MATEMATIČKA ANALIZA II

primjeri i zadaci

Ilja Gogić, Ante Mimica

26. siječnja 2010.

Sadržaj

1

Derivacija

1.1 Tehnika deriviranja

Definicija. Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Kažemo da je f **derivabilna** u točki c ako postoji

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

i taj limes ocnačavamo s $f'(c)$.

Još se koristi i Leibnizova oznaka $\frac{dy}{dx}$.

Zadatak 1.1 Koristeći definiciju, odredite derivaciju funkcija:

(a) $f(x) = \alpha = \text{const.}$

(b) $f(x) = x$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$

(d) $f(x) = \cos x$

Rješenje.

(a) $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{\alpha-\alpha}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{0}{x-c} = 0$

(b) $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{x-c}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} 1 = 1$

(c) $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{c}}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{-1}{cx} = -\dfrac{1}{c^2},\ c \neq 0$

(d) $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{\cos x - \cos c}{x-c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{-2\sin\frac{x+c}{2}\sin\frac{x-c}{2}}{x-c} = -\sin c$

△

Zadatak 1.2 Nađite primjer funkcije koja nije derivabilna.

Rješenje. Neka je $f(x) = |x|$. Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x},$$

ne postoji, jer se limesi slijeva i zdesna u 0 razlikuju:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1, \\ \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1. \end{aligned}$$

△

Vrijede sljedeća pravila deriviranja:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)' &= \alpha f' + \beta g' \\ (f\cdot g)' &= f'\cdot g + f\cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \end{aligned}$$

U Leibnizovoj notaciji gornja pravila glase:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\alpha u + \beta v) &= \alpha\frac{d\,u}{d\,x} + \beta\frac{d\,v}{d\,x} \\ \frac{d}{dx}(u\cdot v) &= \frac{d\,u}{d\,x}\,v + u\,\frac{d\,v}{d\,x} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\frac{d\,u}{d\,x}\,v - u\,\frac{d\,v}{d\,x}}{v^2} \end{aligned}$$

Zadatak 1.3 Derivirajte sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

(b) $f(x) = \dfrac{ax^6+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a, b \in \mathbb{R}, a^2+b^2 \neq 0$

(c) $f(x) = 3\sqrt{x}$

(d) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

(e) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$

(f) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(g) $f(x) = e^x \arcsin x$

(h) $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$

(i) $f(x) = 2^x \cdot x$

(j) $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{Arsh} x$

Rješenje.

(a) $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 2$

(b) $f'(x) = \dfrac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(c) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

(d) $f'(x) = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$

(e) $f'(x) = \dfrac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$

(f) $f'(x) = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

(g) $f'(x) = e^x\ \arcsin x + \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$

(h) $f'(x) = 0$

(i) $f'(x) = 2^x\, x \ln 2 + 2^x$

(j) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{Arsh} x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\triangle$

Derivacija kompozicije funkcija

Teorem. Neka su $I, J \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali i neka su $f\colon I \to \mathbb{R}$ i $g\colon J \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(I) \subseteq J$. Ako je f derivabilna u $c \in I$ i g derivabilna u $d = f(c) \in J$, onda je $g \circ f$ derivabilna u c i vrijedi

$$(g \circ f)'(c) = g'(d) \cdot f'(c).$$

$\blacksquare$

U Lebnizovoj notaciji:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,u}\,\frac{d\,u}{d\,x}.$$

Primjer. Derivirajmo funkciju $f(x) = \left(\dfrac{2x+3}{5}\right)^8$.

Prikažimo f kao $f = g \circ h$, gdje je

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2x+3}{5} \implies h'(x) = \frac{2}{5} \\ g(x) &= x^8 \implies g'(x) = 8x^7. \end{aligned}$$

Tada je

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 8h(x)^7 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}\left(\frac{2x+3}{5}\right)^7.$$

$\triangle$

Primjer. Derivirajmo funkciju $f(x) = e^{\sin^2 x}$.

Prikažimo f kao $f = l \circ g \circ h$, gdje je

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin x \implies h'(x) = \cos x \\ g(x) &= x^2 \implies g'(x) = 2x, \\ l(x) &= e^x \implies l'(x) = e^x, \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} f'(x) &= (l \circ (g \circ h))'(x) = l'((g \circ h)(x)) \cdot (h \circ l)'(x) \\ &= l'((g \circ h)(x)) \cdot h'(l(x)) \cdot l'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \sin 2x. \end{aligned}$$

$\triangle$

Primjer. Derivirajmo funkciju $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln|x|$.

Vrijedi

- $x>0 \implies f(x)=\ln x \implies f'(x)=\frac{1}{x}$,
- $x<0 \implies f(x)=\ln(-x) \implies f'(x)=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$

pa je $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Zadatak 1.4 Koristeći pravilo za derivaciju kompozicije funkcija (*chain rule*), derivirajte sljedeće funkcije:

(a) $f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$

(b) $f(x)=\sqrt{1+\arcsin x}$

(c) $f(x)=\sqrt{xe^x+x^2}$

(d) $f(x)=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+\ln^5 x$

(e) $f(x)=\dfrac{1}{5^{x^2}}$

(f) $f(x)=\log\sin x$

(g) $f(x)=\left(\frac{1+2x^{20}}{1-2x^{20}}\right)^{100}$

(h) $f(x)=\ln\ln\left(3-2x^2\right)$

(i) $f(x)=\arccos e^{x^2}$

(j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$

(k) $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$

(l) $f(x)=\ln\dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$

Rješenje.

(a) $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$

(b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1+\arcsin x)}}$

(c) $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^x + 1}{2\sqrt{(x+1)e^x}}$

(d) $f'(x) = \dfrac{2e^x - 2^x \ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \dfrac{5\ln^4 x}{x}$

(e) $f'(x) = -2x5^{-x^2} \ln 5$

(f) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln 10}$

(g) $f'(x) = 100\left(\dfrac{1+2x^{20}}{1-2x^{20}}\right)^{99} \cdot \dfrac{80x^{19}}{(1-2x^{20})^2}$

(h) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(3-2x^2)\ln(3-2x^2)}$

(i) $f'(x) = \dfrac{-2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$

(j) $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$

(k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

(l) $f'(x) = \dfrac{2x+11}{(x-2)(x+1)}$

$\triangle$

Logaritamsko deriviranje

Funkciju oblika $y(x) = u(x)^{v(x)}$, gdje je $u(x) > 0$ možemo derivirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)^{v(x)} && /\ln \\
\ln y(x) &= v(x)\ln u(x) && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \\
y'(x) &= y(x)\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)
\end{aligned}$$

Primjer. Derivirajmo funkciju $f(x) = x^x,\ x > 0$.
Sjetimo se da je po definiciji $f(x) = e^{x\ln x}$. Tada je $f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

Koristeći logaritamsko deriviranje, funkciju možemo derivirati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^x && / \ln \\
\ln y(x) &= x \ln x && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= \ln x + 1 \\
\Longrightarrow\ y'(x) &= y(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1) && .
\end{aligned}$$

$\triangle$

Zadatak 1.5 Derivirajte sljedeće funkcije pomoću logaritamskog deriviranja:

(a) $y(x) = (\sin x)^{\cos x}$, za $\sin x > 0$

(b) $y(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x$

(c) $y(x) = x^{\frac{1}{x}}$, za $x > 0$

(d) $y(x) = x^{x^x}$, za $x > 0$

(e) $y(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

(f) $y(x) = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned}
y(x) &= (\sin x)^{\cos x} && / \ln \\
\ln y(x) &= \cos x \ln \sin x && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= -\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \\
\Longrightarrow\ y'(x) &= -(\sin x)^{\cos x + 1} \ln \sin x + \cos^2 x (\sin x)^{\cos x - 1} && .
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
|y(x)| &= |x^3 e^{x^2} \sin 2x| && / \ln \\
\ln |y(x)| &= \ln |x^3| + \ln |e^{x^2}| + \ln |\sin 2x| && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 + 2x + \frac{1}{\sin 2x} \cos 2x \cdot 2 \\
\Longrightarrow\ y'(x) &= x^3 e^{x^2} \sin 2x \left(\frac{3}{x} + 2x + 2 \operatorname{tg} 2x\right) && .
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^{\frac{1}{x}} && /\ln \\
\ln y(x) &= \frac{\ln x}{x} && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{1-\ln x}{x^2} \\
\implies y'(x) &= x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x) && .
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^{x^x} && /\ln \\
\ln y(x) &= x^x \ln x && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1} \\
\implies y'(x) &= x^{x^x}(x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1}) && .
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x && /\ln \\
\ln y(x) &= x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\
\implies y'(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) && .
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
|y(x)| &= \left|\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\right| && /\ln \\
\ln y(x) &= 3\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{2}{5}\ln|x-3| && /' \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} \\
\implies y'(x) &= \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right) && .
\end{aligned}$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

1.6 Derivirajte sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{e^{10x}}$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}\right)^5$

(d) $f(x) = \sin((\sin x)^{\sin x})$, za $\sin x > 0$

(e) $f(x) = \underbrace{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\cdots x\sqrt{x}}}}}_{n \text{ korijena}}$

(f) $f(x) = \ln \sqrt[4]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

(g) $f(x) = \left(x^{x^x}\right)^{x^x}$, za $x > 0$

(h) $f(x) = (\sin x - 1)^{\cos x + 1} + (\sin x + 1)^{1-\cos x}$

(i) $f(x) = \sqrt{\ln\cos\arcsin x}$

1.7 Derivirajte sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}$

(b) $f(x) = \ln\left(2 + e^{-x} + \sqrt{e^x + e^{-x} + 4}\right)$

(c) $f(x) = (\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}$

(d) $f(x) = x\sin^2 3x \cos^3 \frac{x}{2}$

(e) $f(x) = \ln\frac{x+\cos\sqrt{\pi x}}{x-\cos\sqrt{\pi x}} + \frac{1}{3}\arcsin\ln 2x$

1.8 Za koji $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x) = \frac{1+\ln x}{x - x\ln x}$ zadovoljava jednakost

$$2x^2 f'(x) - x^2 f(x)^2 = a?$$

1.9 Pokažite da funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x+\ln x}$ zadovoljava jednakost

$$xf'(x) = f(x)(f(x)\ln x - 1).$$

1.2 Derivacija inverznih i implicitno zadanih funkcija

Teorem. Neka su $I, J \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali i neka je $f\colon I \to J$ bijekcija, takva da je f neprekidna na I i f^{-1} neprekidna na J. Ako je f derivabilna u $c \in I$ i ako je $f'(c) \neq 0$, onda je f^{-1} derivabilna u $d = f(c) \in J$ i

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}.$$

■

U Lebnizovoj notaciji:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\frac{d\,x}{d\,y}}.$$

Zadatak 1.10 Koristeći teorem o deriviranju inverzne funckije, nađite derivaciju funkcija:

(a) $f(x) = \arcsin x$

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

(c) $f(x) = \ln x$

(d) $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

Rješenje.

(a) Neka je
$$g\colon \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \langle -1, 1\rangle,\ g(x) = \sin x.$$
Tada je
$$g^{-1}\colon \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle,\ g^{-1}(y) = \arcsin y$$
pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(b) Neka je
$$g\colon \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R},\ g(x) = \operatorname{tg} x.$$
Tada je
$$g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle,\ g^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$$
pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} y)}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

(c) Neka je

$$g\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle,\ g(x) = e^x.$$

Tada je

$$g^{-1}\colon 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R},\ g^{-1}(y) = \ln y$$

pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

(d) Neka je

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \operatorname{sh} x.$$

Tada je

$$g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g^{-1}(y) = \operatorname{Arsh} y$$

pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Arsh} y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{Arsh} y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

△

Zadatak 1.11 Zadana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$. Pokažite da je f injekcija i izračunajte $(f^{-1})'(2 + \ln 2)$.

Rješenje. f je zbroj dvije strogo rastuće funkcije pa je strogo rastuća iz čega slijedi da je injekcija. Ako je $x = \ln 2$, onda je $y = f(x) = \ln 2 + 2$ pa je po teoremu o derivaciji inverzne funkcije

$$(f^{-1})'(2 + \ln 2) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{\ln 2}} = \frac{1}{3}.$$

△

Zadatak 1.12 Funkcija $y = y(x)$ je zadana implicitno s

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Izračunajte:

(a) $y'(0)$,

(b) $y'(3)$, ako je $y(3) < 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 && \Big/ \frac{d}{dx} \\ 2x + 2yy' &= 0 \\ y' &= \frac{-x}{y} \end{aligned}$$

(a) $x = 0 \implies 0^2 + y(0)^2 = 25 \implies y(0) = \pm 5$ pa je $y'(0) = \frac{-0}{y(0)} = 0$.

(b) $x = 3 \implies 3^2 + y(0)^2 = 25 \implies y(3) = \pm 4 \implies y(3) = -4$, zbog uvjeta $y(3) < 0$ pa je $y'(0) = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$.

$\triangle$

Zadatak 1.13 Funkcija $y = y(x)$ je zadana implicitno s

$$2y = x^2 + \sin y.$$

Izračunajte y'.

Rješenje.

$$\begin{aligned} 2y &= x^2 + \sin y && \Big/ \frac{d}{dx} \\ 2y' &= 2x + \cos y y' \\ y' &= \frac{2x}{2 - \cos y} \end{aligned}$$

$\triangle$

Zadatak 1.14 Funkcija $y = y(x)$ je zadana implicitno s

$$x^3 + 4x^2y + y^3 - 1 = 0.$$

Izračunajte $y'(0)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2y + y^3 - 1 &= 0 && \Big/ \frac{d}{dx} \\ 3x^2 + 4(2xy + x^2y) + 3y^2y' &= 0 \\ y' &= \frac{8xy - 3x^2}{3y^2 - 4x^2} \end{aligned}$$

Iz jednadžbe nađemo $y(0) = 1$ pa je $y'(0) = 0$.

$\triangle$

Zadatak 1.15 Pokažite da funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana s

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$$

zadovoljava jednakost

$$y'(x - y) = x + y.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} \frac{y}{x} &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) && \Big/ \frac{d}{dx} \\
\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{y'x - y}{x^2} &= \frac{1}{2} \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} \\
y'(x - y) &= x + y
\end{aligned}$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

1.16 Ako je $x \ln y - y \ln x = 1$, izračunajte $y'(1)$.

1.17 Ako je $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$, izračunajte y'.

1.18 Izračunajte $y'(0)$ ako je funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana jednadžbom

(a)

$$\ln y + \frac{x}{y} = 1.$$

(b)

$$x^3 y^5 + \sin x \cdot y^4 + \cos x \cdot y^3 + \operatorname{ch} x \cdot y^2 + y - 3e^x = 0.$$

1.19 Izračunajte derivaciju funkcije $y(x)$ implicitno zadane

(a) jednadžbom $ye^y = e^{x+1}$, u točki $x = 0$, $y = 1$,

(b) jednadžbom $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$, u točki $x = 1$, $y = 1$.

1.20 Funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava

$$e^{f(x)} + x^2 f(x) - e^{-x} = 0 \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Izračunajte f' i f'' (tj. izrazite ih pomoću f). Specijalno, koliko je $f'(0)$ i $f''(0)$?

1.21 Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x) := x + x^3 + \mathrm{e}^{x^3}.$$

Pokažite da je f injekcija i da je $10 + \mathrm{e}^8 \in \mathcal{R}_f$, te odredite $(f^{-1})'(e^8 + 10)$.

1.3 Derivacije višeg reda

n-tu derivaciju funkcije f označavamo s $f^{(n)}$ ili u Leibnizovoj notaciji s $\frac{d^n y}{d x^n}$.

Zadatak 1.22 Nađite $f''(x)$ ako je

(a) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$

(b) $f(x) = e^x \cos x$

Rješenje.

(a) $f''(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$.

(b) $f''(x) = -2e^x \sin x$

△

Zadatak 1.23 Neka je

$$f(x) = x(2x - 1)^{1002}(x + 3)^{1003}.$$

Izračunajte $f^{(2006)}(x)$ i $f^{(2007)}(x)$.

Rješenje. Općenito, za polinom stupnja n

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
g'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots 2 a_2 x + a_1 \\
g''(x) &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \ldots 2 \cdot 1 a_2 x \\
& \ldots \\
g^{(n-1)}(x) &= n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n \\
g^{(k)}(x) &= 0, \quad \text{za } k \geq n+1.
\end{aligned}$$

U ovom slučaju f je polinom 2006. stupnja i koeficijent uz x^{2006} je $1 \cdot 2^{1002} \cdot 1^{1003} = 2^{1002}$ pa je

$$\begin{aligned}
f^{(2006)}(x) &= 2006! \cdot 2^{1002} \\
f^{(2007)}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

△

Zadatak 1.24 Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija takva da je

$$g(1) = 1,\ g'(1) = 2,\ g''(1) = -1.$$

Ako je $f(x) = x^3 g(x)$, izračunajte $f''(1)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 g(x) + x^3 g'(x) \\ f''(x) &= 6xg(x) + 6x^2 g'(x) + x^3 g''(x) \\ f''(1) &= 6 \cdot 1 \cdot g(1) + 6 \cdot 1^2 \cdot g'(1) + 1^3 g''(1) = 17 \end{aligned}$$

△

Zadatak 1.25 Neka je $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, za $a, b \in \mathbb{R}$. Odredite $f^{(n)}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Dokazat ćemo matematičkom indukcijom da je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

baza $f'(x) = \frac{-1}{(ax+b)^2} \cdot a = \frac{(-1)^1 1! a^1}{(ax+b)^{1+1}}$.
korak Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Tada je po pretpostavci indukcije

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left(\frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \right)' = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)! a^{n+1}}{(ax+b)^{n+2}}.$$

△

Matematičkom indukcijom se mogu pokazati i sljedeće formule:

$$\begin{aligned} (a^x)^{(n)} &= a^x \ln^n a,\ \text{ za } a > 0 \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos(x + \frac{n\pi}{2}) \\ (\operatorname{sh} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{sh} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{ch} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (\operatorname{ch} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{ch} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{sh} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (x^m)^{(n)} &= m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n},\ \text{ za } m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zadatak 1.26 Odredite $f^{(n)}(x)$ ako je

(a) $f(x) = \ln(3x+1)$

(b) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2-x-2}$

Rješenje.

(a) $f'(x) = \frac{3}{3x+1}$, $f''(x) = \frac{-3^2}{(3x+1)^2}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!3^n}{(3x+1)^n}$

(b) $f(x) = \frac{2}{1-x} - 1$ pa je
$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2\cdot 2}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{3\cdot 2\cdot 2}{(1-x)^4}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$.

(c) Rastavimo $\frac{1}{x^2-1}$ na **parcijalne razlomke** :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad / \cdot (x^2-1) \\ 1 &= A(x+1) + B(x-1) \\ 0\cdot x + 1 &= (A+B)x + (A-B), \end{aligned}$$

odakle dobijemo

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-B &= 1 \end{aligned}$$

pa je $A = \frac{1}{2}$ i $B = \frac{-1}{2}$. Sada je

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

(d) Dijelenjem polinoma x^3+x polinomom x^2-x-2 dobijemo kvocijent $x+2$ i ostatak $4x+2$ pa je

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x^2-x-2)+4x+2}{x^2-x-2} = x+1+\frac{4x+2}{x^2-x-2}.$$

Rastavom na parcijalne razlomke dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{4x+2}{x^2-x-2} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \quad / \cdot (x^2-x-2)\\ 4x+2 &= A(x+1)+B(x-1)\\ 0\cdot x+1 &= (A+B)x+(B-2A),\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}A+B &= 4\\ B-2A &= 2\end{aligned}$$

pa je $A=\frac{2}{3}$ i $B=\frac{10}{3}$.

Dakle, za $n\geq 2$ je

$$f^{(n)}(x)=\left(x+1+\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{10}{3}\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\frac{2(-1)^n n!}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{5}{(x-2)^{n+1}}\right).$$

$\triangle$

Zadatak 1.27 Odredite $f^{(2009)}$ ako je

(a) $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$

(b) $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$

Rješenje.

(a) $f(x)=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1-\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$
$f^{(2009)}(x)=\frac{1}{4}\cos\left(4x+\frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 4^{2009}=-4^{2008}\sin 4x.$

(b) $f(x)=(\sin x\sin 2x)\sin 3x=\frac{1}{2}\left(\cos(x-2x)-\cos(x+2x)\right)\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos x\sin 3x-\cos 3x\sin 3x)=\frac{1}{4}(\sin(x+3x)-\sin(x-3x))-\frac{1}{4}\sin 6x=\frac{1}{4}(\sin 4x+\sin 2x-\sin 6x)$
pa je
$f^{(2009)}(x)=\frac{1}{4}\left(\sin\left(4x+\frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 4^{2009}+\sin\left(2x+\frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 2^{2009}-\sin\left(6x+\frac{2009\pi}{2}\right)\cdot 6^{2009}\right)=\frac{1}{4}(4^{2009}\cos 4x+2^{2009}\cos 2x-6^{2009}\cos 6x).$

$\triangle$

Za računanje viših derivacija se ponekad koristi **Leibnizova formula**:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

Zadatak 1.28 Odredite $f^{(n)}(x)$ za

(a) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$

(b) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x \operatorname{sh} x$

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (x^2e^{-2x})^{(n)} = \text{Leibnizova formula} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(e^{-2x})^{(n-k)} \\
&= \{(x^2)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k=0,1,2\} \\
&= \binom{n}{0}(x^2)^{(0)}(e^{-2x})^{(n-0)} + \binom{n}{1}(x^2)^{(1)}(e^{-2x})^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)^{(2)}(e^{-2x})^{(n-2)} + 0 \\
&= x^2e^{-2x}\cdot(-2)^n + n\cdot 2xe^{-2x}\cdot(-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2e^{-2x}\cdot(-2)^{n-2} \\
&= (-2)^{n-2}e^{-2x}(4x^2+4x+n(n-1))
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = x^2e^x\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{x^2e^{2x}-x^2}{2}$ pa je za $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}(x^2e^{2x})^{(n)} = \text{Leibnizova formula} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)} \\
&= \{(x^2)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k=0,1,2\} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2e^{2x}\cdot 2^n + n\cdot 2xe^{2x}\cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2e^{2x}\cdot 2^{n-2}\right) \\
&= 2^{n-3}e^{2x}(8x^2+4nx+n(n-1)).
\end{aligned}$$

$\triangle$

Zadatak 1.29 Odredite $f^{(100)}(0)$ za

(a) $f(x) = x^3\sin x\cos x$

(b) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

Rješenje.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 \sin 2x$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}(x^3 \sin 2x)^{(n)} = \text{Leibnizova formula} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3)^{(k)}(\sin 2x)^{(n-k)} \\
&= \{(x^3)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k = 0,1,2,3\} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^3 \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\cdot 2^n + n\cdot 3x^2 \sin\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)\cdot 2^{n-1}\right. \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 6x \sin\left(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)\cdot 2^{n-2} \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 6 \sin\left(2x + \frac{(n-3)\pi}{2}\right)\cdot 2^{n-3}\right)
\end{aligned}$$

Za $n = 100$ i $x = 0$ dobijemo

$$f^{(100)}(0) = \frac{100(100-1)(100-2)}{3!}\cdot 6 \sin\left(0 + \frac{(100-3)\pi}{2}\right)\cdot 2^{100-3} = 100\cdot 99\cdot 98\cdot 2^{97}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
f^{(100)}(x) &= \left((1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)} = \text{Leibnizova formula} \\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(1+x)^{(k)}((1-x)^{-1/2})^{(100-k)} \\
&= \{(1+x)^{(k)} \text{ 'preživi' za } k = 0,1\} \\
&= (1+x)((1-x)^{-1/2})^{(100)} + 100((1-x)^{-1/2})^{(99)} = (*)
\end{aligned}$$

Izračunajmo $((1-x)^{-1/2})^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
((1-x)^{-1/2})^{(k)} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)(-1)^k(1-x)^{-\frac{1}{2}-k} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2k-1)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1}{2}-k} = \frac{(2k-1)!!}{2^k}(1-x)^{-\frac{1}{2}-k}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$(*) = (1+x)\frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-100} + 100\frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-99} = \frac{197!!}{2^{100}}\frac{399-x}{\sqrt{(x-1)^{201}}}.$$

$\triangle$

Računanje derivacija višeg reda pomoću diferencijalnih jednakosti

Ponekad nije teško pronaći neku jednostavnu diferencijalnu jednakost koju funkcija zadovoljava. Zatim se na tu jednakost primijeni Leibnizov formula. Ovakav način računanja se koristi kod računanja derivacija višeg reda u nekoj unaprijed određenoj točki, npr. $f^{(n)}(0)$.

