koje su prikazane na Slici 3.3.2, te rješenje zadaće (3.3.1) koje je prikazano na Slici 3.3.3. Vidimo da su bazne funkcije i rješenje p oscilirajuće funkcije.



Slika 3.3.2: Višeskalne bazne funkcije na ekvidistantoj mreži, $n_H = 4$, koeficijent $k(x) = 1/(2 + \cos x/\epsilon)$, $\epsilon = 0.01$, a funkcija $f(x) = 1$

Sljedeće u radu promatramo generalizaciju konačnih volumena i mješovite metode na višeskalne metode.



Slika 3.3.3: Rješenje zadaće (3.3.1) za $k(x) = 1/(2 + \cos x/\epsilon)$, $\epsilon = 0.01$, i $f(x) = 1$

3.4 Višeskalna metoda konačnih volumena

Višeskalna metoda konačnih volumena bazira se na diskretizaciji tipa konačnih volumena. Ideja ove metoda je koristiti globalnu formulaciju konačnih volumena sa višeskalnim baznim funkcijama kako bi dobili rješenje na gruboj mreži. Kao i u slučaju višeskalne metode konačnih elemenata višeskalne bazne funkcije se konstruiraju iz rješenja homogene eliptične jednadžbe na svakom elementu grube mreže s nekim specijalnim rubnim uvjetima. Nakon što su odabrane višeskalne bazne funkcije na elementima grube mreže jednadžbe postavljamo na elementima dualne mreže.

Promatramo problem (3.0.1). Neka je $\mathcal{T}_H^*$ dualna mreža grube mreže konstruirana kao u metodi konačnih volumena. Neka je V_i proizvoljna dualna ćelija oko i-tog vrha, $i = 1, \dots, n_H$ i neka je gruba mreža profinjena nekom finom mrežom $\mathcal{T}_h$ dijametra $h < H$. Diskretan problem za višeskalnu metodu konačnih volumena tada glasi:

$$\begin{cases} \text{Naći } p_V \in \mathcal{P}_H^V \text{ t.d.} \\ -\displaystyle\int_{\partial V_i} k(x)\nabla p_V \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{V_i} f(x)\, dx, \quad i = 1, \dots, n_H \end{cases}$$

Zapišemo p_V kao

$$p_V(x) = \sum_{j=1}^{n_H} p_j \phi_j^V(x).$$

Time dobivamo sustav:

$$-\sum_{j=1}^{n_H} p_j \int_{\partial V_i} k(x)\nabla \phi_j^V \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{V_i} f(x)dx, \quad i = 1, \dots, n_H. \tag{3.4.1}$$

Zatim ϕ_j^V možemo zapisati kao:

$$\phi_j^V(x) = \sum_{k \in J(j)} \xi_{jk} \phi_k^h(x),$$

gdje su ξ_{jk} vrijednosti višeskalne bazne funkcije u nodalnim točkama j-tog elementa fine mreže, a ϕ_k^h standardne bazne funkcije fine mreže. Uvrstivši takav rastav bazne funkcije

ϕ_j^V u (3.4.1) dobivamo:

$$-\sum_{j=1}^{n_H}\sum_{k\in J(j)} p_j\xi_{jk}\int_{\partial V_i} k(x)\nabla\phi_k^h\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_{V_i} f(x)dx, \quad i=1,\ldots,n_H.$$

Konstrukcija višeskalnih baznih funkcija za ovu metodu je gotovo identična kao u višeskalnoj MKE, samo što su ovdje višeskalne bazne funkcije definirane za elemente dualnoj mreže. S druge strane, u višeskalnoj metodi konačnih volumena zadovoljeno je lokalno sačuvanje mase.

3.5 Mješovite višeskalne metode konačnih elemenata

Kao i u mješovitim metodama konačnih elemenata zanima nas flux tj. vektor brzine $\vec{q}$. Važno svojstvo koje nam daje mješovita MKE je lokalno sačuvanje fluxa te je zato ova metoda vrlo atraktivna za višefazne simulacije toka u heterogenim poroznim sredinama. U ovoj metodi za flux $\vec{q}$ konstruiramo višeskalne bazne funkcije.

