Homogene C^*-algebre

Ilja Gogić

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu &
PMF-DMI, Univerzitet u Novom Sadu

Seminar za kombinatoriku, geometriju, topologiju i algebru
Matematički fakultet
Beograd, 3. decembra 2013.

Jedan od najvećih napredaka 20. stoljeća je Heisenbergovo otkriće matematičke formulacije kvantne mehanike iz 1925.

Jedan od najvećih napredaka 20. stoljeća je Heisenbergovo otkriće matematičke formulacije kvantne mehanike iz 1925.

Iz matematičkog kuta gledanja, prijelazu iz klasične mehanike u kvantnu mehaniku odgovara prijelaz iz komutativne algebre klasičnih observabli u nekomutativnu algebru kvantnih observabli. Prisjetimo se da je u klasičnoj mehanici observabla (energija, pozicija, moment, itd.) funkcija na mnogostrukosti koju zovemo fazni prostor sustava.

Jedan od najvećih napredaka 20. stoljeća je Heisenbergovo otkriće matematičke formulacije kvantne mehanike iz 1925.

Iz matematičkog kuta gledanja, prijelazu iz klasične mehanike u kvantnu mehaniku odgovara prijelaz iz komutativne algebre klasičnih observabli u nekomutativnu algebru kvantnih observabli. Prisjetimo se da je u klasičnoj mehanici observabla (energija, pozicija, moment, itd.) funkcija na mnogostrukosti koju zovemo fazni prostor sustava.

Iz radova Diraca i Born-Heisenberg-Jordana postalo je jasno da su observable u kvantnoj mehanici zapravo hermitski operatori na Hilbertovom prostoru kojeg zovemo prostor stanja sustava. Prema tome, komutativna algebra funkcija na prostoru zamijenjena je nekomutativnom algebrom operatora na Hilbertovom prostoru.

Time su udareni temelji novoj matematičkoj teoriji, teoriji **operatorskih algebri**.

Time su udareni temelji novoj matematičkoj teoriji, teoriji **operatorskih algebri**.

Osamdesetih godina 20. stoljeća francuski matematičar A. Connes je primijetio da se slična procedura može primijeniti na razna područja matematike gdje klasični pojam prostora (prostora mjere, lokalno kompaktnog prostora, glatkog prostora, itd.) gubi svoj smisao, te se može zamijeniti sa nekomutativnom algebrom. Connesova teorija je poznata pod imenom **nekomutativna geometrija**.

Time su udareni temelji novoj matematičkoj teoriji, teoriji **operatorskih algebri**.

Osamdesetih godina 20. stoljeća francuski matematičar A. Connes je primijetio da se slična procedura može primijeniti na razna područja matematike gdje klasični pojam prostora (prostora mjere, lokalno kompaktnog prostora, glatkog prostora, itd.) gubi svoj smisao, te se može zamijeniti sa nekomutativnom algebrom. Connesova teorija je poznata pod imenom **nekomutativna geometrija**.

Nekomutativna geometrija, sadrži klasičnu geometriju kao granični slučaj, ali je ta geometrija opisana algebarskim terminima. Zbog toga, za razumijevanje njene relacije s klasičnom geometrijom, treba prvo shvatiti pojam jedne od najvažnijih ideja u matematici: ideja dualizacije između komutativne algebre i geometrije.

Radi se o tome da postoji dualnost između određenih kategorija geometrijskih prostora i kategorija algebri koje reprezentiraju te prostore. Nekomutativna geometrija se temelji na toj relaciji dualnosti između geometrije i komutativne algebre i pritom ju značajno proširuje.

Radi se o tome da postoji dualnost između određenih kategorija geometrijskih prostora i kategorija algebri koje reprezentiraju te prostore. Nekomutativna geometrija se temelji na toj relaciji dualnosti između geometrije i komutativne algebre i pritom ju značajno proširuje.

Široka ideja nekomutativne geometrije je da se s određenim klasama nekomutativnih algebri postupa kao s nekomutativnim prostorima te da se aparati geometrije, topologije i analize prošire na to novo okruženje.

Radi se o tome da postoji dualnost između određenih kategorija geometrijskih prostora i kategorija algebri koje reprezentiraju te prostore. Nekomutativna geometrija se temelji na toj relaciji dualnosti između geometrije i komutativne algebre i pritom ju značajno proširuje.

Široka ideja nekomutativne geometrije je da se s određenim klasama nekomutativnih algebri postupa kao s nekomutativnim prostorima te da se aparati geometrije, topologije i analize prošire na to novo okruženje.

Mi ćemo tu ideju dualizacije opisati na LCH (lokalno kompaktnim Hausdorffovim) prostorima.

C^*-algebre kao nekomutativna topologija

Neka je X LCH prostor i neka je $C_0(X)$ skup svih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ koje trnu u ∞, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan podskup $K \subseteq X$ takav da je $|f(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in X \setminus K$.

- $C_0(X)$ postaje kompleksna $*$-algebra uz standardne operacije po točkama

$$(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$$
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

i involuciju

$$f^*(x) := \overline{f(x)},$$

gdje su $f, g \in C_0(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ te $x \in X$.

- $C_0(X)$ možemo opskrbiti sa sup-normom

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\},$$

s obzirom na koju $C_0(X)$ postaje Banachov prostor.

- Sup-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Drugim riječima, $C_0(X)$ je uz sup-normu Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, sup-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. C^*-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

s obzirom na koju $C_0(X)$ postaje Banachov prostor.

- Sup-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Drugim riječima, $C_0(X)$ je uz sup-normu Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, sup-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. C^*-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

Napomena

Algebra $C_0(X)$ je komutativna, tj. vrijedi $f \cdot g = g \cdot f$ za sve $f, g \in C_0(X)$.

s obzirom na koju $C_0(X)$ postaje Banachov prostor.

- Sup-norma je očito submultiplikativna, tj.

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Drugim riječima, $C_0(X)$ je uz sup-normu Banachova algebra.

- Ukoliko uzmemo u obzir i involuciju, sup-norma zadovoljava i sljedeće, tzv. C^*-svojstvo:

$$\|f^* \cdot f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

Napomena

Algebra $C_0(X)$ je komutativna, tj. vrijedi $f \cdot g = g \cdot f$ za sve $f, g \in C_0(X)$.

Što dobivamo ako ispustimo komutativnost?

Definicija

C^*-**algebra** *je kompleksna Banachova $*$-algebra A čija norma $\|\cdot\|$ zadovoljava C^*-svojstvo. Drugim riječima:*

- *A je algebra nad $\mathbb{C}$.*
- *A je opskrbljena s involucijom, tj. s preslikavanjem $\boxdot^* : A \to A$, $a \mapsto a^*$, koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

$$(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad te \quad (a^*)^* = a,$$

  za sve $a, b \in A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- *A je uz normu $\|\cdot\|$ normirana algebra, tj. vrijedi*

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad za\ sve\ a, b \in A.$$

- *A je s obzirom na normu $\|\cdot\|$ Banachov prostor.*
- *Norma $\|\cdot\|$ zadovoljava C^*-***svojstvo***, tj. vrijedi*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad za\ sve\ a \in A.$$

C^*-svojstvo je dosta jak uvjet. Naime, to svojstvo zajedno s formulom za spektralni radijus implicira da je norma C^*-algebre jedinstveno određena njenom algebarskom strukturom: Za sve $a \in A$ imamo

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(a^*a)\},$$

gdje je

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \lambda 1 - a \text{ nije invertibilan}\}$$

spektar elementa $x \in A$.

C^*-svojstvo je dosta jak uvjet. Naime, to svojstvo zajedno s formulom za spektralni radijus implicira da je norma C^*-algebre jedinstveno određena njenom algebarskom strukturom: Za sve $a \in A$ imamo

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(a^*a)\},$$

gdje je

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \lambda 1 - a \text{ nije invertibilan}\}$$

spektar elementa $x \in A$.

Morfizme u kategoriji C^*-algebri sačinjavaju tzv. $*$-**homomorfizmi**, tj. multiplikativna linearna preslikavanja $\phi : A \to B$ koja čuvaju involuciju.

Propozicija

Neka je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam između C^*-algebri A i B.

- *ϕ je kontrakcija (tj. $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ za sve $a \in A$).*
- *$\phi(A)$ je C^*-podalgebra od B (naglasak na zatvorenosti).*
- *Ako je ϕ injekcija, tada je ϕ izometrija.*

Primjer

Ako je X LCH prostor, tada je $C_0(X)$ (uz sup-normu) komutativna C^*-algebra. Algebra $C_0(X)$ je unitalna ako i samo ako je X kompaktan prostor. U tom slučaju je $C_0(X) = C(X)$.

Primjer

Ako je X LCH prostor, tada je $C_0(X)$ (uz sup-normu) komutativna C^*-algebra. Algebra $C_0(X)$ je unitalna ako i samo ako je X kompaktan prostor. U tom slučaju je $C_0(X) = C(X)$.

Neka je sada A općenita unitalna komutativna C^*-algebra.

- Označimo s $X = X(A)$ prostor svih **karaktera** na A, tj. skup svih unitalnih multiplikativnih linearnih funkcionala $\chi : A \to \mathbb{C}$.
- Svaki karakter χ na A je ograničen s $\|\chi\| = 1$, pa imamo $X \subseteq \mathrm{Ball}(A^*)$. Štoviše, X je w^*-zatvoren podskup od $\mathrm{Ball}(A^*)$, pa je kao takav kompaktan (Banach-Alaogluov teorem).
- Za $a \in A$ definirajmo funkciju $\hat{a} : X \to \mathbb{C}$ s $\hat{a}(\chi) := \chi(a)$. Tada je $\hat{a} \in C(X)$ za sve $a \in A$.
- **Geljfandova transformacija** od A je funkcija $\mathcal{G}_A : A \to C(X)$ definirana s $\mathcal{G}(a) := \hat{a}$.

Teorem (komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Ako je A unitalna komutativna C^*-algebra, tada Geljfandova transofmacija $\mathcal{G}_A$ definira izometrički $*$-izomorfizam s A na $C(X(A))$.