Zadatak 1.30 Neka je $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Odredite $f^{(n)}(0)$.

Rješenje. Pronađimo diferencijalnu jednakost koju zadovoljava $y(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y' &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xy \end{aligned}$$

pa je tražena diferencijalna jednakost:

$$y' + xy = 0.$$

Primijenimo Leibnizovu formulu na dobivenu diferencijalnu jednakost

$$\begin{gathered} y' + xy = 0 \qquad /^{(n-1)},\ \text{za } n \geq 1 \\ y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)^{(k)} y^{(n-1-k)} = 0 \\ y^{(n)} + xy^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)} = 0 \end{gathered}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u zadnju jednakost dobijemo rekurzivnu relaciju za $y^{(n)}(0)$:

$$y^{(n)}(0) + 0 + (n-1)y^{(n-2)}(0) = 0,$$

odakle je

$$y^{(n)}(0) = -(n-1)y^{(n-2)}(0), \quad \text{za } n \geq 2.$$

Imamo dva slučaja

- $n = 2k - 1$

$$\begin{aligned} y^{(2k-1)} &= -(2k-2)y^{(2k-3)}(0) = (-(2k-2))(-(2k-4))y^{(2k-6)}(0) = \ldots = \\ &= (-(2k-2))(-(2k-4)) \cdots (-2) \underbrace{y^{(1)}(0)}_{=y'(0)=0} = 0, \end{aligned}$$

- $n = 2k$

$$\begin{aligned} y^{(2k)} &= -(2k-1)y^{(2k-2)}(0) = (-(2k-1))(-(2k-3))y^{(2k-4)}(0) = \ldots = \\ &= (-(2k-1))(-(2k-3)) \cdots (-1) \underbrace{y^{(0)}(0)}_{=y(0)=1} = (-1)^k (2k-1)!!. \end{aligned}$$

△

Zadatak 1.31 Neka je $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Odredite $f^{(99)}(0)$ i $f^{(100)}(0)$.

Rješenje. Pronađimo diferencijalnu jednakost koju zadovoljava $y(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y' &= \frac{1+yx}{1-x^2} \end{aligned}$$

pa je tražena diferencijalna jednakost:

$$(1-x^2)y' = 1 + xy.$$

Primijenimo Leibnizovu formulu na dobivenu diferencijalnu jednakost, a zatim uvrstimo $x = 0$:

$$\begin{aligned} &(1-x^2)y' = 1 + xy \qquad /^{(n-1)}, \text{ za } n \geq 1 \\ &\sum_{k=0}^{(n-1)} \binom{n-1}{k} (1-x^2)^{(k)} \underbrace{(y')^{(n-1-k)}}_{=y^{(n-k)}} = \sum_{k=0}^{(n-1)} \binom{n-1}{k} (x)^{(k)} y^{(n-1-k)} \\ &(1-x^2)y^{(n)} + (n-1)(-2x)y^{(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(-2)y^{(n-2)} = xy^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)} \ /_{x=0} \\ &y^{(n)}(0) - (n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0) = (n-1)y^{(n-2)}(0). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi rekurzivna relacija:

$$y^{(n)}(0) = (n-1)^2 y^{(n-2)}(0), \quad \text{za } n \geq 2.$$

Računamo:

- $n = 99$

$$\begin{aligned} y^{(99)} &= (99-1)^2 y^{(97)}(0) = (99-1)^2(97-1)^2 y^{(95)}(0) = \ldots = \\ &= (99-1)^2(97-1)^2 \cdots (3-1)^2 \underbrace{y^{(1)}(0)}_{=y'(0)=1} = (98!!)^2, \end{aligned}$$

- $n = 100$

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= (100-1)^2 y^{(98)}(0) = (100-1)^2(98-1)^2 y^{(96)}(0) = \ldots = \\ &= (100-1)^2(98-1)^2 \cdots (2-1)^2 \underbrace{y^{(0)}(0)}_{=y(0)=0} = 0. \end{aligned}$$

△

Zadaci za vježbu

1.32 Dokažite da funkcija $y(x) = \frac{e^{5x}+2}{e^x}$ zadovoljava jednakost:

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

1.33 (a) Odredite $f^{(8)}$ za $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$.

(b) Odredite $f^{(5)}$ za $f(x) = x \ln x$.

(c) Odredite $f^{(5)}$ za $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

(b) Odredite f'' za $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(b) Odredite f'' za $f(x) = x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$.

1.34 (a) Pokažite da funkcija $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + y = 0.$$

(b) Pokažite da funkcija $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - y = 0.$$

1.35 Dokažite Leibnizovu formulu. (Uputa: matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.)

1.36 Neka je $f(x) = x^3 \operatorname{sh} x$. Odredite $f^{(n)}(x)$.

1.37 Neka je $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$. Odredite $f^{(n)}(x)$.

1.38 Neka je $y(x) = \arcsin x$. Odredite $y^{(n)}(0)$. (Uputa: $(1-x^2)y'' = xy'$.)

1.39 Neka je $y(x) = \cos(3 \arcsin x)$. Odredite $y^{(n)}(0)$. (Uputa: $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$.)

1.40 Izračunajte $f^{(100)}(0)$ i $f^{(101)}(0)$ ako je funkcija f zadana formulom:

(a) $f(x) = (x \sin 2x)^3$

(b) $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

(c) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(d) $f(x) = x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$

1.41 Neka je $f(x) = x^n$. Dokažite:

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

1.42 Funkcija $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$P(x) = e^{x^2} \cdot (e^{-x^2})^{(2006)}$$

Dokažite da je P polinom, odredite mu stupanj i vodeći koeficijent.

1.43 Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku n puta derivabilnu funkciju f vrijedi jednakost

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

(Uputa: matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.)

1.4 Tangenta i normala

Ako funkcija f ima derivaciju u točki x_0, onda jednadžbe tangente i normale na graf funkcije f u točki $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ glase:

$$t \ldots\ldots\ldots y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$n \ldots\ldots\ldots y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Zadatak 1.44 Točkom $T(2, 0)$ povucite tangentu na krivulju $y = x^4$.

Rješenje. Označimo diralište s $D(x_0, y_0) = D(x_0, x_0^4)$. Tada je jednadžba tangente

$$t \ \ldots\ldots\ y - x_0^3 = 4x_0^3(x - x_0).$$

Iz uvjeta $T \in t$ slijedi

$$0 - x_0^4 = 4x_0^3(2 - x_0)$$

odakle dobijemo

$$x_0 = 0, y_0 = x_0^4 = 0$$

ili

$$x_0 = \frac{8}{3}, y_0 = x_0^4 = \left(\frac{8}{3}\right)^4.$$

Stoga imamo dvije tangente kroz točku T:

$$t_1 \ldots\ldots y = 0$$
$$t_2 \ldots\ldots y = 4\left(\frac{8}{3}\right)^4 x - 3\left(\frac{8}{3}\right)^4$$

△

Zadatak 1.45 Dokažite da se tangente na krivulju

$$y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$$

povučene u točkama s ordinatom 1 sijeku u ishodištu.

Rješenje. Diralište je točka $D(x_0, 1)$. Iz uvjeta $D \in \Gamma_f$ slijedi

$$1 = \frac{1+3x_0^2}{3+x_0^2} \implies x_0 = -1 \text{ ili } x_0 = 1.$$

Izračunamo

$$y' = \frac{16x}{(3+x^2)^2}$$

i dobijemo jednadžbe tangenti:

$$\begin{aligned} t_1 \ldots\ldots y - 1 = y'(1)(x-1) &\implies y = x \\ t_2 \ldots\ldots y - 1 = y'(-1)(x+1) &\implies y = -x \end{aligned}$$

odakle vidimo da se t_1 i t_2 sijeku u ishodištu.

△

Zadatak 1.46 U proizvoljnoj točki krivulje

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

povučena je tangenta. Dokažite da odsječak tangente između osi ordinata i točke dirališta ima konstantnu duljinu i odredite ju.

Rješenje. Označimo diralište s $D(x_0, y_0)$. Derivacija y' je

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

pa je jednadžba tangente

$$t \ldots\ldots y - y_0 = -\frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0}(x - x_0).$$

Tangenta siječe os ordinatu u točki $T(0, y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2})$ pa odsječak tangente između osi ordinata i točke dirališta ima duljinu

$$d(D,T) = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - (y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2}))^2} = |a|,$$

koja je konstantna.

△

Zadatak 1.47 Odredite jednadžbu tangente i normale u točki $T(1,1)$ na krivulju implicitno zadanu jednadžbom
$$x^5 + y^5 - 2xy = 0.$$

Rješenje. Primijetimo da je $T \in \Gamma_f$. Implicitnim deriviranjem dobijemo derivaciju:

$$y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}$$

pa je $y'(1) = \frac{2\cdot 1 - 5\cdot 1^4}{5\cdot 1^4 - 2\cdot 1} = -1$. Jednadžbe tangente i normale su

$$\begin{aligned} t \ldots\ldots y - 1 &= y'(1)(x-1) \implies y = -x + 2 \\ n \ldots\ldots y - 1 &= -\frac{1}{y'(1)}(x-1) \implies y = x \end{aligned}$$

△

Zadatak 1.48 Pod kojim se kutem sijeku tangente na kružnicu

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$

povučene točkom $T(4,1)$?

Rješenje. Neka je $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ kut između tangenti. Sjetimo se da je kut između pravaca s koeficijentima smjera k_1 i k_2 dan formulom

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Implicitnim deriviranjem dobijemo

$$y' = -\frac{x+2}{y-1}$$

Neka je $D(x_0, y_0)$ diralište. Tada je jednadžba tangente u točki D:

$$t \ldots\ldots y - y_0 = -\frac{x+2}{y_0 - 1}(x - x_0).$$

Iz uvjeta $T \in t$ i $D \in \Gamma_f$ dobijemo $x_0 = \frac{2}{3}$ i $y_0 = 1 \pm \frac{4\sqrt{5}}{3}$. Dakle:

$$\begin{aligned} k_1 = y'(x_0) &= -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1} = -\frac{\frac{2}{3} + 2}{1 + \frac{4\sqrt{5}}{3} - 1} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ k_2 = y'(x_0) &= -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1} = -\frac{\frac{2}{3} + 2}{1 - \frac{4\sqrt{5}}{3} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

pa je

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \operatorname{arctg} 4\sqrt{5}.$$

$\triangle$

Zadatak 1.49 Pokažite da se parabole

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x + 4 \\ y^2 &= -12x + 36 \end{aligned}$$

sijeku pod pravim kutem.

Rješenje. Kut između krivulja se definira kao kut između tangenti na te krivulje povučenim u točkama presjeka. Odredimo prvo presjek krivulja:

$$4x + 4 = -12x + 36 \implies x = 2 \implies y = \pm 2\sqrt{3}.$$

Dakle, točke presjeka su

$$T_1(2, 2\sqrt{3}) \quad \text{i} \quad T_2(2, -2\sqrt{3}).$$

Implicitnim deriviranjem dobijemo derivacije:

$$y' = \frac{2}{y} \quad \text{i} \quad y' = -\frac{6}{y}.$$

U točki T_1 vrijedi:

$$k_1 = y'(2) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad k_2 = y'(2) = -\frac{6}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

pa je $k_1 \cdot k_2 = -1$ odakle zaključujemo da su tangente okomite. Analogno se izračuna za točku T_2. Dakle, parabole se sijeku pod pravim kutem.

$\triangle$

Zadatak 1.50 Za koje $n \in \mathbb{N}$ krivulja $y = \operatorname{arctg}(nx)$ siječe os x pod kutem većim od 89°?

Rješenje. Vrijedi

$$y' = \frac{n}{1 + nx^2}$$

pa je

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{y'(0) - 0}{1 + y'(0) \cdot 0}\right| = \operatorname{arctg}|y'(0)| = \operatorname{arctg} n.$$

Dakle,

$$\varphi > 89^\circ \iff \operatorname{arctg} n > 89^\circ \iff n > \operatorname{tg} 89^\circ \approx 57.28 \iff n \geq 58.$$

△

Zadatak 1.51 Uz koji parametar $a \in \mathbb{R}$ krivulja $y = ax^2$ dodiruje krivulju $y = \ln x$?

Rješenje. Krivulje se dodiruju u nekoj točki ako imaju zajedničku tangentu u toj točki. Neka je $D(x_0, y_0)$ diralište. Iz uvjeta da se D nalazi na obje krivulje dobijemo

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0^2 \\ y_0 &= \ln x_0 \end{aligned}$$

odakle je

$$ax_0^2 = \ln x_0.$$

S druge strane, jer se tangente podudaraju, specijalno koeficijenti smjera moraju biti isti pa je

$$2ax_0 = \frac{1}{x_0}.$$

Iz gornje dvije jednakosti dobijemo $x_0 = \sqrt{e}$ pa je $a = \frac{\ln x_0}{x_0^2} = \frac{1}{2e}$.

△

Zadatak 1.52 Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - x &= 0 \\ x^2 + y^3 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje. Odredimo presjek krivulja:

$$x^3 + y^3 - x = x^2 + y^3 + 2$$

odakle dobijemo jednadžbu

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

čije je jedno rješenje $x = 2$. Dijeljenjem te jednadžbe s $x - 2$ dobijemo jednadžbu

$$x^2 + x + 1 = 0$$

koja nema realnih rješenja. Dakle, $x = 2$ i $y = -\sqrt[3]{6}$. Implicitinin deriviranjem dobijemo

$$y' = \frac{1 - 3x^2}{3y^2} \quad \text{i} \quad y' = -\frac{2x}{3y^2}$$

pa je

$$k_1 = y'(2) = \frac{1-3\cdot 2^2}{3\cdot(-\sqrt[3]{6})^2} = -\frac{11}{3\sqrt[3]{36}}$$
$$k_2 = y'(2) = \frac{-2\cdot 2}{3\cdot(-\sqrt[3]{6})^2} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{36}}.$$

Odavde je

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{-\frac{11}{3\sqrt[3]{36}}+\frac{4}{3\sqrt[3]{36}}}{1+\frac{11}{3\sqrt[3]{36}}\cdot\frac{4}{3\sqrt[3]{36}}}\right| = \operatorname{arctg}\frac{21\sqrt[3]{36}}{44+(3\sqrt[3]{36})^2}.$$

△

Zadatak 1.53 Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$y = x^2 - 6x + 5$$
$$y = -x^2 - 4x.$$

Rješenje. Stavimo $f(x) = x^2 - 6x + 5$ i $g(x) = -x^2 - 4x$ te označimo s $D_1(c, f(c))$ i $D_2(d, g(d))$ dirališta tangenti na krivulje. Jednadžbe tangenti su

$$t_1 \ldots\ldots y = f'(c)x + f(c) - cf'(c)$$
$$t_2 \ldots\ldots y = g'(d)x + g(d) - dg'(d)$$

Tangente se moraju podudarati pa mora vrijediti:

$$f'(c) = g'(d) \quad \text{i} \quad f(x) - cf'(x) = g(d) - dg'(d)$$

pa dobijemo sustav

$$f'(c) = g'(d)$$
$$f'(c) = \frac{g(d)-f(c)}{d-c}$$

odnosno

$$2c - 6 = -2d - 4$$
$$2c - 6 = \frac{-d^2 - 4d - c^2 + 6c - 5}{d-c}.$$

Rješavanjem gornjeg sustava slijedi $d_1 = -1, c_1 = 2$ i $d_2 = 2, c_2 = -1$, odakle dobijemo tražene tangente:

$$t \ldots\ldots y = -2x + 1$$
$$t \ldots\ldots y = -8x + 4.$$

△

Zadaci za vježbu

1.54 Nađite sve pravce koji prolaze kroz ishodište i sijeku hiperbolu $xy = a^2$ pod pravim kutem.

1.55 Zadana je krivulja
$$y = \frac{x-4}{x-2}.$$
Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.

1.56 Odredite općenitu formulu za jednadžbu tangente na krivulju implicitno zadanu s
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

1.57 Odredite sve vrijednosti parametra $b \in \mathbb{R}$ za koje je pravac $y = x + b$ tangenta krivulje
$$y = \frac{x}{x+4}.$$

1.58 Na krivulji $y = \frac{1}{1+x^2}$ nađite točku u kojoj je tangenta paralelna s osi apscisa.

1.59 Pokažite da se krivulje familija
$$\begin{aligned} y^2 &= 4a^2 - 4ax, \;\; a > 0 \\ y^2 &= 4b^2 + 4bx, \;\; b > 0 \end{aligned}$$

sijeku pod pravim kutem.

1.60 Pokažite da parabola
$$y = a(x-x_1)(x-x_2), \;\; a \neq 0, x_1 < x_2$$
presijeca os apscisa u dvije točke pod jednakim kutem.

1.61 Pod kojim se kutem sijeku krivulje:

(a) $y = x^2$ i $x = y^2$,

(b) $y = \sin x$ i $y = \cos x$?

1.62 Uz koje uvjete na koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ je os apscisa tangenta na krivulju
$$y = ax^2 + bx + c?$$

1.63 Nađite pravac koji je tangenta na krivulju

$$y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6$$

u barem dvije točke.

1.64 Dana je krivulja $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

(a) Nađite jednadžbu tangente na tu krivulju u točki s apscisom $a > 0$.

(b) Što se događa s tangentom kada $a \to +\infty$?

1.65 Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$\begin{aligned} y + x^2 &= -4 \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

1.66 Odredite kut pod kojim se krivulje

$$\begin{aligned} y^2 - 3x^2 + x + 1 &= 0 \\ xy^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

sijeku u prvom kvadrantu.

1.5 L'Hôpitalovo pravilo

Teorem. (**L'Hôpitalovo pravilo**) Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval (konačan ili beskonačan), $c \in I$ (može biti i $c = \pm\infty$ u slučaju beskonačnog intervala I) i neka su $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije.

1. Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in I$ i ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ u $\overline{\mathbb{R}}$, onda vrijedi
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in I$ i ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ u $\overline{\mathbb{R}}$, onda vrijedi
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Zadatak 1.67 Izračunajte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-4x+3}{2x^2-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{1+x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Rješenje.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3-4x+3}{2x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{15x^2-4}{4x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{30x}{4} = +\infty$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{1+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

△

Zadatak 1.68 Može li se primijeniti L'Hôpitalovo pravilo na

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}?$$

Rješenje. Ne možemo primijeniti L'Hôpitalovo pravilo, jer limes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

ne postoji, jer je za $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ i $y_n = (2n+1)\pi$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\cos x_n}{1-\cos x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+0}{1-0} = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\cos y_n}{1-\cos y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)}{1-(-1)} = 0.$$

Međutim,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

△

Zadatak 1.69 Izračunajte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

Rješenje.

(a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x+x\sin x}=0$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x+1)+1+1}=\frac{1}{2}$$

(c) Neka je $y(x)=x^x$. Tada je $\ln y(x)=x\ln x$ pa je
$$\lim_{x\to 0+}\ln y(x)=\lim_{x\to 0+}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$
Zbog neprekidnosti dobijemo
$$\lim_{x\to 0+}y(x)=\lim_{x\to 0+}e^{\ln y(x)}=e^{\lim_{x\to 0+}\ln y(x)}=e^0=1.$$

(d) Neka je $y(x)=x^{\frac{1}{x}}$. Tada je $\ln y(x)=\frac{\ln x}{x}$ pa je
$$\lim_{x\to+\infty}\ln y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$
Zbog neprekidnosti dobijemo
$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to 1}e^{\ln y(x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\ln y(x)}=e^0=1.$$

(e) Neka je $y(x)=(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$. Tada je $\ln y(x)=\cos\frac{\pi}{2}x\ln(1-x)$ pa je
$$\lim_{x\to 1}\ln y(x)=\lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi}{2}x\ln(1-x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x\left(-\sin\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{1}=0.$$

Zbog neprekidnosti dobijemo

$$\lim_{x\to 1} y(x) = \lim_{x\to 1} e^{\ln y(x)} = e^{\lim_{x\to 1}\ln y(x)} = e^0 = 1.$$

(f) Neka je $y(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$. Tada je $\ln y(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ pa je

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0.$$

Zbog neprekidnosti dobijemo

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln y(x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\ln y(x)} = e^0 = 1.$$

△

Zadatak 1.70 Izračunajte

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}, a>0$

Rješenje.

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x} = \frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \ln x \ln(x-1) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x\ln^2 x}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\ln^2 x - 2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{ae^{ax}}{nx^{n-1}} = \overset{\text{L'H}}{\cdots} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^n e^{ax}}{n!} = +\infty$$

△

Zadaci za vježbu

1.71 Izračunajte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x) \operatorname{ctg} x$

1.72 Izračunajte

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$, $n \in \mathbb{N}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x}$, $n \in \mathbb{N}$

1.73 Izračunajte

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos \dfrac{1}{x} \right)^x$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$

1.74 Izračunajte

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\operatorname{arctg} x}{x^3+x^2+x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin \sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x-x^2}}$

(c) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x}{e^x - \cos x}$, $n \in \mathbb{N}$

1.75 Može li se primijeniti L'Hôpitalovo pravilo na

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}?$$

Izračunajte gornji limes.

1.76 Izračunajte

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1 + x^2\ln\dfrac{ex}{x+1}} - x\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$

1.6 Neprekidnost i derivabilnost

Neprekidnost funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ možemo karakterizirati na sljedeće načine:

- f je neprekidna u c ako i samo ako ima limes u točki c i vrijedi
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$
- f je neprekidna u c ako i samo ako ima limese slijeva i zdesna u točki c i vrijedi
$$\lim_{x\to c-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Zadatak 1.77 Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1, & x \geq 0 \\ x + \lambda, & x < 0 \end{cases}$$
bude neprekidna. Je li f derivabilna na $\mathbb{R}$?

Rješenje. Računamo:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} (x+\lambda) = \lambda, \\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} (e^{-x}+1) = 2. \end{aligned}$$
Da bi f bila neprekidna, mora vrijediti
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x),$$
tj.
$$\lambda = 2 = 2,$$
odakle je $\lambda = 2$.

Računamo
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x+2-2}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}+1-2}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-e^{-x}}{1} = -1, \end{aligned}$$
iz čega zaključujemo da
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
ne postoji pa f nije derivabilna u 0.

$\triangle$

Zadatak 1.78 Dodefinirajte funkciju f u 0 (ako je moguće) tako da dobijete neprekidnu funkciju na $\langle -1, +\infty\rangle$, ako je

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x},\ \alpha \geq 0, \qquad \text{(b)}\quad f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Rješenje.

(a) Da bi f bila neprekidna, mora vrijediti:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha$$

pa definiramo $f(0) := \alpha$.

(b) Računamo:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

pa vidimo da $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne postoji pa f ne može biti ni neprekidna u 0.

$\triangle$

Definicija. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Funkcija f je **klase** C^k na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako $f^{(k)}$ postoji na I neprekidna je na I.

Pišemo $f \in C^k(I)$.

Napomena. Vrijedi: f derivabilna u $c \implies f$ neprekidna u c

Zadatak 1.79 Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Ispitajte:

(a) neprekidnost funkcije f,

(b) diferencijabilnost funkcije f. Je li f klase C^1 tamo gdje je diferencijabilna?

Rješenje.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}, & x < -1 \\ \operatorname{arctg} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}, & x > 1 \end{cases}.$$

(a) f je neprekidna na $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$.

Za $x = -1$ vrijedi

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - 1,$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$$

pa f ima prekid u -1.