Promatramo zadaću:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{q}) = f & \text{u } \Omega \\ \vec{q} = -k(x)\nabla p & \text{u } \Omega \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Potrebne su nam bazne funkcije za flux. Možemo koristiti već poznate prostore mješovitih konačnih elemenata da bi konstruirali ove bazne funkcije. Radi jednostavnosti, uzimamo višeskalne bazne funkcije koje odgovaraju Raviart-Thomas elementima najnižeg reda. Višeskalne bazne funkcije su u svakom elementu K grube mreže definirane sa:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k(x)\nabla\phi_i^V) = \dfrac{1}{|K|} & \text{u } K \\[2ex] k(x)\nabla\phi_i^V\cdot\vec{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{|e_i^K|} & \text{na } e_i^K \\ 0 & \text{inače,} \end{cases} \end{cases} \tag{3.5.1}$$

gdje su e_i^K bridovi od K. Ova zadaće je definirana na taj način zbog:

$$\int_K \operatorname{div}(k\nabla\phi_i^K)dx = 1,$$

iz čega po teoremu divergencije slijedi da je

$$\int_{\partial K} k\nabla\phi_i^K\vec{n}d\sigma = 1.$$

Primjetimo da su ove bazne funkcije definirane za svaki brid nametanjem konstantnog toka na bridu te nul-toka na svim ostalim bridovima elementa grube mreže. Zadaću (3.5.1) treba riješiti numerički. U tu svrhu treba koristiti ili mješovite konačne elemente ili konačne volumene.

Neka su $\vec{\psi}_i^V = k\nabla\phi_i^V$ višeskalne bazne funkcije za flux na svakom elementu K. Definiramo konačan prostor za flux sa

$$\mathcal{V}_H = \operatorname{span}\{\vec{\psi}_i^V\}.$$

Za svaki brid e_i, možemo kombinirati bazne funkcije u susjednim elementima grube mreže i dobiti bazne funkcije za rub e_i označene sa $\vec{\psi}_{e_i}$. Preciznije, ako označimo sa K_1 i K_2 susjedne elemente grube mreže, tada $\vec{\psi}_{e_i}$ rješava (3.5.1) u K_1 i

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{\psi}_{e_i}) = -\dfrac{1}{|K_2|} \quad \text{u } K_2 \\ \\ \vec{\psi}_{e_i} \cdot \vec{n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{|e_i|} & \text{na } e_i^{K_2} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \end{cases}$$

Time smo definirali višeskalne bazne funkcije $\vec{\psi}_i^V$ za flux koje su sačuvane i na finoj i na gruboj mreži.

Bazne funkcije za tlak p su po dijelovima konstantne funkcije nad svakim K. Označimo sa W_H prostor razapet tim baznih funkcija. Metoda mješovitih konačnih elemenata spaja bazne funkcije fluxa i pritiska te nam daje aproksimaciju globalnog rješenja. Kao i ranije imamo aproksimacijsku zadaću (2.3.4).

Nadalje, supstituiramo sljedeće rastave u aproksimacijsku zadaću:

$$\vec{q}_H = \sum_{i=1}^{n_H} q_i \vec{\psi}_i^V$$

$$p_H = \sum_{i=1}^{n_H} p_i \phi_i,$$

gdje su q_i vrijednosti fluxa u nodalnim točkama, a p_i vrijednosti pritiska u nodalnim točkama. Imamo:

$$\sum_{i=1}^{n_H} q_i \int_\Omega \operatorname{div}\vec{\psi}_i^V \cdot \phi_j \, dx = \int_\Omega f \phi_j \, dx, \quad j = 1, \ldots, n_H$$

$$\sum_{i=1}^{n_H} q_i \int_\Omega \frac{1}{k(x)} \vec{\psi}_i^V \cdot \vec{\psi}_j^V \, dx - \sum_{i=1}^{n_H} p_i \int_\Omega \phi_i \operatorname{div}\vec{\psi}_j \, dx = 0 \quad j = 1, \ldots, n_H.$$

Rješavanje ove dvije jednadžbe se svodi na rješavanje sustava:

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C^\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ -\tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \tag{3.5.2}$$

gdje su $\tilde{q} = (q_i)$, $\tilde{p} = (p_i)$, a $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ik})$ i $b = (b_k)$ definirani sa

$$a_{ij} = \int_\Omega \vec{\psi}_i^V \cdot (k)^{-1}(x) \vec{\psi}_j^V \, dx,$$

$$c_{ik} = \int_\Omega \phi_k \operatorname{div}(\vec{\psi}_i^V) \, dx,$$

$$b_k = \int_\Omega \phi_k f \, dx.$$

Ovaj linearan sustav je indefinitan te ga možemo riješiti upotrebom hibridne formulacije kao što je već opisano u *Napomeni 2.3.1*.

