UVOD U FUNKCIONALNU ANALIZU

Ilja Gogić

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odsjek

ak. god. 2024.-2025.

Zadnja izmjena: 26. svibnja 2025.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovne o normiranim prostorima

Tokom čitavog kolegija $\mathbb{F}$ će označavati polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili kompleknih brojeva $\mathbb{C}$.

1.1 Vektorski prostori

Definicija 1.1.1. **Vektorski prostor** nad poljem $\mathbb{F}$ je skup X koji je Abelova[1] grupa s obzirom na operaciju zbrajanja

$$+ : X \times X \to X, \qquad (x, y) \mapsto x + y$$

i na kojem je definirana operacija množenja elementima polja $\mathbb{F}$

$$\mathbb{F} \times X \to X \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

koja je distributivna s obzirom na obje operacije zbrajanja

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \qquad \text{i} \qquad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ x, y \in X,$$

ima svojstvo kvaziasocijativnosti

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ x \in X,$$

te jedinica 1 polja $\mathbb{F}$ je neutralna

$$1x = x \qquad \forall x \in X.$$

Ako je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, tada elemente od X obično zovemo **vektori**, a elemente od $\mathbb{F}$ **skalari**.

Definicija 1.1.2. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za neprazan podskup Y od X kažemo da je **potprostor** od X i pišemo $Y \leq X$, ako je Y sam vektorski prostor nad istim poljem s obzirom na iste operacije.

Napomena 1.1.3. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

(a) Neprazan podskup Y od X je potprostor od X ako i samo ako vrijedi

$$\lambda x + \mu y \in Y \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ x, y \in Y.$$

(b) Presjek proizvoljne familije potprostora od X je potprostor od X.

Definicija 1.1.4. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je S proizvoljan podskup od X.

- **Linearna ljuska** od S je najmanji potprostor $[S]$ od X koji sadrži skup S, tj. $[S]$ je presjek svih potprostora od X koji sadrže S. Ako je $[S] = X$, tada kažemo da S **razapinje** X.

[1] Niels Henrik Abel (1802.–1829.), norveški matematičar

- Za vektor $x \in X$ kažemo da je **linearna kombinacija** vektora iz skupa S ako postoji konačno mnogo vektora $x_1, \ldots, x_n$ iz S te skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

  U tom slučaju za x kažemo i da je linearna kombinacija vektora $x_1, \ldots, x_n$.

- Za S kažemo da je **linearno nezavisan** ako $x \notin [S \setminus \{x\}]$ za sve $x \in S$. U protivnom za S kažemo da je **linearno zavisan**.

Napomena 1.1.5.

(a) $[S]$ je točno skup svih linearnih kombinacija vektora iz S.

(b) S je linearno nezavisan ako i samo ako za svaki konačan podskup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ vektora iz S iz

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

slijedi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Definicija 1.1.6. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za svaki linearno nezavisan podskup $\mathcal{B}$ od X koji razapinje X kažemo da je **algebarska** ili **Hamelova**[2] **baza** za X.

Napomena 1.1.7. Podskup $\mathcal{B}$ od X je algebarska baza za X ako i samo ako svaki vektor iz X možemo na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora iz $\mathcal{B}$, tj. za svaki $x \in X$ postoji jedinstvena funkcija $\varphi_x : \mathcal{B} \to \mathbb{F}$ s konačnim nosačem (tj. φ poprima samo konačno mnogo vrijednosti različitih od 0) takva da je

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \varphi_x(b) b.$$

Definicija 1.1.8. Za vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{F}$ kažemo da je **konačnodimenzionalan** ako je X razapet s nekim svojim konačnim podskupom. U protivnom za X kažemo da je **beskonačnodimenzionalan**.

U konačnodimenzionalnom slučaju se pojam algebarske baze podudara sa standardnim pojmom baze. Kao što znamo iz elementarne linearne algebre, ako je X konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, tada:

(i) X ima konačnu bazu.

(ii) Svake dvije baze za X imaju jednako mnogo elemenata. Taj broj se zove **dimenzija** od V.

(iii) Svaki linearno nezavisan podskup od X je sadržan u nekoj bazi za X.

(iv) Svaki podskup od X koji razapinje X sadrži neku bazu za X.

Analogni rezultati vrijede i u beskonačnodimenzionalnom slučaju:

Teorem 1.1.9. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi:*

(i) Postoji barem jedna algebarska baza za X.

(ii) Svake dvije algebarske baze za X su ekvipotentne.

(iii) Svaki linearno nezavisan podskup od X je sadržan u nekoj algebarskoj bazi za X.

(iv) Svaki podskup od X koji razapinje X sadrži neku algebarsku bazu za X.

[2] Georg Hamel (1877.–1954.), njemački matematičar

U beskonačnodimenzionalnom slučaju Teorem 1.1.9 se *ne može dokazati bez korištenja neke varijante Aksioma izbora* (obično se dokazuje korištenjem njemu ekvivalentne Zornove leme). Štoviše, može se pokazati da je tvrdnja (i) Teorema 1.1.9 zapravo ekvivalentna s Aksiomom izbora. Pristjetimo se, aksiom izbora i Zornova lema se obično izriču u sljedećoj formi (vidjeti [11]):

Aksiom izbora (AC)
Ako je $\{X_i : i \in I\}$ neprazna familija nepraznih u parovima disjunktinih skupova, tada postoji skup X koji sadrži točno jedan element svakog skupa X_i, tj. $X \cap A_i$ je jednočlan skup za sve $i \in I$.

Zornova[3] lema
Neka je X neprazan parcijalno uređen skup sa svojstvom da svaki neprazan lanac u X ima gornju (donju) među u X. Tada X ima barem jedan maksimalni (minimalni) element.

Aksiom izbora je dugo vremena bio predmet mnogih kritika, no danas ga većina matematičara koristi bez ikakve zadrške. Njegova glavna kritika je vezana uz njegovu nekonstruktivnost, tj. on nam samo garantira egzisteniciju nekog skupa s nekim odgovarajućim svojstvom, dok nam s druge strane ne daje nikakav algoritam kako takav skup konstruirati. Druga kritika je vezana uz činjenicu da se pomoću njega mogu dokazati mnoge neintuitivne (i naoko kontroverzne) tvrdnje kao npr. slavni **Banach-Tarskijev**[4,5] **paradoks**, koji ukratko (i malo neformalno) kaže da se jedinična kugla u $\mathbb{R}^3$ može particionirati na konačno mnogo dijelova od kojih se koristeći samo kruta gibanja (rotacije i translacije) mogu sastaviti dvije kugle identične početnoj. Iako se na prvi pogled Banach-Tarskijev paradoks može činiti kontradiktornim (pogotovo ako nemamo iskustva s teorijom mjere), on je "legitiman" teorem teorije ZFC (Zermelo-Fraenkelova[6,7] teorija skupova s Aksiomom izbora). Mi ćemo u nekoliko navrata tokom ovog kursa esencijalno koristiti Aksiom izbora (Zornovu lemu).

Tvrdnja (ii) Teorema 1.1.9 nam opravdava sljedeću definiciju:

Definicija 1.1.10. Ako je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, onda je **(algebarska) dimenzija** od X kardinalni broj neke (pa onda i svake) algebarske baze za X. Kao i u konačnodimenzionalnom slučaju, dimenziju od X označavamo s $\dim X$.

1.2 Normirani, metrički i topološki prostori

Definicija 1.2.1. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. **Polunorma** na X je funkcija $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ koja koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(N1) $\|x\| \geq 0$ za sve $x \in X$ (nenegativnost),

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za sve $\lambda \in \mathbb{F}$ i $x \in X$ (apsolutna homogenost),

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za sve $x, y \in X$ (nejednakost trokuta).

Ako dodatno vrijedi

(N4) $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$ (strogost),

onda kažemo da je $\|\cdot\|$ **norma** na X, a par $(X, \|\cdot\|)$ (ili samo za X ako se norma $\|\cdot\|$ podrazumijeva) kažemo da je **normiran prostor**.

Ako je $\|\cdot\|$ polunorma na X, onda iz (N2) za $\lambda = 0$ dobivamo $\|0\| = 0$, a iz (N2) i (N3) dobivamo $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ i $\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\|$, odnosno nejednakost

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

[3]Max August Zorn (1906.–1993.), njemački matematičar
[4]Stefan Banach (1892.–1945.), poljski matematičar
[5]Alfred Tarski (1901.–1983.), poljsko-američki logičar i matematičar
[6]Ernst Zermelo (1871.–1953.), njemački logičar i matematičar
[7]Abraham Fraenkel (1891–1965.), njemačko-izraelski matematičar

Primjer 1.2.2.