Za $x = 1$ vrijedi

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

pa je

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \frac{\pi}{4} = f(1),$$

odakle slijedi da je f neprekidna u 1.

Dakle, f je neprekidna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

(b)
- $x \in \langle -1, 1\rangle \implies f(x) = \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $x \in \langle -\infty, -1\rangle \implies f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \implies f'(x) = \frac{1}{2}$
- $x \in \langle 1, +\infty\rangle \implies f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} \implies f'(x) = \frac{1}{2}$
- $x = -1 \implies$ u toj točki f nije neprekidna pa ne može biti ni derivabilna
- $x = 1$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$\implies f$ je derivabilna u 1 i $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Dakle, f je derivabilna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle$ i

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < -1 \\ \frac{1}{1+x^2}, & -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Da bi provjerili je li $f \in C^1(\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle)$, dovoljno je provjeriti da je f' neprekidna funkcija na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle$:
f' je neprekidna na $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$.

Za $x = 1$ vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-} f'(x) &= \lim_{x\to -1-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2},\\ \lim_{x\to -1+} f'(x) &= \lim_{x\to -1+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\\ f'(1) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

pa je f' neprekidna u 1. Dakle, $f \in C^1(\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle)$.

△

Zadatak 1.80 Postoje li $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $f \in C^1(\mathbb{R})$ ako je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b, & |x| < 1 \end{cases} ?$$

Rješenje. Da bi f bila neprekidna na $\mathbb{R}$ treba vrijediti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-} f(x) = f(-1) &= \lim_{x\to -1+} f(x)\\ \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) &= \lim_{x\to 1+} f(x),\end{aligned}$$

odakle slijedi $a + b = 1$. f će biti derivabilna na $\mathbb{R}$ ako vrijedi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}\\ \lim_{x\to 1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to 1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1},\end{aligned}$$

odakle dobijemo (koristeći uvjet $a+b = 1$) da mora vrijediti $2a = -1$ i tada je $f'(-1) = 1$ i $f'(1) = -1$. Sada iz

$$\begin{aligned}a + b &= 1\\ 2a &= -1\end{aligned}$$

dobijemo $a = -\frac{1}{2}$ i $b = \frac{3}{2}$. Pokažimo da je $f \in C^1(\mathbb{R})$. Vrijedi:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases},$$

odakle se vidi da je f' neprekidna na $\mathbb{R}$, jer je:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1-} f'(x) &= \lim_{x\to -1-} \frac{1}{x^2} = 1, \\
\lim_{x\to -1+} f'(x) &= \lim_{x\to -1+} (-x) = 1 \\
f'(-1) &= 1
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} f'(x) &= \lim_{x\to 1-} \frac{-1}{x^2} = -1, \\
\lim_{x\to 1+} f'(x) &= \lim_{x\to 1+} (-x) = -1 \\
f'(1) &= -1.
\end{aligned}$$

△

Zadatak 1.81 Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & |x| \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}$. Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Rješenje. Za $x \neq 0$ je

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Još raučnamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

jer možemo primijeniti teorem o sendviču na

$$0 \leq |x \sin\frac{1}{x}| \leq |x|$$

kada $x \to 0$. Stoga je f derivabilna na $\mathbb{R}$ i

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f \notin C^1(\mathbb{R})$, jer

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

na postoji. Npr. za $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ i $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ vrijedi

$$\lim_{k\to +\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to +\infty} y_k$$

i

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \lim_{k\to+\infty}(-1) = -1$$
$$\lim_{k\to+\infty} f(y_k) = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1.$$

△

Zadatak 1.82 Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije

$$f(x) = (|x(x-2)| - 3x + 6)^2.$$

Rješenje. Funkcija f je neprekidna na $\mathbb{R}$ kao kompozicija neprekidnih funkcija. Vrijedi:

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2-5x+6)^2, & x<0 \\ (-x^2-x+6)^2, & 0\le x\le 2 \\ (x^2-5x+6)^2, & x>2 \end{cases}.$$

Ispitajmo derivabilnost funkcije f u točkama 0 i 2:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{(x^2-5x+6)^2-36}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-}\frac{2(x^2-5x+6)(2x-5)}{1} = -60$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{(-x^2-x+6)^2-36}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{2(-x^2-x+6)(-2x-1)}{1} = 12$$

$\Longrightarrow$ f nije derivabilna u 0

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\frac{(-x^2-x+6)^2-0}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-}\frac{2(-x^2-x+6)(-2x-1)}{1} = 0$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(0)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{(x^2-5x+6)^2-36}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 2+}\frac{2(x^2-5x+6)(2x-5)}{1} = 0$$

$\Longrightarrow$ f je derivabilna u 2 i $f'(2)=0$.

Dakle, f je derivabilna na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$.

△

Zadatak 1.83 Neka je f diferencijabilna u nekoj okolini točke c i dva puta diferencijabilna u c. Dokažite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2} = f''(c).$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)\cdot 1+f'(c-h)\cdot(-1)}{2h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c)+f'(c)-f'(c-h)}{2h} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}+\frac{f'(c-h)-f'(c)}{-h}\right] = \\ &= \frac{1}{2}[f''(c)+f''(c)] = f''(c).\end{aligned}$$

△

Zadatak 1.84 * **Riemannova funkcija** je funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana sa

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\quad M(|m|,n)=1 \\ 1, & x=0\end{cases}.$$

Dokažite da je f neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ i da ima prekid u svakoj racionalnoj točki.

Rješenje.

(a) $c=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\quad M(|m|,n)=1 \implies f(c)=\frac{1}{n}$
Uzmimo neki $\varepsilon>0$ takav da je $\varepsilon\le\frac{1}{n}$. Tada

$$(\forall\delta>0)(\exists x_\delta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\ |x_\delta-c|<\delta\ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=0}-\underbrace{f(c)}_{\frac{1}{n}}|=\frac{1}{n}\ge\varepsilon$$

pa f ima prekid u c.

(b) $c=0$
Uzmimo neki $\varepsilon>0$ takav da je $\varepsilon\le 1$. Tada

$$(\forall\delta>0)(\exists x_\delta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\ |x_\delta-0|<\delta\ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=0}-\underbrace{f(0)}_{1}|=1\ge\varepsilon$$

pa f ima prekid u 0.

(c) $c\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon>\frac{1}{n}$. Definirajmo

$$A:=\left\{\frac{m}{n}\colon 1\le n<n_0\right\}\cap\langle c-1,c+1\rangle.$$

Tada je A konačan skup, jer u intervalu $\langle c-1, c+1\rangle$ ima konačno mnogo razlomaka s nazivnikom iz skupa $\{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$. Tada je $\delta := \min\{|c-p| \colon p \in A\} > 0$ i vrijedi

$$x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, |x-c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$
$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x-c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon$$

△

Zadatak 1.85 Ispitajte neprekidnost i diferencijabilnost **Dirichletove funkcije** $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Rješenje. Pokažimo da f ima prekid u svakoj točki:

(a) $c \in \mathbb{Q}$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=0} - \underbrace{f(c)}_{1}| = 1 \geq \varepsilon$$

(b) $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |\underbrace{f(x_\delta)}_{=1} - \underbrace{f(c)}_{0}| = 1 \geq \varepsilon$$

Dakle f nije nigdje neprekidna pa ne može biti ni diferencijabilna.

△

Zadatak 1.86 Ispitajte neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Rješenje.

- neprekidnost

  Tvrdimo da je f neprekidna samo u 0.

- $c = 0$
  Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo $0 < \delta \leq \varepsilon$. Tada je

$$
\begin{aligned}
x \in \mathbb{Q}, |x - 0| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = |x - 0| < \delta \leq \varepsilon \\
x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x - 0| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = |0 - 0| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

- $c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$
  Neka je $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |f(x_\delta) - f(c)| = |0 - c| = |c| > \frac{|c|}{2} = \varepsilon$$

- $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
  Uzmimo $\varepsilon = \frac{|c|}{4}$. Tada

$$(\forall 0 < \delta \frac{|c|}{2})(\exists x_\delta \in \mathbb{Q}),\ |x_\delta - c| < \delta \ \&\ |f(x_\delta) - f(c)| = |x_\delta - 0| = |x_\delta| \geq |c| - \underbrace{|c - x_\delta|}_{< \frac{|c|}{2}} \geq \frac{|c|}{2} > \varepsilon,$$

gdje smo iskoristili

$$|c| \leq |c - x_\delta| + |x_\delta| \implies |x_\delta| \geq |c| - |c - x_\delta|.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

1.87 Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ 1 + x, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna. Je li f diferencijabilna?

1.88 Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije f definirane s

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 8\,, & x \leq 3 \\ x^2 - 2x + 1\,, & x > 3\,. \end{cases}$$

Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

1.89 Ispitajte neprekidnost funkcije f definirane na $[-1,+\infty\rangle$ formulom

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\,.\end{cases}$$

U kojim točkama je f derivabilna, a u kojim neprekidno derivabilna?

1.90 Neka je $f(x)=|x|^3$. Dokažite da je $f\in C^2(\mathbb{R})$, ali da $f'''(0)$ ne postoji.

1.91 Neka je $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x), & |x|\leq 1\\ \frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\pi}{3}\operatorname{sgn}x-\frac{\sqrt{3}}{4}, & |x|>1\end{cases}.$$

Ispitajte:

(a) neprekidnost funkcije f,

(b) diferencijabilnost funkcije f. Je li f klase C^1 tamo gdje je diferencijabilna?

1.92 Zadana ja funkcija $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & a\leq x\leq b\\ 0, & \text{inače}\end{cases}.$$

Je li f derivabilna? Je li $f\in C^1(\mathbb{R})$?

1.93 Neka je

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}$. Je li $f\in C^1(\mathbb{R})$? Je li $f\in C^2(\mathbb{R})$? (Odgovori: Da. Ne.)

1.94 Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije

$$f(x)=||x^3+3x^2+3x+1|+|x^2+x-6||.$$

1.95 Zadana ja funkcija $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x+e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ \sin x, & x\geq 0\end{cases}.$$

Je li $f\in C^2(\mathbb{R})$?

$\diamondsuit\ \diamondsuit\ \diamondsuit$

Označimo:

$$f'_-(c) = \lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\,, \quad \textit{lijeva derivacija} \text{ funkcije } f \text{ u točki } c$$

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\,, \quad \textit{desna derivacija} \text{ funkcije } f \text{ u točki } c$$

1.96 Navedite primjer funkcije f neprekidne na $[-1,1]$ za koju vrijedi

$$f(0)=0\,,\ f'_-(0)=0 \ \text{ i } \ f'_+(0)=1.$$

Skicirajte njen graf i zapišite formulu.

1.97 Skicirajte primjer grafa funkcije f neprekidne na $[-2,2]$, koja zadovoljava uvjete

$$f(-2)=1\,,\ f(0)=0\,,\ f'(0)=0\,,\ f'_-(1)=-1\,,\ f'_+(1)=1 \ \text{ i } \ f'_-(2)=-1.$$

1.98 * Neka je f neprekidna na $\langle a,b\rangle$ te derivabilna na $\langle a,c\rangle$ i $\langle c,b\rangle$, za neki $c\in\langle a,b\rangle$. Nadalje, neka postoje $\lim\limits_{x\to c-} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to c+} f'(x)$. Koristeći L'Hôpitalovo pravilo dokažite tvrdnje:

1. $f'_-(c)$ postoji i vrijedi $f'_-(c) = \lim\limits_{x\to c-} f'(x)\,,$
2. $f'_+(c)$ postoji i vrijedi $f'_+(c) = \lim\limits_{x\to c+} f'(x)\,.$

U slučaju da još vrijedi $f'_-(c) = f'_+(c)$, postoji čak $f'(c)$ i f' je neprekidna u c, tj. funkcija f je neprekidno derivabilna u c.

1.99 Dokažite da za funkciju zadanu s

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}\,, & x\neq 0 \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$$

ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ (niti jednostrani limesi), ali f ima derivaciju u 0. Dakle, ne možemo primijeniti postupak za ispitivanje derivabilnosti iz prethodnog zadatka.

1.100 Je li f definirana s

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{\frac{2}{3}}\,, & x\leq 0 \\ (x+1)^{\frac{2}{3}}\,, & x>0 \end{cases}$$

derivabilna u 0?

1.101 Za

$$f(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$$

odredite $f'_-(1)$, ako postoji.

$\diamondsuit\ \diamondsuit\ \diamondsuit$

U sljedećim zadacima iskoristite sljedeće teoreme:

Teorem. (**Bolzano-Weierstrass**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je i $f([a, b]) = [c, d]$ segment.

Teorem. (**Rolle**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$, diferencijabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$ i neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$.

Teorem. (**Lagrangeov teorem srednje vrijednosti**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$ i diferencijabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

1.102 * Neka je $f\colon [a, b] \to [a, b]$ neprekidna funkcija. Pokažite da f ima barem jednu fiksnu točku na $[a, b]$, tj. da postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = c$.

[*Uputa*: Bolzano-Weierstrassov teorem.]

1.103 * Ako je $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, pokažite da jednadžba $f'(x) = 0$ ima tri realna rješenja i nađite intervale u kojima se nalaze.

[*Uputa*: Rolleov teorem.]

1.104 * Koristeći Rolleov teorem dokažite

Teorem. (**Cauchyev teorem srednje vrijednosti**) Neka su f i g realne funkcije koje su neprekidne na segmentu $[a, b]$ i diferencijabilne na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Specijalno, ako je $g(b) \neq g(a)$ i $g'(c) \neq 0$, tada je

$$.\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[*Uputa*: Imitirajte dokaz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti.]

1.105 * Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n outa derivabilna funkcija takva da je $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Pokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $0 < \vartheta < 1$ takav da je

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!}.$$

[*Uputa*: Iskoristite Cauchyev teorem srednje vrijednosti.]

1.106 * Koristeći Cauchyev teorem srednje vrijednosti dokažite **L'Hôpitalovo pravilo**:

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Neka su f i g realne funkcije koje su derivabilne na I takve da je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to c} g(x)$, $g'(x) \neq 0$, za sve $x \in I \setminus \{c\}$ i da postoji limes $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Tada postoji $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.107 * Pokažite da je Lagrangeov teorem srednje vrijednosti specijalni slučaj Cauchyevog teorema srednje vrijednosti.

1.108 * Koristeći Lagrangeov teorem srednje vrijednosti dokažite sljedeće nejednakosti:

(a) $\dfrac{1}{x+1} < \ln \dfrac{1+x}{x} < \dfrac{1}{x}$, za $x > 0$

(b) $\dfrac{y-x}{5} < \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) < y - x$, za $0 < x < y < 1$

1.7 Pad i rast. Ekstremi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija.

Monotonost funkcije f na intervalu I možemo karakterizirati pomoću derivacije na sljedeći način:

- f raste na $I \iff f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$
- f pada na $I \iff f'(x) \leq 0,\ \forall x \in I$

Definiramo skup **stacionarnih točaka** funkcije f sa

$$S := \{x \in I \colon f'(x) = 0\}.$$

Sljedeći kriterij daje karakterizaciju stroge monotonosti:

- f strogo raste na $I \iff$ skup stacionarnih točaka S ne sadrži interval i $f'(x) > 0,\ \forall x \in I \setminus S$
- f strogo pada na $I \iff$ skup stacionarnih točaka S ne sadrži interval i $f'(x) < 0,\ \forall x \in I \setminus S$

Nužan uvjet za lokalni ekstrem je dan sljedećim teoremom:

Teorem. (**Fermat**) Ako funkcija $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem u $c \in \langle a,b\rangle$ i ako je derivabilna u c, onda je $f'(c) = 0$.

Zadatak 1.109 Pokažite primjerom da obrat u gornjem teoremu ne mora vrijediti.

Zadatak 1.110 Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcija:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16}$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

Skicirajte grafove gornjih funkcija.

Vrijedi:

Teorem. (**Bolzano-Weierstrass**) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada je i $f([a,b]) = [c,d]$ segment.

Dakle, ako je funkcija neprekidna na segmentu, onda ona na tom segmentu postiže minimum i maksimum.

Zadatak 1.111 Odredite broj realnih rješenja svake od sljedećih jednadžbi:

(a) $x^7 + x^5 + x^3 - 3 = 0\,,$

(b) $x + \cos x - 5 = 0$

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Za toǩu $c \in [a,b]$ kažemo da je **kritična točka** ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- f nije derivabilna u c
- f je derivabilna u c i $f'(c) = 0$
- $c = a$ ili $c = b$

Zadatak 1.112 Odredite globalne ekstreme funkcije

$$f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4|x|.$$

Zadatak 1.113 Neka je $f(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2$. Odredite $f([-5,-1])$.

Zadatak 1.114 Odredite sliku funkcija:

(a) $f\colon\ [-1,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$

(b) $f\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|e^{-|x-1|}$

Zadatak 1.115 U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = x\ln x - a.$$

Zadatak 1.116 Dokažite nejednakosti:

(a) $x - \dfrac{x^3}{3} < \sin x < x$, za $x > 0$

(b) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, za $x > 0$

(c) $\ln(1 + e^{-2x}) + 2\operatorname{arctg} e^x < \pi$, za $x > 0$

Zadatak 1.117 Žica duljine $l > 0$ je presječena na dva dijela. Od jednog dijela se savije kružnica, a od drugog rub kvadrata. Kako treba presjeći žicu da zbroj povrsina kruga i kvadrata bude minimalan?

Zadatak 1.118 Dva hodnika širine 320 cm i 135 cm se sijeku pod pravim kutem. Odredite najveću duljinu tankog nesavitljivog štapa koji se može prenijeti iz jednog hodnika u drugi.

Zadatak 1.119 U krug radijusa 10 cm upišite jednakokračni trokut maksimalne površine.

Zadaci za vježbu

1.120 Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije zadane formulom:

(a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2 - 4}$,

(b) $f(x) = \ln(x^4 - 6x^2 + 10) - 2\operatorname{arctg}(x^2 - 3)$.

1.121 Odredite sliku funkcija:

(a) $f\colon \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

(b) $f\colon [-5, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 + 4x + 5}$

1.122 U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = e^x - x - a.$$

1.123 Dokažite nejednakosti:

(a) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$, za svaki $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(b) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$, za svaki $x > 0$

(c) $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, za svaki $x > 1$

(d) $5x + \dfrac{1}{x^5} \geq 6$, za svaki $x > 0$,

(e) $\operatorname{arctg} x > \arcsin \dfrac{x^2}{x^2+1}$, za svaki $x > 0$,

(f) $\ln \dfrac{b}{a} < \dfrac{b^2 - a^2}{2ab}$, za svake $0 < a < b$,

(g) $\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{8}{3}} + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{8}{3}} \geq 9\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$, za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

1.124 Odredite globalne ekstreme funkcije:

(a) $f\colon [-2, -\frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = e^{\frac{x^2+6x+1}{x}}$,

(b) $f\colon [\frac{1}{2}, 5] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^2+3x+1}$.

1.125 Rastavite broj 1 na dva nenegativna pribrojnika tako da im zbroj korijena bude najveći.

1.126 U polukružnicu polumjera 1 upisan je trapez čija osnovica je promjer polukružnice. Odredite kut uz osnovicu trapeza tako da površina trapeza bude najveća.

1.127 Na krivulji $y = \operatorname{ch} x$ nađite točku najbližu pravcu $y = \frac{3}{4}x$.

1.128 U zemlji *MathLand* davno je uveden koordinatni sustav. Na obali rijeke $y = 0$ nalazi se grad $A(-2, 0)$, a dalje od obale je grad $C(0, 1)$. Odredite na kojem mjestu treba izgraditi pristanište $B(b, 0)$, $-2 \leq b \leq 0$ da bi transport od A do C preko B bio najjeftiniji. Pritom je još poznato da je cijena transporta kopnom dva puta veća nego cijena transporta rijekom.

1.129 Odredite broj realnih rješenja jednadžbe $(x^2 - 3)e^x = a$ (u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$).

1.130 Na krivulju $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x > 1$ povucite tangentu takvu da površina pravokutnog trokuta omeđenog tom tangentom i koordinatnim osima bude minimalna. Kolika je najmanja vrijednost te površine?

1.131 U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ upišite pravokutnik najveće površine.

1.132 Tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ siječe koordinatne osi u točkama A i B. Pokažite da je
$$|AB| \geq a + b.$$

1.133 U kuglu radijusa 10 cm upišite stožac maksimalnog volumena.

1.134 Odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da minumum funkcije $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a$ na segmentu $[0, 2]$ bude 1.

1.135 Iz kruga je izrezan kružni isječak sa središnjim kutem α. Odaberite kut α tako da volumen stošca, čiji se plašt dobije savijanjem izrezanog dijela bude najveći.

1.136 U kocku duljine stranice a upišite valjak maksimalnog volumena, tako da mu prostorna dijagonala kocke prolazi središtem.

1.137 (a) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

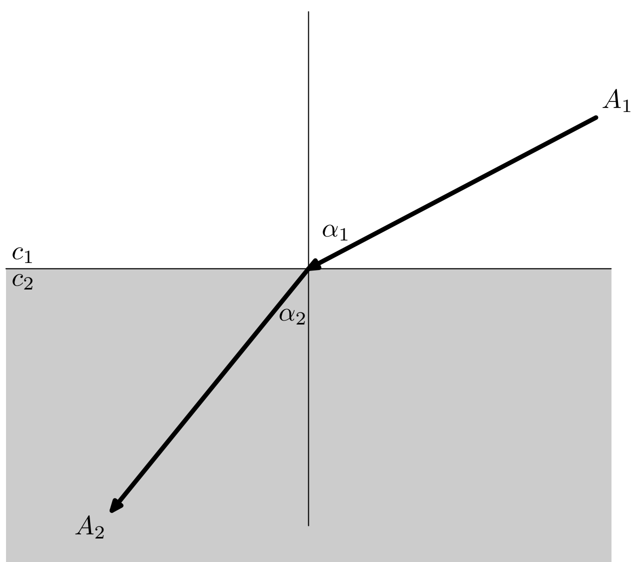
$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0, \text{ kada je } 0 < \alpha < 1$$
$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0, \text{ kada je } \alpha < 0 \text{ ili } \alpha > 1$$

(b) Koristeći (a) dokažite **Youngove nejednakosti**:

Za $a, b > 0$ i $p, q \neq 0, 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vrijedi:

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \text{ kada je } p > 1$$
$$a^{1/p} b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \text{ kada je } p < 1$$

1.138 * (**Snellov zakon loma svjetlosti**) Po tzv. *Fermatovom principu* zraka svjetlosti od jedne do druge točke putuje tako da je vrijeme putovanja najmanje moguće. Ako neki medij ima istu strukturu u svakom svom dijelu, onda je putanja zrake svjetlosti pravac. Pretpostavite da imate dva takva medija, kao na sljedećoj slici:



Ako su brzine svjetolsti u tim medijima c_1 i c_2, pokažite da vrijedi **Snellov zakon**:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

1.139 * Posuda oblika valjka je postavljena na ravnu površinu. Na nekoj visini je napravljen otvor iz kojeg istječe mlaz vode. Odredite visinu na koju treba staviti otvor tako da mlaz dostigne najveći domet, ako znate da je prema *Torricellijevom zakonu* brzina kojom voda istječe dana fomulom $\sqrt{2gh}$, gdje je h visina vode iznad otvora. $(g = 9.81 m/s^2)$

1.140 * Polinom P stupnja n s realnim koeficijentima zadovoljava $P(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da tada vrijedi i

$$P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geq 0 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

[*Uputa*: Označimo lijevu stranu s $f(x)$. Primijetite da je $f(x) = P(x) + f'(x)$.]

1.8 Asimptote. Konveksnost i konkavnost. Infleksija

Pravac $y = b$ je **horizontalna asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \text{ ili } \lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Pravac $y = ax + b$ je **kosa asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \text{ ili } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Tada je

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Ako je $a = 0$, vidimo da je kosa asimptota zapravo horizontalna asimptota. Pravac $x = a$ je **vertikalna asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x \to a-} |f(x)| = +\infty \text{ ili } \lim_{x \to a+} |f(x)| = +\infty.$$

Zadatak 1.141 Odredite asimptote funkcija

(a) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i nekaje $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je

- f **(strogo) konveksna** ako vrijedi

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0,1].$$

- f **(strogo) konkavna** ako vrijedi

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \overset{(>)}{\geq} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0,1].$$

Konveksnost i konkavnost možemo karakterizirati na sljedeći način:

Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na I. Vrijedi

- f je (strogo) konveksna na $I \iff f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$, za sve $x \in I$.