3.6 Oversampling metoda

Neka je $k_\epsilon(x) = k(x/\epsilon)$ oscilirajuća funkcija i pretpostavimo da je k periodična funkcija perioda 1. Prateći homogenizacijsku teoriju oscilirajuće rješenje p_ϵ zadaće (1.4.1) možemo zapisati kao

$$p_\epsilon(x) = p_0(x) - \epsilon \sum_{j=1}^{d} \chi^j(x/\epsilon) \frac{\partial p_0}{\partial x_j}(x) + \epsilon \theta_\epsilon^p(x),$$

gdje p_0 zadovoljava homogeniziranu zadaću

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(k^*(x)\nabla p_0) = f, & \text{u } \Omega \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Homogenizirani koeficijenti $k^*(x)$ su definirani preko pomoćnog problema na jediničnoj ćeiji Y. Označimo brzu varijablu sa $y = x/\epsilon$. Tada,

$$k^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y k(y)(I - \nabla_y \chi(y))\, dy,$$

gdje je $\chi = (\chi^1, \ldots, \chi^d)$, a χ^j rješenje zadaće (1.4.9) za svaki $j = 1, \ldots, d$.

Prateći homogenizacijsku teoriju slično proširenje možemo napisati za bazne funkcije

$$\phi_i(x) = \phi_i^0(x) + \epsilon \phi_i^1(x, y) + \epsilon \theta_\epsilon^i(x), \tag{3.6.1}$$

gdje je

$$\phi_i^1(x, y) = -\sum_{i=1}^{d} \chi^j(y) \frac{\partial \phi_i^0}{\partial x_j}(x) + \tilde{\phi}_i^1(x).$$

Dio bazne funkcije $\phi_i^1(x, x/\epsilon)$ ima oscilacije kao i rješenje homogene zadaće ali blizu ruba ∂K te $\epsilon\theta_\epsilon^i(x)$ korigira te oscilacije i bazna funkcija zadovoljava neoscilirajuće rubne uvjete. Ako pretpostavimo da je ϕ_i^0 afina funkcija, možemo lako pokazati da θ_ϵ zadovoljava

$$\begin{cases} \mathrm{div}(k\nabla\theta_\epsilon) = 0, & \text{u } K \\ \theta_\epsilon = -\sum_{j=1}^{d} \chi^j(x/\epsilon) \frac{\partial \phi_i^0}{\partial x_j}(x), & \text{na } \partial K. \end{cases}$$

Član θ_ϵ je određen iz nepodudaranja fino-skalnog rješenja i višeskalnog rješenja konačnih elemenata na rubovima elementa grube mreže gdje je višeskalno rješenje konačnih elemenata linearno.

Oversampling metodu koristimo da bi svladali poteškoće određene skalnom rezonancijom. Možemo odabrati područje sa veličinom većom od dijametra grube mreže H i iskoristiti samo pripadne informacije u unutrašnjosti da konstuiramo bazne funkcije. Time možemo znatno reducirati utjecaj rubnog sloja u većem pripadnom području na bazne funkcije.

Neka je ϕ_j^E bazna funkcija koja zadovoljava homogenu eliptičnu jednadžbu na većem području $K_E \supset K$. Zatim se formira aktualnu bazu ϕ_i^V linearnom kombinacijom od ϕ_j^E,

$$\phi_i^V = \sum_{j=1}^{d} c_{ij} \phi_j^E.$$

Koeficijenti c_{ij} su određeni uvjetom $\phi_i^V(x_j) = \delta_{ij}$, gdje su x_j nodalne točke.

Oversampling metoda vodi na nekomformne metode konačnih elemenata u kojima bazne funkcije imaju diskontinuitete na bridovima elemenata. Analiza pokazuje da je greška nekomformnosti malena (vidi [8]).

Oversampling metodu primjenjujemo kad imamo brzo oscilirajuće koeficijente.

3.7 Višeskalna metoda za probleme sa separacijom skala

Promatramo slučaj s dvije skale. Najjednostavniji primjer je periodičan slučaj s malim ϵ kakav smo uveli u sekciji o homogenizacijskoj teoriji. U tom slučaju, višeskalne bazne funkcije aproksimiramo koristeći homogenizacijsku teoriju sa:

$$\phi_j^V \approx \phi_j^0(x) + \epsilon \sum_{i=1}^{d} \chi^i(x/\epsilon) \frac{\partial \phi_j^0}{\partial x_i}(x),$$

gdje ϕ_j^0 predstavlja homogeniziran dio bazne funkcije u asimptotskom razvoju

$$\phi_j^V = \phi_j^0(x) + \epsilon \phi_j^1(x, x/\epsilon) + \epsilon \theta_\epsilon^j(x),$$

a χ^i rješava zadaću (1.4.9) za svaki $i = 1, \ldots, d$. Kako ϕ_j^0 ne sadrži oscilacije koeficijenta k, vidi se da je jednaka standardnoj baznoj funkciji ϕ_j^H.