(a) Kao što smo vidjeli na DIFRAF-u (vidjeti [19]), na vektorskom prostoru $\mathbb{F}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) je istaknuta sljedeća familija normi

$$\|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1),$$

te

$$\|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|_\infty := \max\{|\xi_k| : 1 \leq k \leq n\}.$$

Normirani prostor $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$ također označavamo s ℓ^p_n.

(b) Općenitije, ako su $(X_1, \|\cdot\|_{X_1}), \dots, (X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ normirani prostori nad $\mathbb{F}$, onda i njihov kartezijev produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ postaje normiran prostor nad $\mathbb{F}$ uz operacije po komponentama i norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p_{X_k} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1),$$

te

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max\{\|x_k\|_{X_k} : 1 \leq k \leq n\}.$$

Pritom za $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ vrijedi

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x\|^p_\infty \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty. \tag{1.2}$$

Za $1 \leq p \leq \infty$ normiran prostor $(X_1 \times \cdots \times X_n, \|\cdot\|_p)$ ćemo označavati s $\bigoplus^p_{1\leq k\leq n} X_k$ i zvati **(vanjska) ℓ^p-direktna suma** normiranih prostora $(X_1, \|\cdot\|_{X_1}), \dots, (X_n, \|\cdot\|_{X_n})$. Za $n = 2$ obično pišemo $X_1 \oplus_p X_2$.

(c) Označimo s $\mathbb{F}^\mathbb{N}$ vektorski prostor svih nizova $(\xi_k)_k$ u $\mathbb{F}$, uz operacije po točkama. Neka su redom c_{00}, c_0 i c potprostori od $\mathbb{F}^\mathbb{N}$ definirani na sljedeći način:

$$c_{00} := \{x = (\xi_k)_k : \xi_k \neq 0 \text{ za konačno mnogo } k \in \mathbb{N}\},$$

$$c_0 := \left\{ x = (\xi_k)_k : \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0 \right\},$$

$$c := \left\{ x = (\xi_k)_k : \lim_{k\to\infty} \xi_k \text{ postoji} \right\}.$$

Očito je $c_{00} \subset c_0 \subset c$.

Nadalje, za $1 \leq p < \infty$ definiramo podskup $\ell^p \subset \mathbb{F}^\mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$\ell^p := \left\{ x = (\xi_k)_k : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}.$$

Očito je ℓ^p zatvoren s obzirom an operaciju množenja skalarom. Nadalje, koristeći specijalni slučaj Minkowskijeve nejednakosti[8] vidimo i da je ℓ^p zatvoren s obzirom na zbrajanje, tako da je ℓ^p potprostor od $\mathbb{F}^\mathbb{N}$, te

$$\|(\xi_k)_k\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty),$$

[8] Hermann Minkowski (1864.–1909.), njemački matematičar

definira normu na ℓ^p. Prostor ℓ^∞, kao i njegove potprostore c_0 i c, opskrbljujemo s normom

$$\|(\xi_k)_k\|_\infty := \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Sve zajedno, za $1 \le p < q < \infty$ imamo sljedeće inkluzije potprostora

$$c_{00} \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$$

i sve te inkluzije su striktne. Nadalje, za sve $x \in \ell^p$ vrijedi

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_q \le \|x\|_p \tag{1.3}$$

(vratit ćemo se na to kasnije, no u međuvremenu pokušajte sve te tvrdnje provjeriti za DZ). Također primijetimo da je c_{00} je beskonačnodimenzionalan pa isto vrijedi i za sve njegove nadprostore. Naime, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo niz e_n čija je n-ta vrijednost jednaka 1, a sve preostale 0. Tada je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ algebarska baza za c_{00}, tako da je $\dim c_{00} = \aleph_0$.

(d) Općenitije, neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Na vektorskom prostoru svih izmjerivih funkcija $f : X \to \mathbb{F}$ definirali smo relaciju $\sim$ tako da je $f \sim g$ ako je $f(x) = g(x)$ za gotovo sve $x \in X$. Pripadne klase ekvivalencije $[f]_\sim$ i dalje (malo neprecizno) označavamo s f, te ih smatramo funkcijama. Jasno je da takav skup ima strukturu vektorskog prostora nad $\mathbb{F}$ (kvocijentni prostor). Za $1 \le p < \infty$ definiramo $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ (ili samo L^p kada su $\mathcal{F}$ i μ jasni iz konteksta) kao skup svih (klasa) izmjerivih funkcija $f : X \to \mathbb{F}$ za koje je

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$

Tada je L^p vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, te je s

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

definirana norma na L^p. Pripadna nejednakost trokuta $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ je upravo standardna verzija Minkowskijeve nejednakosti. Nadalje, definiramo L^∞ kao skup svih esencijalno omeđenih funkcija $f : X \to \mathbb{F}$, što znači da postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|f(x)| \le M$ za gotovo sve $x \in X$. Tada je L^∞ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ te je s

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : |f(x)| \le M \text{ za gotovo sve } x \in X\}$$

definirana norma na L^∞. Sve zajedno, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ je normiran prostor za sve $1 \le p \le \infty$ (za detalje vidjeti [32]).

Posebno, ako uzmemo $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ te za μ mjeru prebrojavanja, dobivamo upravo "male" ℓ^p-prostore, tj. $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \ell^p$.

(e) Slično, na funkcijskom prostoru $C([a,b])$ neprekidnih funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{F}$ (s obzirom na operacije po točkama) definiramo familiju normi

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty),$$

te

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Očito je za sve $f \in C([a,b])$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b \|f\|_\infty^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \tag{1.4}$$

Napomena 1.2.3.

(a) Oznaku $\|\cdot\|_\infty$ opravdava činjenica da je $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

(b) Na analogan način smo mogli definirati $\|\cdot\|_p$ za $0 < p < 1$, no tada $\|\cdot\|_p$ neće biti norma, jer ne zadovoljava nejednakost trokuta/Minkowskog. Provjerite!

Definicija 1.2.4. Za dvije norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ na vektorskom prostoru X kažemo da su **ekvivalentne** ako postoje konstante $m, M > 0$ tako da vrijedi

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\| \quad \forall x \in X.$$

U tom slučaju pišemo $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

Lako se provjeri da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih normi na X.

Primjer 1.2.5. Ako su $X_1, \ldots, X_n$ normirani prostori, tada su prema (1.2), sve norme $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ na $X_1 \times \cdots \times X_n$ međusobno ekvivalentne.

Napomena 1.2.6. Na DIFRAF-u smo naučili da su svake dvije norme na $\mathbb{F}^n$ ekvivalentne. Ta se tvrdnja lako može poopćiti na proizvoljne konačnodimenzionalne vektorske prostore. Naime, neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ konačne dimenzije n i neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ dvije norme na X. Koristeći neku fiksiranu bazu $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ za X, na $\mathbb{F}^n$ definiramo

$$\|(\xi_1, \ldots, \xi_n)\|_{\mathbb{F}^n} := \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right\| \qquad \text{i} \qquad \|(\xi_1, \ldots, \xi_n)\|'_{\mathbb{F}^n} := \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k b_k \right\|'$$

Tada su $\|\cdot\|_{\mathbb{F}^n}$ i $\|\cdot\|'_{\mathbb{F}^n}$ norme na $\mathbb{F}^n$ pa su stoga ekvivalentne. S obzirom da se svaki element iz X može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{B}$, zaključujemo i da su početne norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ na X ekvivalentne. Dakle, *na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru su svake dvije norme ekvivalentne.*

Ta tvrdnja više ne vrijedi na beskonačnodimenzionalnim prostorima.

Primjer 1.2.7. Promotrimo prostor c_{00} s normama $\|\cdot\|_p$ i $\|\cdot\|_\infty$. Iz (1.4) znamo da je $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$ za sve $x \in c_{00}$. S druge strane, ne postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|x\|_p \leq M\|x\|_\infty$ za sve $x \in c_{00}$. Naime, za $n \in \mathbb{N}$ neka je x_n niz koji na prvih n-mjesta ima 1, a na ostalima 0. Tada je $\|x_n\|_\infty = 1$ i $\|x_n\|_p = n^{1/p}$. Dakle $\|\cdot\|_p \not\sim \|\cdot\|_\infty$ na c_{00}.