- f je (strogo) konkavna na $I \iff f''(x) \overset{(<)}{\leq} 0$, za sve $x \in I$.

Točka $a \in I$ je **točka infleksije** funkcije f ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- postoji $\delta > 0$ takav da je f strogo konveksna na $\langle a-\delta, a\rangle$ i strogo konkavna na $\langle a, a+\delta\rangle$
- postoji $\delta > 0$ takav da je f strogo konkavna na $\langle a-\delta, a\rangle$ i strogo konveksna na $\langle a, a+\delta\rangle$

Dakle, u slučaju da je f dva puta derivabilna funkcija i ako u a f'' mijenja predznak, onda je u a točka infleksije. Odavde vidimo da su "kandidati" za točke infleksije nultočke funkcije f''.

Zadatak 1.142 Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkciju

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Zadatak 1.143 Koliko najviše nultočaka može imati strogo konveksna funkcija?

Zadatak 1.144 Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Dokažite da za $x_1, \ldots, x_n \in I$ vrijedi:

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Zadatak 1.145 Dokažite nejednakosti:

(a) $\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^p \leq \dfrac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}, \quad p > 1,\ x_1, \ldots, x_n > 0$

(b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, gdje su α, β i γ kutevi trokuta

Zadaci za vježbu

1.146 Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Pokažite da je $-f$ konkavna funkcija.

1.147 Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkcije

(a) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

(b) $f(x) = e^{-2x^2+x+1}$

1.148 Dokažite da na grafu funkcije $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ postoje tri točke infleksije i da sve leže na jednom pravcu. Odredite jednadžbu tog pravca.

1.149 Dokažite nejednakosti:

(a) $\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 44^\circ \geq 44 \cdot (\sqrt{2} - 1)$

(b) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \leq (\sqrt{2} - 1)^{44}$

1.150 * Ako je konveksna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omeđena, onda je f konstanta. Dokažite!

1.151 * Dokažite da ako za konveksnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

onda je ona konstanta.

1.152 * Neka je $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

(a) Pokažite da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ postoje lijeva i desna derivacija:

$$f'_-(x) = \lim_{y \to x-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ i } f'_+(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

i da vrijedi $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

(b) Koristeći (a) pokažite da je f neprekidna funkcija.

1.9 Isptivanje toka funkcije

Kod ispitivanja toka funkcije koristimo sljedeći postupak:

1. Naći prirodno područje definicije.
2. Ispitati simetrije funkcije: parnost/neparnost, periodičnost.
3. Ispitati neprekidnost funkcije i naći točke prekida, ako postoje.
4. Naći nultočke funkcije i područja stalnog predznaka.
5. Naći intervale monotonosti i točke lokalnih ekstrema.
6. Naći intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije.
7. Naći asimptote.
8. Skicirati graf funkcije.

Zadatak 1.153 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Zadatak 1.154 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = x^2\, e^{\frac{1}{x}}.$$

Zadatak 1.155 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \ln(\cos x).$$

Zadatak 1.156 Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Zadaci za vježbu

1.157 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

1.158 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}.$$

1.159 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

1.160 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}.$$

1.161 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

1.162 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

1.163 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$$

1.164 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x + \sin x.$$

1.165 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x \sin x.$$

1.166 Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x - \ln \left(\frac{x - 3}{x - 2} \right)^2.$$

2

Integral

2.1 Neodređeni i određeni integral

Definicija. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkcija. **Primitivna funkcija** funkcije f je funkcija $F\colon I \to \mathbb{R}$ takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad \text{za sve } x \in I.$$

Primjer. (a) Za $f(x) = 0$ npr. imamo $F(x) = 7$.
(b) Za $f(x) = x^5$ npr. imamo $F(x) = \frac{x^6}{6} + \pi$.
(c) Za $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ npr. imamo $F(x) = \operatorname{arctg} x$.

Napomena. (a) Ako je F primitivna funkcija od f, onda je i $F+C$ primitivna funkcija od f, za sve $C \in \mathbb{R}$, jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

(b) Ako su F i G primitivne funkcije od f, onda je

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ za sve } x \in I$$

pa postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) - F(x) = C$, tj. $G(x) = F(x) + C$. Dakle, čim znamo jednu primitivnu funkciju F od f, onda znamo sve primitivne funkcije i one su oblika $F(x) + C$, za $C \in \mathbb{R}$

Definicija. Skup $\{F + C\colon C \in \mathbb{R}\}$ svih primitivnih funkcija od f zovemo **neodređeni integral** ili **antiderivacija** od f i taj skup označavamo s

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Zadatak 2.1 Izračunajte neodređene integrale:

$$\text{(a)} \int x^2\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{x} \qquad \text{(c)} \int 5^x\,dx \qquad \text{(d)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Rješenje.

(a) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(c) $\displaystyle\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$

△

Definicija. Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Ako je f Riemann-integrabilna, onda realni broj $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ zovemo **određeni integral**.

Teorem. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako je $c \in I$ onda je s

$$F\colon I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt, \ x \in I$$

definirana primitivna funkcija od f.

Teorem. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako je F primitivna funkcija od f, onda za svaki segment $[a,b] \subseteq I$ vrijedi **Newton-Leibnizova formula**:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Primjer.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Zadatak 2.2 Izračunajte određene integrale:

$$\text{(a)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 x - 3\cos^2 x)\, dx \qquad \text{(b)} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} \qquad \text{(c)} \int\limits_1^8 \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

Rješenje.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 x - 3\cos^2 x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (7\sin^2 x - 3)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(7 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} - 3\Big)\ dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dx - \frac{7}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{7}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) - \frac{7}{2}(0-0) = \frac{\pi}{4}.$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = \int_0^1 \frac{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}\ dx = \int_0^1 (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\ dx$
$= \int_0^1 e^{-x}\ dx = -e^{x}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1}.$

(c) $\int_1^8 \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}\ dx = \int_1^8 \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{5}}}\ dx = \int_1^2 (x^{\frac{16}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}} + 2x^{-\frac{7}{15}})\ dx =$
$\frac{5}{21} \cdot x^{\frac{21}{5}}\Big|_1^8 - 4 \cdot \frac{5}{16}x^{\frac{16}{5}}\Big|_1^8 + 2 \cdot \frac{15}{8}x^{\frac{8}{15}}\Big|_1^8 = \cdots = -\frac{115}{42} + \frac{14395}{21 \cdot 2^{\frac{2}{5}}}.$

△

Zadatak 2.3 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \operatorname{tg}^2 x\, dx \qquad \text{(b)} \int\limits_{'}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx \qquad \text{(c)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1}\, dx \qquad \text{(d)} \int\limits_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor \{x\}\, dx.$$

Rješenje.

(a) $\int \operatorname{tg}^2 x\ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx - \int\ dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\ dx$ = (pogađamo primitivnu funkciju) $= -\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -(\ln(\cos\frac{\pi}{4}) - \ln(\cos 0)) = -(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$

(c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\ dx$ = (pogađamo primitivnu funkciju) $= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$

(d) $\int_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor \{x\}\, dx = \int_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor)\, dx = \int_{-2}^{-1} \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor)\, dx + \int_{-1}^{0} \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor)\, dx + \int_{0}^{1} \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor)\, dx + \int_{1}^{2} \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor)\, dx = \int_{-2}^{-1} (-2)\cdot(x+2)\, dx + \int_{-1}^{0} (-1)\cdot(x+1)\, dx + \int_{0}^{1} 0\cdot x\, dx + \int_{1}^{2} 1\cdot(x-1)\, dx = -2(\frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_{-2}^{-1} - (\frac{x^2}{2} + x)\Big|_{-1}^{0} + (\frac{x^2}{2} - x)\Big|_{1}^{2} = \cdots = -1.$

△

2.1.1 Integralne sume

Pretpostavimo da je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabilna funkcija. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $(x_i)_{0 \le i \le n}$ pripadna ekvidistantna subdivizija segmenta $[a, b]$, tj. neka je

$$h := \frac{b-a}{n} \quad \text{te} \quad x_i := a + ih, \quad \text{za} \;\; 0 \le i \le n.$$

Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ i $1 \le i \le n$ neka su $\xi_{n,i}$ brojevi iz segmenta $[x_{i-1}, x_i]$. Pripadna integralna suma S_n funkcije f je oblika

$$S_n = h \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{n,i}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{n,i}).$$

Tada je niz integralnih suma $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ od f konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Ponekad je koristan i obratni proces. Naime, pretpostavimo da trebamo izračunati limes nekog niza. Ukoliko uspijemo prepoznati da su članovi tog niza u stvari integralne sume neke (Riemann integrabilne) funkcije, tada možemo upotrijebiti formulu (2.1), kako bismo našli limes tog niza.

Kao ilustraciju navodimo sljedeći zadatak.

Zadatak 2.4 * Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right)$

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right).$

Rješenje.

(a) Najprije primijetimo da je

$$S_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Uočimo da je S_n zapravo donja Darbouxova suma funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x) := \frac{1}{1+x}$, s obzirom na n-tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$x_0 := 0 < x_1 := \frac{1}{n} < x_2 := \frac{2}{n} < \cdots < x_n := \frac{n}{n} = 1$$

Naime, funkcija f je strogo padajuća na $[0,1]$, pa je

$$m_i := \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) = \frac{1}{1+x_i} = \frac{1}{1+\frac{i}{n}}, \quad 1 \le i \le n.$$

Kako je f strogo padajuća na $[0,1]$, ona je i Riemann integrabilna na $[0,1]$, pa je prema (2.1) niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

(b) Slično kao u (a) dijelu zadatka, najprije primijetimo da je

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right).$$

Također uočimo da je S_n zapravo gornja Darbouxova suma funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x) := \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, s obzirom na n-tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$x_0 := 0 < x_1 := \frac{1}{n} < x_2 := \frac{2}{n} < \cdots < x_n := \frac{n}{n} = 1$$

Naime, funkcija f je strogo rastuća na $[0,1]$, pa je

$$M_i := \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{4-x_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}, \quad 1 \le i \le n.$$

Kako je f strogo rasuća na $[0,1]$ ona je i Riemann integrabilna na $[0,1]$, pa je prema (2.1) niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

2.5 Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int (2^x+5^x)^2\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

2.6 Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^8 (1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\displaystyle\int_0^{100} \lfloor x\rfloor x\,dx$.

2.7 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}\right]$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, za $\alpha\geq 0$

2.8 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right]$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n^2+n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n^2+n\cdot n-n^2}}\right]$

2.9 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1^2}{n^2}}(1+\frac{2}{n})^{\frac{2^2}{n^2}}\cdots(1+\frac{n}{n})^{\frac{n^2}{n^2}}}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+4kn+5n^2}$

2.10 Izračunajte

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

koristeći integralne sume.

2.2 Metoda supstitucije i metoda parcijalne integracije

Zadatak 2.11 Izračunajte integrale koristeći metodu supstitucije:

$$\text{(a)} \int x^2(2x^3+4)^4\,dx \qquad \text{(b)} \int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$$

Rješenje.

(a) $$\int x^2(2x^3+4)^4\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 2x^3+4 \\ dt = 6x^2\,dx \end{array}\right] = \int \frac{t^4}{6}\,dt = \frac{t^5}{30} + C = \frac{(2x^3+4)^5}{30} + C$$

(b) $$\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t = e^x+1 & 0 \mapsto e^0+1 = 2 \\ dt = e^x\,dx & \ln 2 \mapsto e^{\ln 2}+1 = 3 \end{array}\right] = \int\limits_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\,\Big|_2^3 = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$\triangle$

Zadatak 2.12 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(b)} \int\limits_2^3 x\sqrt{x^2-4}\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx \qquad \text{(d)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x\,dx$$

$$\text{(e)} \int \sqrt{e^x-1}\,dx \qquad \text{(f)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx \qquad \text{(g)}^\star \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2+\cos x}\,dx.$$

Rješenje.

(a) $$\text{(a)} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array}\right] = 2\int \cos t\,dt = 2\sin t + C = 2\sin\sqrt{x} + C$$

(b) $$\int\limits_2^3 x\sqrt{x^2-4}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t = x^2-4 & 2 \mapsto 0 \\ dt = 2x\,dx & 3 \mapsto 5 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^5 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}t^{3/2}\Big|_0^5 = \frac{\sqrt{125}}{3}$$

(c) $$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt{x+1} & x = t^2-1 \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} & \end{array}\right] = 2\int (t^2-1)\,dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C =$$
$$= \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C$$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x \, dx = \begin{bmatrix} t = cosx & 0 \mapsto 1 \\ dt = -\sin x \, dx & \frac{\pi}{2} \mapsto 0 \end{bmatrix} = \int_0^1 t^4 (1-t^2) \, dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right) \Bigg|_0^1 =$
$\displaystyle = \frac{2}{35}$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 1} \, dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{e^x - 1} & x = \ln(t^2+1) \\ & dx = \frac{2t\,dt}{t^2+1} \end{bmatrix} = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} \, dt =$
$\displaystyle = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{e^x-1} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + \sin^2 x} \, dx = \begin{bmatrix} t = 1 + \sin^2 x & 0 \mapsto 1 \\ dt = 2 \sin x \cos x \, dx & \frac{\pi}{2} \mapsto 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_1^2 =$
$\displaystyle = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

(g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2 + \cos x} \, dx = \text{neparna funkcija na simetričnoj domeni} = 0$

△

Zadatak 2.13 Neka je $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabilna funkcija.

(a) Ako je f neparna, dokažite da je

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0.$$

(b) Ako je f parna, dokažite da je

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

Rješenje.

(a) Vrijedi $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = \begin{bmatrix} t = -x & -a \mapsto a \\ dt = -dx & a \mapsto -a \end{bmatrix} = \int_{-a}^{a} f(-t) \, dt = -\int_{-a}^{a} f(t) \, dt$, odakle je $2 \int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$ pa slijedi tvrdnja.

(b) $$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \begin{bmatrix} t=-x & -a\mapsto a \\ dt=-dx & 0\mapsto 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \int\limits_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

△

Zadatak 2.14 Neka je $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna periodična funkcija s periodom $\tau > 0$. Dokažite da za sve $a\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\tau} f(x)\,dx.$$

Rješenje. Stavimo $m := \left\lceil \frac{a}{\tau} \right\rceil$, gdje je sa $\lceil\cdot\rceil$ označena funkcija "najmanje cijelo". Tada je $a \le m\tau < a+\tau$. Naime, iz nejednakosti

$$x \le \lceil x \rceil < x+1, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

slijedi

$$a = \left(\frac{a}{\tau}\right)\tau \le m\tau = \left\lceil \frac{a}{\tau} \right\rceil \tau < \left(\frac{a}{\tau}+1\right)\tau = a+\tau$$

pa je $a \le m\tau < a+\tau$. Sada računamo

$$\int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{m\tau} f(x)\,dx + \int_{m\tau}^{a+\tau} f(x)\,dx = \begin{bmatrix} t=x-\tau & m\tau\mapsto (m-1)\tau \\ dt=dx & a+\tau\mapsto a \end{bmatrix} =$$
$$= \int\limits_{a}^{m\tau} f(x)\,dx + \int_{(m-1)\tau}^{a} f(t+\tau)\,dt = \int_{(m-1)\tau}^{m\tau} f(t)\,dt =$$
$$= \begin{bmatrix} s=t-(m-1)\tau & (m-1)\tau\mapsto 0 \\ ds=dt & m\tau\mapsto\tau \end{bmatrix} = \int\limits_{0}^{\tau} f(s+(m-1)\tau)\,ds = \int\limits_{0}^{\tau} f(x)\,dx.$$

△

Zadatak 2.15 ⋆ Izračunajte integral:

$$\int_{1}^{1+10\pi} \max\{|\sin x|, |\cos x|\}\,dx.$$

Rješenje. Funkcija $x \mapsto \max\{|\sin x|, |\cos x|\}$ je periodična s periodom $\pi/2$ pa je

$$\int_1^{1+10\pi} \max\{|\sin x|, |\cos x|\}\, dx = \int_0^{10\pi} \max\{|\sin x|, |\cos x|\}\, dx =$$
$$= 20\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{|\sin x|, |\cos x|\}\, dx = 20\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right) =$$
$$= 20(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}) = 20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 20\sqrt{2}$$

△

Vrijede formule parcijalne integracije:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx \tag{2.2}$$

i

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx$$

Ponekad se gornje formule zapisuju kao

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

i

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Zadatak 2.16 Izračunajte integrale koristeći metodu parcijalne integracije:

$$\text{(a)} \int x\, e^x\, dx \qquad \text{(b)} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$$

Rješenje.

(a) $$\int x\, e^x\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x\, dx & v = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x\, dx = e^x(x-1) + C$$

(b) $$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1+\ln 2}{2}$$

$\triangle$

Zadatak 2.17 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx \qquad \text{(c)} \int \ln x\,dx \qquad \text{(d)} \int \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Rješenje.

$$\text{(a)} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln(1+x^2) & du=\frac{2xdx}{1+x^2} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2dx}{1+x^2} =$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \ln 2 - 2 + 2\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u=\sin x & du=\cos x\,dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=\cos x & du=-\sin x\,dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^{\pi/2} - e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx =$$

$$= e^{\pi/2}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx = \frac{e^{\pi/2}+1}{2}$$

$$\text{(c)} \int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx\,dx & v=x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$$

$$\text{(d)} \int \operatorname{arctg} x\,dx = \begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg} x & du=\frac{dx}{x^2+1} \\ dv=dx\,dx & v=x \end{bmatrix} = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$\triangle$

Napomena. Promotrimo sljedeći primjer

$$\int e^x \operatorname{sh} x\,dx = \begin{bmatrix} u=\operatorname{sh} x & du=\operatorname{ch} x dx \\ dv=e^x\,dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^x\operatorname{sh} x - \int e^x\operatorname{ch} x\,dx$$

$$= \begin{bmatrix} u=\operatorname{ch} x & du=\operatorname{sh} x dx \\ dv=e^x\,dx & v=e^x \end{bmatrix} = e^x\operatorname{sh} x - \left(e^x\operatorname{ch} x - \int e^x\operatorname{sh} x\,dx\right)$$

$$= e^x(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) + \int e^x \operatorname{sh} x \, dx$$

Dakle, imamo

$$\int e^x \operatorname{sh} x \, dx = e^x(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) + \int e^x \operatorname{sh} x \, dx. \tag{2.3}$$

Ako s lijeve i desne strane gornje jednakosti oduzmemo $\int e^x \operatorname{sh} x \, dx$ dobit ćemo da je $e^x(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) = 0$, tj. $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$ što je očito kontradikcija. U čemu je problem?

Problem je nastupio pri doslovnoj interpretaciji formule (3.31). Naime, neka je I otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima primitivnu funkciju $F : I \to \mathbb{R}$. Neodređeni integral $\int f(x) \, dx$ funkcije f je po definiciji **klasa ekvivalencije** $F(x) + C := [F]_\sim$ funkcije F po relaciji $\sim$, gdje je $\sim$ definirana na skupu $\mathcal{D}(I)$ svih derivabilnih funkcija na I s

$$G \sim H \;:\!\iff G' = H' \iff (G - H)' = 0 \iff (\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in I)(G(x) - H(x) = c).$$

Eksplicitno,

$$\int f(x) \, dx := F(x) + C = \{x \mapsto F(x) + c : \; c \in \mathbb{R}\}.$$

Zbog toga bi formulu (3.31) preciznije trebali zapisati u sljedećem obliku

$$\int u(x)v'(x) \, dx = (u(x)v(x) + C) - \int u'(x)v(x) \, dx.$$

Dakle, jednakost (2.3) je jednakost klasa ekvivalencija (tj. jednakost pripadnih skupova), pa jedino što iz nje možemo zaključiti je

$$e^x(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) + C = 0 + C, \quad \text{tj.}$$

$$\{x \mapsto e^x(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) + c : \; c \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto c : \; c \in \mathbb{R}\}.$$

Odavde specijalno slijedi da postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ takva da je $e^x(\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) = c$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Direktnim računom možemo provjeriti da je to uistinu tako, te da je tražena kosnstanta $c = -1$.

$\triangle$

Zadaci za vježbu

2.18 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int (3x^2-2x+1)(x^3-x^2+x-9)^7\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx$$

$$\text{(c)} \int_e^{e^e} x^3 e^{x^4}\,dx \qquad \text{(d)} \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}$$

2.19 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \text{(c)} \int e^x \sin^2 x\,dx \qquad \text{(d)} \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

2.20 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{x^3}{x^6+2x^3+1}\,dx \qquad \text{(c)} \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x}\,dx$$

$$\text{(d)} \int \frac{dx}{\sin x} \qquad \text{(d)} \int \frac{dx}{\cos x}$$

2.21 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \sin 3x \sin 5x\,dx \qquad \text{(b)} \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx \qquad \text{(c)} \int \sin \ln x\,dx \qquad \text{(d)} \int (x^4+3x)\cos x\,dx$$

2.22 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \arcsin^2 x\,dx \qquad \text{(b)} \int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx \qquad \text{(c)} \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx \qquad \text{(d)} \int x^2 \arccos x\,dx$$

2.23 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{\arcsin x}{x^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{(b)} \int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx \qquad \text{(c)} \int e^x \sin x \sin 3x\,dx$$

2.24 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \sqrt{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x} \qquad \text{(c)} \int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$\text{(d)} \int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx \qquad \text{(e)} \int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x} \qquad \text{(f)} \int e^{x+\ln x}\,dx$$

2.25 Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite sljedeće jednakosti:

(a) $\displaystyle\int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

2.26 Izračunajte

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2.27 Izračunajte

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int\limits_1^t \left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1} - \frac{\pi}{4}\right)\,dx}{\ln t}.$$

2.28 Dokažite

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int\limits_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt}{x^{-2}e^{x^2}} = 1.$$

2.29 Odredite sve neprekidne funkcije $f\colon [a,b] \to [0,+\infty\rangle$ takve da je $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

2.3 Integrali racionalnih funkcija

Zadatak 2.30 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{x^2+a^2} \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{x^2-a^2} \qquad \text{(c)} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx,\ p^2-4q<0.$$

Rješenje.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \begin{bmatrix} t=\frac{x}{a} \\ dt=\frac{dx}{a} \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$

(b) Rastavimo izraz $\dfrac{1}{x^2-a^2}$ na parcijalne razlomke:

$\displaystyle\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a} \implies A=\frac{1}{2a},\ B=-\frac{1}{2a}$

Dakle,

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

(c) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx = \begin{bmatrix} t=x+\frac{p}{2} & x=t-\frac{p}{2} \\ dt=dx & \end{bmatrix} =$

$\displaystyle= \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dt = A\int\frac{tdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + (b-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} =$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\ln(t^2+q-\frac{p^2}{4}) + (B-\frac{Ap}{2})\frac{\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + (B-\frac{Ap}{2})\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$

△

Zadatak 2.31 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{x^3-2x^2+x} \qquad \text{(b)} \int \frac{x^3dx}{x^2+x+1} \qquad \text{(c)} \int \frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$$

$$\text{(d)} \int \frac{e^{3x}(10-2e^{3x})}{2e^{6x}-10e^{3x}+12}\,dx \qquad \text{(e)} \int \frac{\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx.$$

Rješenje.