Teorem (komutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Ako je A unitalna komutativna C^*-algebra, tada Geljfandova transofmacija $\mathcal{G}_A$ definira izometrički $*$-izomorfizam s A na $C(X(A))$.

U terminima teorije kategorija:

- Neka je **CH** kategorija čiji su objekti svi kompaktni Hausdorffovi prostori, a morfizmi neprekidne funkcije.
- Neka je $\mathbf{UKC}^*$ kategorija čiji su objekti sve unitalne komutativne C^*-algebre, a morfizmi unitalni $*$-homomorfizmi.
- Definirajmo dva kontravarijantna funktora $C : \mathbf{CH} \rightsquigarrow \mathbf{UKC}^*$ i $X : \mathbf{UKC}^* \rightsquigarrow \mathbf{CH}$ na sljedeći način:
  - ▷ Funktor C prevodi CH prostor X u unitalnu komutativnu C^*-algebru $C(X)$, a neprekidnu funkciju $F : X \to Y$ u unitalni $*$-homomorfizam $C(F) : C(Y) \to C(X)$, $C(F)(f) := f \circ F$.
  - ▷ Funktor X prevodi unitalnu komutativnu C^*-algebru A u CH prostor $X(A)$, a unitalni $*$-homomorfizam $\phi : A \to B$ u neprekidnu funkciju $X(\phi) : X(B) \to X(A)$, $X(\phi)(\chi) := \chi \circ \phi$.

U terminima teorije kategorija (nastavak):

Za $x \in X$ označimo s ϵ_x pripadni evaluacijski karakter na $C(X)$, $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ i definirajmo preslikavanje $\epsilon_X : X \to X(C(X))$ s $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_X$. Tada se lako provjeri da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_Y} \\ X(C(X)) & \xrightarrow{X(C(f))} & X(C(Y)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}_B} \\ C(X(A)) & \xrightarrow{C(X(\phi))} & C(X(B)) \end{array}$$

U terminima teorije kategorija (nastavak):

Za $x \in X$ označimo s ϵ_x pripadni evaluacijski karakter na $C(X)$, $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ i definirajmo preslikavanje $\epsilon_X : X \to X(C(X))$ s $\epsilon_X : x \mapsto \epsilon_x$. Tada se lako provjeri da sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_X"] & Y \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ X(C(X)) \arrow[r, "X(C(f))"] & X(C(Y)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathcal{G}_A"] & B \arrow[d, "\mathcal{G}_B"] \\ C(X(A)) \arrow[r, "C(X(\phi))"] & C(X(B)) \end{tikzcd}$$

Korolar

$X \circ C \cong \mathrm{id}_{\mathbf{CH}}$ i $C \circ X \cong \mathrm{id}_{\mathbf{UKC}^*}$ (prirodni izomorfizam funktora). Dakle, kategorije **CH** *i* $\mathbf{UKC}^*$ *su međusobno dualne.*

Pitanje

Možemo li ovu dualnost proširiti do dualnosti između kategorija **LCH** lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora i **KC*** komutativnih C^*-algebri?

Pitanje

Možemo li ovu dualnost proširiti do dualnosti između kategorija **LCH** lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora i **KC*** komutativnih C^*-algebri?

Odgovor

Možemo, no trebamo biti oprezni pri izboru odgovarajućih morfizama. Naime ako za morfizme u **LCH** uzmemo pravilna neprekidna preslikavanja, a za morfizme u **KC*** nedegenerirane $*$-homomorfizme, tada se može pokazati da su kategorije **LCH** i **KC*** zaista dualne.

Pitanje

Možemo li ovu dualnost proširiti do dualnosti između kategorija **LCH** lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora i **KC*** komutativnih C^*-algebri?

Odgovor

Možemo, no trebamo biti oprezni pri izboru odgovarajućih morfizama. Naime ako za morfizme u **LCH** uzmemo pravilna neprekidna preslikavanja, a za morfizme u **KC*** nedegenerirane $*$-homomorfizme, tada se može pokazati da su kategorije **LCH** i **KC*** zaista dualne.

Zaključak

Prelaskom s LCH prostora X na funkcijsku algebru $C_0(X)$ nije izgubljena niti jedna topološka informacija prostora X. Radi toga, mnoge topološke pojmove, svojstva i konstrukcije možemo formulirati u terminima C^*-algebri, bez pozivanja na komutativnost ili na inherentni prostor. Na taj način dobivamo njihove direktne (nekomutativne) generalizacije. Neki od tih primjera su ilustrirani sljedećom tablicom.

TOPOLOGIJA	C^*-ALGEBRE
otvoren podskup	zatvoren ideal
otvoren gust podskup	esencijalni zatovren ideal
zatvoren podskup	kvocijentna algebra
homeomorfizam	$*$-automorfizam
kompaktnost	unitalnost
povezanost	algebra bez projektora
Kartezijev produkt	prostorni tenzorski produkt
kompaktifikacija	unitizacija
vjerojatnosna mjera	stanje
Lebesgueova dimenzija	nuklearna dimenzija
topološka K-teorija	K-teorija za C^*-algebre

TOPOLOGIJA	C^*-ALGEBRE
otvoren podskup	zatvoren ideal
otvoren gust podskup	esencijalni zatovren ideal
zatvoren podskup	kvocijentna algebra
homeomorfizam	$*$-automorfizam
kompaktnost	unitalnost
povezanost	algebra bez projektora
Kartezijev produkt	prostorni tenzorski produkt
kompaktifikacija	unitizacija
vjerojatnosna mjera	stanje
Lebesgueova dimenzija	nuklearna dimenzija
topološka K-teorija	K-teorija za C^*-algebre

Radi toga na nekomutativne C^*-algebre možemo gledati kao na algebre funkcija na "nekomutativnim prostorima", koji ne postoje u klasičnom smislu. U tom kontekstu se teorija C^*-algebri smatra **nekomutativnom topologijom**.

Osnovni primjeri C^*-algebri

- Matrične algebre $\mathbb{M}_n = M_n(\mathbb{C})$ s euklidskom operatorskom normom su C^*-algebre. Svaka konačno-dimenzionalna C^*-algebra je (do na $*$-izomorfizam) konačna direktna suma matričnih algebri.
- Skup $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je C^*-algebra uz uobičajene operacije, adjungiranje te operatorsku normu.
- Ako je A C^*-algebra i X LCH prostor, tada je $C_0(X, A)$ C^*-algebra uz operacije po točkama i sup-normu.
- Svakoj lokalno kompaktnoj grupi G možemo pridružiti C^*-algebru $C^*(G)$. Sve o teoriji reprezentacija od G je kodirano u $C^*(G)$.
- **Topološki dinamički sistem** se sastoji od kompaktnog prostora X, lokalno kompaktne grupe G i neprekidnog djelovanja grupa $\alpha : G \curvearrowright X$. Takvoj trojci (X, α, G) možemo pridružiti transformacijsku grupovnu C^*-algebru $C(X) \rtimes_\alpha G$.
- Kategorija C^*-algebri dozvoljava kvocijente, direktne sume, direktne produkte, direktne limese, (određene) tenzorske produkte, itd.

C^*-algebarski formalizam kvantne mehenike

- Skup observabli kvantnog sustava opisan je hermitskim dijelom unitalne C^*-algebre A.
- Stanje sustava je definirano kao unitalni pozitivni funkcional na A (tj. linearno preslikavanje $\omega : A \to \mathbb{C}$ takvo da je $\omega(a^*a) \geq 0$ za sve $a \in A$ i $\omega(1_A) = 1$). Ako je sustav u stanju ω, tada je očekivana vrijednost observable a jednaka $\omega(a)$.
- Simetrije sustava opisane su $*$-automorfizmima od A.
- Reverzibilnu vremensku evoluciju kvantnog sustava, u Heisenbergovoj slici, opisuju jednoparametarske grupe $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ $*$-automorfizama od A. Njihovi infinitezimalni generatori su $(*$-$)$derivacije.

C^*-algebarski formalizam kvantne mehenike

- Skup observabli kvantnog sustava opisan je hermitskim dijelom unitalne C^*-algebre A.
- Stanje sustava je definirano kao unitalni pozitivni funkcional na A (tj. linearno preslikavanje $\omega : A \to \mathbb{C}$ takvo da je $\omega(a^*a) \geq 0$ za sve $a \in A$ i $\omega(1_A) = 1$). Ako je sustav u stanju ω, tada je očekivana vrijednost observable a jednaka $\omega(a)$.
- Simetrije sustava opisane su $*$-automorfizmima od A.
- Reverzibilnu vremensku evoluciju kvantnog sustava, u Heisenbergovoj slici, opisuju jednoparametarske grupe $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ $*$-automorfizama od A. Njihovi infinitezimalni generatori su ($*$-)derivacije.

Ovakav C^*-algebarski pristup se koristi u Haag-Kastlerovoj aksiomatizaciji lokalne kvantne teorije polja, gdje je svakom otvorenom podskupu prostorno vremenskog kontinuuma Minkowskog pridružena neka C^*-algebra.

K-teorija

Razvoj K-teorije započeo je radom A. Grothendiecka iz 1957. koji ju je koristio za formulaciju rezultata koji je danas poznat kao Grothendieck-Riemann-Rochov teorem. Njeno ime potječe od njemačke riječi "Klasse".

K-teorija

Razvoj K-teorije započeo je radom A. Grothendiecka iz 1957. koji ju je koristio za formulaciju rezultata koji je danas poznat kao Grothendieck-Riemann-Rochov teorem. Njeno ime potječe od njemačke riječi "Klasse".

M. Atiyah i F. Hirzebruch su 1959. formulirali topološku K-teoriju, koristeći originalnu Grothendieckovu konstrukciju na vektorskim svežnjevima. Topološka K-teorija je esencijalno korištena u drugom (odnosno u prvom objavljenom) dokazu slavnog Atiyah-Singerovog teorema iz 1968.

K-teorija

Razvoj K-teorije započeo je radom A. Grothendiecka iz 1957. koji ju je koristio za formulaciju rezultata koji je danas poznat kao Grothendieck-Riemann-Rochov teorem. Njeno ime potječe od njemačke riječi "Klasse".