Također pokažimo da norme $\|\cdot\|_p$ i $\|\cdot\|_\infty$ nisu ekvivalentne niti u funkcijskom prostoru $C([0,1])$. Iz (1.3) znamo da je $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ za $f \in C([0,1])$. S druge strane, ne postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_p$ za sve $f \in C([0,1])$. Naime, promotrimo niz funkcija $(f_k)_k$ u $C([0,1])$ definiran s

$$f_k(t) := \begin{cases} (-2k^2 t + 2k)^{\frac{1}{p}}, & t \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0, & t \in \langle \frac{1}{k}, 1] \end{cases}.$$

Kako za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\|f_k\|_\infty = (2k)^{1/p}$ i $\|f_k\|_p = 1$, zaključujemo $\|\cdot\|_p \not\sim \|\cdot\|_\infty$ na $C([0,1])$.

Štoviše, činjenica da su svake dvije norme ekvivalentne karakterizira konačnodimenzionalne vektorske prostore:

Propozicija 1.2.8. *Vektorski prostor X je konačnodimenzionalan ako i samo ako su svake dvije norme na X ekvivalentne.*

Dokaz. Prema Napomeni 1.2.6, ako je $\dim X < \aleph_0$, onda su svake dvije norme na X ekvivalentne.

Obratno, pretpostavimo da je $\dim X \geq \aleph_0$ i fiksirajmo neku algebarsku bazu $\mathcal{B}$ za X (egzistenciju garantira Teorem 1.1.9). Tada za svaki $x \in X$ postoji jedinstvena funkcija $\varphi_x : \mathcal{B} \to \mathbb{F}$ s konačnim nosačem takva da je

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \varphi_x(b) b.$$

Koristeći bazu $\mathcal{B}$ definiramo norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ (analogone normi $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$) na X na sljedeći način

$$\|x\| := \max\{|\varphi_x(b)| :\ b \in \mathcal{B}\} \qquad \text{i} \qquad \|x\|' := \sum_{b\in\mathcal{B}} |\varphi_x(b)|.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{B}_n$ proizvoljan n-člani podskup od $\mathcal{B}$. Tada za vektor $x_{\mathcal{B}_n} := \sum_{b\in\mathcal{B}_n} b$ imamo $\|x_{\mathcal{B}_n}\| = 1$ i $\|x_{\mathcal{B}_n}\|' = n$. S obzirom da je $\mathcal{B}$ beskonačan skup, zaključujemo da $\|\cdot\| \not\sim \|\cdot\|'$. $\square$

* * *

Definicija 1.2.9. Neka je X neprazan skup. **Metrika** na X je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ za sve $x, y \in X$ (nenegativnost);

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ za sve $x, y \in X$ (simetričnost);

(M3) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$ (strogost);

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za sve $x, y, z \in X$ (nejednakost trokuta).

U tom slučaju za par (X, d) (ili samo za X ako se metrika d podrazumijeva) kažemo da je **metrički prostor**.

Elemente metričkog prostora obično nazivamo **točke**.

Primjer 1.2.10.

(a) Svaki normiran prostor X postaje metrički uz metriku

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X).$$

Za tu metriku d kažemo da je **metrika inducirana iz norme** $\|\cdot\|$.

(b) Na svakom nepraznom skupu možemo definirati **diskretnu metriku** $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{ako } x = y \\ 1 & \text{ako } x \neq y. \end{cases}$$

Kažemo i da je (X, d) **diskretan metrički prostor**.

Napomena 1.2.11. Neka je A neprazan podskup metričkog prostora (X, d). Tada restrikcija $d_A := d|_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}$ očito zadovoljava aksiome (M1)-(M4), tako da je d_A metrika na A koju zovemo **relativna metrika**, a metrički prostor (A, d_A) zovemo **potprostor** od (X, d). Udaljenost dviju točaka iz A jednaka je bez obzira gledamo li na njih kao na točke iz A ili X, pa ćemo i metriku d_A također označavati s d.

Definicija 1.2.12. Neka je X metrički prostor.

- Neka su $x \in X$ i $r > 0$. Za skup

  $$K(x, r) := \{y \in X :\ d(x, y) < r\}$$

  kažemo da je **otvorena kugla** sa središtem u x radijusa r. Analogno, za skup

  $$\overline{K}(x, r) := \{y \in X :\ d(x, y) \leq r\}$$

  kažemo da je **zatvorena kugla** sa središtem u x radijusa r.

- Za skup $U \subseteq X$ kažemo da je **otvoren**, ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.

- Za skup $C \subseteq X$ kažemo da je **zatvoren** ako je njegov komplement $C^{\mathrm{c}} = X \setminus C$ otvoren.

Primjer 1.2.13. (a) Svaka otvorena kugla metričkog prostora X je otvoren skup. Analogno, svaka zatvorena kugla u X je zatvoren skup.

(b) Svaki konačan skup u metričkom prostoru je zatvoren.

(c) U normiranom prostoru X jedini skupovi koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni su $\emptyset$ i X. Argument je isti kao i za $\mathbb{F}^n$ (konveksnost $\implies$ povezanost putevima $\implies$ povezanost).

(d) U diskretnom metričkom prostoru je svaki njegov podskup istovremeno otvoren i zatvoren.

Definicija 1.2.14. Neka je X metrički prostor.

- Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je **ograničen** ako je njegov **dijametar**

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) \ : \ x, y \in A\}$$

  konačan.

- Za funkciju $f : S \to X$, gdje je S neki skup, kažemo da je **ograničena** ako je njena slika $f(S)$ ograničen skup u X.

Primijetimo da je $A \subseteq X$ ograničen ako i samo ako je A sadržan u nekoj kugli u X. Ako je X normiran prostor, tada je dovoljno promatrati kugle s centrom u 0, tako da je A ograničen ako i samo ako postoji $M > 0$ takav da je $\|x\| \leq M$ za sve $x \in A$.

Napomena 1.2.15. Neka je X metrički prostor. Označimo s $\mathcal{T}$ familiju svih otvorenih skupova u X. Tada vrijedi:

(T1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

(T2) Familija $\mathcal{T}$ je zatvorena na proizvoljne unije.

(T3) Familija $\mathcal{T}$ je zatvorena na konačne presjeke.

Koristeći De Morganova[9] pravila, dobivamo analogne tvrdnje i za familiju zatvorenih skupova $\mathcal{C}$ u X, dakle: $X, \emptyset \in \mathcal{C}$, te je familija $\mathcal{C}$ zatvorena na proizvoljne presjeke i konačne unije.

Definicija 1.2.16. Neka je X skup i $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova od X koja zadovoljava svojstva T1, T2 i T3. Tada kažemo da je $\mathcal{T}$ **topologija** na X, a par $(X, \mathcal{T})$ zovemo **topološki prostor**. Elemente familije $\mathcal{T}$ zovemo **otvoreni skupovi** a njihove komplemente **zatvoreni skupovi**. Nadalje, **okolina točke** $x \in X$ je svaki podskup $V \subseteq X$ takav da je $x \in U \subseteq V$ za neki $U \in \mathcal{T}$.

Napomena 1.2.17. (a) Kao što znamo s DIFRAF-a, apstraktno okruženje topoloških prostora dovoljno je za definiciju konvergencije niza, limesa te neprekidnosti funkcije.

(b) Ako je topologija $\mathcal{U}$ topološkog prostora X inducirana nekom metrikom d, onda kažemo da je X **metrizabilan**. Općeniti topološki prostori ne moraju biti metrizabilni. Npr. za proizvoljan skup X stavimo $\mathcal{T}_i := \{\emptyset, X\}$. Tada je $\mathcal{T}_i$ očito topologija na X koja se zove *indiskretna (trivijalna) topologija.* Ako X ima barem dva elementa, tada topologija $\mathcal{T}_i$ nije metrizabilna. Naime, jednočlani skupovi u $(X, \mathcal{T}_i)$ nisu zatvoreni.

(c) Na svakom skupu X možemo promatrati najveću moguću topologiju $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ (partitivni skup od X). Dakle svi skupovi u X su otvoreni s obzirom na $\mathcal{T}_d$. Ta se topologija zove **diskretna topologija**. Primijetimo da je ona inducirana iz diskretne metrike.

[9] Augustus De Morgan (1806.–1871.), britanski matematičar i logičar

(d) Na analogan način kao u Definiciji 1.2.4 definirali bismo ekvivalenciju metrika na skupu X i pokazali da je to relacija ekvivalencije. Dakle, dvije metrike d i d' na X su **ekvivalentne** ako postoje konstante $m, M > 0$ tako da vrijedi

$$md(x,y) \leq d'(x,y) \leq Md(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

Primijetimo da ekvivalentne metrike induciraju istu topologiju na X. Obrat općenito ne vrijedi. Npr. na $\mathbb{F}^n$ metrike $d(x,y) := \|x-y\|$ i $d'(x,y) := \min\{1, \|x-y\|\}$ induciraju istu topologiju, ali nisu ekvivalentne s obzirom da je $\mathbb{F}^n$ ograničen s obzirom na d'.