(a) Rastav na parcijalne razlomke:
$\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2} \implies A=1,\ B=-1,\ C=1$
$\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C=$
$\displaystyle\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$

(b) $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{x^2+x+1}=\int\left(x-1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{x^2}{2}-x+$
$\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}+C=\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

(c) Rastav na parcijalne razlomke:
$\dfrac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2}=\dfrac{Ax+b}{x^2+2x+2}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} \implies A=2,\ B=-1,\ C=-1,\ D=1$, pa je
$\displaystyle\int\frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx=\int\frac{2x-1}{x^2+2x+2}\,dx+\int\frac{-x+1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx=$
$\displaystyle=\int\frac{2x-1}{(x+1)^2+1}\,dx+\int\frac{-x+1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx=\begin{bmatrix} t=x+1 & x=t-1\\ dt=dx & \end{bmatrix}=$
$\displaystyle=\int\frac{2t-3}{t^2+1}\,dt+\int\frac{-t+2}{(t^2+1)^2}\,dt=\int\frac{2tdt}{t}-3\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{tdt}{(t^2+1)^2}+2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=$
$\displaystyle\ln(t^2+1)-3\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2(t^2+1)}+2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=(*)$
Još treba izračunati:
$\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{1+t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=\operatorname{arctg}t-\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=$
$\displaystyle\begin{bmatrix} u=t & du=dt\\ dv=\frac{tdt}{(t^2+1)^2} & v=-\frac{1}{2(t^2+1)}\end{bmatrix}=\operatorname{arctg}t+\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+\frac{t}{2(t^2+1)}-$
$\displaystyle\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{t}{2(t^2+1)}+C$, pa je
$\displaystyle(*)=\ln(t^2+1)-3\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2(t^2+1)}+\operatorname{arctg}t+\frac{t}{t^2+1}+C=\ln(t^2+1)+\frac{2t+1}{2(t^2+1)}-$
$\displaystyle2\operatorname{arctg}t+C=\ln(x^2+2x+2)+\frac{2x+3}{2(x^2+2x+2)}-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$

(d) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}(10-2e^{3x})}{2e^{6x}-10e^{3x}+12}\,dx=\begin{bmatrix} t=e^{3x}\\ dt=3e^{3x}\,dt\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{10-2t}{2t^2-10t+12}\,dt=\frac{1}{3}\int\frac{5-t}{t^2-5t+6}\,dt=$
$(*)$
Rastav na parcijalne razlomke:
$\dfrac{5-t}{t^2-5t+6}=\dfrac{5-t}{(t-2)(t-3)}=\dfrac{A}{t-2}+\dfrac{B}{t-3} \implies A=-\dfrac{3}{5},\ B=-\dfrac{2}{5}$

$$(*) = -\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t-2} - \frac{2}{15}\int\frac{dt}{t-3} = -\frac{1}{5}\ln|t-2| - \frac{2}{15}\ln|t-3| + C =$$
$$= \frac{1}{15}\ln\frac{(t-3)^2}{|t-2|^3} + C = \frac{1}{15}\ln\frac{(e^{3x}-1)^2}{|e^{3x}-2|^3} + C$$

(e) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int\frac{dt}{1+t^4} = (*)$

Vrijedi:

$t^4+1 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$, odakle slijedi rastav na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1} \implies A = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ B = \frac{1}{2},\ C = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ D = \frac{1}{2}$$

$$\int\frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} -$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}\,dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} -$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2-\sqrt{2}t+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)\Big) + C =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1}{\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x+1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x-1)\Big) + C$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

2.32 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} \qquad \text{(b)} \int \frac{x^3 dx}{x^2+2x+4} \qquad \text{(c)} \int \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$$

2.33 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{(x+1)^3\,dx}{x^2-x} \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{x^4-1} \qquad \text{(c)} \int \frac{x^4 dx}{(x+1)^3}$$

2.34 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3} \qquad \text{(b)} \int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$$

2.35 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3} \qquad \text{(b)} \int \frac{x^5+x^4-2}{x^4-4x^2+4}\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5+5x+1)}\,dx$$

2.4 Integrali iracionalnih funkcija

Osnovna ideja pri računanju integrala iracionale funkcije je naći pogodnu supstituciju (ukoliko je to moguće) kojom bi se taj integral sveo na integral neke racionalne funkcije.

Zadatak 2.36 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int_{-1}^{0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x^5-x^4}+\sqrt[4]{2x^{10}-x^9}}\,dx \qquad \text{(c)} \int_{2}^{3} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$$

Rješenje.

$$\text{(a)} \int_{-1}^{0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt[6]{x+1} \Rightarrow x=t^6-1 & 0\mapsto 1 \\ dx=6t^5\,dt & -1\mapsto 0 \end{array}\right] = 6\int_0^1 \frac{t^5-t^8}{1+t^2}\,dt =$$

$$[\text{dijelimo polinome}: \; -t^8+t^5=(1-t-t^2+t^3+t^4-t^6)(1+t^2)+(t-1)]$$

$$6\int_0^1 (1-t-t^2+t^3+t^4-t^6)\,dt + 6\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} - 6\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 6\Big(t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+$$

$$\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\Big)\Big|_0^1 + 3\ln(1+t^2)\Big|_0^1 - 6\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{199}{70}+3\ln 2-\frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{(b)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x^5-x^4}+\sqrt[4]{2x^{10}-x^9}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x^2(\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x^2-x})} = \int \frac{dx}{x^2\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{2-\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \left[\begin{array}{l} t=\sqrt[4]{2-\frac{1}{x}} \Rightarrow 2-\frac{1}{x}=t^4 \\ \frac{dx}{x^2}=4t^3\,dt \end{array}\right] = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,dt = 4\int \frac{t^2}{t+1}\,dt = 4\left(\int (t-1)\,dt + \int \frac{dt}{t+1}\right)$$

$$= 2t^2-4t+\ln|1+t|+C = 2\sqrt{2-\frac{1}{x}} - 4\sqrt[4]{2-\frac{1}{x}} + \ln\left(1+\sqrt[4]{2-\frac{1}{x}}\right)+C.$$

$$\text{(c)} \int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow x=\frac{t^2+1}{t^2-1} & 2\mapsto\sqrt{3} \\ dx=\frac{-4t}{(t^2-1)}\,dt & 3\mapsto\sqrt{2} \end{array}\right] = -4\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$= 4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt = \left[\begin{array}{ll} u=t & du=dt \\ dv=\frac{t}{(t^2-1)^2}\,dt & v=-\frac{1}{2(1-t^2)} \end{array}\right] = 2\Big[\Big(\frac{t}{1-t^2}\Big)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2-1}\Big] =$$

$$-\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}-2\ln(\sqrt{2}-1).$$

Napomena. Prethodni zadatak možemo lako poopćiti. Neka je R racionalna funkcija i neka su $m_1,\ldots,m_k$ cijeli brojevi te $n_1,\ldots,n_k$ prirodni brojevi. Stavimo

$$N := \mathrm{NZV}\{n_1,\ldots,n_k\}.$$

Ako su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $ad - bc \neq 0$, tada integral oblika

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) dx$$

možemo svesti na integral racionalne funkcije koristeći supstituciju

$$t := \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Zadatak 2.37 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx \qquad \text{(b)} \int \sqrt{1+x^2}\, dx \qquad \text{(c)} \int_{-4}^{-2} \sqrt{x^2-4}\, dx.$$

Rješenje.

(a) $$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx = [\text{podintegralna funkcija je parna}] = 2\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 3\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{3} & 0 \to 0 \\ dx = 3\cos t\, dt & 3 \to \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1-\sin^2 t)}\cos t\, dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt = 9\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{2}.$$

(b) $$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sh} t \Rightarrow t = \operatorname{Arsh} x \\ dx = \operatorname{ch} t\, dt \end{array}\right] = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\, dt = \int \operatorname{ch}^2 t\, dt =$$
$$\frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2t + 1)\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} + t\right) + C = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{Arsh} x\right) + C.$$

(c) $$\int_{-4}^{-2} \sqrt{x^2-4}\, dx = [\text{podintegralna funkcija je parna}] = \int_2^4 \sqrt{x^2-4}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 2\operatorname{ch} t \Rightarrow t = \operatorname{Arch}\frac{x}{2} & 2 \to 0 \\ dx = 2\operatorname{sh} t\, dt & 4 \to \operatorname{Arch} 2 \end{array}\right] = 2\int_0^{\operatorname{Arch} 2} \sqrt{4(\operatorname{ch}^2 t - 1)}\operatorname{sh} t\, dt = 4\int_0^{\operatorname{Arch} 2} \operatorname{sh}^2 t\, dt =$$

$$2\int_0^{\operatorname{Arch} 2} (\operatorname{ch} 2t - 1)\, dt = 2\left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t\right)\Big|_0^{\operatorname{Arch} 2} = 4\sqrt{3} - 2\operatorname{Arch} 2.$$

Napomena. Prethodni zadatak možemo lako generalizirati. Neka je R racionalna funkcija.

(1) Integral tipa
$$\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2})\, dx, \quad k > 0$$
supstitucijom
$$x = k \sin t \quad \text{odnosno} \quad x = k \operatorname{th} t$$
svodimo na integral trigonometrijskih odnosno hiperbolnih funkcija.

(2) integral tipa
$$\int R(x, \sqrt{x^2 + k^2})\, dx, \quad k > 0$$
supstitucijom
$$x = k \operatorname{tg} t \quad \text{odnosno} \quad x = k \operatorname{sh} t$$
svodimo na integral trigonometrijskih odnosno hiperbolnih funkcija.

(3) integral tipa
$$\int R(x, \sqrt{k^2 - k^2})\, dx, \quad k > 0$$
supstitucijom
$$x = \frac{k}{\cos t} \quad \text{odnosno} \quad x = k \operatorname{ch} t,$$
svodimo na integral trigonometrijskih odnosno hiperbolnih funkcija.

Općenito, integral oblika
$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx,$$
svodimo na jedan od tri prethodno navedena tipa integrala koristeći supstituciju
$$t = x + \frac{b}{2a}.$$

Zadatak 2.38 Izračunajte integrale:
$$\text{(a)} \int_0^1 x^2 \sqrt{x - x^2}\, dx \qquad \text{(b)} \int \frac{5x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}\, dx.$$

Rješenje.

(a) $$\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 x^2\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t = x-\frac{1}{2} \Rightarrow x = t+\frac{1}{2} & 0\to -\frac{1}{2} \\ dt = dx & 1 \to \frac{1}{2} \end{array}\right] =$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{4}-t^2}\,dt$$
$$= \left[\begin{array}{ll} t = \frac{1}{2}\sin s \Rightarrow s = \arcsin 2t & 0\to 0 \\ dt = \frac{1}{2}\cos s\,ds & \frac{1}{2}\to\frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 s+1)\cos^2 s\,ds$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2s}{4}\,ds + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2s}{2}\,ds\right) = \frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin 4s}{8}\,ds + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2s}{2}\,ds\right) =$$
$$\cdots = \frac{5\pi}{128}.$$

(b) $$\int\frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int\frac{5x+4}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x+1 \Rightarrow x = t-1 \\ dx = dt \end{array}\right] = \int\frac{5t-1}{\sqrt{t^2+4}}\,dt =$$
$$5\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4}} - \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = 5\int(\sqrt{t^2+4})'\,dt - \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = 5\sqrt{t^2+4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arsh}\frac{t}{2} +$$
$$C = 5\sqrt{x^2+2x+5} - \frac{1}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x+1}{2} + C.$$

Zadaci za vježbu

2.39 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int x\sqrt[3]{4+3x}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} \qquad \text{(c)} \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx$$

2.40 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{(c)} \int \frac{1}{1-2x}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\,dx$$

2.41 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{(b)} \int \sqrt{2-x-x^2}\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$$

2.42 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{\sqrt[14]{x^{28}(x-1)^9(x+1)^5}+14}{\sqrt[7]{(x-1)^9(x+1)^5}+14x^2}\,dx$$

$$\text{(c)} \int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$$

2.5 Integrali trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija

Zadatak 2.43 Izračunajte integrale:

(a) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$ (b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x \cos^2 x \, dx$ (c) $\int \operatorname{sh}^3 x \, dx$ (d) $\int \cos^6 x \, dx$.

Rješenje.

(a) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{bmatrix} = \int t^2(1-t^2) \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{x} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} \, dx = \frac{1}{8} \int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \ldots = \frac{3\pi + 2\sqrt{2} - 2}{384}$

(c) $\int \operatorname{sh}^3 x \, dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{ch} x \\ dt = \operatorname{sh} x \, dx \end{bmatrix} = \int (t^2 - 1) \, dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C$

(d) Označimo $I_n = \int \cos^n x \, dx$. Tada je

$I_n = \int \cos^n x \, dx = \begin{bmatrix} u = \cos x^{n-1} & du = -(n-1)\cos^{n-2} \sin x \, dx \\ dv = \cos x \, dx & v = \sin x \end{bmatrix} = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$ pa vrijedi rekurzivna relacija: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x$.

Sada je $I_0 = \int dx = x + C$

$I_2 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{\cos x \sin x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\cos x \sin x}{2} + C$

$I_4 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{\cos^3 x \sin x}{4} = \frac{3x}{8} + \frac{3 \cos x \sin x}{8} + \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + C$

$I_6 = \frac{5}{6} I_4 + \frac{\cos^5 x \sin x}{6} = \frac{5x}{16} + \frac{5 \cos x \sin x}{48} + \frac{5 \cos^3 x \sin x}{24} + \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + C$

△

Napomena. Neka je R racionalna funkcija.

(a) Za računanje integrala oblika $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ se koristi **univerzalna supstitucija**:

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}\\ dx &= \frac{2\,dt}{1+t^2} & \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ x &= 2\operatorname{arctg} t \end{aligned}$$

Provjerimo supstituciju:

$dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(b) Za računanje integrala oblika $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ se koristi **univerzalna supstitucija**:

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{th}\frac{x}{2} & \operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2}\\ dx &= \frac{2\,dt}{1-t^2} & \operatorname{ch} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2}\\ x &= 2\operatorname{Arth} t \end{aligned}$$

Provjerimo supstituciju:

$dx = \dfrac{2dt}{1-t^2}$

$\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\operatorname{ch} x = 2\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2} + 1 = \dfrac{2}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} + 1 = \dfrac{2}{1-t^2} + 1 = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

Zadatak 2.44 Izračunajte integral koristeći univerzalne supstitucije:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{1+2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}.$$

Rješenje.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = [\text{univerzalna supstitucija } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}] = \int \frac{1}{(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2} =$
$\displaystyle\int \frac{1+t^2}{(t^2+3)t}\,dt = [\text{rastav na parcijalne razlomke }] = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} + \frac{2}{3}\int\frac{t\,dt}{t^2+3} = \frac{1}{3}\ln|t| +$
$\displaystyle\frac{1}{3}\ln(t^2+3) + C = \frac{1}{3}\ln|t(t^2+3)| + C = \frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}^3\frac{x}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\operatorname{sh}x+3\operatorname{ch}x} = [\text{univerzalna supstitucija } t = \operatorname{th}\frac{x}{2}] = \int \frac{1}{(1+2\frac{2t}{1-t^2}+3\frac{1+t^2}{1-t^2})}\,\frac{2dt}{1-t^2} =$
$\displaystyle\int \frac{2dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \operatorname{arctg} t + 1 + C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}+1\right) + C$

△

Zadaci za vježbu

2.45 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \sin^4 x \cos^5 x \, dx \qquad \text{(b)} \int \operatorname{tg}^5 x \, dx \qquad \text{(c)} \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{\sin 2x}}$$

2.46 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{\sin x - \sin a} \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \qquad \text{(c)} \int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{2}\sin x + \cos x}$$

2.47 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} \qquad \text{(b)} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} \qquad \text{(c)} \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x} \, dx$$

2.48 Izračunajte integrale:

$$\text{(a)} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x} \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} \qquad \text{(c)} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx$$

2.6 Nepravi integrali

Definicija. Neka je $f : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom podsegmentu $[a, \xi]$ od $[a, +\infty\rangle$. Ako postoji konačan limes

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx \tag{2.4}$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcije f na $[a, +\infty\rangle$ i označava s

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Također kažemo da nepravi integral (2.5) **konvergira**. Ako limes u (2.4) ne postoji u $\mathbb{R}$, onda kažemo da nepravi integral (2.5) **divergira**.
Analogno definiramo pojam nepravog integrala za funkciju $f : \langle -\infty, a] \to \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx := \lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{a} f(x)\,dx.$$

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom segmentu, tada definiramo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \quad (c \in \mathbb{R}), \tag{2.6}$$

ukoliko oba neprava integrala s desne od (2.6) konvergiraju.

Napomena. Lako se pokaže da je definicija (2.6) dobra, tj. da ne ovisi o izboru točke $c \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.49 Izračunajte neprave integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ (c) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ $(a > 1)$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Rješenje.

(a) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^{\xi} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\xi} = \lim_{\xi \to +\infty} \operatorname{arctg} \xi = \frac{\pi}{2}.$$

(b) $$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_e^{\xi} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & e \mapsto 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & \xi \mapsto \ln \xi \end{bmatrix} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\ln \xi} \frac{dt}{t^3}$$
$$= \lim_{\xi \to +\infty} \left(-\frac{1}{2t^2}\right)\Big|_1^{\ln \xi} = \lim_{\xi \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln^2 \xi}\right) = \frac{1}{2}.$$

(c) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\left[\begin{array}{ll} x=\operatorname{ch}t\Rightarrow t=\operatorname{Arch}x & a\mapsto\operatorname{Arch}a\\ dx=\operatorname{sh}x\,dx & \xi\mapsto\operatorname{Arch}\xi\end{array}\right]=$ $\displaystyle\lim_{\xi\to+\infty}\int_{\operatorname{Arch}a}^{\operatorname{Arch}\xi}\frac{\operatorname{sh}t\,dt}{\operatorname{ch}^2t\operatorname{sh}t}=\lim_{\xi\to+\infty}\int_{\operatorname{Arch}a}^{\operatorname{Arch}\xi}\frac{dt}{\operatorname{ch}^2t}=\lim_{\xi\to+\infty}\operatorname{th}t\Big|_{\operatorname{Arch}t}^{\operatorname{Arch}\xi}=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{th}(\operatorname{Arch}\xi)-$ $\displaystyle\operatorname{th}(\operatorname{Arch}a))=1-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}.$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+13}=\int_{-\infty}^{+\infty}=\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\int_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{(x+3)^2+4}+\int_{-3}^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)^2+4}=$ $\displaystyle\lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{-3}\frac{dx}{(x+3)^2+4}+\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-3}^{\eta}\frac{dx}{(x+3)^2+4}=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}\Big|_{\xi}^{-3}$ $\displaystyle+\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}\Big|_{-3}^{\eta}=\lim_{\xi\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\xi+3}{2}\right)+\lim_{\eta\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\eta+3}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+$ $\displaystyle\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

△

Napomena. Postojanje limesa

$$\lim_{\xi\to+\infty}\int_{-\xi}^{\xi}f(x)\,dx. \tag{2.7}$$

općenito ne povlači konvergenciju nepravog integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$.

Npr. za sve $\xi>0$ imamo $\displaystyle\int_{-\xi}^{\xi}x\,dx=0$, pa je stoga i $\displaystyle\lim_{\xi\to+\infty}\int_{-\xi}^{\xi}x\,dx=0$. S druge strane za $\xi>0$ imamo $\displaystyle\int_0^{\xi}x\,dx=\frac{\xi^2}{2}$, pa je $\displaystyle\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}x\,dx=+\infty$. Dakle, nepravi integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,dx$ divergira, pa onda ne postoji ni $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dx$.

S druge strane, ako nepravi integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ konvergira, tada limes (2.7) postoji i vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int_{-\xi}^{\xi}f(x)\,dx.$$

Limes (2.7) zove se **glavna vrijednost integrala** funkcije f i označava s

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx.$$

O njemu ćete više čuti na kompleksnoj analizi.

Definicija. Za nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ kažemo da **apsolutno konvergira**, ako konvergira nepravi integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Teorem. Apsolutna konvergencija povlači običnu konvergenciju, tj. ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ apsolutno konvergira, tada on i konvergira.

Napomena. Obrat prethodnog teorema općenito ne vrijedi. Naime, može se pokazati da nepravi integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

konvergira, ali da ne konvergira apsolutno.

Teorem. (**Usporedni kriterij**) Neka su $f, g : [a, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ dvije nenegativne funkcije koje su Riemann integrabilne na svakom segmentu $[a, b]$, $a < b$. Pretpostavimo da vrijedi

$$f(x) \le g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty\rangle.$$

(a) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konvergira, onda konvergira i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

(b) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira, onda divergira i nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Korolar. (**Granični kriterij**) Neka su $f, g : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}_+$ dvije pozitivne funkcije koje su Riemann integrabilne na svakom segmentu $[a, b]$, $b < a$. Pretpostavimo da u $\overline{\mathbb{R}}$ postoji limes

$$L := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0, +\infty].$$

(a) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konvergira i ako je $c \in [0, +\infty\rangle$, tada i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira.

(b) Ako nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ divergira i ako je $c \in \langle 0, +\infty]$, tada i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira.

Zadatak 2.50 U ovisnosti o parametru $p > 0$ ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad \text{gdje je } \ a > 0.$$

Rješenje. Po definiciji, nepravi integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira ako postoji konačan limes

$$L := \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} \frac{dx}{x^p}.$$

Promatramo slučajeve.

(i) Ako je $p = 1$, onda je $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +\infty} (\ln \xi - \ln a) = +\infty,$$

pa nepravi integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ divergira.

(ii) Ako je $p \neq 1$, onda je $\displaystyle\int_a^{\xi} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{\xi} = \frac{1}{1-p}(\xi^{1-p} - a^{1-p})$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{\xi \to +\infty} (\xi^{1-p} - a^{1-p}) = \begin{cases} +\infty & \text{za } p < 1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1} & \text{za } p > 1. \end{cases}$$

Dakle, nepravi integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $0 < p \leq 1$.

$\triangle$

Zadatak 2.51 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^5 + 4}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\, dx}{1 + x^2 \sin^2 x}$.

Rješenje.

(a) Tvrdimo da nepravi integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^5 + 4}}\, dx$ konvergira apsolutno.

Zaista, kako je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{4+x^5}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{4 + x^5}} = 1,$$

te kako nepravi integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ konvergira ($p = \frac{3}{2}$), iz graničnog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+4}}$ također konvergira.

Iz nejednakosti

$$\frac{|x\sin x|}{\sqrt{x^5+4}} \le \frac{x}{\sqrt{x^5+4}}, \quad \forall x > 0,$$

dokazane konvergencije nepravog integrala $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+4}}$ i usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^5+4}}\,dx$ konvergira apsolutno.

(b) Iz nejednakosti

$$\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}} \ge \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, \quad \forall x \in [1, +\infty\rangle,$$

divergencije nepravog integrala $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ ($p = \frac{1}{3}$) i usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ također divergira.

(c) Kako je

$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

te kako nepravi integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ divergira, prema graničnom kriteriju zaključujemo da integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$ također divergira.

(d) Iz nejednakosti

$$\frac{x}{1+x^2\sin^2 x} \ge \frac{x}{1+x^2} > \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [1, +\infty\rangle$$

divergencije nepravog integrala $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ ($p = 1$) i usporednog kriterija, slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\,dx$ također divergira.

△

Definicija. Neka je $f : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (ne nužno ograničena) funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom podsegmentu $[a, \xi]$ od $[a, b\rangle$. Ako postoji konačan limes

$$\lim_{\xi\to b-} \int_a^{\xi} f(x)\,dx, \tag{2.8}$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcije f na $[a, b\rangle$ i označava s

$$\int_{a}^{\to b} f(x)\,dx. \tag{2.9}$$

Također kažemo da nepravi integral (2.9) **konvergira**. Ako limes u (2.8) ne postoji u $\mathbb{R}$, onda kažemo da nepravi integral (2.9) **divergira**.
Analogno definiramo pojam nepravog integrala za funkciju $f : \langle a, b] \to \mathbb{R}$:

$$\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\xi\to a+} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Ako je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija koja je Riemann integrabilna na svakom podsegmentu od $\langle a, b\rangle$, tada definiramo

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx := \int_{a\leftarrow}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\to b} f(x)\,dx \quad (a < c < b), \tag{2.10}$$

ukoliko oba neprava integrala s desne od (2.10) konvergiraju.