M. Atiyah i F. Hirzebruch su 1959. formulirali topološku K-teoriju, koristeći originalnu Grothendieckovu konstrukciju na vektorskim svežnjevima. Topološka K-teorija je esencijalno korištena u drugom (odnosno u prvom objavljenom) dokazu slavnog Atiyah-Singerovog teorema iz 1968.

Topološka K-teorija je generalizirana teorija kohomologije. Drugim riječima, ona zadovoljava sve Eilenberg-Steenrodove aksiome osim aksioma dimenzije.

K-teorija

Razvoj K-teorije započeo je radom A. Grothendiecka iz 1957. koji ju je koristio za formulaciju rezultata koji je danas poznat kao Grothendieck-Riemann-Rochov teorem. Njeno ime potječe od njemačke riječi "Klasse".

M. Atiyah i F. Hirzebruch su 1959. formulirali topološku K-teoriju, koristeći originalnu Grothendieckovu konstrukciju na vektorskim svežnjevima. Topološka K-teorija je esencijalno korištena u drugom (odnosno u prvom objavljenom) dokazu slavnog Atiyah-Singerovog teorema iz 1968.

Topološka K-teorija je generalizirana teorija kohomologije. Drugim riječima, ona zadovoljava sve Eilenberg-Steenrodove aksiome osim aksioma dimenzije.

Od svih topoloških invarijanti, jedino K-teorija ima izravno proširenje u nekomutativno područje.

Neka je X CH prostor i neka je $\mathbb{F}$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

- Ako su E_i $(i = 1, 2)$ dva $\mathbb{F}$-vektorska svežnja nad X s pripadnim projekcijama $p_i : E_i \to X$, tada je njihova **Whitneyeva suma** definirana s

$$E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \ : p_1(e_1) = p_2(e_2).\}$$

  Ako su E_i svežnjevi ranga n_i, tada je očito $E_1 \oplus E_2$ svežanj ranga $n_1 + n_2$.
- Skup $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ svih klasa izomorfizama kompleksnih vektorskih svežnjeva nad X s obzirom na Whitneyevu sumu postaje komutativni monoid.
- Jedinica u monoidu $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ je (klasa od) $X \times \{0\}$.
- Trivijalni svežnjevi nad X formiraju podmonoid koji je izomorfan monoidu $(\mathbb{Z}_+, +)$.

- Općenito monoid $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ nema svojstvo pokrate, tj. iz $[E_1 \oplus F] = [E_2 \oplus F]$ ne mora slijediti $[E_1] = [E_2]$. Npr. Whitneyeva suma (netrivijalnog) tangecijalnog svežnja $T\mathbb{S}^2$ s normalnim (trivijalnim) svežnjem $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ je trivijalni trodimenzionalni svežanj $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$.
- Neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ inducira homomorfizam monoida $f_* : \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(Y) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$, $f_*([E]) := [f^*E]$, pa $X \rightsquigarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ definira kontravarijantni funktor iz kategorije topoloških prostora u kategoriju komutativnih monoida

- Općenito monoid $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ nema svojstvo pokrate, tj. iz $[E_1 \oplus F] = [E_2 \oplus F]$ ne mora slijediti $[E_1] = [E_2]$. Npr. Whitneyeva suma (netrivijalnog) tangecijalnog svežnja $T\mathbb{S}^2$ s normalnim (trivijalnim) svežnjem $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ je trivijalni trodimenzionalni svežanj $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$.
- Neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ inducira homomorfizam monoida $f_* : \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(Y) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$, $f_*([E]) := [f^*E]$, pa $X \rightsquigarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ definira kontravarijantni funktor iz kategorije topoloških prostora u kategoriju komutativnih monoida

Napomena

Za vektorske svežnjeve možemo također definirati tenzorske i vanjske podukte, čime dobivamo dodatnu strukturu na $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$. Na žalost, ne postoji način da te operacije proširimo na nekomutativno područje, tako da one ostaju karakteristične samo za komutativni slučaj.

- Općenito monoid $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ nema svojstvo pokrate, tj. iz $[E_1 \oplus F] = [E_2 \oplus F]$ ne mora slijediti $[E_1] = [E_2]$. Npr. Whitneyeva suma (netrivijalnog) tangecijalnog svežnja $T\mathbb{S}^2$ s normalnim (trivijalnim) svežnjem $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ je trivijalni trodimenzionalni svežanj $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$.
- Neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ inducira homomorfizam monoida $f_* : \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(Y) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$, $f_*([E]) := [f^*E]$, pa $X \rightsquigarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ definira kontravarijantni funktor iz kategorije topoloških prostora u kategoriju komutativnih monoida

Napomena

Za vektorske svežnjeve možemo također definirati tenzorske i vanjske podukte, čime dobivamo dodatnu strukturu na $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$. Na žalost, ne postoji način da te operacije proširimo na nekomutativno područje, tako da one ostaju karakteristične samo za komutativni slučaj.

Za defniciju K^0-grupe trebat će nam Grothendieckova konstrukcija.

Definicija

Neka je $(S,+)$ *Abelova polugrupa (sa ili bez jedinice).* **Grothendieckova grupa** $G(S)$ *je Abelova grupa* $(S\times S)/\sim$*, gdje je*

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \iff \exists z\in S \text{ t.d. } x_1+y_2+z=x_2+y_1+z,$$

s grupovnom operacijom $[x_1,y_1]+[x_2,y_2]:=[x_1+x_2,y_1+y_2]$*. Jedinični element u* $G(S)$ *je oblika* $[x,x]$*, a inverz od* $[x,y]$ *je* $[y,x]$*. Umjesto* $[x,y]$ *obično pišemo* $[x]-[y]$*.* **Grothendieckovo preslikavanje** $\psi_S:S\to G(S)$ *definirano s* $\psi_S(x):=[x+y,y]$ $(y\in S)$ *je homomorfizam Abelovih polugrupa i ono ne ovisi o izboru elementa* y*.*

Definicija

Neka je $(S,+)$ Abelova polugrupa (sa ili bez jedinice). **Grothendieckova grupa** $G(S)$ *je Abelova grupa* $(S \times S)/\sim$*, gdje je*

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff \exists z \in S \; t.d. \; x_1+y_2+z = x_2+y_1+z,$$

s grupovnom operacijom $[x_1,y_1]+[x_2,y_2] := [x_1+x_2, y_1+y_2]$*. Jedinični element u* $G(S)$ *je oblika* $[x,x]$*, a inverz od* $[x,y]$ *je* $[y,x]$*. Umjesto* $[x,y]$ *obično pišemo* $[x]-[y]$*.* **Grothendieckovo preslikavanje** $\psi_S : S \to G(S)$ *definirano s* $\psi_S(x) := [x+y, y]$ $(y \in S)$ *je homomorfizam Abelovih polugrupa i ono ne ovisi o izboru elementa* y*.*

Napomena

Notacija "formalnih razlika" $[x]-[y]$ motivirana je primjerom konstrukcije Grothendieckove grupe monoida $(\mathbb{Z}_+,+)$; imamo $G(\mathbb{Z}_+,+) = (\mathbb{Z},+)$. Taj primjer nam može krivo sugerirati da je Grothendieckovo preslikavanje uvijek injektivno. Naime, $\psi_S : S \to G(S)$ je injekcija ako i samo ako monoid S ima svojstvo pokrate.

Osnovna svojstva Grothendieckovog preslikavanja

- funktorijalnost, tj. za svaki homomorfizam $\phi : S \to T$ Abelovih monoida postoji jedinstven homomorfizam grupa $G(\phi) : G(S) \to G(T)$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi_S"'] & T \arrow[d, "\psi_T"] \\ G(S) \arrow[r, dashed, "\exists!\, G(\phi)"] & G(T) \end{tikzcd}$$

- univerzalnost, tj. ako je S Abelova polugrupa, H Abelova grupa te $\phi : S \to H$ homomorfizam polugrupa, tada postoji jedinstven homomorfizam $\theta : G(S) \to H$ takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi_S"'] & H \\ & G(S) \arrow[u, dashed, "\exists!\, \theta"'] \end{tikzcd}$$

Definicija

Ako je X *CH prostor, tada definiramo* $K^0_{\mathbb{F}}(X) := G(\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X))$.

Definicija

Ako je X CH prostor, tada definiramo $K^0_{\mathbb{F}}(X) := G(\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X))$.

Napomena

Za dva elementa x, y Abelove polugrupe S imamo $\psi_S(x) = \psi_S(y)$ ako i samo ako postoji $z \in S$ takav da je $x + z = y + z$. Posebno, ako je $S = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ tada dvije klase $[E]$ i $[F]$ imaju iste slike u $K^0_{\mathbb{F}}(X)$ ako i samo ako su svežnjevi E i F stabilno izomorfni. To znači da postoji trivijalni svežanj θ^n nad X takav da je $E \oplus \theta^n \cong F \oplus \theta^n$.

Definicija

Ako je X CH prostor, tada definiramo $K^0_{\mathbb{F}}(X) := G(\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X))$.

Napomena

Za dva elementa x, y Abelove polugrupe S imamo $\psi_S(x) = \psi_S(y)$ ako i samo ako postoji $z \in S$ takav da je $x + z = y + z$. Posebno, ako je $S = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X)$ tada dvije klase $[E]$ i $[F]$ imaju iste slike u $K^0_{\mathbb{F}}(X)$ ako i samo ako su svežnjevi E i F stabilno izomorfni. To znači da postoji trivijalni svežanj θ^n nad X takav da je $E \oplus \theta^n \cong F \oplus \theta^n$.

U prethodnoj napomeni koristili smo sljedeći poznati rezultat:

Teorem (Swan)

Ako je X CH prostor, tada je svaki vektorski svežanj E nad X direktni sumand trivijalnog svežnja. Drugim riječima, postoji vektorski svežanj E nad X takav da je $E \oplus F$ trivijalni svežanj.