S druge strane, ako je X vektorski prostor, tada dvije norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ na X koje induciraju iste topologije moraju biti ekvivalentne. Zaista jer je $\|\cdot\|'$-kugla $K'(0,1)$ otvorena s obzirom na $\|\cdot\|$, postoji $r > 0$ takav da je $K(0,r) \subseteq K'(0,1)$. Za proizvoljan $x \in X \setminus \{0\}$ stavimo $y := \frac{rx}{2\|x\|}$. Tada je $\|y\| = \frac{r}{2} < r$ pa je $\|y\|' < 1$, odnosno $\|x\|' \leq \frac{2}{r}\|x\|$. Obratnu varijantu nejednakosti dobivamo zamjenom uloga normi.

Definicija 1.2.18. Za proizvoljan podskup A topološkog prostora X definiramo sljedeće skupove:

- **Interior** od A, $\operatorname{Int} A := \bigcup\{U : U \subseteq A,\ U \text{ otvoren u } X\}$,
- **Zatvarač** od A, $\overline{A} := \bigcap\{C : C \supseteq A,\ C \text{ zatvoren u } X\}$,
- **Rub** od A, $\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$,
- **Derivat** od A, $A^d := \{x \in X : A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset \text{ za svaku okolinu } U \text{ od } x\}$.

Nadalje, točke iz A^d (ako postoje) se zovu **gomilišta** skupa A, a točke iz $A \setminus A^d$ (ako postoje) **izolirane točke** skupa A.

Napomena 1.2.19. Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$.

(a) $\operatorname{Int} A$ je otvoren skup i to je najveći otvoren skup u X koji je sadržan u skupu A. Skup A je otvoren ako i samo ako je $\operatorname{Int} A = A$.

(b) $\overline{A}$ je zatvoren skup i to je najmanji zatvoren skup u X koji sadrži skup A. Skup A je zatvoren ako i samo ako je $\overline{A} = A$. Nadalje, za $x \in X$ imamo $x \in \overline{A}$ ako i samo ako za svaku okolinu U od x vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.

(c) Operatori interora i zatvarača su međusobno dualni, u smislu da je $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ i $\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

(d) ∂A je zavoren skup u X i imamo $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$, $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$, tako da je $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

(e) Vrijedi $\overline{A} = A \cup A^d$. Nadalje, ako je X metrizabilan, onda je $x \in A^d$ ako i samo ako svaka okolina U od x sadrži beskonačno mnogo elemenata od A. U tom slučaju je A^d zatvoren skup u X.

Napomena 1.2.20.

(a) Za (nužno zatvoren) podskup C topološkog prosotra X kažemo da je **savršen** ako je $C^d = C$. Ako je X normiran prostor, primijetimo da su sve zatvorene kugle $\overline{K}(x,r)$ u X savršeni skupovi. Zaista, stavimo $C := \overline{K}(x,r)$. Jer je C zatvoren skup, imamo $C^d \subseteq C$. Obratno, neka je $y \in C$ i $\varepsilon > 0$. Ako je $y \neq x$ neka je $0 < t < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2r}\}$ i $y_t := (1-t)y + tx$. Tada je $y_t \in K(y,\varepsilon) \cap C$ i $y_t \neq y$. Ako je $y = x$ fiksirajmo proizvoljan $x_0 \in X$ norme 1, te za $0 < s < \min\{r, \varepsilon\}$ stavimo $x_s := x + sx_0$. Tada je $x_s \in K(x,\varepsilon) \cap C$ i $x_s \neq x$.

(b) U svakom metričkom prostoru X trivijalno vrijedi $\overline{K(x,r)} \subseteq \overline{K}(x,r)$. Ta inkluzija može biti striktna. Na primjer, ako je X diskretan metrički prostor s barem dvije različite točke, tada je $\{x\} = \overline{K(x,1)} \subsetneq \overline{K}(x,1) = X$ za sve $x \in X$. S druge strane, prema (a), u svakom normiranom prostoru X uvijek vrijedi jednakost $\overline{K(x,r)} = \overline{K}(x,r)$.

Definicija 1.2.21. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Za podskup B od A kažemo da je **otvoren u** A ako postoji otvoren skup $U \in \mathcal{T}$ takav da je $B = A \cap U$. Familija $\mathcal{T}_A := \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$ otvorenih skupova u A definira topologiju na A koja se zove **relativna topologija** na A.

Napomena 1.2.22. Neka je $B \subseteq A \subseteq X$. Ako je A otvoren (zatvoren) u X, onda je B otvoren (zatvoren) u A ako i samo ako je B otvoren (zatvoren) u X.

* * *

Definicija 1.2.23. Neka je X topološki prostor.

- **Niz** u X je svaka funkcija $x : \mathbb{N} \to X$. Označavamo ga s $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ili $(x_k)_k$.
- **Podniz** niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je svaka funkcija oblika $y = x \circ p$, pri čemu je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Dakle,
$$y_1 = x_{p(1)} = x_{p_1}, y_2 = x_{p(2)} = x_{p_2}, \dots$$

Definicija 1.2.24. Za niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u topološkom prostoru X kažemo da je **konvergentan** ako postoji točka $x_0 \in X$ takva da svaka okolina U od x_0 sadrži sve osim eventualno konačno mnogo članova niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, odnosno ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in U$ za sve $k \geq k_0$. U tom slučaju pišemo
$$x_k \to x_0 \qquad \text{ili} \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$$
i bilo koju točku x_0 s tim svojstvom zovemo **limes niza**. Također kažemo da niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergira prema** x_0.

Napomena 1.2.25.

(a) Ako je X metrički prostor, tada niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X konvergira prema $x_0 \in X$ ako i samo ako vrijedi
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\,(\forall k \geq k_0)\,(d(x_k, x_0) < \varepsilon).$$

(b) Konvergentni nizovi u metričkim prostorima imaju jedinstven limes. Naime, ako bi bilo $x_k \to x$ i $x_k \to x'$ te $x \neq x'$, onda bi za $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x, x') > 0$ međusobno disjunktne kugle $K(x, \varepsilon)$ i $K(x', \varepsilon)$ sadržavale sve osim konačno mnogo članova niza.

Prethodna tvrdnja više ne vrijedi u općenitim topološkim prostorima. Npr. za proizvoljan skup X uzmimo indiskretnu topologiju $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, X\}$. Primijetimo da je s obzirom na tu topologiju svaki niz u X konvergentan i svaka točka iz X mu je limes. Posebno, ako X ima barem dvije različite točke, niti jedan (konvergentan) niz u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_i)$ neće imati jedinstven limes.

U metričkim prostorima je uz konvergentne nizove usko vezan sljedeći pojam:

Definicija 1.2.26. Za niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru X kažemo da je **Cauchyjev**[10] **niz** ako vrijedi
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\,(\forall k, l \geq k_0)\,(d(x_k, x_l) < \varepsilon).$$

Napomena 1.2.27. Neka je X metrički prostor.

(a) Svaki konvergentan niz u X je Cauchyjev. Obrat općenito ne vrijedi. Npr. niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, s općim članom $x_k = \frac{1}{k}$, je Cauchyjev niz u metričkom prostoru $X = \langle 0, +\infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ koji ne konvergira u X.

(b) Svaki Cauchyjev niz u X je ograničen.

(c) Ako neki podniz Cauchyjevog niza u X konvergira prema $x_0 \in X$ onda i originalni niz konvergira prema x_0.

[10] Augustin-Louis Cauchy (1789.–1857.), francuski matematičar, inženjer i fizičar

* * *

Definicija 1.2.28. Neka su X i Y topološki prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **neprekidna u točki** $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ postoji okolina U točke x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Ako je f neprekidna u svim točkama iz X, onda kažemo da je f **neprekidna** (na X).

Napomena 1.2.29. Ako su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in X)\,(d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Ubuduće ćemo umjesto d_X i d_Y pisati samo d, te ćemo iz konteksta podrazumijevati o kojim je metrikama točno riječ.

Uz neprekidne funkcije na metričkim prostorima usko su vezana i sljedeća dva pojma.

Definicija 1.2.30. Neka su X i Y metrički prostori i $f : X \to Y$ funkcija.