Napomena. (a) Lako se pokaže da definicija (2.10) ne ovisi o izboru točke $a < c < b$.

(b) Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabilna funkcija, tada je

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

što pokazuje da je u tom slučaju nepravi integral jednak "običnom" Riemannovom integralu funkcije f na $[a, b]$.

(c) Za nepravi integral na ograničenom području vrijede analogni teoremi kao i za nepravi integral na neograničenom području.

Zadatak 2.52 Izračunajte neprave integrale

$$\text{(a)} \int_{0}^{\to 1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(b)} \int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\sin x}\,dx \qquad \text{(c)} \int_{0}^{\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$$

Rješenje.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1\leftarrow} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to 1-} \int_{0}^{\xi} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t \Rightarrow x = \arcsin t & 0 \mapsto 0 \\ dx = \cos t\,dt & \xi \mapsto \arcsin\xi \end{bmatrix} = \lim_{\xi\to 1-} \int_{0}^{\arcsin\xi} \sin t\,dt = \lim_{\xi\to 1-} (-\cos t)\Big|_{0}^{\arcsin\xi} = \lim_{\xi\to 1-} (1 - \cos\arcsin\xi) = \lim_{\xi\to 1-} (1 - \sqrt{1-\xi^2}) = 1.$

(b) $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\sin x}\,dx \lim_{\xi\to 0+} \int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{2}{3}} \cos x\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x & \xi \mapsto \arcsin\xi \\ dt = \cos x\,dx & \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{bmatrix} = \lim_{\xi\to 0+} \int_{\arcsin\xi}^{1} t^{-\frac{2}{3}}\,dt = \lim_{\xi\to 0+} \left(3 \cdot t^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{\arcsin\xi}^{1} = 3 \lim_{\xi\to 0+} (1 - \sqrt[3]{\arcsin\xi}) = 3.$

(d) Uzmimo $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ i stavimo

$$I_\varepsilon := \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx.$$

Po definiciji je $\displaystyle\int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon$. Koristeći supstituciju $t = \frac{\pi}{2} - x$, imamo

$$I_\varepsilon = \begin{bmatrix} t = \frac{\pi}{2} - x & 0 \mapsto \frac{\pi}{2} \\ dt = -dx & \frac{\pi}{2} - \varepsilon \mapsto \varepsilon \end{bmatrix} = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, dx.$$

Neka je

$$J_\varepsilon := \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x})\, dx.$$

Tada je $\displaystyle J_\varepsilon = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}\, dx = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 - (1 - 2\sin x \cos x)}}\, dx$

$\displaystyle = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin x - \cos x & \varepsilon \mapsto \sin\varepsilon - \cos\varepsilon \\ du = (\cos x + \sin x)\, dx & \frac{\pi}{2} - \varepsilon \mapsto \cos\varepsilon - \sin\varepsilon \end{bmatrix} =$

$\displaystyle\sqrt{2}\int_{\sin\varepsilon - \cos\varepsilon}^{\cos\varepsilon - \sin\varepsilon} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2\sqrt{2}\arcsin(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon).$

Stoga je

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} J_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(2\sqrt{2}\arcsin(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon)\Big) = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi.$$

Kako je

$$J_\varepsilon = 2I_\varepsilon - \int_0^\varepsilon \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, dx,$$

te kako je $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^\varepsilon \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = 0$ i $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\, dx = 0$, to je

$$\int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+} J_\varepsilon = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\triangle$

Zadatak 2.53 U ovisnosti o parametru $p > 0$ ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_{0\leftarrow}^a \frac{dx}{x^p}, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje. Po definiciji, nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^a \frac{dx}{x^p}$ konvergira ako postoji konačan limes

$$L := \lim_{\xi\to 0+}\int_\xi^a \frac{dx}{x^p}.$$

Promatramo slučajeve.

(i) Ako je $p = 1$, onda je za $0 < \xi < a$ $\displaystyle\int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{\xi}^{a} = \ln a - \ln \xi$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to 0+} \int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to 0+} (\ln a - \ln \xi) = +\infty,$$

pa nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{a} \frac{dx}{x}$ divergira.

(ii) Ako je $p \neq 1$, onda je za $0 < \xi < a$ $\displaystyle\int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{\xi}^{a} = \frac{1}{1-p}(a^{1-p} - \xi^{1-p})$. Stoga je

$$L = \lim_{\xi \to 0+} \int_{\xi}^{a} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{\xi \to 0+} (a^{1-p} - \xi^{1-p}) = \begin{cases} +\infty & \text{za } p > 1 \\ \frac{a^{1-p}}{1-p} & \text{za } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Dakle, nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{a} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $0 < p < 1$, a divergira za $p \geq 1$.

$\triangle$

Zadatak 2.54 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

(a) $\displaystyle\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{dx}{\ln x}$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\to 1} \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 - \cos x}$ (d) $\displaystyle\int_{1\leftarrow}^{\to 3} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2 - 4x + 3|}}\, dx$

Rješenje.

(a) Uzmimo $0 < \varepsilon < 1$. Tada je $\displaystyle\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\ln x} = \left[\begin{array}{ll} t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1 & 1 + \varepsilon \mapsto \varepsilon \\ dx = dt & 2 \mapsto 1 \end{array} \right] =$ $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{\ln(t+1)}$. Iz nejednakosti

$$\ln(t+1) < t, \quad \forall t > 0$$

slijedi

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{\ln(t+1)} > \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{t}.$$

kako je $0 < \varepsilon < 1$ bio proizvoljan, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dx}{x}$ divergira, iz usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{dx}{\ln x}$ također divergira.

(b) Uzmimo $0 < \varepsilon < 1$. Kako je

$$\left| \cos \frac{1}{1-x} \right| \leq 1, \quad \forall x \neq 1,$$

imamo

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\left|\cos\frac{1}{1-x}\right|}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} \le \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} = \begin{bmatrix} t = 1-x & 0 \mapsto 1 \\ dt = -\,dx & 1-\varepsilon \mapsto \varepsilon \end{bmatrix} = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}}.$$

Kako je $0 < \varepsilon < 1$ bio proizvoljan, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}}$ konvergira, iz usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_0^{\to 1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx$ apsolutno konvergira, pa stoga i konvergira.

(c) Uzmimo $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Iz nejednakosti

$$\sin x < x, \quad \forall x > 0,$$

slijedi

$$1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} \le 1 - \cos^2 x = \sin^2 x < x^2, \quad \forall x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}],$$

jer je $1 + \cos x \ge 1$, za sve $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}]$. Stoga je

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\cos x} > \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2} = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}.$$

Kako je $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ bio proizvoljan, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ divergira ($p = \frac{3}{2}$), iz usporednog kriterija slijedi da nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\cos x}$ također divergira.

(d) Tvrdimo da nepravi integral konvergira. Dokažimo da oba neprava integrala

$$\int_{1\leftarrow}^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx \quad \text{i} \quad \int_2^{\to 3} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx$$

konvergiraju. Ocjenjujemo:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} < \frac{5}{\sqrt{x-1}}, \quad \forall x \in \langle 1, 2],$$

jer je

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{3-x}} < \frac{5}{1} = 5, \quad \forall x \in \langle 1, 2].$$

Slično bismo dobili i ocjenu

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} < \frac{10}{\sqrt{3-x}}, \quad \forall x \in [2, 3\rangle.$$

Uzmimo proizvoljne $0 < \varepsilon, \delta < 1$. Zbog prethodnih nejednakosti imamo

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx < 5\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \left[\begin{array}{ll} t = x-1 & 1+\varepsilon \mapsto \varepsilon \\ dx = \,dt & 2 \mapsto 1 \end{array}\right] = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

te

$$\int_{2}^{3-\delta} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx < 10\int_{2}^{3-\delta} \frac{dt}{\sqrt{3-t}} = \left[\begin{array}{ll} t = 3-x & 2 \mapsto 1 \\ dx = -\,dt & 3-\delta \mapsto \delta \end{array}\right] = 10\int_{\delta}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Kako su $0 < \varepsilon, \delta < 1$ bili proizvoljni, te kako nepravi integral $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ konvergira ($p = \frac{1}{2}$), iz usporednog kriterija slijedi da oba neprava integrala

$$\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx \quad \text{i} \quad \int_{2}^{\rightarrow 3} \frac{x^2+1}{\sqrt{|x^2-4x+3|}}\,dx$$

također konvergiraju.

$\triangle$

Zadaci za vježbu

2.55 Izračunajte neprave integrale:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}(x^3+x)\,dx \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx.$$

2.56 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

$$\text{(a)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\ln x} \qquad \text{(b)} \int_e^{+\infty} \frac{\cos x^2 \cdot \ln x}{\sqrt{(x+1)^3}}\,dx \qquad \text{(c)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

2.57 Odredite parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ za kojeg nepravi integral

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{x}{x^2+4} - \frac{\alpha}{3x+2}\Big)\,dx$$

konvergira, te za taj α izračunajte gornji integral.

2.58 Neka je $f : [a,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ neprekidna nenegativna funkcija. Pretpostavimo da nepravi integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

konvergira.

(a) Mora li nužno vrijediti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

(b) Ako je f uniformno neprekidna na $[a,+\infty\rangle$, dokažite da je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2.59 Izračunajte neprave integrale:

$$\text{(a)} \int_0^{\to 1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{a\leftarrow}^{\to b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\quad (a<b) \qquad \text{(c)} \int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx.$$

2.60 Ispitajte konvergenciju nepravih integrala

$$\text{(a)} \int\limits_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \qquad \text{(b)} \int_0^{1\leftarrow} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \text{(c)} \int_0^{\to\pi} \frac{\sqrt{\pi-x}}{1+\cos x}\,dx \qquad \text{(d)} \int\limits_{0\leftarrow}^{1} \frac{\operatorname{tg} x \ln(1+x)}{\sqrt{x^5}}\,dx.$$

2.7 Primjene određenih integrala

2.7.1 Računanje površina

Poršina lika omeđenog pravcima $x = a$ i $x = b$ te krivuljama $y = f(x)$ i $y = g(x)$ je

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Zadatak 2.61 Odredite površinu lika oomedjenog krivuljama:

$$y = 4 - x^2 \quad \text{ i } y = x^2 - 2x.$$

Rješenje. Prvo pronađemo presjek krivulja:

$$4 - x^2 = x^2 - 2x \implies (x+1)(x-2) = 0 \implies x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Stoga iz slike vidimo da je

$$P = \int_{-1}^{2} ((4 - x^2) - (x^2 - 2x)\, dx = \ldots = 9.$$

△

Zadatak 2.62 Odredite površinu lika oomedjenog krivuljom

$$y = x^2 - x - 6,$$

osi apscisom i pravcima $x = -3$ i $x = -2$.

Rješenje. Iz slike se vidi da je

$$P = \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2 - 0)\, dx + \int_{-2}^{1} (0 - (x^2 - x - 6))\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 + x - 2 - 0)\, dx = \ldots = \frac{49}{6}.$$

△

U polarnim koordinatama krivulju zadajemo s

$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Tada je površina sektora jednaka

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Zadatak 2.63 Izračunajte površinu omeđenu prvim i drugm zavojem **Arhimedove spirale**:

$$r = a\varphi, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje.

$$P = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}(a\varphi)^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\varphi)^2\,d\varphi = \ldots = 8a^2\pi^3.$$

$\triangle$

Zadatak 2.64 Odredite površinu **Bernoullijeve lemniskate**:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Rješenje. Koristeći formule za prijelaz iz pravokutnih koordinata u polarne,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

dobijemo

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = r^4 \\ a^2(x^2 - y^2) &= a^2r^2(\cos^2\varphi\sin^2\varphi) = a^2r^2\cos 2\varphi, \end{aligned}$$

pa je jednadžba lemniskate u polarnim koordinatama

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

$$\cos 2\varphi \geq 0, \text{ za } \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$$

Iz slike vidimo da je

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi = \ldots = a^2.$$

$\triangle$

U parametarskim koordinatama krivulju zadajemo s:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2] \ .$$

Tada je površina omeđena krivuljom

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

i pravcima $x = x(t_1)$ i $x = x(t_2)$ da na formulom:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\, dt,$$

gdje je $\cdot = \dfrac{d}{dt}$ (derivacija po t).

Zadatak 2.65 Odredite parametarsku jednadžbu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i izračunajte joj površinu.

Rješenje.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi] .$$

Iz slike vidimo da je

$$\begin{aligned} 0 = x(t_1) = a\cos t_1 &\implies t_1 = \frac{\pi}{2} \\ a = x(t_2) = a\cos t_2 &\implies t_2 = 0 \end{aligned}$$

pa je

$$P = 4\int_{\pi/2}^{0} y(t)\dot{x}(t)\, dt = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)\, dt = \ldots = ab\pi.$$

△

2.7.2 Računanje duljine luka krivulje

Ako je $y = f(x)$, onda je duljina luka krivulje koja je dio grafa funkcije $y = f(x)$ između točaka $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, gdje je $a < b$ jednaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Zadatak 2.66 Odredite duljinu **astroide**

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

gdje je $a > 0$.

Rješenje. Implicitnim deriviranjem dobijemo

$$
\begin{aligned}
x^{2/3} + y^{2/3} &= a^{2/3} \qquad \Big/ \frac{d}{dx} \\
\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot y' &= 0 \\
\Longrightarrow y' &= \frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
l &= 4\int_0^a \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx \\
&= 4a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}\,dx = \ldots = 6a.
\end{aligned}
$$

△

U polarnim koordinatama je duljina luka krivulje

$$r = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$$

dana formulom

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,d\varphi,$$

tj. kraće

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,d\varphi.$$

Zadatak 2.67 Odredite ukupnu duljinu **kardioide**

$$r = a(1+\cos\varphi), \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje. Sa slike vidimo da je

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + (\dot{r})^2},d\varphi = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 8a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a.$$

△

Duljina krivulje zadana parametarskim koordinatama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$$

je dana s

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt.$$

Zadatak 2.68 Odredite duljinu jednog svoda **cikloide**

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]\ , \quad \text{gdje je } a > 0.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = \ldots = 8a. \end{aligned}$$

$\triangle$

2.7.3 Računanje volumena i oplošja rotacijskih tijela

Ako dio krivulje $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ rotira oko:

- x-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

- y-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Zadatak 2.69 Odredite volumen kugle radijusa $r > 0$.

Rješenje. Kuglu radijusa r dobijemo ako zarotiramo krivulju $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ oko x-osi pa je volumen kugle

$$V_x = \pi \int_{-r}^{r} y^2\, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi(r^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^r$$
$$= 2\pi(r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

△

Zadatak 2.70 Odredite volumen **torusa** nastalog rotacijom kružnice

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2$$

oko y-osi.

Rješenje. Iz slike se vidi da je

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (R + \sqrt{r^2 - y^2})^2\, dy - \pi \int_{-r}^{r} (R - \sqrt{r^2 - y^2})^2\, dy$$
$$= 2\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \ldots = 2R\pi \cdot r^2 \pi$$

△

Ako dio krivulje $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ rotira oko x-osi, onda je površina nastale rotacijske plohe dana formulom:

$$V_x = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Zadatak 2.71 Nađite oplošje kugle radijusa $r > 0$.

Rješenje. Kuglu radijusa r dobijemo ako zarotiramo krivulju $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ oko x-osi pa je oplošje kugle

$$S_x = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 4r^2\pi$$

△

Ako krivulja zadana u polarnim koordinatama

$$r = f(\varphi), \ \varphi \in [\alpha, \beta],$$

rotira oko polarne osi, onda je volumen dobivenog tijela jednak

$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Zadatak 2.72 Izračunajte volumen tijela koji nastaje rotacijom krivulje

$$r = a \sin 2\varphi$$

oko polarne osi.

Rješenje.

$$\sin 2\varphi \geq 0, \quad \text{za } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned} V &= 2V_1 = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int\limits_{0}^{\pi/2} (a \sin 2\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{32\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{32\pi}{3} a^3 \int_0^1 t^4(1-t^2)\, dt = \ldots = \frac{64\pi}{105} a^3 \end{aligned}$$

△

Ako krivulja zadana u polarnim koordinatama

$$r = f(\varphi), \ \varphi \in [\alpha, \beta],$$

rotira oko polarne osi, onda je oplošje dobivenog rotacijskog tijela jednak

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \sin\varphi \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} \, d\varphi.$$

Zadatak 2.73 Odredite površinu koja nastaje rotacijom kardioide

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

oko polarne osi.

Rješenje.

$$S = 2\pi \int_0^\pi a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi$$
$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^{3/2}\sin\varphi\,d\varphi = \ldots = \frac{32}{5}a^2\pi$$

△

Ako parametarski zadana krivulja

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [t_1, t_2]$$

rotira oko

- x-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 \dot{x}(t)\,dt$$

- y-osi, onda je volumen nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 \dot{y}(t)\,dt$$

Zadatak 2.74 Izračunajte volumen **elipsoida** nastalog rotacijom elipse

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

oko x-osi.

Rješenje. Iz slike vidimo da je

$$-a = x(t_1) = a\cos t_1 \implies t_1 = -\pi$$
$$a = x(t_2) = a\cos t_2 \implies t_2 = \pi$$

pa je

$$V_x = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (b\sin t)^2(-a\sin t)\,dt = ab^2\pi \int_{-\pi}^{\pi} sin^3 t\,dt = \ldots = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

△

Napomena. Ako je $a = b = r$, onda je elipsoid zapravo kugla radijusa r pa je njen volumen jednak $\frac{4}{3}r^3\pi$. Ako parametarski zadana krivulja

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$$

rotira oko

- x-osi, onda je oplošje nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$

- y-osi, onda je oploqv sje nastalog rotacijskog tijela dan formulom:

$$S_y = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$

Zadatak 2.75 Izračunajte oplošje tijela koje nastaje rotacijom **astoride**

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$

Rješenje. Sa slike se vidi da je

$$\begin{aligned} S_x &= 2 \cdot 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} a\sin^3 t\sqrt{(3a\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt \\ &= 12a^2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos t\, dt = 12a^2\pi \int_0^1 s^4\, ds = 12a^2\pi\pi\frac{s}{5}\Big|_0^1 = \frac{12a^2\pi}{5} \end{aligned}$$

△

Zadaci za vježbu

2.76 Odredite površinu lika omeđenog parabolom

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

i njenim tangentama povučenim u točkama $A(0, -3)$ i $B(3, 0)$.

(Rj. $\frac{9}{4}$)

2.77 Nađite površinu između krivulja

$$y = 2 - x^2 \quad \text{i } y^3 = x^2.$$

(Rj. $\frac{32}{15}$)

2.78 Nađite površinu između krivulja

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{i } y = \frac{x^2}{2}.$$

(Rj. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$)

2.79 Izračunajte površinu omeđenu "ružom s 3 latice":

$$r = a \sin 3\varphi, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

(Rj. $\frac{a^2\pi}{4}$)

2.80 Izračunajte površinu omeđenu **kardioidom**:

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad \text{gdje je } a > 0.$$

(Rj. $\frac{3a^2\pi}{2}$)

2.81 Odredite površinu omeđenu jednim lukom **cikloide**

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \geq 0 \ , \quad \text{gdje je } a > 0.$$

i osi apscisa.

(Rj. $3a^2\pi$)

2.82 Nađite duljinu luka krivulje

$$y = \ln \cos x,$$

za $x \in [0, a]$, gdje je $a \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

(Rj. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin a}{1-\sin a}$)

2.83 Odredite duljinu prvog zavoja **Arhimedove spirale**

$$r = a\varphi, \quad \text{gdje je } a > 0.$$

(Rj. $a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$)

2.84 Izračunajte duljinu prvog zavoja **logaritamske spirale**

$$y = e^{\varphi}, \ \varphi \in [0, 2\pi].$$

(Rj. $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$)

2.85 Odredite parametarsku jednadžbu **astroide**

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

i izračunajte joj diljinu.

(Rj. $8a$)

2.86 Izračunajte duljinu luka parabole $y = \frac{x^2}{2}$ od točke $(0, 0)$ do točke $(2, 2)$.

(Rj. $\frac{1}{2}(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}))$)

2.87 Odredite površinu omeđenog krivuljama $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$ te osi apscisa.(Uputa: integrirajte po varijabli y)

(Rj. $\sqrt{2} - 1$)

2.88 Odrete površinu lika koji se nalazi unutar kruňice $r = 3\cos\varphi$, ali izvan kardioide $r = 1 + \cos\varphi$.

(Rj. π)

2.89 Odrete površinu lika koji se nalazi unutar kruňice $r = 3\cos\varphi$ i unutar kardioide $r = 1 + \cos\varphi$.

(Rj. $\frac{5\pi}{4}$)

2.90 Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ i x-osi oko y-osi.

(Rj. $2\pi^2$)

2.91 Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = x^4$ i pravcem $y = 1$ oko osi y.

(Rj. $\frac{2\pi}{3}$)

2.92 Odredite volumen **rotacijskog paraboloida** koji nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $x = y^2$ i pravcem $x = a$, za $a > 0$ oko x-osi.

(Rj. $\frac{a^2\pi}{2}$)

2.93 Odredite volumen tijela nastalog rotacijom kardioide

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

oko polarne osi.

(Rj. $\frac{8}{3}\pi a^3$)

2.94 Izračunajte površinu plohe koja nastaje rotacijom dijela krivulje $y = \frac{x^3}{3}$ od $x = 0$ do $x = 1$ oko osi y.

(Rj. $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$)

3

Red

3.1 Osnovna svojstva

Definicija. **Red** je uređeni par $((a_n),(S_n))$ niza (a_n) i niza (S_n) **parcijalnih suma** definiranih sa

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Red označavamo sa $\sum a_n$. Kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira** ako konvergira niz pripadnih parcijalnih suma (S_n), čiji limes zovemo **suma reda** i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_n S_n.$$

Ako niz parcijalnih suma reda nije konvergentan, onda kažemo da red **divergira**.

Primjer.

(a) Neka je $q \in \mathbb{R}^d$. Red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ zovemo **geometrijski red** i on konvergira za $q \in \langle -1, 1\rangle$.

Zaista,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Dakle,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(b) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zovemo **harmonijski red** i on divergira, točnije $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Clanove niza parcijalnih suma harmonijskog reda se ponekad označavaju s (H_n) i zovu se

harmonijski brojevi. Može se pokazati da je

$$\lim_n (H_n - \ln n) = \lim_n (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n) = \gamma \approx 0.57721.$$

γ se zove Euler-Mascheronijeva konstanta.

Teorem. (**Nužni uvjet konvergencije reda**) Ako red $\sum a_n$ konvergira, onda je $\lim_n a_n = 0$. ■

Napomena.

(a) Obrat u prethodnom teoremu ne vrijedi. Npr. harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{n}$ divergira, ali je $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

(b) Ako niz (a_n) nije konvergentan ili ako je $\lim_n a_n \neq 0$, onda iz gornjeg teorema slijedi da red $\sum a_n$ divergira.

Primjer. Geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty}$ divergira za $|q| \geq 1$;

- za $q \leq -1$ niz (q^n) nije konvergentan,
- za $q = 1$ je $\lim_n q^n = 1$,
- za $q > 1$ je $\lim_n q^n = +\infty$,

jer ni u jednom od ovih slučajeva nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije reda.

Zadatak 3.1 Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (d) $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, gdje je $m \in \mathbb{N}$

Rješenje.

(a) Rastavom na parcijalne razlomke je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1}$$

pa je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

pa je red konvergentan i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

(b) Rastavom na parcijalne razlomke je

$$\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}$$

pa je za $n \geq 3$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k-2} \right) = 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-1} - 3\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} \\ &= 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} - 3 - \frac{3}{2} - 3\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} - 3 - \frac{3}{2} \to -4, \quad \text{kada } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Dakle, red je konvergentan i $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = -4.$

(c) $\lim_n (-1)^n$ ne postoji (niz ima 2 gomilišta: -1 i 1) pa nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije $\Longrightarrow$ red je divergentan

(d) $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{m+n}} = \frac{2}{3^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^m} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{m-1}}.$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

3.2 Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \quad \text{gdje je } \alpha \in \langle 0, \pi \rangle$

3.3 Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}), \quad \text{gdje je } a > 0$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

3.2 Kriteriji konvergencije reda

3.2.1 Leibnizov kriterij

Teorem. (**Leibnizov kriterij**) Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takvih da

- postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n+1} < a_n$, za sve $n \geq m$,
- $\lim\limits_n a_n = 0$.

tada red $\sum(-1)^n a_n$ konvergira. ■

Zadatak 3.4 Ispitajte konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

Rješenje.