Zatim, takvu aproksimaciju možemo supstituirati u matricu krutosti te time dobijemo:

$$a_{ij} = \sum_K \int_K k(x) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i^H \, dx \approx \sum_K \frac{|K|}{|Y|} \int_Y k(x) \nabla (\phi_j^H + \epsilon \sum_{k=1}^{d} \chi^k \frac{\partial \phi_j^H}{\partial x_k}) \cdot \nabla \phi_i^H \, dx,$$

gdje je Y period unutar K. U jednodimenzionalnom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^1 k(x)(\phi_j)'(\phi_i^H)' \, dx \\ &\approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)(\phi_j^H + \epsilon \chi (\phi_j^H)')'(\phi_i^H)' \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)(\phi_j^H + \epsilon \chi (\phi_j^H)')'(\phi_i^H)' \, dx. \end{aligned}$$

Kod konstrukcije višeskalnih baznih funkcija, u nekim primjenama je dovoljno uzeti područje manje od elementa grube mreže da pokupimo sve informacije o oscilacijama koeficijenta $k(x)$. Označimo tu manju regiju sa K_{loc}. Tada višeskalne bazne funkcije možemo proširiti na element grube mreže bazirajući se na homogenizacijskom proširenju. Općenito, iz problema u K_{loc} možemo jednostavno izdvojiti χ i iskoristiti ga da konstruiramo proširenje bazne funkcije na element grube mreže. Ovakve bazne funkcije se koriste za dobivanje aproksimativnog fino-skalnog rješenja na cijeloj domeni.

3.8 Proširenje MsFEM-a na paraboličke probleme

Ovdje ukratko opisujemo proširenje višeskalne metode konačnih elemenata na paraboličku zadaću,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla p(x,t)) = f(x,t) & \text{u } \Omega \times (0,T) \\ p = 0 & \text{na } \partial\Omega \times (0,T) \\ p|_{t=0} = p_0 & \text{u } \Omega. \end{cases} \tag{3.8.1}$$

Ovdje $k(x,t)$ mora zadovoljati uvjete kao i kod eliptičnih zadaća i f neka je kvadratno integrabilna na $\Omega \times (0,T)$.

Varijacijska formulacija se formulira analogno kao i za eliptične zadaće. Pri tome se mijenjaju funkcijski prostori. Tražit ćemo da rješenje $p(x,t)$ pripada prostoru $H_0^1(\Omega)$, $\forall t \in (0,T)$. Stoga se funkcija $p(x,t)$ promatra kao preslikavanje $t \mapsto p(x,t)$, koje svakom $t \in (0,T)$ pridružuje jednu funkciju iz prostora $H_0^1(\Omega)$. Sada jednadžbu iz (3.8.1) množimo test funkcijom iz $H_0^1(\Omega)$ i integriramo po Ω:

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} v\,dx - \int_\Omega \operatorname{div}(k(x,t)\nabla p) v\,dx = \int_\Omega f v\,dx.$$

Parcijalnom integracijom dobijemo

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega p v\,dx + \int_\Omega k(x,t)\nabla p \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \tag{3.8.2}$$

za sve $v \in H_0^1(\Omega)$ i sve $t \in (0,T)$. Neki rezultati o egzistenciji i jedinstvenosti se mogu pronaći u [5].

Zatim se diskretizira vremenska derivacija. Uglavnom koristimo implicitne metode. Ovdje koristimo

$$\frac{\partial p}{\partial t}|_{t=t^{n+1}} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t}$$

gdje $p^n \approx p(x,t_n)$, $t_n = n\Delta t$. Time dobivamo

$$\int_\Omega p^{n+1} v\,dx - \int_\Omega p^n v\,dx + \Delta t \int_\Omega k(x,t)\nabla p^{n+1} \cdot \nabla v\,dx = \Delta t \int_\Omega f^{n+1} v\,dx, \tag{3.8.3}$$

gdje je odabrana implicitna vremenska diskretizacija.

Nadalje formiramo konačan potprostor. Prvo trebamo konstruirati višeskalne bazne funkcije. Općenito, kada postoje prostorne i vremenske varijable, višeskalne bazne funkcije su rješenja homogene paraboličke jednadžbe. U slučaju kad nemamo vremensku varijablu tj. $k(x,t) = k(x)$, možemo koristiti višeskalne bazne funkcije formirane za eliptične jednadžbe.