- Kažemo da je f **uniformno neprekidna** ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in X)\,(d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

- Kažemo da je f **Lipschitzova**[11] (ili **Lipschitz-neprekidna**) ako postoji konstanta $L \geq 0$ takva da vrijedi

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{1.5}$$

Napomena 1.2.31. Očito je svaka uniformno neprekidna funkcija neprekidna. Također, svaka Lipschitzova funkcija je uniformno neprekidna. Naime, neka je L neka konstanta kao u (1.5). Možemo pretpostaviti da je $L > 0$. Za dani $\varepsilon > 0$ stavimo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Tada za sve $x, y \in X$ takve da je $d(x, y) < \delta$ imamo

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Dakle, za funkcije između metričkih prostora vrijede sljedeće implikacije:

$$\text{Lipschitzovost} \implies \text{uniformna neprekidnost} \implies \text{neprekidnost}.$$

Obrati općenito ne vrijede. Npr. neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{|x|}$. Tada je f neprekidna, ali nije uniformno neprekidna, dok je g uniformno neprekidna, ali nije Lipschitzova.

Propozicija 1.2.32. *Neka su X, Y i Z topološki prostori, te $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Ako je f neprekidna u $x_0 \in X$ i g neprekidna u $f(x_0) \in Y$ tada je kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna u x_0. Posebno, kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $W \subseteq Z$ proizvoljna okolina točke $g(f(x_0))$. Jer je g neprekidna u $f(x_0)$, postoji okolina $V \subseteq Y$ od $f(x_0)$ takva da je $g(V) \subseteq W$. Jer je f neprekidna u x_0, postoji okolina $U \subseteq X$ od $f(x_0)$ takva da je $f(U) \subseteq V$. Tada je $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$. □

Lako je vidjeti i da je na metričkim prostorima kompozicija uniformno (Lipschitz) neprekidnih funkcija uniformno (Lipschitz) neprekidna funkcija (DZ).

Napomena 1.2.33. Za Lipschitzovu funkciju $f : X \to Y$ između metričkih prostora X i Y definiramo

$$L_f := \inf \{L \geq 0 : \ d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \ \forall x, y \in X\}.$$

Tada je $L = L_f$ najmanja konstanta za koju vrijedi (1.5) i zovemo ju **Lipschitzova konstanta** od f. Nadalje, vrijedi

$$L_f = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \, : \, x, y \in X, \, x \neq y \right\}.$$

[11] Rudolf Lipschitz (1832.–1903.), njemački matematičar

Zaista, označimo gornji supremum s r. Iz definicije od L_f slijedi da za svaki $x, y \in X$, $x \neq y$ imamo

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq L_f,$$

pa uzimanjem supremuma dobivamo $r \leq L_f$.

S druge strane, iz definicije supremuma slijedi da za svaki $x, y \in X$, $x \neq y$ vrijedi

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq r.$$

Kako za $x = y$ imamo $d(x, y) = 0$ (kao i obratno), gornja nejednakost je ekvivalentna s

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Dakle, f zadovoljava (1.5) za $L = r$. Iz definicije od L_f sada slijedi $L_f \leq r$.

Primjer 1.2.34. Neka je X normiran prostor.

(a) Prema (1.1), norma $\|\cdot\|$ je Lipschitzova funkcija na X.

(b) Operacija zbrajanja $X \oplus_p X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$, je Lipschitzova funkcija ($1 \leq p \leq \infty$). Naime, zbog ekvivalencije svih p-normi na konačnom kartezijevom produktu normiranih prostora (Primjer 1.2.2) tvrdnju je dovoljno dokazati za normu $\|\cdot\|_1$. Tada za sve $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$ imamo

$$\|x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1$$

(c) Operacija množenja skalarom, $\mathbb{F} \oplus_p X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, je Lipschitzova funkcija na svakom ograničenom podskupu S od $\mathbb{F} \oplus_p X$ ($1 \leq p \leq \infty$). Zaista, jer je S ograničen u p-normi, on je ograničen i u 1-normi pa postoji $M > 0$ takav da je $|\lambda| + \|x\| = \|(\lambda, x)\|_1 \leq M$ za sve $(\lambda, x) \in S$. Tada za sve $(\lambda, x), (\mu, y) \in S$ imamo

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \mu y\| &\leq \|\lambda x - \lambda y\| + \|\lambda y - \mu y\| = |\lambda|\|x - y\| + \|y\||\lambda - \mu| \\ &\leq M(|\lambda - \mu| + \|x - y\|) = M\|(\lambda, x) - (\mu, y)\|_1. \end{aligned}$$

Posebno, operacija množenja skalarom je globalno neprekidna (odnosno neprekidna na čitavoj svojoj domeni $\mathbb{F} \times X$). S druge strane, ona nije globalno uniformno neprekidna, pa stoga niti globalno Lipschitzova (DZ).

Definicija 1.2.35. Neka je X metrički prostor. Za $A \subseteq X$ definiramo funkciju $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ s

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) \ : \ y \in A\}.$$

Za $x \in X$ vrijednost $d(x, A)$ zovemo **udaljenost točke** x **do skupa** A.

Propozicija 1.2.36. *Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$.*

(i) Funkcija $d(\cdot, A)$ je Lipschitzova na X.

(ii) Vrijedi

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{x \in X \ : \ d(x, A) = 0\} \\ &= \left\{ \lim_{k \to \infty} x_k \ : \ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ niz u } A \text{ koji konvergira u } X \right\}. \end{aligned}$$

Dokaz. (i). Neka su $x, y \in X$ proizvoljne točke. Tada za svako $a \in A$ imamo $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y)+d(y,a)$, odakle slijedi $d(x,A) \leq d(x,y)+d(y,A)$, odnosno $d(x,A)-d(y,A) \leq d(x,y)$. Zamijenom uloga točaka x i y dobivamo i $d(y,A)-d(x,A) \leq d(y,x) = d(x,y)$. Dakle,

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \qquad \text{za sve } x, y \in X.$$

(ii). Za $x \in X$ imamo $d(x,A) = 0$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x,a) < \varepsilon$, odnosno ako i samo ako $K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Prema Napomeni 1.2.19 to je ekvivalentno s $x \in \overline{A}$.

Nadalje, ako je $d(x,A) = 0$, onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $a_k \in A$ takav da je $d(a_k, x) < \frac{1}{k}$. Dakle, $(a_k)_k$ je niz u A i $a_k \to x$. Ako je pak $(a_k)_k$ niz u A koji konvergira prema nekom $x \in X$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(a_k, x) < \varepsilon$ za sve $k \geq k_0$. Posebno, $d(x,A) \leq d(x, a_{k_0}) < \varepsilon$. Dakle, $d(x,A) = 0$. □

Napomena 1.2.37. Koristeći Propoziciju 1.2.36 lako vidimo da je zatvarač svakog potprostora Y normiranog prostora X i sam potprostor od X. Zaista, ako su $y_1, y_2 \in \overline{Y}$ te $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, tada je

$$\begin{aligned} d(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, Y) &= \inf_{y \in Y} \|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - y\| \leq \inf_{y \in Y} \|\lambda_1 y_1 - y\| + \inf_{y \in Y} \|\lambda_2 y_2 - y\| \\ &= \inf_{y \in Y} \|\lambda_1 y_1 - \lambda_1 y\| + \inf_{y \in Y} \|\lambda_2 y_2 - \lambda_2 y\| = |\lambda_1| d(y_1, Y) + |\lambda_2| d(y_2, Y) = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \overline{Y}$.

Slično kao što smo naučili na DIFRAF-u, za funkcije između općenitih topoloških prostora vrijede sljedeće karakterizacije neprekidnosti.

Teorem 1.2.38. *Neka su X i Y topološki prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ promotrimo sljedeće tvrdnje:*

(i) f je neprekidna na X.

(ii) Za svaki otvoren podskup V od Y je $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

(iii) Za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iv) Za svaki zatvoren podskup C od Y je $f^{-1}(C)$ zatvoren podskup od X.

(v) Za svaki konvergentan niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X vrijedi $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k)$.

Tada su tvrdnje (i), (ii), (iii) i (iv) ekvivalentne te povlače (v). Nadalje, ako je prostor X metrizabilan, tada je i tvrdnja (v) ekvivalentna s preostalim.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup. Ako je $x \in f^{-1}(V)$, tako da je $f(x) \in V$, iz neprekidnosti od f u x dobivamo otvorenu okolinu $U_x \subseteq X$ od x takvu da je $f(U_x) \subseteq V$. Dakle, $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$ pa je $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$. Zaključujemo da je skup $f^{-1}(V)$ otvoren kao unija otvorenih skupova.