(a) $a_n = \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
Vrijedi:

- $a_{n+1} < a_n$, za $n \geq 1$,
- $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

Leibnizov kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

(b) $a_n = \dfrac{1}{n - \ln n}$
Vrijedi:

- $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$

$$f'(x) = -\frac{x-1}{x(x - \ln x)^2} < 0, \quad \text{za } x > 1$$

Dakle, f je strogo padajuća na $[1, +\infty\rangle$ pa je $a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1}$, za sve $n \geq 1$

- $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n \dfrac{1}{n - \ln n} = \lim\limits_n \dfrac{1}{\ln \frac{e^n}{n}} = 0$,

Leibnizov kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

△

Definicija. Kažemo da red $\sum a_n$ **apsolutno konvergira** ako konvergira red $\sum |a_n|$.

Teorem. Apsolutno konvergentan red je konvergentan. ■

Definicija. Ako red $\sum a_n$ konvergira, ali red $\sum |a_n|$ divergira, onda kažemo da red $\sum a_n$ **uvjetno konvergira**.

Zadatak 3.5 Ispitajte apsolutnu i uvjetnu konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$$

Rješenje.

(a) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira po Leibnizovom kriteriju, dok je red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonijski pa divergira. Dakle, zadani red je uvjetno konvergentan.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$ pa red apsolutno konvergira (pa onda i konvergira).

(c) $\displaystyle\lim_n \frac{(-1)^{n-1}}{6n-5}$ ne postoji, jer pripadni niz ima dva gomilišta $-\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{6}$. Dakle, nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije pa red divergira.

△

3.2.2 D'Alembertov kriterij

Teorem. (**D'Alembertov kriterij**) Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.

(i) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

(ii) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ divergira. ■

Korolar. Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva takav da postoji

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Tada:

- $L < 1 \implies$ red $\sum a_n$ apsolutno konvergira
- $L > 1$ (može i $L = +\infty$) $\implies$ red $\sum a_n$ divergira
- $L = 1 \implies$ nema odluke ■

Primjer.

(a) Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergira, ali

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1.$$

(b) Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergira, ali

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Zadatak 3.6 Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$

Rješenje.

(a)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$$

D'Alembertov kriterij $\implies$ red konvergira

(b)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1}}{\frac{n!}{2^n+1}} = (n+1)\frac{2^n}{2^{n+1}+1} = (n+1)\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} \to +\infty > 1$$

D'Alembertov kriterij $\implies$ red divergira

(c)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}}{\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}} = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1$$

D'Alembertov kriterij $\implies$ red konvergira

$\triangle$

3.2.3 Cauchyev kriterij

Teorem. (**Cauchyev kriterij**) Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.

(i) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

(ii) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ divergira. $\blacksquare$

Korolar. Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva takav da postoji

$$L = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tada:

- $L < 1 \implies$ red $\sum a_n$ apsolutno konvergira
- $L > 1$ (može i $L = +\infty$) $\implies$ red $\sum a_n$ divergira
- $L = 1 \implies$ nema odluke $\blacksquare$

Napomena. Ako D'Alembertov kriterij daje odluku, onda odluku daje i Cauchyev kriterij. Drugim riječima, Cauchyev kriterij je jači.

Zadatak 3.7 Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}$$

Rješenje.

(a)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left[\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right]^{-2} \to e^{-2} < 1$$

Cauchyev kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

(b)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left[\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{e}{2} > 1$$

Cauchyev kriterij $\Longrightarrow$ red divergira

(c)

$$\begin{aligned} \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_n \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}} = \lim_n \frac{e^{\frac{\ln 2n-1}{n}}}{\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln 2x-1}{x}}}{\sqrt{2}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{2n-1}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \end{aligned}$$

Cauchyev kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

$\triangle$

Napomena. Ako je za neki $q \in \langle 0, 1\rangle$

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

onda za $0 < \varepsilon < \frac{1-q}{2}$ po definiciji limesa superiora postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q + \varepsilon < \frac{1+q}{2} < 1$$

pa red apsolutno konvergira po Cauchyevom kriteriju. Slično se pokaže da ako vrijedi

$$\limsup_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q,$$

onda red također apsolutno konvergira.

Zadatak 3.8 Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum a_n,$$

ako je

$$a_n = \begin{cases} 2^{1-k}, & n = 2k-1 \\ -3^{1-2k}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Rješenje. Primijetimo da se ne može primijeniti Lebnizov kriterij, jer pripadni niz nije strogo padajući.
Niz $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ima 2 konvergentna podniza:

- $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 2^{\frac{1-k}{2k-1}} \to 2^{-\frac{1}{2}}$.
- $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 3^{\frac{1-2k}{2k}} \to 3^{-1}$

pa je $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \max\{2^{-\frac{1}{2}}, 3^{-1}\} = 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, odakle zaključujemo da red apsolutno konvergira.

△

3.2.4 Integralni kriterij konvergencije reda

Teorem. (**Cauchy**) Neka je $f\colon [a, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ neprekidna i padajuća funkcija, gdje je $a > 0$. Tada

$$\text{red } \sum f(n) \text{ konvergira} \iff \text{nepravi integral } \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ konvergira}.$$

■

Zadatak 3.9 Ispitajte konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Rješenje.

(a) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

$\cdot\ f'(x) = -\dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} < 0$, za $x \geq 2 \implies f$ pada na $[2, +\infty\rangle$

$$\cdot \int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_2^r \frac{dx}{x\ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & 2 \mapsto \ln 2 \\ dt = \frac{dx}{x} & r \mapsto \ln r \end{bmatrix} = \lim_{r\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln r} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{\ln r} = \lim_{r\to+\infty} (\ln\ln r - \ln\ln 2) = +\infty$$

integralni kriterij $\Longrightarrow$ red divergira

(b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

$$\cdot\ f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} < 0 \iff \ln x > \frac{1}{2} \iff x > \sqrt{e}$$

$\Longrightarrow$ f pada na $[2, +\infty\rangle$

$$\cdot \int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_2^r \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x & 2 \mapsto \ln 2 \\ dt = \frac{dx}{x} & r \mapsto \ln r \end{bmatrix} = \lim_{r\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln r} te^{-t}\,dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-t}\,dt & v = -e^{-t} \end{bmatrix} = \lim_{r\to+\infty} (-te^{-t}\Big|_{\ln 2}^{\ln r} + \int_{\ln 2}^{\ln r} e^{-t}\,dt) =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} (-\frac{\ln r}{r} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}) = \frac{1+\ln 2}{2}$$

integralni kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira

$\triangle$

Zadatak 3.10 Ispitajte konvergenciju **Dirichletovog reda**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

u ovisnosti o parametru $p > 0$.

Rješenje. $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$

$f'(x) = -\dfrac{'}{x^p+1} < 0$, za $x \geq 1$ $\Longrightarrow$ f pada na $[1, +\infty\rangle$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$

integralni kriterij $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.

$\triangle$

Napomena. Ako stavimo $p = 1$, onda je ovo jos jedan dokaz da harmonijski red divergira.

3.2.5 Usporedni kriterij

Teorem. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoje $m \in \mathbb{N}$ i $K > 0$ takvi da je

$$a_n \leq K \cdot b_n, \ \forall n \geq m.$$

(a) Ako $\sum b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum a_n$ i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(b) Ako $\sum a_n$ divergira, onda divergira i $\sum b_n$. ■

Korolar. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoji

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty].$$

(a) Ako je $L \in [0, +\infty\rangle$ i ako red $\sum b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum a_n$.

(b) Ako je $L \in \langle 0, +\infty]$ i ako red $\sum b_n$ divergira, onda divergira i red $\sum a_n$.

■

Zadatak 3.11 Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum \frac{1}{2n-1}$ (b) $\sum \frac{\ln n}{n^3+n+1}$ (c) $\sum \frac{1}{n \cdot 2^n}$

(d) $\sum (\ln(n+1) - \ln n)$ (e) $\sum \sin(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$ (f) $\sum \operatorname{arctg} 2^{-n}$

(g) $\sum \frac{\sqrt{2n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}$

Rješenje.

(a) $\lim_n \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$
$\sum \frac{1}{n}$ divergira $\Longrightarrow$ red divergira po usporednom kriteriju

(b) $\frac{\ln n}{n^3+n+1} \leq \frac{n}{n^3+n+1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, za $n \geq 1$
$\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira $\Longrightarrow$ red konvergira po usporednom kriteriju

(c) $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, za $n \geq 1$
$\sum \frac{1}{2^n}$ konvergira $\Longrightarrow$ red konvergira po usporednom kriteriju

(d) $\sum(\ln(n+1) - \ln n) = \sum \ln(1 + \frac{1}{n})$
$\lim_n \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$
$\sum \frac{1}{n}$ divergira $\implies$ red divergira po usporednom kriteriju

(e) $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} = \frac{n^3+1-n^3}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}$
$\lim_n \dfrac{\sin(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \dfrac{\sin \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}} = 1$
$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergira $\implies$ red konvergira po usporednom kriteriju

(f) $\lim_n \dfrac{\operatorname{arctg} 2^{-n}}{2^{-n}} = 1$
$\sum 2^{-n}$ konvergira $\implies$ red konvergira po usporednom kriteriju

(g) $\lim_n \dfrac{\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \sqrt{2 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}} = \sqrt{3}$
$\sum \sqrt{1}n^{3/2}$ konvergira $\implies$ red konvergira po usporednom kriteriju

$\triangle$

Zadaci za vježbu

3.12 Ispitajte konvergenciju redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2}{n^4-n^2+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln n}$$

(Rj. (a) K, (b) K)

3.13 Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n^2+1}{n+1}} \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} \; (a>0)$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$$

(Rj. (a) K, (b) K, (c) K, (d) K, (e) K, (f) K, (g) K)

3.14 Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)} \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \operatorname{sh}\frac{1}{n}\cos n \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^n}$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

(Rj. (a) K, (b) D, (c) K, (d) D, (e) K, (f) K, (g) D)

3.15 Ispitajte uvjetnu i apsolutnu konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n(n+1)}} \qquad \text{(b)} \sum \frac{(-1)^n n^3}{3^n} \qquad \text{(c)} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{(d)} \sum \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n}} \qquad \text{(e)} \sum (\sin\sin n)^n$$

3.16 Pretpostavimo da je $\sum a_n$ konvergentni red s pozitivnim članovima. Koji od sljedećih redova nužno konvergiraju? (U svakom podzadatku ili dokažite da novi red mora konvergirati ili nađite primjer reda $\sum a_n$ za kojeg novi red divergira.)

(a) $\sum \frac{a_n}{n}$ (b) $\sum \frac{1}{n^{100} a_n}$ (c) $\sum \operatorname{sh} a_n$

(d) $\sum a_n \sin n$ (e) $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ (f) $\sum \sqrt{\frac{a_n}{n}}$

3.17 Neka je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan konvergentan red. Dokažite da je tada konvergentan i red $\sum a_n^2$. Vrijedi li obrat?

3.18 Neka je $\sum a_n$ konvergentan red takav da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n > a_{n+1} > 0, \ \forall n \geq m.$$

Dokažite da je $\lim_n n\, a_n = 0$.

3.19 Neka je (a_n) pozitivan strogo padajući niz. Dokažite Cauchyev kondenzacijski test:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergira}$$

3.20 Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ divergentni redovi. Može li red $\sum (a_n - b_n)$ biti konvergentan?

3.3 Redovi potencija i Taylorovi redovi

Definicija. **Red potencija** oko točke $c \in \mathbb{R}$ je red oblika

$$\sum a_n(x-c)^n, \tag{3.1}$$

gdje je $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ niz realnih brojeva. Kod redova potencija je uobičajeno da indeksi n osim prirodnih brojeva uključuju i 0.

U daljnjem ćemo sa $\mathcal{I}$ označavati skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red realnih brojeva $\sum a_n(x-c)^n$ konvergira. $\mathcal{I}$ je neprazan skup, jer red potencija (3.1) konvergira za $x = c$ i suma mu je a_0.

Definicija. Za niz funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, definiranih na intervalu I kažemo da konvergira **lokalno uniformno** na I ako niz $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ konvergira uniformno na svakom podsegmentu $J \subseteq I$.

Teorem. **(Prvi Abelov teorem)** Ako red potencija (3.1) konvergira za $\alpha \neq c$, onda taj red konvergira apsolutno i lokalno uniformno na čitavom otvorenom intervalu $\langle c-r, c+r\rangle$, gdje je $r := |\alpha - c|$.

Iz provg Abelovog teorema slijedi da je $\mathcal{I}$ interval simetričan s obzirom na točku c. Taj interval zovemo **interval konvergencije** reda potencija (3.1).

Radijus konvergencije R reda potencija (3.1) definiramo kao polovicu duljine intervala $\mathcal{I}$. Preciznije,

$$R := \sup\{|c-\alpha| : \ \alpha \in \mathcal{I}\} \in [0, +\infty].$$

O tome hoće li red (3.1) konvergirati u rubovima intervala $\mathcal{I}$ (tj. u točkama $c-R$ i $c+R$) ovist će o samom redu.

Rezimirajmo,

Korolar. Neka je (3.1) red potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ i neka je R njegov radijus konvergencije. Tada vrijedi

(a) Red (3.1) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle c-R, c+R\rangle$.

(b) Red (3.1) divergira za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $|x-c| > R$.

Sljedeći teorem nam daje jednostavnu formulu za računanje radijusa konvergencije reda (3.1).

Teorem. Neka je (3.1) red potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ i R njegov radijus konvergencije. Tada vrijedi tzv. **Cauchy-Hadamardova formula**:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3.2}$$

pri čemu dogovorno uzimamo $R := 0$ ukoliko je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, a $R := +\infty$ ukoliko je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Primjer.

(a) Promotrimo geometrijski red

$$\sum x^n. \tag{3.3}$$

Ovdje je $c = 0$ i $a_n = 1$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Stoga red (3.3) konvergira apslolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ prema funkciji $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, tj. vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Kako u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$ red (3.3) ne konvergira (opći član ne teži prema 0), zaključujemo da je njegov interval konvergencije $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$.

(b) Promotrimo red potencija

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^n. \tag{3.4}$$

Ovdje je $c = 1$ i $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}} = 1,$$

jer je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Stoga red (3.4) konvergira apslolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Provjerimo konvergenciju reda (3.4) i u rubnim točkama intervala $\langle 0, 2\rangle$.

Za $x = 0$ riječ je o redu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

koji divergira (usporedni kriterij sa harmonijskim redom).

Za $x = 2$ riječ je o redu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

koji konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.4) je $\mathcal{I} = \langle 0, 2]$.

Napomena. Ukoliko postoji limes $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty]$, tada postoji limes $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

U tom slučaju je

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pa radijus konvergencije R reda potencija $\sum a_n(x-c)^n$ možemo računati koristeći formulu

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3.5}$$

Zadatak 3.21 Odredite radijus konvergencije i intervale konvergencije redova potencija

(a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ (*b*) $\sum \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n$ (c)* $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$.

Rješenje.

(a) za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Tada je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2(2n+2)!}{(n+1)!^2(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \longrightarrow 4,$$

kada $n \to \infty$. Prema (3.5) radijus konvergencije reda potencija

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n \tag{3.6}$$

jednak je $R = 4$. Stoga red (3.6) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -3, 5\rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -3, 5\rangle$ riječ je o redovima

$$\sum (-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \ (x = -3) \quad \text{te} \quad \sum \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \ (x = 5),$$

divergiraju, jer je

$$\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

pa specijalno nije zadovoljen nužan uvjet za konvergenciju reda.

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.6) je interval $\mathcal{I} = \langle -3, 5 \rangle$.

(b) Prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2) za radijus konvergencije R reda potencija

$$\sum \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n (x+2)^n \tag{3.7}$$

vrijedi

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \to \infty} \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} = \frac{3}{4},$$

pa je $R = \frac{4}{3}$. Stoga red potencija (3.7) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3} \rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3} \rangle$ riječ je o redovima

$$\sum (-1)^n \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n \ (x = -\frac{10}{3}) \quad \text{te} \quad \sum \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n \ (x = -\frac{2}{3}),$$

koji divergiraju, budući da nije ispunjen nužan uvjet za konvergenciju reda:

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n = 1.$$

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.7) je $\mathcal{I} = \langle -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3} \rangle$.

(c) Za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo $a_n := \frac{n!}{n^n}$. Tada je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)! n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \longrightarrow \frac{1}{e},$$

kada $n \to \infty$. Prema (3.5) radijus konvergencije reda potencija

$$\sum \frac{n^n}{n!} x^n \tag{3.8}$$

jednak je $R = \frac{1}{e}$, pa red potencija (3.8) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \rangle$ riječ je o redovima

$$\sum \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} \ (x = -\frac{1}{e}) \quad \text{te} \quad \sum \frac{n^n}{e^n n!} \ (x = \frac{1}{e}).$$

Za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo

$$b_n := \frac{n^n}{e^n n!}.$$

Tada je

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

pa je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}+}$ strogo padajuć. Nadalje, nejednakosti

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x > 0,$$

dobivamo

$$-\frac{1}{2n} < \ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \ln\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa je

$$e^{-\frac{1}{2n}} < \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Iteriranjem nejednakosti (3.9) dobivamo

$$b_1 e^{-\frac{1}{2}H_n} < b_{n+1} < b_1 e^{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.10}$$

gdje je $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ n-ti harmonijski broj. Prema Cauchyjevom integralnom kriteriju red $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentan i njegovu sumu označimo sa C. Kako je $b_1 = e^{-1}$, iz (3.10) dobivamo

$$\frac{1}{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n} < b_{n+1} < \frac{C}{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Kako je

$$\ln(1+n) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < H_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x} = 1 + \ln n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

imamo

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < e^{-\frac{1}{2}H_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa iz nejednakosti (3.11) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{e^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b_{n+1} < \frac{C}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Napokon, iz (3.12) slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, pa red $\sum \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} = \sum (-1)^n b_n$ konvergira (Leibnizov kriterij). Također, (3.12) povlači da red $\sum \frac{n^n}{e^n n!} = \sum b_n$ divergira (usporedni kriterij s redom $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$). Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.8) je $\mathcal{I} = \langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \rangle$.

$\triangle$

Ako je (3.1) red potencija sa radijusom konvergencije R, iz Cauchy-Hadamardove formule slijedi da redovi potencija

$$\sum na_n(x-c)^{n-1}, \tag{3.13}$$

$$\sum \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \tag{3.14}$$

imaju radijus konvergencije također jednak R. Za red potencija (3.13) kažemo da je dobiven iz reda (3.1) **deriviranjem član po član**, a za red potencija (3.14) kažemo da je dobiven iz reda (3.1) **integriranjem član po član**.

Teorem. Neka red potencija $\sum a_n(x-c)^n$ ima radijus konvergencije $R > 0$ i stavimo $\mathcal{J} := \langle c-R, c+R\rangle$. Tada je funkcija $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

derivabilna na $\mathcal{J}$ i vrijedi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}, \quad \forall x \in \mathcal{J}. \tag{3.15}$$

Nadalje, vrijedi

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \quad \forall x \in \mathcal{J}. \tag{3.16}$$

Korolar. Neka je f definirana kao u prethodnom teoremu. Funkcija f je klase $C^\infty(\mathcal{J})$ i za svako $m \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(x-c)^{n-m}, \quad \forall x \in \mathcal{J}.$$

Odavde za $x = c$ dobivamo

$$a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Definicija. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $c \in I$. Red potencija

$$T[f,c] := \sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

zovemo **Taylorov red** funkcije f oko točke c.

Ako je $c = 0$, onda se Taylorov red $T[f, 0]$ zove **Maclaurinov red** od f i označava s $T[f]$. Dakle,

$$T[f] := T[f, 0] = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Općenito Taylorov red $T[f, c]$ funkcije $f \in C^\infty(I)$ može divergirati za svako $x \neq c$, odnosno konvergirati prema nekoj drugoj funkciji.

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

Tvrdimo da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Kako je $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, f je neprekidna u 0. Nadalje, f je očito klase C^∞ na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokažimo da postoje sve n-te derivacije $f^{(n)}(0)$, da su sve funkcije $f^{(n)}$ neprekdine u 0 i da vrijedi

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.17}$$

Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.18}$$

Naime, iz (3.18) će tada slijediti da je za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ funkcija $f^{(n)}$ derivabilna u 0, pa stoga i neprekidna u 0.

Podsjetimo se da za svaki polinom p stupnja $\deg p \geq 0$ vrijedi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0, \tag{3.19}$$

što se može jednostavno dokazati primijenjujući L'Hospitalovo pravilo $(\deg p + 1)$-puta. Indukcijom dokažimo da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ postoji polinom p_n takav da vrijedi

$$f^{(n)}(x) = p_n(x^{-1}) f(x), \quad \forall x > 0. \tag{3.20}$$

Za $n = 0$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da (3.20) vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}[p_n(x^{-1}) f(x)] = [-p_n'(x^{-1}) + p_n(x^{-1})] x^{-2} f(x) = p_{n+1}(x^{-1}) f(x), \quad \forall x > 0.$$

gdje je p_{n+1} polinom definiran s $p_{n+1}(x) := x^2(p_n(x) - p_n(x)')$.

Stoga je

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f^{(n)}(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left[\frac{1}{h}p_n\left(\frac{1}{h}\right)e^{-\frac{1}{h}}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{xp_n(x)}{e^x}=0,\quad \forall n\in\mathbb{Z}_+,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (3.19). Time smo dokazali tvrdnju (3.17), pa je $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. Tvrdimo da Maclaurinov red $T[f]=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ od f ne konvergira prema f ni na kojem otvorenom intevralu I oko 0. Pretpostavimo suprotno. Tada možemo naći $\delta>0$ takav da vrijedi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad \forall x\in\langle-\delta,\delta\rangle. \tag{3.21}$$

Prema dokazanom je $f^{(n)}(0)=0$, za sve $n\in\mathbb{Z}_+$. Iz (3.21) slijedi $f(x)=0$, za sve $x\in\langle-\delta,\delta\rangle$, što je kontradikcija s činjenicom da je $f(x)>0$, za sve $x>0$.

Definicija. Za funkciju $f\in C^\infty(I)$ definiranu na otvorenom intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$ kažemo da je **analitička u točki** $c\in I$, ako njen Taylorov red

$$T[f,c]=\sum\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

ima radijus konvergencije $R>0$ i ako postoji $0<\delta\le R$ takav da vrijedi

$$f(x)=T[f,c](x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,\quad \forall x\in\langle c-\delta,c+\delta\rangle\cap I.$$

Ukoliko je f analitička u svakoj točki $c\in I$, onda kažemo da je f **analitička** na I. Skup svih analitičkih funkcija na I označavamo s $C^\omega(I)$.

Napomena. Skup svih analitičkih funkcija $C^\omega(I)$ je dosta "siromašniji" od skupa svih funkcija klase $C^\infty(I)$. Npr. u prethodnom primjeru smo vidjeli da za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiranu s

$$f(x):=\begin{cases}0 & \text{za } x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{za } x>0\end{cases}$$

vrijedi $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, ali da f nije analitička u točki 0. Štoviše, može se dokazati da postoji funkcija $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ čiji Taylorov red $T[f,c]$ ima radijus konvergencije jednak 0, za svaku točku $c\in\mathbb{R}$.