Pretpostavimo da je interval $[0,T]$ podijeljen na M jednakih dijelova

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T.$$

To su intervali grube mreže i neka je $\mathcal{T}_H$ gruba mreža od Ω. Višeskalne bazne funkcije u $[t_n, t_{n+1}]$ su definirane sa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_i^V(x,t)}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x,t)\nabla \phi_i^V(x,t)) = 0 & \text{u } K \\ \phi_i^V = \phi_i^H & \text{na } \partial K \\ \phi_i(x,t=t_n) = \phi_i^H. \end{cases} \tag{3.8.4}$$

Ovdje je K element grube mreže, a ϕ_i^H standardna bazna funkcija na gruboj mreži.

Sada tražimo konačnodimenzionalnu aproksimaciju rješenja u $[t_n, t_{n+1}]$ iz prostora razapetog višeskalnim baznim funkcijama:

$$p_h^{n+1}(x,t) = \sum_{i=1}^{n_H} p_i^{n+1} \phi_i^V(x,t), \tag{3.8.5}$$

gdje su p_i^{n+1} aproksimativne nodalne vrijednosti rješenja. Supstituirajući izraz (3.8.5) u jednadžbu (3.8.3) i uzimajući za test funkciju ϕ_j^H dobivamo:

$$p_i^{n+1} \int_\Omega \phi_i^V \phi_j^H \, dx - p_i^n \int_\Omega \phi_i^V \phi_j^H \, dx$$

$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_K \int_K k(x,t) \nabla p_h \cdot \nabla \phi_j^H \, dx \, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\Omega f^{n+1} \phi_j^H \, dx \, dt,$$

gdje je

$$p_h(x,t) = \sum_{i=1}^{n_H} p_i(t) \phi_i^V(x,t).$$

Treći član na desnoj strani se može tretirati implicitno ili eksplicitno. Posebice, implicitna metoda je dana sa

$$p_i^{n+1} \int_\Omega \phi_i^V \phi_j^H \, dx - p_i^n \int_\Omega \phi_i^V \phi_j^H \, dx$$

$$+ p_i^{n+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_K \int_K k(x,t) \nabla \phi_i^V \cdot \nabla \phi_j^H \, dx \, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\Omega f^{n+1} \phi_j^H \, dx \, dt.$$

Ako je treći član zamijenjen sa

$$p_i^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_K \int_K k(x,t) \nabla \phi_i^V \cdot \nabla \phi_j^H \, dx \, dt$$

metoda je eksplicitna.

3.9 Usporedba drugih višeskalnih metoda

Višeskalna metoda konačnih elemenata je slična i s puno drugih višeskalnih metoda. U ovom poglavlju ćemo pokazati sličnost s upscaling metodom i varijacijskim višeskalnim metodama. Upscaling metoda se bazira na homogenizacijskoj metodi. Njezina glavna ideja je izračunati efektivne koeficijente i formirati jednadžbu na gruboj mreži. U slučaju linearnih eliptičnih jednadžbi, jednadžba na gruboj mreži ima istu formu kao i na finoj mreži samo što su koeficijenti zamijenjeni efektivnim homogeniziranim koeficijentima. Efektivni koeficijenti u upscaling metodi su izračunati korištenjem rješenja lokalnog problema u reprezentativnom volumenu (REV). Mogu se koristiti razni rubni uvjeti za rješavanje lokalnih problema i radi jednostavnosti, promatramo linearne rubne uvjete

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \nabla \phi_e) = 0 & \text{u } K \\ \phi_e(x) = \vec{e} \cdot (x - x_e) & \text{na } \partial K \end{cases} \tag{3.9.1}$$

gdje je $\vec{e}$ jediničan vektor. Ovdje K označava element grube mreže, iako možemo uzeti i manje područje kao u oversampling metodi. Efektivni koeficijenti su izračunati u svakom K kao

$$\widetilde{k}^* e = \frac{1}{|K|} \int_K k \nabla \phi_e dx. \tag{3.9.2}$$

Primijetimo da je $\widetilde{k}^*$ simetrična matrica ako je k simetrična i (3.9.2) se može izračunati za svaku točku domene tako da postavimo točku u centar elementa K, tj.

$$\widetilde{k}^*(x_0) e = \frac{1}{|K_{x_0}|} \int_{K_{x_0}} k \nabla \phi_e dx.$$

gdje je K_{x_0} REV sa središtem u x_0 i ϕ_e je lokalno rješenje definirano sa (3.9.1) u K_{x_0}. U homogenizacijskoj tehnici ponekad se uzimaju razni drugi rubni uvjeti za izračunavanje $\widetilde{k}^*$ uključujući i periodične rubne uvjete. Jednom kada su efektivni koeficijenti izračunati, jednadžba na gruboj mreži

$$-\mathrm{div}(\widetilde{k}^* \nabla p^*) = f \tag{3.9.3}$$

je riješena nad cijelim područjem.