(ii) $\implies$ (iii). Za $A \subseteq X$ stavimo $B := \overline{f(A)}$. Jer je B zatvoren u Y, prema pretpostavci je skup $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ otvoren u X. Stoga je $f^{-1}(B)$ je zatvoren u X. Jer je $A \subseteq f^{-1}(B)$, slijedi $\overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$, odnosno $f(\overline{A}) \subseteq B = \overline{f(A)}$.

(iii) $\implies$ (iv). Neka je C zatvoren podskup od Y. Prema pretpostavci za $A := f^{-1}(C)$ dobivamo $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$. Dakle, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(C) = A$. Kako je trivijalno $A \subseteq \overline{A}$, zaključujemo $A = \overline{A}$, odnosno $A = f^{-1}(C)$ je zatvoren podskup od X.

(iv) $\implies$ (i). Neka je $x_0 \in X$ i V otvorena okolina od $f(x_0)$. Jer je V^c zatvoren u Y, $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$ je zatvoren u X. Stoga je $U := f^{-1}(V)$ otvorena okolina od x_0 i $f(U) \subseteq V$. Dakle, f je neprekidna u x_0.

Time smo dokazali ekvivalenciju tvrdnji (i), (ii), (iii) i (iv).

(ii) $\implies$ (v). Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz u X s limesom x_0. Ako je V otvorena okolina od $f(x_0)$, tada je prema pretpostavci $f^{-1}(V)$ otvorena okolina točke x_0. Jer $x_k \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$

takav da je $x_k \in f^{-1}(V)$ za sve $k \geq k_0$, odnosno $f(x_k) \in V$ za sve $k \geq k_0$. Zbog proizvoljnosti od V zaključujemo $f(x_k) \to f(x_0)$.

Pretpostavimo sada da je prostor X metrizabilan.

(v) $\implies$ (iii). Neka je $A \subseteq X$. Ako je $y_0 \in f(\overline{A})$, tada postoji $x_0 \in \overline{A}$ takav da je $y_0 = f(x_0)$. Prema Propoziciji 1.2.36 postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u A takav da $x_k \to x_0$. Tada je, prema pretpostavci, $(f(x_k))_k$ niz u $f(A)$ takav da $f(x_k) \to f(x_0)$. Posebno, svaka okolina od $f(x_0)$ siječe skup $f(A)$, pa je $y_0 = f(x_0) \in \overline{f(A)}$. Dakle, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. □

Definicija 1.2.39. Neka su X i Y topološki prostori.

- Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **homeomorfizam** ako je f neprekidna bijekcija čiji je inverz $f^{-1} : Y \to X$ također neprekidan.
- Kažemo da su prostori X i Y **homeomorfni** ako postoji (barem jedan) homeomorfizam $f : X \to Y$.

Napomena 1.2.40.

(a) Očito je kompozicija homeomorfizama homeomorfizam.

(b) Prema Teoremu 1.2.38, neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ je homeomorfizam ako i samo je f **otvoreno preslikavanje**, tj. za svaki otvoren skup U u X je skup $f(U)$ otvoren u Y.

(c) Relacija "biti homeomorfan" je relacija ekvivalencije na klasi svih topoloških prostora. S topološkog stanovišta homeomorfni prostori se obično identificiraju.

Primjer 1.2.41. Neka je X normiran prostor.

(a) Svaka translacija $x \mapsto x + x_0$ je homeomorfizam od X (s inverzom $x \mapsto x - x_0$).

(b) Za svaki $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, preslikavanje $x \mapsto \lambda x$ je homeomorfizam od X (s inverzom $x \mapsto \frac{x}{\lambda}$).

(c) Svake dvije otvorene kugle u X su homeomorfne. Štoviše, svaka od njih je homeomorfna čitavom prostoru X. Naime, za $x_0 \in X$ i $r > 0$ otvorena kugla $K(x_0, r)$ je homeomorfna s $K(0,1)$, preko homeomorfizma $x \mapsto \frac{x-x_0}{r}$. Nadalje, $K(0,1)$ je homeomorfna s X preko homeomorfizma $x \mapsto \frac{x}{1-\|x\|}$ (za DZ dokažite da je to preslikavanje zaista homeomorfizam s $K(0,1)$ na X).

1.3 Potpunost u metričkim i normiranim prostorima

Napomena 1.3.1. Kao što znamo, **Bolzano-Weierstrassov**[12,13] **teorem za nizove** u $\mathbb{F}^n$ garantira da svaki ograničen niz u $\mathbb{F}^n$ (s obzirom na proizvoljnu normu) ima konvergentan podniz. Analognu tvrdnju lako možemo poopćiti na proizvoljne konačnodimenzionalne normirane prostore, koristeći neku konkretnu bazu (slično kao u Napomeni 1.2.6, provesti za DZ). Dakle, *svaki ograničen niz u konačnodimenzionalnom normiranom prostoru ima konvergentan podniz.*

S druge strane, za beskonačnodimenzionalne normirane prostore analogna tvrdnja više ne vrijedi.

Primjer 1.3.2. Promotrimo prostor c_{00}. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je e_n niz koji na n-tom mjestu ima 1, a na ostalima 0. Tada je za sve $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_\infty = 1$ i $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$ za $m \neq n$. Posebno, $(e_n)_n$ je ograničen niz u c_{00} koji nema Cauchyjev, pa stoga niti konvergentan podniz.

Definicija 1.3.3.

- Za metrički prostor X kažemo da je **potpun** ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira s limesom u X. U tom slučaju i za pripadnu metriku na X kažemo da je **potpuna**.

[12]Bernard Bolzano (1781.–1848.), bohemijski matematičar, logičar, filozof, teolog i svećenik

[13]Karl Weierstrass (1815.–1897.), njemački matematičar, poznat kao "ocem moderne analize"

- Za topološki prostor X kažemo da je **potpuno metrizabilan** ako je topologija od X inducirana iz neke potpune metrike na X.

- Potpuni normirani prostori zovu se **Banachovi**.

Napomena 1.3.4. Primijetimo da je topološki prostor potpuno metrizabilan ako i samo ako je homeomorfan nekom potpunom metričkom prostoru.

Posebno, svaka otvorena kugla u Banachovom prostoru je X je potpuno metrizabilna (Primjer 1.2.41), iako sama nije potpuna (s obzirom na normu). Primjerice, za proizvoljan jedinični vektor $x_0 \in X$, niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s općim članom $x_k = \frac{k}{k+1}x_0$ je Cauchyjev niz u $K(0,1)$ koji ne konvergira u $K(0,1)$.

Primjer 1.3.5. Prostor $\mathbb{F}^n$ je (s obzirom na proizvoljnu normu) Banachov prostor. Naime, ako je $(\xi_k)_k$ proizvoljan Cauchyjev niz u $\mathbb{F}^n$, tada je on ograničen pa prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu za nizove ima konvergentan podniz s limesom ξ_0. Tada i sam niz konvergira prema ξ_0.

Općenitije, *svaki konačnodimenzionalan normiran prostor je Banachov.* Argument je sličan kao i prije, koristimo neku fiksnu bazu prostora i činjenicu da je $\mathbb{F}^n$ potpun (formalan dokaz provedite za DZ).

Primjer 1.3.6. Neka je X topološki prostor. Označimo s $C_b(X)$ potprostor od $\mathbb{F}^X$ koji se sastoji od svih ograničenih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{F}$. Prostor $C_b(X)$ opskrbljujemo s normom

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Tvrdimo da je $C_b(X)$ Banachov prostor. Zaista, neka je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $C_b(X)$. Ako je $x \in X$ proizvoljna točka, tada iz

$$|f_k(x) - f_l(x)| \le \|f_k - f_l\|_\infty \qquad (k, l \in \mathbb{N}) \tag{1.6}$$

slijedi da je $(f_k(x))_k$ Cauchyjev niz u $\mathbb{F}$. Jer je polje $\mathbb{F}$ potpuno, postoji

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Na taj način dolazimo do funkcije $f : X \to \mathbb{F}$. Tvrdimo da $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ i da je $f \in C_b(X)$.

Zaista, za fiksan $\varepsilon > 0$ izaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$ za sve $k, l \ge k_0$. Iz (1.6) dobivamo da je $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ za sve $k, l \ge k_0$ i $x \in X$. Odavde zaključujemo da je $|f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon$ za sve $k \ge k_0$ i $x \in X$. Dakle, $\|f_k - f\|_\infty \to 0$. Nadalje, ako je $M > 0$ takav da je $|f_{k_0}(x)| \le M$ za sve $x \in X$, onda je $|f(x)| \le |f_{k_0}(x)| + |f(x) - f_{k_0}(x)| \le M + \varepsilon$, što pokazuje da je funkcija f ograničena.