Direktno iz definicije od K^0 dobivamo:

Propozicija

*K^0 definira kontravarijantni funktor iz kategorije **CH** u kategoriju **Ab** Abelovih grupa. Pritom, ako su CH prostori X i Y homotopski ekvivalentni, tada je $K^0(X) \cong K^0(Y)$.*

Direktno iz definicije od K^0 dobivamo:

Propozicija

K^0 definira kontravarijantni funktor iz kategorije **CH** *u kategoriju* **Ab** *Abelovih grupa. Pritom, ako su CH prostori X i Y homotopski ekvivalentni, tada je $K^0(X) \cong K^0(Y)$.*

Primjer

- Ako je CH prostor X kontraktibilan, tada je $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X) \cong \mathbb{Z}_+$, pa je $K^0_{\mathbb{F}}(X) \cong \mathbb{Z}$.
- za $X = \mathbb{S}^1$ imamo $K^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ i $K^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Direktno iz definicije od K^0 dobivamo:

Propozicija

K^0 definira kontravarijantni funktor iz kategorije **CH** *u kategoriju* **Ab** *Abelovih grupa. Pritom, ako su CH prostori X i Y homotopski ekvivalentni, tada je $K^0(X) \cong K^0(Y)$.*

Primjer

- Ako je CH prostor X kontraktibilan, tada je $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}(X) \cong \mathbb{Z}_+$, pa je $K^0_{\mathbb{F}}(X) \cong \mathbb{Z}$.
- za $X = \mathbb{S}^1$ imamo $K^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ i $K^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Prema Swanovom teoremu za svaki vektorski svežanj E nad CH prostorom X postoji vektorski svežanj F nad X takav da je $E \oplus F \cong \theta^n$. Iz

$$\Gamma(E) \oplus \Gamma(F) \cong \Gamma(E \oplus F) \cong \Gamma(\theta^n) = C(X)^n,$$

zaključujemo da je $\Gamma(E)$ konačno generirani projektivni $C(X)$-modul.

Stavimo $R := C(X)$ i neka je P konačno generirani projektivni R-modul.

- Ako je Q R-modul takav da je $P \oplus Q = R^n$, neka je $e \in \mathrm{Hom}_R(R^n, R^n)$ idempotent sa slikom P, na kojeg gledamo kao na $n \times n$ matricu u matričnoj algebri $M_n(R) \cong C(X, \mathbb{M}_n)$.
- Definirajmo

$$E(P) := \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{C}^n \ : \ \xi \in \mathrm{Im}(e(x))\}.$$

  Tada nije teško vidjeti da je $E(P)$ vektorski svežanj nad X.
- Naravno, ova konstrukcija ovisi o izboru cijepanja $P \oplus Q = R^n$.
- Ako je $P \oplus Q' = R^m$ neko drugo cijepanje s pripadnim idempotentom $f \in M_m(R)$, tada se lako provjeri da je $e \overset{0}{\approx} f$, tj. e i f su **algebarski ekvivalentni**. To znači da postoje $u \in \mathrm{Hom}_R(R^m, R^n)$ i $v \in \mathrm{Hom}_R(R^n, R^m)$ takvi da je

$$uv = e \quad i \quad vu = f.$$

Napomena

Algebarski ekvivalentni idempotenti definiraju izomorfne R-module.

Napomena

Algebarski ekvivalentni idempotenti definiraju izomorfne R-module.

Označimo redom s $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ i $P(X)$ kategoriju kompleksnih vektorskih svežnjeva nad X i kategoriju konačno generiranih projektivnih $C(X)$-modula. Definirajmo odgovarajuće kovarijantne funktore

$$\Gamma : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \rightsquigarrow P(X) \quad i \quad E : P(X) \rightsquigarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X).$$

Napomena

Algebarski ekvivalentni idempotenti definiraju izomorfne R-module.

Označimo redom s $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ i $P(X)$ kategoriju kompleksnih vektorskih svežnjeva nad X i kategoriju konačno generiranih projektivnih $C(X)$-modula. Definirajmo odgovarajuće kovarijantne funktore

$$\Gamma : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \rightsquigarrow P(X) \quad i \quad E : P(X) \rightsquigarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X).$$

Teorem (Serre-Swan)

Imamo $\Gamma \circ E \cong \mathrm{id}_{P(X)}$ *i* $E \circ \Gamma \cong \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)}$. *Dakle, kategorije* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$ *i* $P(X)$ *su ekvivalentne.*

Serre-Swanova konstrukcija nam sugerira definiciju K_0-grupe za proizvoljni unitalni prsten R:

- Neka je $I_n(R)$ skup svih idempotenata u $M_n(R)$ i stavimo

$$I_\infty(R) := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(R).$$

- $I_\infty(R)$ postaje monoid s obzirom na operaciju

$$e \oplus f := \mathrm{diag}(e, f) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}.$$

- Stavimo $V(R) := I_\infty(R)/ \overset{0}{\approx}$. Operacija $\oplus$ je kompatibilna s obzirom na relaciju $\overset{0}{\approx}$ tako da $V(R)$ postaje komutativni monoid.
- Definiramo $K_0^{\mathrm{alg}}(R)$ kao Grothendieckovu gupu od $V(R)$.

Napomena

Ako je $R = C(X)$, tada su prema Serre-Swanovom teoremu monoidi $V(R)$ i $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(C)$ izomorfni, pa je i

$$K_0^{\mathrm{alg}}(C(X)) \cong K^0(X).$$

Napomena

Ako je $R = C(X)$, tada su prema Serre-Swanovom teoremu monoidi $V(R)$ i $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(C)$ izomorfni, pa je i

$$K_0^{\mathrm{alg}}(C(X)) \cong K^0(X).$$

Kao što znamo, $C(X)$ je unitalna komutativna C^*-algebre, a u C^*-algebrama imamo pojam projektora ($p^2 = p^* = p$). S njima je znatno lakše baratati nego s općenitim idempotentima jer npr. možemo koristiti funkcionalni račun. Stoga je prirodno pitati se da li je K_0-grupa općenite unitalne C^*-algebre A u potpunosti definirana svojim projektorima. Odgovor je potvrdan:

- Neka je $P_n(A)$ skup svih projektora u $M_n(A)$ i stavimo $P_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A)$. Na $P_\infty(A)$ definiramo operaciju $\oplus$ te relaciju ekvivalencije $\overset{0}{\sim}$ na sljedeći način:

$$p \oplus q = \mathrm{diag}(p, q),$$

$$p \overset{0}{\sim} q \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v \in M_{m,n}(A) \;\; t.d. \;\; p = v^*v \;\; i \;\; p = vv^*.$$

- Operacija $\oplus$ je kompatibilna s obzirom na relaciju $\overset{0}{\sim}$ tako da $D(R) := P_\infty(A)/ \overset{0}{\sim}$ postaje komutativni monoid.
- Definiramo $K_0(A)$ kao Grothendieckovu grupu od $D(A)$.

$$p \oplus q = \mathrm{diag}(p, q),$$

$$p \overset{0}{\sim} q \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v \in M_{m,n}(A) \ \ t.d. \ \ p = v^* v \ \ i \ \ p = vv^*.$$

- Operacija $\oplus$ je kompatibilna s obzirom na relaciju $\overset{0}{\sim}$ tako da $D(R) := P_\infty(A)/\overset{0}{\sim}$ postaje komutativni monoid.
- Definiramo $K_0(A)$ kao Grothendieckovu grupu od $D(A)$.

Imamo:

Propozicija

Ako je A unitalna C^*-algebra, tada vrijedi:

- *Za sveki $e \in I_\infty(A)$ postoji $p \in P_\infty(A)$ takav da je $e \overset{0}{\approx} p$.*
- *Za $p, q \in P_\infty(A)$ imamo $p \overset{0}{\approx} q$ ako i samo ako $p \overset{0}{\sim} q$.*

$$p \oplus q = \mathrm{diag}(p, q),$$

$$p \overset{0}{\sim} q \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v \in M_{m,n}(A) \;\; t.d. \;\; p = v^*v \;\; i \;\; p = vv^*.$$

- Operacija $\oplus$ je kompatibilna s obzirom na relaciju $\overset{0}{\sim}$ tako da $D(R) := P_\infty(A)/\overset{0}{\sim}$ postaje komutativni monoid.
- Definiramo $K_0(A)$ kao Grothendieckovu grupu od $D(A)$.

Imamo:

Propozicija

Ako je A unitalna C^*-algebra, tada vrijedi:

- *Za sveki $e \in I_\infty(A)$ postoji $p \in P_\infty(A)$ takav da je $e \overset{0}{\approx} p$.*
- *Za $p, q \in P_\infty(A)$ imamo $p \overset{0}{\approx} q$ ako i samo ako $p \overset{0}{\sim} q$.*

Korolar

Ako je A unitalna C^*-algebra, tada je $K_0(A) \cong K_0^{\mathrm{alg}}(A)$.

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu C^*-algebru A reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C_0(X)$ je $\Gamma_0(X \times \mathbb{C})$. Slično vrijedi i za algebru $C_0(X, \mathbb{M}_n)$.

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu C^*-algebru A reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C_0(X)$ je $\Gamma_0(X \times \mathbb{C})$. Slično vrijedi i za algebru $C_0(X, \mathbb{M}_n)$.

Prirodni kandidat za bazni prostor X je tzv. primitivni spektar od A. Njegove elemente čine jezgre ireducibilnih reprezentacija od A.

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu C^*-algebru A reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C_0(X)$ je $\Gamma_0(X \times \mathbb{C})$. Slično vrijedi i za algebru $C_0(X, \mathbb{M}_n)$.

Prirodni kandidat za bazni prostor X je tzv. primitivni spektar od A. Njegove elemente čine jezgre ireducibilnih reprezentacija od A.

Definicija

Reprezentacija *C^*-algebre A je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$, gdje je $\mathcal{H}_\pi$ Hilbertov prostor. Za reprezentaciju π kažemo da je:*

- **vjerna** *ako je π injekcija (izometrija).*
- **ireducibilna** *ako π nema netrivijalnih invarijantnih potprostora, tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\pi$.*

U svjetlu nekomutativne topologije prirodno je pitati se možemo li danu unitalnu C^*-algebru A reprezentirati kao algebru prereza nekakvog svežnja. Npr. $C_0(X)$ je $\Gamma_0(X \times \mathbb{C})$. Slično vrijedi i za algebru $C_0(X, \mathbb{M}_n)$.