Kako bi pokazali sličnost s višeskalnom metodom konačnih elemenata, jednadžbu (3.9.3) ćemo diskretizirati na način kao i ranije u radu tj. koristeći Galerkian metodu konačnih elemenata. Problem je naći $p_h^* \in W_h$ takav da

$$\sum_K \int_K \widetilde{k}^* \nabla p_h^* \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx, \qquad \forall v_h \in W_h. \tag{3.9.4}$$

Nadalje, zapisujemo MsFEM diskretizaciju

$$a_{ij} p_j = b_i, \tag{3.9.5}$$

gdje je

$$a_{ij} = \sum_K \int_K k \nabla \phi_j^V \cdot \nabla \phi_i^H \, dx$$

(ovdje pretpostavljamo da je ϕ_i^H po dijelovima linearna) i

$$b_i = \int_\Omega f \phi_i^H \, dx.$$

Sada bismo htjeli izraziti višeskalnu baznu funkciju ϕ_j^V preko funkcije ϕ_e, gdje ϕ_j^V zadovoljava zadaću (3.1.1) za svaki $j = 1, \ldots, n_H$. Neka je

$$\phi_e = \sum_{j=1}^{n_H} \alpha_j \phi_j^V \quad \forall e.$$

U tom slučaju, jednadžba (3.9.1) je zadovoljena te još treba provjeriti rubne uvjete. Ako uzmemo $\vec{e} = \nabla \phi_j^H$ onda je

$$\vec{e} \cdot x|_{\partial K} = \phi_j^H|_{\partial K} + \text{konst}.$$

Tada je

$$\phi_j^V = \phi_{\nabla \phi_j^H} + \text{konst}$$

i time su zadovoljeni rubni uvjeti. Ovdje nam ta konstanta nije bitna jer u izrazu za matricu krutosti propada u gradijentu. Konačno dobivamo:

$$\frac{1}{|K|}\int_K k(x)\nabla\phi_j^V\,dx = \frac{1}{|K|}\int_K k\nabla\phi_{\nabla\phi_j^H}\,dx = \widetilde{k}^*\nabla\phi_j^H.$$

Time je

$$a_{ij} = \sum_K \int_K \widetilde{k}^*\nabla\phi_j^H\cdot\nabla\phi_i^H\,dx.$$

Ovo pokazuje da se višeskalna metoda konačnih elemenata može dobiti iz tradicionalnih upscaling metoda. Ipak, koncept višeskalnih metoda se razlikuje od tradicionalnih upscaling metoda, jer je lokalna informacija direktno izvedena iz varijacijske formulacije i ne pretpostavljamo specifičnu formu za jednadžbe na gruboj mreži.

Sljedeće, ukratko diskutiramo odnos između varijacijskih višeskalnih metoda i MsFEM-a. Promatramo Galerkian metode konačnih elemenata. Pretpostavimo da je prostor rješenja na finoj mreži X_F rastavljen na grubo-dimenzionalan prostor X_C (npr. W_h) i prostor koji sadrži nerazrješive skale X_U,

$$X_F = X_C \oplus X_U.$$

Isto tako, radi jednostavnosti, pretpostavimo da su ti prostori potprostori od $H_0^1(\Omega)$. Rješenje na finoj mreži se može zapisati kao

$$p = p_C + p_U.$$

Substitucijom tog izraza u originalnu jednadžbu i množeći je testnom funkcijom iz X_C, dobivamo jednadžbu za rješenje na gruboj mreži

$$\int_\Omega k\nabla(p_C+p_U)\cdot\nabla v_h\,dx = \int_\Omega f v_h\,dx, \qquad \forall v_h\in X_C. \tag{3.9.6}$$

Slično tome, množeći originalnu jednadžbu sa testnom funkcijom iz X_U, dobivamo jednadžbu za nerazrješen dio rješenja

$$\int_\Omega k\nabla p_U\cdot\nabla v_h\,dx = \int_\Omega f v_h\,dx - \int_\Omega k\nabla p_C\cdot\nabla v_h dx, \qquad \forall v_h\in X_U. \tag{3.9.7}$$