Preostaje dokazati neprekidnost funkcije f. Fiksirajmo stoga $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Budući da $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ vrijedi $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Jer je f_k neprekidna u x_0, postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da za sve $x \in U$ vrijedi $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Tada za sve $x \in U$ imamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Posebno, jer je svaka neprekidna funkcija na segmentu ograničena, $C([a,b]) = C_b([a,b])$ je Banachov prostor uz $\|\cdot\|_\infty$. Također je i $\ell^\infty = C_b(\mathbb{N})$ Banachov prostor ($\mathbb{N}$ smo opskrbili s diskretnom topologijom).

Napomena 1.3.7. Topologija na $C_b(X)$ inducirana normom $\|\cdot\|_\infty$ zove se **topologija uniformne konvergencije**, a konvergencija u toj normi se zove **uniformna konvergencija**.

Primjer 1.3.8. Lako se provjeri da su c_0 i c zatvoreni potprostori od ℓ^∞ pa su stoga Banachovi prostori.

Primjer 1.3.9. Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Tada je $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ Banachov prostor za sve $1 \le p \le \infty$ (vidjeti [32]). Posebno, svi ℓ^p-prostori su Banachovi (alternativni argument dat ćemo u Napomeni 1.9.6).

S druge strane, mnogi beskonačnodimenzionalni normirani prostori nisu Banachovi.

Primjer 1.3.10. (a) Jednostavan primjer nepotpunog normiranog prostora je $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. Zaista, za $k \in \mathbb{N}$ neka je $x_k := \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right)$. Tada je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u c_{00} koji konvergira prema $x_0 := \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right) \in c_0 \setminus c_{00}$. Posebno $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u c_{00} koji ne konvergira u c_{00}.

(b) Kao drugi primjer, promotrimo potprostor $C^1([a,b])$ realnog prostora $C([a,b])$ koji se sastoji od svih funkcija klase C^1. Tvrdimo da $C^1([a,b])$ nije potpun s obzirom na $\|\cdot\|_\infty$. Radi jednostavnosti notacije uzmimo npr. $[a,b]=[-1,1]$. Za $k\in\mathbb{N}$ neka je $f_k:[-1,1]\to\mathbb{R}$ funkcija definirana s $f_k(t):=\sqrt{t^2+\frac{1}{k^2}}$. Tada je $(f_k)_k$ niz u $C^1([-1,1])$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f(t):=|t|$. Naime, za svaki $k\in\mathbb{N}$ imamo $\|f_k-f\|_\infty\leq\frac{1}{k}$. Jer $f\notin C^1([-1,1])$ zaključujemo da prostor $C^1([-1,1])$ nije potpun s obzirom na normu $\|\cdot\|_\infty$.

S druge strane, $C^1([a,b])$ postaje Banachov prostor s obzirom na (za taj prostor prirodniju) normu

$$\|f\|_{C^1}:=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty,$$

Zaista, neka je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $C^1([a,b])$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_{C^1}$. Tada su oba niza $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(f_k')_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjeva u $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$, pa zbog potpunosti tog prostora postoje $f,g\in C([a,b])$ takve da $\|f_k-f\|_\infty\to 0$ i $\|f_k'-g\|_\infty\to 0$. Tvrdimo da je $f\in C^1([a,b])$ i da je $f'=g$ (tako da onda $\|f_k-f\|_{C^1}\to 0$). Zaista, za $x\in[a,b]$ i $k\in\mathbb{N}$ prema Newton-Leibnizovoj formuli imamo

$$f_k(x)=f_k(a)+\int_a^x f_k'(t)\,dt. \tag{1.7}$$

Iz $\|f_k-f\|_\infty\to 0$ svakako slijedi $f_k(x)\to f(x)$, a iz $\|f_k'-g\|_\infty\to 0$ slijedi

$$\int_a^x f_k'(t)\,dt\to\int_a^x g(t)\,dt.$$

Stoga, prelaskom na limes u (1.7) dobivamo

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,dt$$

Jer je $x\in[a,b]$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $f\in C^1([a,b])$ i $f'=g$.

(c) Funkcijski prostor $C([a,b])$ nije potpun niti u jednoj p-normi, gdje je $1\leq p<\infty$. Radi jednostavnosti notacije uzmimo npr. $[a,b]=[-1,1]$. Za svaki $k\in\mathbb{N}$ neka je $f_k\in C([-1,1])$ po dijelovima afina funkcija definirana s

$$f_k(t):=\begin{cases}1, & -1\leq t\leq 0\\ 1-kt, & 0\leq t\leq\frac{1}{k}\\ 0, & \frac{1}{k}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Kako za proizvoljne $k,l\in\mathbb{N}$, $l\geq k$ imamo

$$\|f_k-f_l\|_p=\left(\int_0^{\frac{1}{k}}|f_k(t)-f_l(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}},$$

zaključujemo da je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $(C([0,1]),\|\cdot\|_p)$. Pretpostavimo da niz $(f_k)_k$ u p-normi konvergira prema funkciji $f\in C([-1,1])$. Iz

$$\int_{-1}^0|f(t)-1|^p\,dt=\int_{-1}^0|f(t)-f_k(t)|^p\,dt\leq\|f-f_k\|_p^p$$

i $\|f-f_k\|_p\to 0$ zaključujemo da je $f(t)=1$ za $-1\leq t\leq 0$. Slično, za proizvoljan $0<\varepsilon\leq 1$ izaberimo $k_0\in\mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{k_0}\leq\varepsilon$. Tada je za sve $k\geq k_0$

$$\int_\varepsilon^1|f(t)|^p\,dt=\int_\varepsilon^1|f(t)-f_k(t)|^p\,dt\leq\|f-f_k\|_p^p,$$

pa iz $\|f-f_k\|_p\to 0$ i proizvoljnosti $0<\varepsilon\leq 1$ slijedi da je $f(t)=0$ za $0<t\leq 1$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je f neprekidna.

Propozicija 1.3.11. *Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$.*

(i) Ako je A potpun, tada je A zatvoren u X.

(ii) Ako je X potpun i A zatvoren, onda je A potpun.

Posebno, podskup potpunog metričkog prostora je zatvoren ako i samo ako je potpun.

Dokaz. (i). Pretpostavimo da je A potpun i neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u A koji konvergira prema limesu $x_0 \in X$. Slijedi da je on i Cauchyjev niz u A. Zbog potpunosti od A niz konvergira u A, a zbog jedinstvenosti limesa konvergira baš prema x_0. Zaključujemo $x_0 \in A$, pa je skup A zatvoren (Propozicija 1.2.36).

(ii). Pretpostavimo da je X potpun te da je $A \subseteq X$ zatvoren. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u A. Tada je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u X, a kako je X potpun, slijedi da niz konvergira u X. Jer je A zatvoren, slijedi da mu je limes u A, pa je A potpun. □

Iz Primjera 1.3.5 i Propozicije 1.3.11 direktno dobivamo sljedeću činjenicu:

Propozicija 1.3.12. *Svaki konačnodimenzionalan potprostor normiranog prostora je zatvoren.*

Primjer 1.3.10 pokazuje da beskonačnodimenzionalni potprostori normiranog prostora ne moraju biti zatvoreni. Štoviše, vrijedi:

Propozicija 1.3.13. *Normiran prostor X je konačnodimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov potprostor zatvoren.*

Dokaz. Prema prethodnoj diskusiji dovoljno je dokazati da svaki beskonačnodimenzionalan normiran prostor X sadrži potprostor koji nije zatvoren. Fiksirajmo $x_0 \in X \setminus \{0\}$ te neka je $\mathcal{L} = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ proizvoljan prebrojiv linearno nezavisan skup u X takav da $x_0 \notin [\mathcal{L}]$ (vidjeti Teorem 1.1.9). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su svi x_k norme 1 (u protivnom ih normiramo). Tada je i skup

$$\left\{x_0 + \frac{x_k}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$$

linearno nezavisan. Stoga je potprostor Y od X generiran tim skupom algebarske dimenzije $\aleph_0$ i $x_0 \notin Y$. S druge strane,

$$Y \ni x_0 + \frac{x_k}{k} \to x_0 \quad (k \to \infty),$$

tako da Y nije zatvoren. □

Teorem 1.3.14 (Cantorov[14] teorem). *Neka je X potpun metrički prostor i neka je $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih zatvorenih podskupova u X takav da vrijedi $C_{k+1} \subseteq C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(C_k) = 0$. Tada je presjek $C := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$ jednočlan.*

Dokaz. Uzmimo $x, y \in C$. Onda je i $x, y \in C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i stoga $0 \le d(x, y) \le \operatorname{diam}(C_k)$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Jer $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$ slijedi $d(x, y) = 0$, odnosno $x = y$. Dakle, C je najviše jednočlan.