Prirodni kandidat za bazni prostor X je tzv. primitivni spektar od A. Njegove elemente čine jezgre ireducibilnih reprezentacija od A.

Definicija

Reprezentacija *C^*-algebre A je $*$-homomorfizam $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_\pi)$, gdje je $\mathcal{H}_\pi$ Hilbertov prostor. Za reprezentaciju π kažemo da je:*

- **vjerna** *ako je π injekcija (izometrija).*
- **ireducibilna** *ako π nema netrivijalnih invarijantnih potprostora, tj. ako je $\mathcal{K}$ (zatvoren) potprostor od $\mathcal{H}_\pi$ takav da je $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tada je nužno $\mathcal{K} = \{0\}$ ili $\mathcal{K} = \mathcal{H}_\pi$.*

Teorem (Nekomutativni Geljfand-Naimarkov teorem)

Svaka C^*-algebra dopušta vjernu reprezentaciju.

Napomena

Radi prethodnog teorema, C^*-algebru možemo (konkretno) definirati kao uniformno zatvorenu samoadjungiranu podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

Napomena

Radi prethodnog teorema, C^*-algebru možemo (konkretno) definirati kao uniformno zatvorenu samoadjungiranu podalgebru od $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

Definicija

Neka je A C^*-algebra.

- *Za ideal P u A kažemo da je* **primitivan** *ako je on jezgra neke ireducibilne reprezentacije od A. Skup svih primitivnih ideala u A označavamo s $\mathrm{Prim}(A)$.*
- *$\mathrm{Prim}(A)$ opskrbljujemo s* **Jacobsonovom topologijom**: *Otvorene skupove u $\mathrm{Prim}(A)$ čine skupovi oblika*

$$\{P \in \mathrm{Prim}(A) \ : \ I \not\subseteq P\},$$

  gdje I prolazi po skupu obostranih zatvorenih ideala u A.

Za $\mathrm{Prim}(A)$ snabdjeven s Jacobsonovom topologijom kažemo da je **primitivni spektar** *od A.*

Primjer

Neka je $A = C_0(X)$, gdje je X LCH prostor. Za točku $x \in X$ stavimo $C_x(X) := \{f \in C_0(X) \ : \ f(x) = 0\}$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(C_0(X)) = \{C_x(X) \ : \ x \in X\}.$$

Nadalje podskup $F \subseteq X$ je zatvoren u X ako i samo ako je pripadni podskup $\{C_x(X) \ : \ x \in F\}$ zatvoren u $\mathrm{Prim}(C_0(X))$.

Primjer

Neka je $A = C_0(X)$, gdje je X LCH prostor. Za točku $x \in X$ stavimo $C_x(X) := \{f \in C_0(X) \ : \ f(x) = 0\}$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(C_0(X)) = \{C_x(X) \ : \ x \in X\}.$$

Nadalje podskup $F \subseteq X$ je zatvoren u X ako i samo ako je pripadni podskup $\{C_x(X) \ : \ x \in F\}$ zatvoren u $\mathrm{Prim}(C_0(X))$.

Napomena

- $\mathrm{Prim}(A)$ je uvijek lokalno kompaktan T_0-prostor. No općenito, $\mathrm{Prim}(A)$ ne mora biti T_1.
- Ako je C^*-algebra A unitalna, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ kompaktan. Obrat općenito ne vrijedi.

Primjer

Neka je $A = C_0(X)$, gdje je X LCH prostor. Za točku $x \in X$ stavimo $C_x(X) := \{f \in C_0(X) \ : \ f(x) = 0\}$. Tada je

$$\mathrm{Prim}(C_0(X)) = \{C_x(X) \ : \ x \in X\}.$$

Nadalje podskup $F \subseteq X$ je zatvoren u X ako i samo ako je pripadni podskup $\{C_x(X) \ : \ x \in F\}$ zatvoren u $\mathrm{Prim}(C_0(X))$.

Napomena

- $\mathrm{Prim}(A)$ je uvijek lokalno kompaktan T_0-prostor. No općenito, $\mathrm{Prim}(A)$ ne mora biti T_1.
- Ako je C^*-algebra A unitalna, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ kompaktan. Obrat općenito ne vrijedi.

$\mathrm{Prim}(A)$ je dobar izbor za bazni prostor jedino ako je on Hausdorffov. Ukoliko to nije tako, tada je uobičajena procedura naći odgovarajući LCH prostor X nad kojim se A fibrira na lijep način.

Ako je A C^*-algebra bez jedinice, tada A možemo na nekoliko načina uložiti u unitalnu C^*-algebru koja sadrži A kao esencijalni ideal. Najveća među njima je tzv. **multiplikatorska algebra** $M(A)$. Ona je nekomutativni analogon Stone-Čechovljeve kompaktifikacije.

Ako je A C^*-algebra bez jedinice, tada A možemo na nekoliko načina uložiti u unitalnu C^*-algebru koja sadrži A kao esencijalni ideal. Najveća među njima je tzv. **multiplikatorska algebra** $M(A)$. Ona je nekomutativni analogon Stone-Čechovljeve kompaktifikacije.

Svaka C^*-algebra A postaje modul nad algebrom $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ ograničenih neprekidnih kompleksnih funkcija na $\mathrm{Prim}(A)$. O tome govori sljedeći bitan teorem:

Teorem (Dauns-Hofmannov teorem)

Neka je A C^*-algebra. Tada postoji jedinstven $*$-izomorfizam Φ_A s $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ na centar $ZM(A)$ od $M(A)$ takav da vrijedi

$$\Phi_A(f)a + P = f(P)(a + P) \qquad (\textit{jednakost u } A/P)$$

za sve $f \in C_b(\mathrm{Prim}(A))$, $a \in A$ i $P \in \mathrm{Prim}(A)$.

Ako je π reprezentacija C^*-algebre A, tada pod dimenzijom od π smatramo dimenziju od pripadnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_\pi$

Ako je π reprezentacija C^*-algebre A, tada pod dimenzijom od π smatramo dimenziju od pripadnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_\pi$

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **homogena** *ako su sve ireducibilne reprezentacije od A n-dimenzionalne (n je prirodan broj). Ukoliko ćemo htjeti naglasiti broj n, onda ćemo reći da je A n-homogena C^*-algebra.*

Ako je π reprezentacija C^*-algebre A, tada pod dimenzijom od π smatramo dimenziju od pripadnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_\pi$

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **homogena** *ako su sve ireducibilne reprezentacije od A n-dimenzionalne (n je prirodan broj). Ukoliko ćemo htjeti naglasiti broj n, onda ćemo reći da je A n-homogena C^*-algebra.*

Propozicija

Ako je A homogena C^*-algebra, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ (lokalno kompaktan) Hausdorffov prostor.

Ako je π reprezentacija C^*-algebre A, tada pod dimenzijom od π smatramo dimenziju od pripadnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}_\pi$

Definicija

Za C^*-algebru A kažemo da je **homogena** *ako su sve ireducibilne reprezentacije od A n-dimenzionalne (n je prirodan broj). Ukoliko ćemo htjeti naglasiti broj n, onda ćemo reći da je A n-homogena C^*-algebra.*

Propozicija

Ako je A homogena C^*-algebra, tada je $\mathrm{Prim}(A)$ (lokalno kompaktan) Hausdorffov prostor.

Primjer

- C^*-algebra A je 1-homogena ako i samo ako je A komutativna. Posebno, svaka 1-homogena C^*-algebra je oblika $A = C_0(X)$ za neki LCH prostor X.
- Ako je X LCH prostor, tada je C^*-algebra $C_0(X, \mathbb{M}_n)$ n-homogena. Za algebre tog oblika kažemo da su **trivijalne** n-homogene C^*-algebre.

Općenitije primjere n-homogenih C^*-algebri dobivamo kao algebre prereza tzv. **algebarskih svežnjeva**, koji su po definiciji fibrirani svežnjevi s vlaknom $\mathbb{M}_n$ i strukturnom grupom $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n)$.

Općenitije primjere n-homogenih C^*-algebri dobivamo kao algebre prereza tzv. **algebarskih svežnjeva**, koji su po definiciji fibrirani svežnjevi s vlaknom $\mathbb{M}_n$ i strukturnom grupom $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n)$.

Dakle, ako je E algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj nad LCH prostorom X, tada skup $\Gamma_0(E)$ svih neprekidnih prereza od E koji trnu u ∞ postaje C^*-algebra, uz standardne operacije i involuciju po vlaknima te sup-normu. Pritom je $\Gamma_0(E)$ n-homogena C^*-algebra i $\mathrm{Prim}(\Gamma_0(E)) \cong X$.

Općenitije primjere n-homogenih C^*-algebri dobivamo kao algebre prereza tzv. **algebarskih svežnjeva**, koji su po definiciji fibrirani svežnjevi s vlaknom $\mathbb{M}_n$ i strukturnom grupom $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n)$.

Dakle, ako je E algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj nad LCH prostorom X, tada skup $\Gamma_0(E)$ svih neprekidnih prereza od E koji trnu u ∞ postaje C^*-algebra, uz standardne operacije i involuciju po vlaknima te sup-normu. Pritom je $\Gamma_0(E)$ n-homogena C^*-algebra i $\mathrm{Prim}(\Gamma_0(E)) \cong X$.

Budući da je svaki $*$-automorfizam od $\mathbb{M}_n$ unutrašnji, tj. oblika $a \mapsto uau^*$ za neku unitarnu matricu $u \in U(n)$ i budući da jedino unitarne matrice iz $\{\lambda I \ : \lambda \in \mathbb{S}^1\} \cong \mathbb{S}^1$ komutiraju sa svim matricama iz $\mathbb{M}_n$, imamo identifikaciju

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n) \cong PU(n) := U(n)/\mathbb{S}^1.$$

Upravo razlike između grupa $U(n)$ i $PU(n)$ generiraju razlike između teorija vektorskih i algebarskih svežnjeva.