Da bi našli rješenje na gruboj mreži, p_C, moramo prvo riješiti p_U iz (3.9.7) i substituirati ga u (3.9.6) da izračunamo p_C. Jednadžba (3.9.6) je egzaktna i rješenje od (3.9.7) je nelokalno. Generalno, rješenje od (3.9.7) se može lokalizirati nametanjem lokalnih rubnih uvjeta. Možemo uzeti razne rubne uvjete. Kako se rješenje lokalnog problema može zapisati preko višeskalne baznih funkcija, možemo dobiti formulaciju sličnu MsFEM-u.

Da bi pokazali sličnost između MsFEM-a i varijacijskih višeskalnih metoda, kao primjer, uzet ćemo lokalizaciju baziranu na $p_U = 0$ na rubovima elementa grube mreže K. U tom slučaju, evidentno je da rješenje $p_C + p_U$ zadovoljava lokalan problem

$$\mathrm{div}(k\nabla(p_C+p_U)) = f \quad \text{ u } K$$

i $p_C + p_U$ je po dijelovima linearna funkcija na ∂K. Ovo rješenje se može aproksimirati baznim funkcijama višeskalnih konačnih elemenata definiranih sa

$$\begin{cases} L\phi_i = 0 & \text{u } K, \\ \phi_i = \phi_i^H & \text{na } \partial K, \end{cases} \tag{3.9.8}$$

$\forall K \in \mathcal{T}_h$, $K \subset S_i$. Prema tome, možemo tražiti

$$p_C + p_U = \sum_{i=1}^{n_H} p_i \phi_i.$$

Substitucijom ovog izraza u (3.9.6), dobivamo Petrov-Galerkian formulaciju MsFEM-a ako su ϕ_i izabrane tako da rješavaju homogenu zadaću.

Ovaj rad je dao osnovan pregled višeskalne metode konačnih elemenata. Iako smo se ovdje ograničili samo na linearne probleme, metoda se može proširiti i na nelinearne probleme. Detaljna analiza i primjena metode se može pronaći u [8]. Na kraju se nalazi Dodatak u kojem se nalazi osnovna teorija o Soboljevim prostorima.

Dodatak

Prostori Soboljeva

U ovoj sekciji ćemo dati definiciju i navesti neka svojstva prostora Soboljeva. Prostori Soboljeva su značajni za analizu numeričkih metoda za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžba. Ovdje ćemo navesti neke rezultate bez dokaza, a više o prostorima Soboljeva se može pronaći u [4].

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen skup. Prvo ćemo uvesti neke klase realnih funkcija koje su definirane na skupu Ω.

Definicija 1. *Za $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ definiramo*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ je izmjeriva i } \textstyle\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

Uvodimo oznaku

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Za $p = \infty$ imamo

Definicija 2.

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ je izmjeriva i } \exists \textit{ konstanta } C \textit{ takva da je } |f(x)| \leq C \textit{ s.s.}\}.$$

Prostor $L^p(\Omega)$ nazivamo prostor integrabilnih funkcija. Za dvije funkcije $u, v \in L^p(\Omega)$ kažemo da su jednake ako je $u(x) = v(x)$ za $x \in \Omega$, osim na skupu mjere nula. $L^p(\Omega)$ je Banachov prostor (vidi [4]), a prostor $L^2(\Omega)$ je osim toga i Hilbertov prostor sa skalarnim produktom definiranim sa

$$(u, v)_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

Sa $L^p_{loc}(\Omega)$, $p \in [1, \infty\rangle$ je označen skup svih funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ takvih da za svako $x \in \Omega$ postoji otvorena okolina U takva da je $U \subset \Omega$ i $u \in L^p(U)$. Funkcija iz $L^p_{loc}(\Omega)$ nazivamo lokalno p-integrabilnim funkcijama.