Teorem. Neka je $\sum a_n(x-c)^n$ red potencije sa radijusom konvergencije $R>0$ i stavimo $\mathcal{J}:=\langle c-R,c+R\rangle$. Tada je funkcija $f:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$ definirana s

$$f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

analitička na čitavom intervalu $\mathcal{J}$. Štoviše, za svako $\alpha \in \mathcal{J}$ Taylorov red

$$T[f,\alpha] = \sum \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

ima radijus konvergencije $\rho \geq R - |c-\alpha|$ i vrijedi

$$f(x) = T[f,\alpha](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n, \quad \forall x \in \langle \alpha-\rho, \alpha+\rho \rangle.$$

Korolar. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Ako je f analitička u točki $c \in I$ tada postoji otvoreni interval J oko c sadržan u I takav da je f analitička na J.

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete da bi funkcija $f \in C^\infty(I)$ bila analitička na I.

Teorem. Neka je $f \in C^\infty(I)$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Tada je $f \in C^\omega(I)$ ako i samo ako za svaki $c \in I$ postoji $\delta > 0$ i konstante $C > 0$ i $r > 0$ takve da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| \leq C\frac{n!}{r^n}, \quad \forall x \in J := \langle c-\delta, c+\delta \rangle \cap I. \tag{3.22}$$

U tom slučaju vrijedi

$$f(x) = T[f,c](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \forall x \in J \cap \langle c-r, c+r \rangle. \tag{3.23}$$

Korolar. Neka je $f \in C^\infty(I)$, gdje je I otvoren interval. Ako za za svaki $c \in I$ postoje $\delta > 0$ i $C > 0$ takvi da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(c)| \leq C \quad \forall x \in J := \langle c-\delta, c+\delta \rangle \cap I, \tag{3.24}$$

tada je $f \in C^\omega(I)$ i vrijedi

$$f(x) = T[f,c](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \forall x \in J. \tag{3.25}$$

Zadatak 3.22 Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitička na $\mathbb{R}$ i odredite njen Maclaurinov red $T[f]$, ako je

(a)$f(x) := e^x$ (b)$f(x) := \sin x$ (c)$f(x) := \operatorname{ch} x$.

Rješenje. Kako bi dokazali da je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$, dovoljno je dokazati da Maclaurinov red $T[f]$ od f konvergira prema f u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$.

(a) Imamo $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$. Specijalno je $f^{(n)}(0) = 1$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je sa

$$T[f] = \sum \frac{x^n}{n!}$$

dan Maclaurinov red funkcije f.

Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljni $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $\delta > |x_0|$. Tada je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = e^x < e^\delta =: C, \quad \forall x \in \langle -\delta, \delta \rangle.$$

Iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$, pa je specijalno i $T[f](x_0) = f(x_0) = e^{x_0}$. Kako je $x_0 \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Imamo $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$. Specijalno je

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{ako } n \equiv 0, 2 \pmod 4 \\ 1 & \text{ako } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{ako } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

pa je sa

$$T[f] = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dan Maclaurinov red od f. Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Kako za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| = |\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)| \le 1 =: C, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{ako } 2 \mid n \\ \operatorname{sh} x & \text{ako } 2 \nmid n \end{cases}$$

Specijalno je

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{ako } 2 \mid n \\ 0 & \text{ako } 2 \nmid n \end{cases}$$

pa je sa

$$T[f] = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

dan Maclaurinov red od f. Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljan $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $\delta > |x_0|$. Tada za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| \leq \operatorname{ch} x < \operatorname{ch} \delta =: C, \quad \forall x \in \langle -\delta, \delta \rangle.$$

Iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$, pa je specijalno i $T[f](x_0) = f(x_0) = \operatorname{ch} x_0$. Kako je $x_0 \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

△

Slično bismo pokazali da su funkcije $x \mapsto \cos x$ i $x \mapsto \operatorname{sh} x$ analitičke na $\mathbb{R}$ i da vrijedi

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{i} \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Napomena. Primijetimo da Maclaurinov red svake od spomenutih funkcija

$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \operatorname{sh} x, \quad x \mapsto \operatorname{ch} x$$

konvergira prema pripadnoj funkciji za sve $x \in \mathbb{R}$. To ne mora nužno vrijediti za svaku funkciju $f \in C^\omega(\mathbb{R})$. Npr. funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) := \frac{1}{1 + x^2}$$

je analitička na $\mathbb{R}$, dok njen Maclaurinov red

$$T[f] = \sum (-1)^n x^{2n}$$

ima radijus konvergencije $R = 1$. Potpuno objašnjenje tog fenomena dobit ćete na kompleksnoj analizi.

Teorem. Neka su $f, g \in C^\omega(I)$ analitičke funkcije na otvorenom intervalu I i neka su $c \in I$, $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n, \quad \forall x \in J_1 := \langle c - \delta, c + \delta \rangle \cap I,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n, \quad \forall x \in J_2 := \langle c - \varepsilon, c + \varepsilon \rangle \cap I,$$

gdje su

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Stavimo $J := J_1 \cap J_2$. Tada vrijedi

(a) Funkcija $\alpha f + \beta g$ je analitička na J za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(x-c)^n, \quad \forall x \in J. \tag{3.26}$$

(b) Funkcija $f \cdot g$ je analitička na J i vrijedi

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n, \quad \forall x \in J, \tag{3.27}$$

gdje su koeficijenti c_n dani s

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorem. (Drugi Abelov teorem) Pretpostavimo da red potencija $\sum a_n x^n$ konvergira prema L za neko $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada

(a) Red potencija $\sum a_n x^n$ konvergira

- uniformno na $[0, r]$, ako je $r > 0$,
- uniformno na $[r, 0]$, ako je $r < 0$

(b) Vrijedi

- $\lim\limits_{x \to r-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$, ako je $r > 0$,
- $\lim\limits_{x \to r+} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$, ako je $r < 0$.

Zadatak 3.23 Funkciju f razvijte u Maclaurinov red $T[f]$ ako je

(a) $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$	(b) $f(x) := \sin^2 x$	(c) $f(x) := \ln(1+x)$
(d) $f(x) := \operatorname{arctg} x$	(e) $f(x) := \ln(1+x+x^2)$	(f) $f(x) := \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

Odredite interval konvergencije $\mathcal{I}$ reda $T[f]$ i ispitajte vrijedi li $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

Rješenje.

(a) Kako je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) Imamo

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kako je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

(c) Krenimo od reda $\sum (-1)^n t^n$. Njegov radijus konvergencije je $R = 1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}, \quad \forall t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Iz (3.16) slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x), \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f]=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ jednak je 1, jer je dobiven iz reda $\sum(-1)^n x^n$ integriranjem član po član.

Provjerimo konvergenciju reda $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1,1\rangle$.

Za $x=-1$ riječ je o redu

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

koji divergira, jer harmonijski red $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergira

Za $x=1$ riječ je o redu

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

koji konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda $T[f]$ je interval $\mathcal{I}=\langle -1,1]$.

Ostaje još provjeriti vrijedi li $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=T[f](1)=f(1)=\ln 2$. No to slijedi iz drugog Abelovog teoerema, budući da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=\ln 2.$$

Sve zajedno imamo:

$$T[f]=\sum(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I}=\langle -1,1]$ i vrijedi $f(x)=T[f](x)$, za sve $x\in\mathcal{I}$.

(d) Krenimo od reda $\sum(-1)^n t^{2n}$. Njegov radijus konvergencije je $R=1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=\frac{1}{1+t^2},\quad \forall t\in\langle -1,1\rangle.$$

Iz (3.16) slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} x,\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Dakle, imamo

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f] = \sum(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jednak je 1, jer je dobiven iz reda $\sum(-1)^n x^{2n}$ integriranjem član po član.

Provjerimo konvergenciju reda $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$.

Za $x = -1$ i $x = 1$ riječ je redom o redovima

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1} \quad \text{i} \quad \sum(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

koji konvergiraju prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda $T[f]$ je interval $\mathcal{I} = [-1, 1]$.

Pozivajući se na drugi Abelov teorem, zaključujemo da vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1} = \lim_{x\to -1+}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to -1+}\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1} = \lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to -1+}\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = [-1, 1]$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

(e) Za $x \neq 1$ imamo

$$1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x},$$

pa je

$$\ln(1+x+x^2) = \ln\frac{1-x^3}{1-x} = \ln(1-x^3) - \ln(1-x), \quad \forall x < 1.$$

Prema (c) je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle,$$

pa je

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad \text{i} \quad \ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Prema (3.26) je

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle,$$

gdje su koeficijenti a_n dani s

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{ako } 3 \mid n, \\ \frac{1}{n} & \text{ako } 3 \nmid n \end{cases} \tag{3.28}$$

Odredimo radijus konvergencije R reda $T[f] = \sum a_n x^n$. Očito je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pa je $R = (\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = 1$. Dokažimo da red $T[f]$ konvergira i u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$.

Za $x = 1$ riječ je o redu $\sum a_n$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Želimo dokazati da je niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dovoljno je dokazati da je podniz $(S_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}.$$

Stoga je

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako red $\sum \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}$ konvergira (granični kriterij s $\sum n^{-3}$), zaključujemo da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n}$. Dakle, red $\sum a_n$ je uistinu konvergentan. Iz drugog Abelovog teorema slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1-} \ln(1 + x + x^2) = \ln 3.$$

Slično bismo pokazali da red $T[f]$ konvergira i za $x = -1$, te da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x\to -1+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to -1+} \ln(1 + x + x^2) = \ln 1 = 0.$$

Sve zajedno imamo:

$$T[f] = \sum a_n x^n,$$

gdje su koeficijenti a_n dani s (3.28), njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = [-1, 1]$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

(f) Imamo

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Odredimo Maclaurinove redove funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ i $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$. Imamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Prema (3.15) je

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n)x^{2n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Stoga je

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz (3.29) i (3.26) slijedi

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (1+n) x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f] = \sum(-1)^n(1+n)x^{2n}$ je jednak 1. Nadalje, kako red $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$ divergira, njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$. Sve zajedno, imamo

$$T[f] = \sum(-1)^n(1+n)x^{2n},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

$\triangle$

Zadatak 3.24 Funkciju f razvijte Taylorov red $T[f, c]$ oko točke c, ako je

$$\text{(a)} f(x) := \frac{1}{(1-x)^2},\ c = -2 \quad (b) f(x) := \frac{x+3}{x^2+3x+2},\ c = -4 \quad \text{(c)} f(x) := \frac{e^x}{x},\ c = 1.$$

Rješenje.

(a) Stavimo $y := x + 2$. Tada je $x = y - 2$, pa je

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-(y-2)^2} = \frac{1}{(3-y)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{y}{3}\right)^2}. \tag{3.30}$$

Kako je

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n, \quad \forall t\in\langle -1,1\rangle,$$

prema (3.15) je

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n, \quad \forall t\in\langle -1,1\rangle.$$

Stoga je

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{3}\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{y}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}y^n, \quad \forall y\in\langle -3,3\rangle.$$

Iz (3.30) slijedi

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+2)^n, \quad \forall x\in\langle -5,1\rangle.$$

Dakle,

$$T[f,-2]=\sum\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+2)^n.$$

(b) Stavimo $y:=x+4$. Tada je $x=y-4$. Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2}=\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{y-3}-\frac{1}{y-2}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{y}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{y}{2}}. \tag{3.31}$$

Kako je

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n, \quad \forall t\in\langle -1,1\rangle,$$

to je

$$\frac{1}{1-\frac{y}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}y^n, \quad \forall y\in\langle -3,3\rangle,$$

$$1-\frac{y}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}y^n, \quad \forall y\in\langle -2,2\rangle.$$

Iz (3.31) i (3.26) slijedi

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x^2+3x+2}&=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}y^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)y^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n, \quad \forall x\in\langle -2,2\rangle.\end{aligned}$$

Dakle,

$$T[f,-4]=\sum\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$

(c) Stavimo $y := x - 1$. Tada je $x = y + 1$. pa je

$$e^x = e^{y+1} = e \cdot e^y = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} y^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n, \quad \forall y \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Prema (3.27) je

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{y+1} \cdot e^{y+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!} \cdot (-1)^{n-k} \right) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) y^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) (x-1)^n, \quad \forall x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Dakle,

$$T[f, 1] = \sum_{n \geq 0} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) (x-1)^n$$

$\triangle$

Teorem. Za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcija $f : \langle -1, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) := (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

je analitička na $\langle -1, +\infty \rangle$. Njen Macalaurinov red je tzv. **binomni red** i dan je s

$$T[f] = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \tag{3.32}$$

gdje su $\binom{\alpha}{n}$ tzv. **binomni koeficijenti** i dani su s

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad \text{i} \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Radijus konvergencije reda (3.32) jednak je 1 i vrijedi

$$T[f](x) = f(x), \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle. \tag{3.33}$$

Napomena. Istaknimo neke binomne koeficijente koji se često javljaju:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \tag{3.34}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \tag{3.35}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} \tag{3.36}$$

Zadatak 3.25 Funkciju f razvijte u Maclaurinov red $T[f]$, ako je

$$(a) f(x) := \sqrt{1+x} \qquad (b) f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \qquad (c) f(x) := \operatorname{Arsh} x.$$

Rješenje.

(a) Iz (3.32) i (3.35) slijedi

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Dakle,

$$T[f] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

(b) Iz (3.32) i (3.36) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} y^n, \quad \forall y \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \quad \forall x \in \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum \binom{2n}{n} x^n.$$

(c) Iz (3.32) i (3.36) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n}, \quad \forall t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Prema (3.16) je

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsh} x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Dakle,

$$T[f] = \sum \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}.$$

Zadatak 3.26 Izračunajte sume redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{3^n} \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Rješenje.

(a) Definirajmo funkciju $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}. \tag{3.37}$$

Kako red $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, f je dobro definirana funkcija. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = f(-1).$$

Prema (3.15) je

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.38}$$

Istim argumentom dobivamo

$$f''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz (3.37) i (3.38) slijedi $f(0) = f'(0) = 0$. Stoga je

$$f'(y) = f'(y) - f'(0) = \int_0^y f''(t)\,dt = \int_0^y \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-y), \quad \forall y \in \langle -1, 1\rangle,$$

te

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y)\,dy = \int_0^x (-\ln(1-y))\,dy \\
&= \begin{bmatrix} u = -\ln(1-y) & du = \frac{dy}{1-y} \\ dv = dy & v = y \end{bmatrix} = [-y\ln(1-y)]\Big|_0^x - \int_0^x \frac{y\,dy}{1-y} \\
&- x\ln(1-x) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) dy = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\
&= (1-x)\ln(1-x) + x, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.
\end{aligned}$$

Prema drugom Abelovom teoremu je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} &= f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} [-x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x] \\
&= 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

(b) Definirajmo funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju f je dobro definirana funkcija. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} = f(1).$$

Za $x\in\mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot [(2n+1)-1]}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} = f(1) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

(c) Definirajmo funkciju $f:\langle -1,1\rangle\to\mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+4n+1)x^n.$$

Primijetimo da je f dobro definirana funkcija. Naime, prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2) radijus konvergencije reda potencija jednak 1. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Iz

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x\in\langle -1,1\rangle \tag{3.39}$$

te (3.15) slijedi

$$\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}, \quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Stoga je

$$\frac{x}{(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n, \quad \forall x\in\langle -1,1\rangle. \tag{3.40}$$

Ako deriviramo jednakost (3.40) i ponovo iskoristimo (3.15), imamo

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Odavde slijedi

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.41}$$

Iz (3.39), (3.40), (3.41) te (3.26) slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{4x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned}$$

Napokon,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right) = 6.$$

(d) Najprije primijetimo da je red $\sum \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ konvergentan. Zaista, definirajmo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s

$$a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n!!)}$$

i provjerimo jesu li ispunjeni uvjeti Leibnizovog kriterija.

- Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je očito padajuć niz.
- Također vrijedi i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. To slijedi iz nejednakosti

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

koja se lako pokaže indukcijom.

Dakle, dani red je usitinu konvergentan. Iz prvog Abelovog teorema slijedi da je funkcija

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

dobro definirana na intervalu $\langle -1, 1]$. Prema (3.32) , (3.33) i (3.36) je

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \\ &= 1 + f(x), \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned}$$

Dakle,
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1,\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$
Iz drugog Abelovog teorema slijedi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}=f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-1.$$

△

Zadatak 3.27 Izračunajte $f^{(2008)}(0)$ ako je

$$(\mathrm{a})f(x):=\cos(x^2)\qquad (b)f(x):=xe^{-x^3}\qquad (\mathrm{c})f(x):=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Rješenje.

(a) Kako je
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \forall x\in\mathbb{R},$$
to je
$$f(x)=\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
Budući da je $2008=4\cdot 502$, koeficijent uz x^{2008} jedank je $a_{2008}=\dfrac{(-1)^{502}}{(2\cdot 502)!}=\dfrac{1}{1004!}$

Stoga je
$$f^{2008}(0)=2008!\cdot a_{2008}=\frac{2008!}{1004!}$$

(b) Kako je
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R},$$
to je
$$f(x)=xe^{-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
Budući da je $2008=3\cdot 669+1$, koeficijent uz x^{2008} jednak je $a_{2008}=\dfrac{(-1)^{669}}{669!}=-\dfrac{1}{669!}$. Dakle,
$$f^{2008}(0)=2008!\cdot a_{2008}=-\frac{2008!}{669!}.$$

(c) Kako je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

to je

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+2}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Budući da je $2008 = 2 \cdot 1003 + 2$, koeficijent uz x^{2008} jednak je $a_{2008} = \dfrac{2005!!}{2006!!}$. Dakle,

$$f^{2008}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = \frac{2008! \cdot 2005!!}{2006!!} = 2008 \cdot 2007 \cdot 2005!!^2.$$

$\triangle$

Zadatak 3.28 * Izračunajte sumu reda

$$\frac{0!}{4!} + \frac{4!}{8!} + \frac{8!}{12!} + \frac{12!}{16!} + \cdots$$

Rješenje. Primijetimo da je opći član a_n $(n \in \mathbb{Z}_+)$ gornjeg reda oblika

$$a_n = \frac{(4n)!}{(4(n+1))!} = \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}.$$

Kako je $(k+1)(k+2) - k(k+3) = 2$, $(k+3) - k = 3$ i $(k+2) - (k+1) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ to je

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+4}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Primijetimo da je

$$\frac{1}{4n+j} = \int_0^1 x^{4n+j-1}\, dx, \quad \forall 1 \le j \le 4,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

te da red polinoma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} x^{4n} - \frac{1}{2} x^{4n+1} + \frac{1}{2} x^{4n+2} - \frac{1}{6} x^{4n+3} \right)$$

uniformno konvergira na segmentu $[0, 1]$ prema funkciji

$$f(x) := \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}.$$

Naime, za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ i $x \in [0, 1]$ imamo

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{1}{6} x^{4n} - \frac{1}{2} x^{4n+1} + \frac{1}{2} x^{4n+2} - \frac{1}{6} x^{4n+3} \right) - \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)} \right| =$$

$$\frac{1}{6}\left|\frac{(1-x^{4m})(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)}-\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}\right|=\frac{1}{6}\frac{x^{4m}(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)}\leq$$

$$\frac{1}{6}x^{4m}(1-x)^2\overset{(\triangle)}{\leq}\frac{1}{6}\Big(\frac{2m}{2m+1}\Big)^{4m}\cdot\frac{1}{(2m+1)^2}\leq\frac{1}{6}\Big(\frac{2}{3}\Big)^4\cdot\frac{1}{(2m+1)^2},$$

pri čemu nejednakost $(\triangle)$ vrijedi zato što funkcija $x\mapsto(1-x)^2x^{4m}$ postiže maksimum na $[0,1]$ u točki $x_0:=\dfrac{2m}{2m+1}$ sa iznosom $\Big(\dfrac{2m}{2m+1}\Big)^{4m}\cdot\dfrac{1}{(2m+1)^2}$. Kako zadnja nejednakost ne ovisi o izboru $x\in[0,1]$, te kako je $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}=0$, zaključujemo da je konvergencija reda uniformna.

Napokon, računamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4n+4}\Big)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\Big(\frac{1}{6}x^{4n}-\frac{1}{2}x^{4n+1}+\frac{1}{2}x^{4n+2}-\frac{1}{6}x^{4n+3}\Big)\,dx=$$

[Red polinoma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}x^{4n}-\frac{1}{2}x^{4n+1}+\frac{1}{2}x^{4n+2}-\frac{1}{6}x^{4n+3}\Big)$ uniformno konvergira na $[0,1]$ prema funkciji $x\mapsto\dfrac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}$, pa suma i integral komutiraju.]

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}x^{4n}-\frac{1}{2}x^{4n+1}+\frac{1}{2}x^{4n+2}-\frac{1}{6}x^{4n+3}\Big)\,dx=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}\,dx=$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1\Big(\frac{2}{1+x}-\frac{x+1}{1+x^2}\Big)\,dx=\frac{1}{3}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{12}\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{24}.$$

$\triangle$

Koliko je zapravo klasa analitičkih funkcija $C^{\omega}(I)$ istaknuta među funkcijama klase $C^{\infty}(I)$, zorno dočarava sljedeći teorem:

Teorem. (Teorem o jedinstvenosti analitičke funkcije) Neka su $f,g\in C^{\omega}(I)$ dvije analitičke funkcije definirane na otvorenom intervalu I. Pretpostavimo da postoji konvergentni i injektivni niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u I takav da vrijedi $x_0:=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in I$, te

$$f(a_n)=g(a_n),\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Tada je $f=g$, tj. vrijedi

$$f(x)=g(x),\quad\forall x\in I.$$

Zadatak 3.29 * Postoji li analitička funkcija $f \in C^\omega(I)$ defininrana na nekom otvorenom intervalu I oko 0 takva da vrijedi

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+(-1)^n}{n^3}, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N} \text{ takve da je } \frac{1}{n} \in I?$$

Rješenje. Pretpostavimo da takva funkcija f postoji. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} \in I$, za sve $n \geq n_0$. Za $n \in \mathbb{N}$ Stavimo

$$a_n := \frac{1}{2(n_0+n)+1}.$$

Primijetimo da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i injektivan niz u I s $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \in I$. Iz pretpostavke zadatka slijedi

$$f(a_n) = \frac{1+(-1)^{2(n_0+n)+1}}{[2(n_0+n)+1]^3} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorem o jednistvenosti analitičke funkcije povlači

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

što je kontradikcija s činjenicom da je $2n_0 \in I$ i

$$f\left(\frac{1}{2n_0}\right) = \frac{1+(-1)^{2n_0}}{[2n_0]^3} = \frac{1}{4n_0^3} \neq 0.$$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

3.30 Odredite radijus konvergencije i interval konvergencije redova potencija

(a) $\sum 2^{n^2} x^{n!}$ (b) $\sum \frac{(n!)^5}{(5n)!}(x-2)^n$ (c) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(x+1)^n}{n\ln(n!)}$

(d) $\sum \frac{(x-1)^n}{(2+(-1)^n)^n}$ (e) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$ (f) $\sum\limits_{n\geq 1} (2\sqrt[n]{2}-1)^n x^n$.

3.31 Funkciju f razvijte u Taylorov red $T[f,c]$ oko točke c, odredite njegov interval konvergencije, te izračunajte $f^{(2008)}(c)$ ako je

(a)$f(x) := \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ c=0$ (b)$f(x) := \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ c=0$ (c)$f(x) := \ln(x^2+x-6),\ c=2$

(d)$f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x,\ c=1$ (e)$f(x) := \frac{\cos x}{x},\ c=1$ (f)$f(x) := \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3,\ c=0$.

3.32 Dokažite da je s

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n[(n-1)!]^2}{(2n)!} x^{2n}$$

dobro definirana funkcija $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ i odredite eksplicitnu formulu od f.

3.33 Izračunajte sume redova

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^3}{(2n+1)!}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\cdot 3^n}$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2^n}$.

3.34 Nađite sve analitičke funkcije $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ za koje Maclaurinov red $T[f]$ konvergira uniformno prema f na čitavom $\mathbb{R}$.

3.35 Dokažite da je s

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{e^n}$$

dobro definirana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nadalje dokažite da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, te da Maclaurinov red $T[f]$ od f divergira za sve $x \neq 0$.

3.36 Postoji li analitička funkcija $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ za koju vrijedi

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} :\ f^{(n)}(x) = 0\} = \mathbb{R}_+?$$