Štoviše, na taj način dobivamo sve n-homogene C^*-algebre:

Teorem (Fell, Tomiyama-Takesaki 1961)

Neka je A n-homogena C^*-algebra. Tada algebri A možemo pridružiti algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj E nad $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je A $*$-izomorfna C^*-algebri $\Gamma_0(E)$. Štoviše, dvije takve C^*-algebre $A_i = \Gamma_0(E_i)$ sa primitivnim spektrima X_i su $*$-izomorfne ako i samo ako su pripadni svežnjevi E_i ekvivalentni, u smislu da postoji homeomorfizam $f : X_1 \to X_2$ takav da je $E_1 \cong f^* E_2$ (izomorfizam svežnjeva nad X_1).

Štoviše, na taj način dobivamo sve n-homogene C^*-algebre:

Teorem (Fell, Tomiyama-Takesaki 1961)

Neka je A n-homogena C^*-algebra. Tada algebri A možemo pridružiti algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj E nad $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je A $*$-izomorfna C^*-algebri $\Gamma_0(E)$. Štoviše, dvije takve C^*-algebre $A_i = \Gamma_0(E_i)$ sa primitivnim spektrima X_i su $*$-izomorfne ako i samo ako su pripadni svežnjevi E_i ekvivalentni, u smislu da postoji homeomorfizam $f : X_1 \to X_2$ takav da je $E_1 \cong f^* E_2$ (izomorfizam svežnjeva nad X_1).

Problem klasifikacije

Za dani CH prostor X odrediti broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri čiji je primitivni spektar homeomorfan s X.

Štoviše, na taj način dobivamo sve n-homogene C^*-algebre:

Teorem (Fell, Tomiyama-Takesaki 1961)

Neka je A n-homogena C^*-algebra. Tada algebri A možemo pridružiti algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj E nad $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je A $*$-izomorfna C^*-algebri $\Gamma_0(E)$. Štoviše, dvije takve C^*-algebre $A_i = \Gamma_0(E_i)$ sa primitivnim spektrima X_i su $*$-izomorfne ako i samo ako su pripadni svežnjevi E_i ekvivalentni, u smislu da postoji homeomorfizam $f : X_1 \to X_2$ takav da je $E_1 \cong f^* E_2$ (izomorfizam svežnjeva nad X_1).

Problem klasifikacije

Za dani CH prostor X odrediti broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri čiji je primitivni spektar homeomorfan s X.

Prema prethodnom teoremu, problem klasifikacije n-homogenih C^*-algebri nad X ekvivalentan je problemu klasifikacije algebarskih svežnjeva nad X.

Iz opće teorije fibriranih svežnjeva znamo da svaka topološka grupa G dopušta tzv. univerzalni G-svežanj $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$. On ima svojstvo da je za svaki CW-kompleks X, svaki G-svežanj E nad X izomorfan induciranom G-svežnju $f^*(\mathrm{E}G)$ za neko neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathrm{B}G$. Budući da dva homotopna neprekidna preslikavanja induciraju izomorfne svežnjeve, preslikavanje $[f] \mapsto [f^*(\mathrm{E}G)]$ je bijekcija sa skupa svih klasa homotopije $[X, \mathrm{B}G]$ u skup svih klasa izomorfizama $\mathrm{Bun}(X, G)$ G-svežnjeva nad X .

Iz opće teorije fibriranih svežnjeva znamo da svaka topološka grupa G dopušta tzv. univerzalni G-svežanj $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$. On ima svojstvo da je za svaki CW-kompleks X, svaki G-svežanj E nad X izomorfan induciranom G-svežnju $f^*(\mathrm{E}G)$ za neko neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathrm{B}G$. Budući da dva homotopna neprekidna preslikavanja induciraju izomorfne svežnjeve, preslikavanje $[f] \mapsto [f^*(\mathrm{E}G)]$ je bijekcija sa skupa svih klasa homotopije $[X, \mathrm{B}G]$ u skup svih klasa izomorfizama $\mathrm{Bun}(X, G)$ G-svežnjeva nad X .

Problem

Opisati $\mathrm{B}PU(n)$!

Iz opće teorije fibriranih svežnjeva znamo da svaka topološka grupa G dopušta tzv. univerzalni G-svežanj $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$. On ima svojstvo da je za svaki CW-kompleks X, svaki G-svežanj E nad X izomorfan induciranom G-svežnju $f^*(\mathrm{E}G)$ za neko neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathrm{B}G$. Budući da dva homotopna neprekidna preslikavanja induciraju izomorfne svežnjeve, preslikavanje $[f] \mapsto [f^*(\mathrm{E}G)]$ je bijekcija sa skupa svih klasa homotopije $[X, \mathrm{B}G]$ u skup svih klasa izomorfizama $\mathrm{Bun}(X, G)$ G-svežnjeva nad X .

Problem

Opisati $\mathrm{B}PU(n)$!

- Problem klasifikacije algebarskih svežnjeva je trivijalan ako je $n = 1$ (jer je grupa $PU(1)$ trivijalna) ili ako je $\mathrm{Prim}(A)$ kontraktibilan.
- S druge strane, za $n > 1$ opći problem klasifikacije postaje vrlo kompliciran i vodi u teška pitanja iz neabelove kohomologije. Odgovori se znaju samo neke niskodimenzionalne CW-komplekse. Mi ćemo ukratko opisati klasifikaciju algebarskih $\mathbb{M}_n$-svežnjeva nad k-sferama.

Za klasifikaciju algebarskih svežnjeva nad prostorima oblika $\Sigma(X)$ (Σ je operator suspenzije) možemo koristiti sljedeći teorem:

Teorem

Pretpostavimo da je grupa G putevima povezana. Tada postoji bijekcija između klasa ekvivalencije G-svežnjeva nad $\Sigma(X)$ i klasa homotopije $[X, G]$.

Za klasifikaciju algebarskih svežnjeva nad prostorima oblika $\Sigma(X)$ (Σ je operator suspenzije) možemo koristiti sljedeći teorem:

Teorem

Pretpostavimo da je grupa G putevima povezana. Tada postoji bijekcija između klasa ekvivalencije G-svežnjeva nad $\Sigma(X)$ i klasa homotopije $[X, G]$.

Posebno, budući da je $\Sigma(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{S}^k$, dobivamo:

Korolar

Ako je grupa G putevima povezana, tada su klase ekvivalencije G-svežnjeva nad $\mathbb{S}^k$ sa strukturnom grupom G u bijekciji s elementima $k-1$-homotopske grupe $\pi_{k-1}(G)$.

Grupa $\pi_1(PU(n))$

Kako bismo izračunali $\pi_1(PU(n))$ za $n \geq 2$, stavimo $PSU(n) := SU(n)/Z(SU(n))$.

- Iz drugog teorema o izomorfizmu dobivamo

$$\begin{aligned} PSU(n) &= SU(n)/Z(SU(n)) = SU(n)/(Z(U(n)) \cap SU(n)) \\ &\cong Z(U(n)) \cdot SU(n)/Z(U(n)) = PU(n). \end{aligned}$$

- Primijetimo da je $Z(SU(n)) \cong \mathbb{Z}_n$. Stoga imamo egzaktni niz grupa

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \xrightarrow{j} SU(n) \xrightarrow{p} PSU(n) \longrightarrow 0,$$

  gdje je j inkluzija definirana s $j(k+\mathbb{Z}) = e^{2\pi i k/n} \cdot I_n$, a p kanonska projekcija.
- Kako je $SU(n)$ jednostavno povezana, p je (n-lisno) univerzalno natkrivanje od $PSU(n)$.
- Stoga je $\pi_1(PU(n)) \cong \pi_1(PSU(n)) \cong \mathbb{Z}_n$.

Posebno, kako je $\pi_1(PU(n)) \cong \mathbb{Z}_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, imamo ukupno n neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri s primitivnim spektrom $\mathbb{S}^2$.

Posebno, kako je $\pi_1(PU(n)) \cong \mathbb{Z}_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, imamo ukupno n neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri s primitivnim spektrom $\mathbb{S}^2$.

Više homotopske grupe $\pi_k(PU(n))$

Za $k \geq 2$ imamo

$$\pi_k(PU(n)) \cong \pi_k(SU(n)) \cong \pi_k(U(n)),$$

pa za opis viših homotopskih grupa od $PU(n)$ možemo koristiti Bottovu periodičnost od $U(n)$: Za $k > 1$ i $n \geq \frac{k+1}{2}$ imamo

$$\pi_k(U(n)) \cong \begin{cases} 0 & : \ k \textit{ paran} \\ \mathbb{Z} & : \ k \textit{ neparan.} \end{cases}$$

Npr. za $1 \leq k \leq 7$ i $1 \leq n \leq 10$ imamo sljedeću tablicu:

Broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri s $\mathrm{Prim}(A) \cong \mathbb{S}^k$

	$\mathbb{M}_1$	$\mathbb{M}_2$	$\mathbb{M}_3$	$\mathbb{M}_4$	$\mathbb{M}_5$	$\mathbb{M}_6$	$\mathbb{M}_7$	$\mathbb{M}_8$	$\mathbb{M}_9$	$\mathbb{M}_{10}$
$\mathbb{S}^1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{S}^3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^4$	1	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^5$	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^6$	1	2	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^7$	1	12	6	1	1	1	1	1	1	1

Npr. za $1 \leq k \leq 7$ i $1 \leq n \leq 10$ imamo sljedeću tablicu:

Broj neizomorfnih klasa n-homogenih C^*-algebri s $\mathrm{Prim}(A) \cong \mathbb{S}^k$

	$\mathbb{M}_1$	$\mathbb{M}_2$	$\mathbb{M}_3$	$\mathbb{M}_4$	$\mathbb{M}_5$	$\mathbb{M}_6$	$\mathbb{M}_7$	$\mathbb{M}_8$	$\mathbb{M}_9$	$\mathbb{M}_{10}$
$\mathbb{S}^1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{S}^3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^4$	1	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^5$	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{S}^6$	1	2	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$
$\mathbb{S}^7$	1	12	6	1	1	1	1	1	1	1

S druge strane, imamo sljedeću interesantnu činjenicu:

Teorem (Antonevič-Krupnik, 2000)

Svaki algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj nad $\mathbb{S}^k$ je trivijalan kao vektorski svežanj.