Zatim uvodimo pojam multiindeksa koji su nam potrebni za kratko označavanje viših derivacija. Multiindeks je svaka d-torka $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup 0$, a duljina multiindeksa je broj

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

Multiindeks koristimo za kratko označavanje parcijalnih derivacija funkcije $u : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

U radu koristimo i sljedeće funkcijske prostore:

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \ u \text{ je neprekidna na } \Omega\}$$
$$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \ \partial^\alpha u \in C(\Omega), \text{ za svaki } |\alpha| \leq k\}.$$

Kako su funkcije iz $C^k(\Omega)$ općenito neograničene i nisu dobro definirane na granici domene $\partial\Omega$ uvodimo potprostore tih prostora koji se sastoje od funkcija koje se mogu po neprekidnosti proširiti na otvoreni skup koji sadrži $\overline{\Omega}$:

$$C(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \ u \text{ je neprekidna na } \overline{\Omega}\}$$
$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : \ \partial^\alpha u \in C(\overline{\Omega}), \text{ za svaki } |\alpha| \leq k\}.$$

Koristimo i prostor neprekidnih funkcija koje se poništavaju na granici domene:

$$C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Sa $C_c^\infty(\Omega)$ ćemo označiti prostor beskonačno direrencijabilnih funkcija $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, sa kompaktnim nosačem u Ω. Sada uvodimo pojam slabe parcijalne derivacije. Definicija je preuzeta iz [5].

Definicija 3. *Neka su $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ i α multiindeks. Kažemo da je v α-slaba derivacija od u, tj.*

$$\partial^\alpha u = v$$

ako je

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx$$

za svaku funkciju $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lako se pokazuje da je slaba derivacija jedinstvena ako postoji.

Sada možemo dati definiciju prostora Soboljeva.

Definicija 4. *Za dani cijeli broj $k \geq 0$ i $1 \leq p \leq \infty$ prostor Soboljeva reda k definiran je sa*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Lako se pokazuju da $W^{k,p}(\Omega)$ ima strukturu linearnog prostora. Na $W^{k,p}(\Omega)$ su definirane norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p}, & p \in [1, \infty) \\ \\ \max\limits_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

i polunorma

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum\limits_{|\alpha| = k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p}, & p \in [1, \infty) \\ \\ \max\limits_{|\alpha| = k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

Posebno za slučaj $k = 1$ i $1 \leq p \leq \infty$ imamo

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Lako se pokazuje da je $W^{k,p}(\Omega)$ normiran prostor. Štoviše, imamo slijedeći rezultat

Teorem 1. *Za svaki* $k = 1, 2, \ldots$ *i* $1 \leq p \leq \infty$ *Soboljev prostor* $W^{k,p}(\Omega)$ *je Banachov prostor.*

Dokaz se može pronaći u [5].

U slučaju $p = 2$ može se uvesti skalarni produkt, pa se umjesto $W^{k,2}(\Omega)$ upotrebljava i oznaka $H^k(\Omega)$, gdje je $H^k(\Omega)$ Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)})^{1/2}, \quad u, v \in H^k(\Omega).$$

Izuzetno je važan prostor Soboljeva $W_0^{k,p}(\Omega)$ definiran kao upotpunjenje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u odnosu na normu $\| \cdot \|_{W^{k,p}(\Omega)}$

Teorem 2. *(Poicaréova nejednakost) Ako je domena* Ω *ograničena barem u jednom smjeru, onda postoji konstanta* $c = c(\Omega, p)$ *takva da za svako* $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ *vrijedi*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c|u|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Dokaz se može pronaći u [6].

Na kraju iznosimo teorem o tragu kojeg koristimo kod nehomogenih rubnih zadaća. Za ovaj rad dovoljno je promatrati slučaj kada je $k = 1$.

Teorem 3. *(Teorem o tragu) Neka je* Ω *ograničena Lipschitzova domena. Tada preslikavanje* $\gamma_{\partial\Omega}$ *koje svakoj funkciji* $u \in C^1(\bar{\Omega})$ *pridružuje njenu restrikciju na* $\partial\Omega$ *ima jedinstveno proširenje do linearnog i neprekidnog operatora*

$$\gamma_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega).$$

Operator $\gamma_{\partial\Omega}$ *se naziva operator traga i vrijedi* $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \quad \gamma_{\partial\Omega} v = 0\}$. *Slika operatora traga je prostor* $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Bibliografija

[1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis of periodic structures.* North-Holland, 1978.

[2] V. Jikov, S. Kozlov, and O. Oleinik. *Homogenization od differential operators and integral functionals.* Springer, New York, 1994.

[3] Zhangxin Chen. *Finite Element Methods and Their Applications.* Springer, New York, 2005.

[4] Emmanuele DiBenedetto. *Real Analysis.* Birkhäuser, Boston, 2002.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[6] Mladen Jurak. *Praktikum primijenjene matematike II. Metoda konačnih elemenata.*

[7] Svetozar Kurepa. *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora.* Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[8] Yalchin Efendiev, Thomas Y. Hou. *Multiscale Finite Element Methods.* Springer, New York, 2009.