Algebarski $\mathbb{M}_n$-svežnjevi nad $\mathbb{S}^2$

- Označimo redom s $\mathbb{S}^2_+$ i $\mathbb{S}^2_-$ gornju i donju zatvorenu polusferu.
- Imamo $\mathbb{S}^2_+ \cap \mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^1$ i za tranzicijsku funkciju $\overline{\phi}_{2,1}$ uzmimo neprekidnu funkciju $V : \mathbb{S}^1 \to PU(n)$.
- Neka je E svežanj nad $\mathbb{S}^2$ s atlasom $\{\mathbb{S}^2_+, \mathbb{S}^2_-\}$ i tranzicijskom funkcijom V.
- Dva svežnja E i E' definirana s tranzicijskim funkcijama V i V' su ekvivalentna ako i samo ako vrijedi $\mathrm{ind}(V) - \mathrm{ind}(V') = nl$ ($l \in \mathbb{Z}$), gdje je
$$\mathrm{ind}(V) = (2\pi)^{-1}[\arg \det V(t)]_{\mathbb{S}^1}$$
obrtni broj funkcije V s obzirom na kružnicu $\mathbb{S}^1$.
- Za svako $0 \le j \le n-1$ definirajmo tranzicijsku funkciju
$$V_j : \mathbb{S}^1 \to U(n), \quad V_j : z \mapsto \mathrm{diag}(z^j, 1, \dots, 1).$$
- Tada su svežnjevi E_j definirani s V_j predstavnici svih n klasa ekvivalencije.

Algebarska karakterizacija homogenih C^*-algebri

Standardni polinom stupnja k je polinom u k nekomutativnih varijabli $x_1, \ldots, x_k$ definiran s

$$s_k(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)},$$

gdje je S_k simetrična grupa reda k.

Algebarska karakterizacija homogenih C^*-algebri

Standardni polinom stupnja k je polinom u k nekomutativnih varijabli $x_1, \ldots, x_k$ definiran s

$$s_k(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)},$$

gdje je S_k simetrična grupa reda k.

Definicija

Za prsten R kažemo da zadovoljava **standardni identitet** s_k *reda k ako za svaku k-torku $(r_1, \ldots, r_k)$ elemenata iz R vrijedi $s_k(r_1, \ldots, r_k) = 0$.*

Algebarska karakterizacija homogenih C^*-algebri

Standardni polinom stupnja k je polinom u k nekomutativnih varijabli $x_1, \ldots, x_k$ definiran s

$$s_k(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)},$$

gdje je S_k simetrična grupa reda k.

Definicija

Za prsten R kažemo da zadovoljava **standardni identitet** s_k *reda k ako za svaku k-torku $(r_1, \ldots, r_k)$ elemenata iz R vrijedi $s_k(r_1, \ldots, r_k) = 0$.*

Teorem (Amitsur-Levitzki, 1950)

Ako je R unitalni komutativni prsten, tada prsten $M_n(R)$ svih kvadratnih matrica reda n nad R zadovoljava standardni identitet s_{2n}.

Definicija

*Za unitalni prsten R kažemo da je A_n-**prsten** ako vrijedi:*

(i) *A zadovoljava standardni identitet s_{2n}.*

(ii) *Niti jedna ne-nul homomorfna slika od A ne zadovoljava standardni identitet $s_{2(n-1)}$.*

Definicija

*Za unitalni prsten R kažemo da je A_n-**prsten** ako vrijedi:*

(i) *A zadovoljava standardni identitet s_{2n}.*

(ii) *Niti jedna ne-nul homomorfna slika od A ne zadovoljava standardni identitet $s_{2(n-1)}$.*

Korolar

Unitalna C^*-algebra A je A_n-prsten ako i samo ako je A n-homogena.

Definicija

*Za unitalni prsten R kažemo da je A_n-**prsten** ako vrijedi:*

(i) *A zadovoljava standardni identitet s_{2n}.*

(ii) *Niti jedna ne-nul homomorfna slika od A ne zadovoljava standardni identitet $s_{2(n-1)}$.*

Korolar

Unitalna C^*-algebra A je A_n-prsten ako i samo ako je A n-homogena.

Definicija

*Za unitalni prsten R s centrom Z kažemo da je **Azumayin prsten** ako vrijedi:*

(i) *R je konačno generirani projektivni modul nad Z.*

(ii) *Kanonski preslikavanje*

$$\theta : A \otimes_Z A^\circ \to \mathrm{End}_Z(R), \quad \theta(a \otimes b)(x) = axb$$

se proširuje do izomorfizma.

Ako je R Azumayin prsten sa spektrom $\mathrm{Spec}(R)$, tada je funkcija ranga $\mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N}_0$ konačna. Ako je ta funkcija konstantna tada kažemo da je R **konstantnog ranga**. U tom slučaju je rang od R nužno potpuni kvadrat.

Ako je R Azumayin prsten sa spektrom $\mathrm{Spec}(R)$, tada je funkcija ranga $\mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N}_0$ konačna. Ako je ta funkcija konstantna tada kažemo da je R **konstantnog ranga**. U tom slučaju je rang od R nužno potpuni kvadrat.

Teorem (Artin, 1969)

Prsten R je A_n prsten ako i samo ako je R Azumayin prsten konstantnog ranga n^2.

Ako je R Azumayin prsten sa spektrom $\mathrm{Spec}(R)$, tada je funkcija ranga $\mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N}_0$ konačna. Ako je ta funkcija konstantna tada kažemo da je R **konstantnog ranga**. U tom slučaju je rang od R nužno potpuni kvadrat.

Teorem (Artin, 1969)

Prsten R je A_n prsten ako i samo ako je R Azumayin prsten konstantnog ranga n^2.

Korolar

Za unitalnu C^*-algebru A su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) *A je n-homogena.*

(ii) *A je A_n-prsten.*

(iii) *A je Azumayina algebra konstantnog ranga n^2.*

Teorem (I.G., 2011)

Za C^*-algebru A su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) *A je Azumayina algebra.*

(ii) *A je konačno generirani modul nad centrom svoje multiplikatorske algebre.*

(iii) *A je konačna direktna suma unitalnih homogenih C^*-algebri.*

Elementarni operatori i (sub)homogene C^*-algebre

Kako bismo razumjeli strukturu operatora i prostora nad kojima oni djeluju često je korisno promatrati mogućnost aproksimacije tih operatora s operatorima jednostavnijeg oblika, kao što su to npr. operatori konačnog ranga.

Elementarni operatori i (sub)homogene C^*-algebre

Kako bismo razumjeli strukturu operatora i prostora nad kojima oni djeluju često je korisno promatrati mogućnost aproksimacije tih operatora s operatorima jednostavnijeg oblika, kao što su to npr. operatori konačnog ranga.

Ako je A C^*-algebra, tada umjesto operatora ranga jedan za osnovne blokove možemo uzeti operatore obostranog množenja $M_{a,b} : x \to axb$, gdje su $a, b \in M(A)$.

Elementarni operatori i (sub)homogene C^*-algebre

Kako bismo razumjeli strukturu operatora i prostora nad kojima oni djeluju često je korisno promatrati mogućnost aproksimacije tih operatora s operatorima jednostavnijeg oblika, kao što su to npr. operatori konačnog ranga.

Ako je A C^*-algebra, tada umjesto operatora ranga jedan za osnovne blokove možemo uzeti operatore obostranog množenja $M_{a,b} : x \to axb$, gdje su $a, b \in M(A)$.

U tom kontekstu ulogu operatora konačnog ranga preuzimaju tzv. **elementarni operatori**, koji su konačne sume operatora obostranog množenja.

Drugim riječima, preslikavanje $\phi : A \to A$ je elementarni operator na A ako postoji prirodan broj n i elementi $a_i, b_i \in M(A)$ $(i = 1, \ldots, n)$ takvi da je

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

za sve $x \in A$. U tom slučaju za najmanji takav broj n kažemo da je **duljina** od ϕ i označavamo s $\ell(\phi)$. Skup svih elementarnih operatora na A označavamo s $\mathrm{E}(A)$.

Drugim riječima, preslikavanje $\phi : A \to A$ je elementarni operator na A ako postoji prirodan broj n i elementi $a_i, b_i \in M(A)$ $(i = 1, \ldots, n)$ takvi da je

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

za sve $x \in A$. U tom slučaju za najmanji takav broj n kažemo da je **duljina** od ϕ i označavamo s $\ell(\phi)$. Skup svih elementarnih operatora na A označavamo s $\mathrm{E}(A)$.

Osnovna svojstva elementarnih operatora

Neka je A C^*-algebra. Ako je $\phi \in E(A)$, tada vrijedi:

- ϕ je ograničen. Naime, ako je $\phi(x) = \sum_i a_i x b_i$, tada je očito

$$\|\phi\| \leq \sum_i \|a_i\| \|b_i\|.$$

- ϕ čuva obostrane zatvorene ideale I u A, tj. $\phi(I) \subseteq I$ za sve I.

Dakle, ako s $\mathrm{IB}(A)$ označimo skup svih ograničenih operatora na A koji čuvaju obostrane zatvorene ideale u A, tada imamo $\mathrm{E}(A) \subseteq \mathrm{IB}(A)$.

Dakle, ako s $\mathrm{IB}(A)$ označimo skup svih ograničenih operatora na A koji čuvaju obostrane zatvorene ideale u A, tada imamo $\mathrm{E}(A) \subseteq \mathrm{IB}(A)$.

Pitanje

Koje operatore iz $\mathrm{IB}(A)$ možemo uniformno (tj. u operatorskoj normi) aproksimirati s elementarnim operatorima? Posebno:

(a) Kada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno gust u $\mathrm{IB}(A)$?

(b) Kada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren?

Dakle, ako s $\mathrm{IB}(A)$ označimo skup svih ograničenih operatora na A koji čuvaju obostrane zatvorene ideale u A, tada imamo $\mathrm{E}(A) \subseteq \mathrm{IB}(A)$.

Pitanje

Koje operatore iz $\mathrm{IB}(A)$ možemo uniformno (tj. u operatorskoj normi) aproksimirati s elementarnim operatorima? Posebno:

(a) Kada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno gust u $\mathrm{IB}(A)$?

(b) Kada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren?

Za separabilne C^*-algebre pitanje (a) je u potunosti riješeno:

Teorem (Magajna, 2009)

Ako je A separabilna C^*-algebra, tada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno gust u $\mathrm{IB}(A)$ ako i samo ako je A konačna direktna suma homogenih C^*-algebri konačnog tipa.

Dakle, ako s $\mathrm{IB}(A)$ označimo skup svih ograničenih operatora na A koji čuvaju obostrane zatvorene ideale u A, tada imamo $\mathrm{E}(A) \subseteq \mathrm{IB}(A)$.

Pitanje

Koje operatore iz $\mathrm{IB}(A)$ možemo uniformno (tj. u operatorskoj normi) aproksimirati s elementarnim operatorima? Posebno:

(a) Kada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno gust u $\mathrm{IB}(A)$?

(b) Kada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren?

Za separabilne C^*-algebre pitanje (a) je u potunosti riješeno:

Teorem (Magajna, 2009)

Ako je A separabilna C^*-algebra, tada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno gust u $\mathrm{IB}(A)$ ako i samo ako je A konačna direktna suma homogenih C^*-algebri konačnog tipa.

Napomena

U neseparabilnom slučaju problem je ostao širom otvoren.

- Za homogenu C^*-algebru $A \cong \Gamma_0(E)$ kažemo da je **konačnog tipa**, ako je njen pripadni algebarski svežanj E konačnog tipa.
- To znači da postoji konačan otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^m$ od $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je svaki restrikcijski svežanj $E|_{U_i}$ trivijalan kao algebarski svežanj.
- U tom slučaju za najmanji takav broj m kažemo da je **algebarski tip** od E (odn. A) i označavamo ga s $\mathrm{tip}_\mathrm{a}(E)$ (odn. $\mathrm{tip}_\mathrm{a}(A)$).

- Za homogenu C^*-algebru $A \cong \Gamma_0(E)$ kažemo da je **konačnog tipa**, ako je njen pripadni algebarski svežanj E konačnog tipa.
- To znači da postoji konačan otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^m$ od $X = \mathrm{Prim}(A)$ takav da je svaki restrikcijski svežanj $E|_{U_i}$ trivijalan kao algebarski svežanj.
- U tom slučaju za najmanji takav broj m kažemo da je **algebarski tip** od E (odn. A) i označavamo ga s $\mathrm{tip_a}(E)$ (odn. $\mathrm{tip_a}(A)$).

Napomena

- Na svaki algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj E možemo gledati kao na kompleksni vektorski svežanj ranga n^2 (ukoliko zaboravimo dodatnu strukturu).
- Tada na sličan način možemo definirati i **vektorski tip** od E (odn. A) s oznakama $\mathrm{tip_v}(E)$ (odn. $\mathrm{tip_v}(A)$) kao najmanji broj k takav da postoji otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^k$ od X takav da je svaki restrikcijski svežanj $E|_{U_i}$ trivijalan kao vektorski svežanj.
- Očito je $\mathrm{tip_v}(E) \leq \mathrm{tip_a}(E)$.

Teorem (Phillips, 2007)

Neka je E algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj nad potpuno regularnim prostorom X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) $\mathrm{tip}_{\mathrm{a}}(E) < \infty$.

(2) $\mathrm{tip}_{\mathrm{v}}(E) < \infty$.

(3) *Postoji algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj F nad βX takav da je $F|_X \cong E$.*

(4) *Posotji kompaktifikacija Y od X i algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj F nad Y takav da je $F|_Y \cong E$*

(5) *Postoji prirodan broj k i algebarski $\mathbb{M}_k$-svežanj F nad X takav da je $E \otimes F$ trivijalan.*

Teorem (Phillips, 2007)

Neka je E algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj nad potpuno regularnim prostorom X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) $\mathrm{tip_a}(E) < \infty$.

(2) $\mathrm{tip_v}(E) < \infty$.

(3) *Postoji algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj F nad βX takav da je $F|_X \cong E$.*

(4) *Posotji kompaktifikacija Y od X i algebarski $\mathbb{M}_n$-svežanj F nad Y takav da je $F|_Y \cong E$*

(5) *Postoji prirodan broj k i algebarski $\mathbb{M}_k$-svežanj F nad X takav da je $E \otimes F$ trivijalan.*

Bilo bi interesantno vidjeti vrijedi li gornji rezultat i u slučaju kada je vlakno svežnja proizvoljna konačno-dimenzionalna C^*-algebra. Npr. ako je X topološka disjunktna unija kompleksnih projektivnih prostora $\mathbb{CP}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), postoji li primjer (algebarskog) svežnja nad X s vlaknom $\mathbb{C}^k$ ($k > 2$) i strukturnom grupom $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^k) \cong \mathbb{Z}_{k!}$ koji je trivijalan kao vektorski svežanj, ali nije konačnog tipa kao algebarski svežanj?

S druge strane o Problemu (b) znamo sljedeće

Teorem (I.G., 2011)

Neka je A C^*-algebra takva da je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren. Tada je A nužno **subhomogena**, *tj. postoji prirodan broj N takav da su sve ireducibilne reprezentacije od A dimenzije manje ili jednake N. Nadalje, ako je A separabilna, tada:*

(*) *Postoji konačan rastuć niz*

$$0 = I_0 \trianglelefteq I_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq I_k = A$$

obostranih zatvorenih ideala u A takav da je svaki subkvocijent I_{i+1}/I_i homogena C^*-algebra konačnog tipa.

S druge strane o Problemu (b) znamo sljedeće

Teorem (I.G., 2011)

Neka je A C^*-algebra takva da je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren. Tada je A nužno **subhomogena***, tj. postoji prirodan broj N takav da su sve ireducibilne reprezentacije od A dimenzije manje ili jednake N. Nadalje, ako je A separabilna, tada:*

(*) *Postoji konačan rastuć niz*

$$0 = I_0 \trianglelefteq I_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq I_k = A$$

obostranih zatvorenih ideala u A takav da je svaki subkvocijent I_{i+1}/I_i homogena C^*-algebra konačnog tipa.

Definicija

Za subhomogenu C^*-algebru A koja zadovoljava svojstvo (*) iz prethodnog teorema kažemo da je **konačnog tipa***.*

Imamo i sljedeći parcijalni obrat:

Teorem (I.G., 2011)

Neka je A unitalna subhomogena C^*-algebra konačnog tipa. Ako je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov, tada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren.

Imamo i sljedeći parcijalni obrat:

Teorem (I.G., 2011)

Neka je A unitalna subhomogena C^*-algebra konačnog tipa. Ako je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov, tada je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren.

Primjer

Neka je

$$A := \{f : [0,1] \to \mathbb{M}_n \ : f \text{ neprekidna i } \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ t.d. } f(0) = \lambda \cdot I_n\}.$$

Tada imamo:

- A je unitalna subhomogena C^*-algebra koja nije homogena.
- $\mathrm{Prim}(A) \cong [0,1]$. Posebno, $\mathrm{Prim}(A)$ je Hausdorffov.
- A je konačnog tipa jer imamo sljedeći egzaktni niz C^*-algebri:

$$0 \longrightarrow C_0((0,1], \mathbb{M}_n) \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Dakle, $\mathrm{E}(A)$ je uniformno zatvoren.

S druge strane, bez pretpostavke da je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov obrat prethodnog teorema ne vrijedi:

Teorem (I.G., 2011)

Postoje unitalne separabline subhomogene C^*-algebre A konačnog tipa takve da $\mathrm{E}(A)$ nije uniformno zatvoren.

S druge strane, bez pretpostavke da je $\mathrm{Prim}(A)$ Hausdorffov obrat prethodnog teorema ne vrijedi:

Teorem (I.G., 2011)

Postoje unitalne separabline subhomogene C^*-algebre A konačnog tipa takve da $\mathrm{E}(A)$ nije uniformno zatvoren.

Napomena

Primjere takvih C^*-algebri A nije bilo jednostavno naći, jer njihovi primitivni spektri trebaju biti T_1-prostori koji isotvremeno zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- Postoji niz zatvorenih podskupova (F_n) u $\mathrm{Prim}(A)$ takav da da je $|F_n| \geq n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
- Za svaka dva $P, Q \in F_n$ postoji mreža u $\mathrm{Prim}(A)$ koja istovremeno konvergira prema P i Q.
- Ako je $P \in F_n$ i $Q \in \mathrm{Prim}(A) \setminus F_n$ tada postoji neprekidna funkcija $f : \mathrm{Prim}(A) \to \mathbb{C}$ takva da je $f(P) \neq f(Q)$.

S druge strane, sve C^*-algebre A za koje znamo da je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren zadovoljavaju sljedeće svojstvo:

$$\ell_A := \sup\{\ell(\phi) \ : \ \phi \in \mathrm{E}(A)\} < \infty.$$

S druge strane, sve C^*-algebre A za koje znamo da je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren zadovoljavaju sljedeće svojstvo:

$$\ell_A := \sup\{\ell(\phi) \ : \ \phi \in \mathrm{E}(A)\} < \infty.$$

Problem

Jesu li za unitalnu C^*-algebru A sljedeća dva uvjeta međusobno ekvivalentna:

- $\mathrm{E}(A)$ je uniformno zatvoren.
- $\ell_A < \infty$?

S druge strane, sve C^*-algebre A za koje znamo da je $\mathrm{E}(A)$ uniformno zatvoren zadovoljavaju sljedeće svojstvo:

$$\ell_A := \sup\{\ell(\phi) \ : \ \phi \in \mathrm{E}(A)\} < \infty.$$

Problem

Jesu li za unitalnu C^*-algebru A sljedeća dva uvjeta međusobno ekvivalentna:

- $\mathrm{E}(A)$ je uniformno zatvoren.
- $\ell_A < \infty$?

Napomena

Ako je C^*-algebra n-homogena, tada se može pokazati da ℓ_A ovisi o brojevma n i $\mathrm{tip_v}(A)$. Naime, jednostavnim kombinatornim argumentom možemo uspostaviti sljedeću donju ogradu za ℓ_A:

$$\ell_A \geq \left\lfloor \frac{n^2}{e} \cdot \sqrt[n^2]{\mathrm{tip_v}(A)} \right\rfloor.$$