Ostaje dokazati da je C neprazan. U tu svrhu za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo neki $x_k \in C_k$. Jer je niz $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ padajuć, slijedi $d(x_{k+l}, x_k) \le \operatorname{diam}(C_k)$ za sve $k, l \in \mathbb{N}$. Kako $\operatorname{diam}(C_k) \to 0$, zaključujemo da je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X. Jer je X potpun, on konvergira prema nekom $x \in X$. Tvrdimo da je $x \in C$. Zaista, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $m \ge k$ imamo $x_m \in C_k$. Stoga $x = \lim_{k\to\infty} x_k \in \overline{C_k}$. Jer su svi C_k zatvoreni, zaključujemo $x \in C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$, odnosno $x \in C$. □

* * *

Definicija 1.3.15. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u normiranom prostoru X.

- Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ **konvergira prema vektoru** $x_0 \in X$ ako vrijedi $\lim_{n\to\infty} S_n = x_0$, gdje je $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tj. $S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$ $(n \in \mathbb{N})$.

[14] Georg Cantor (1845.–1918.) njemački matematičar i utemeljitelj teorije skupova

- Kažemo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ **apsolutno konvergentan** ako je $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$.

Istaknimo sljedeći koristan kriterij potpunosti normiranih prostora.

Teorem 1.3.16. *Normiran prostor X je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red u X konvergira u X.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X potpun i neka je $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ apsolutno konvergentan red u X. Tada je niz parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ Cauchyjev pa za $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m > k \geq k_0$ vrijedi $\sum_{j=k+1}^{m} \|x_j\| < \varepsilon$. Tada za niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ parcijalnih suma od $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ imamo $\|S_m - S_k\| = \| \sum_{j=k+1}^{m} x_j\| \leq \sum_{j=k+1}^{m} \|x_j\| < \varepsilon$ za sve $m > k \geq k_0$. Zaključujemo da je niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev pa zbog potpunosti od X red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira u X.

Obratno, pretpostavimo da svaki apsolutno konvergentan red u X konvergira u X. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u X. Koristeći induktivni argument dobivamo strogo rastući niz prirodnih brojeva $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k} \qquad \text{čim je } m, n \geq p_k.$$

Stavimo $x_{p_0} := 0$ tako da je

$$x_{p_k} := \sum_{j=1}^{k} (x_{p_j} - x_{p_{j-1}}), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Prema konstrukciji je $\|x_{p_j} - x_{p_{j-1}}\| < \frac{1}{2^{j-1}}$ za sve $j \geq 2$, odakle slijedi da je red $\sum_{j=1}^{\infty}(x_{p_j} - x_{p_{j-1}})$ apsolutno konvergentan. Prema pretpostavci, on je konvergentan, odnosno podniz $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nekom vektoru $x \in X$. S obzirom da je početni niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, zaključujemo da $x_k \to x$ (Napomena 1.2.27) □

1.4 Baireov teorem o kategoriji i posljedice

Definicija 1.4.1. Za podskup A topološkog prostora X kažemo da je:

- **gust** u X, ako je $\overline{A} = X$;
- **nigdje gust** u X ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X;
- **prve kategorije** u X, ako se A može prikazati kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova;
- **druge kategorije** u X, ako A nije prve kategorije;
- **rezidualan** u X, ako je njegov komplement A^c skup prve kategorije u X.

Napomena 1.4.2. Neka je X topološki prostor.

(a) Koristeći jednakost $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{A^c}$ za svaki $A \subseteq X$), lako možemo ustanoviti da vrijede sljedeći odnosi između svojstva danog skupa i njegovog komplementa:

Svojstvo skupa A	*Svojstvo komplementa A^c*
otvoren	zatvoren
rezidualan	prve kategorije
gust	ima prazan interior
ima gust interior	nigdje gust

Posebno, $A \subseteq X$ je nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$, odnosno rezidualan u X ako i samo ako se A može napisati kao prebrojiv presjek skupova s gustim interiorima.

(b) Svaki podskup nigdje gustog skupa je nigdje gust skup. Također, konačna unija nigdje gustih skupova je nigdje gust skup.

(c) Rub svakog otvorenog ili zatvorenog skupa je nigdje gust skup.

(d) Svaki podskup skupa prve kategorije je skup prve kategorije. Analogno, svaki nadskup skupa druge kategorije (rezidualnog skupa) je skup druge kategorije (rezidualan skup). Nadalje, prebrojiva unija skupova prve kategorije je skup prve kategorije. Analogno, prebrojiv presjek rezidualnih skupova je rezidualan skup.

Primjer 1.4.3.

(a) Svaki konačan podskup A savršenog metričkog prostora X ($X^d = X$) je nigdje gust skup. Posebno, prebrojivi skupovi u savršenom metričkom prostoru su skupovi prve kategorije.

(b) Oba skupa $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ su gusta u $\mathbb{R}$. Pritom je $\mathbb{Q}$ prve kategorije, dok je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ rezidualan u $\mathbb{R}$.

(c) Svaki potprostor Y normiranog prostora X je ili gust ili nigdje gust u X. Zaista, pretpostavimo da je $U := \operatorname{Int} \overline{Y} \neq \emptyset$ i neka je $y_0 \in U$. Jer je translacija $x \mapsto x - y_0$ homeomorfizam od X, te je $\overline{Y}$ potprostor od X (Primjer 1.2.41 i Napomena 1.2.37), zaključujemo da je $-y_0 + U$ otvorena okolina 0 koja je čitava sadržana u $\overline{Y}$. Posebno, $-y_0 + U$ sadrži neku kuglu s centrom u 0, odakle slijedi $X = \bigcup_{r>0} r(-y_0 + U) \subseteq \overline{Y}$. Dakle, $\overline{Y} = X$.

Sljedeći primjer istovremeno pokazuje da nigdje gusti podskupovi mogu biti savršeni i neprebrojivi.

Primjer 1.4.4. Neka je C tzv. **Cantorov skup**. Njega možemo dobiti na sljedeći način: Uzmimo segment $[0, 1]$ u $\mathbb{R}$, te iz njega izbacimo njegovu otvorenu srednju trećinu (tj. interval $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$). Ostatak nazovimo s C_1; dakle $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Zatim, iz svakog od ta dva segmenta iz C_1 izbacimo njihove otvorene srednje trećine i ostatak nazovimo s C_2. Postupak nastavljamo induktivno. Ako je C_k unija 2^k segmenata duljine $\frac{1}{3^k}$ koji ostaju u k-tom koraku, tada je

$$C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k.$$

Očito je C zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ (kao presjek zatvorenih skupova C_k). Također, budući da svaki skup C_k ne sadrži otvoreni interval duljine veće od $\frac{1}{3^k}$, slijedi da C ne može sadržavati niti jedan otvoreni interval. Dakle, C je nigdje gust skup u $\mathbb{R}$.

Pokažimo sada da je C savršen podskup od $\mathbb{R}$. Neka je $x \in C$ proizvoljna točka. Tada je $x \in C_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Posebno, x leži u nekom od 2^k segmenata od C_k duljine $\frac{1}{3^k}$. Neka je x_k bilo koja rubna točka tog segmenta koja je različita od x, tako da je $0 < |x - x_k| < \frac{1}{3^k}$. Nadalje, budući da sve rubne točke segmenata od C_k leže u C, imamo $x_k \in C$. Na taj način dolazimo do niza točaka $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u C, čije su sve vrijednosti različite od x i koji konvergira prema x. Dakle $x \in C^d$, odakle slijedi da je C savršen.

Dokažimo i da je C kardinalnosti $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. To možemo najbrže vidjeti ako primijetimo da se Cantorov skup C sastoji točno od onih brojeva x iz segmenta $[0, 1]$ čiji prikaz u bazi 3 ne sadrži znamenku 1, tj. $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$, s $a_k \in \{0, 2\}$. Budući da je svaki takav prikaz jedinstven, preslikavanje $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ definira bijekciju sa skupa $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ svih nizova sastavljenih od brojeva 0 i 2 na skup C. Dakle, $\operatorname{card}(C) = \operatorname{card}(\{0, 2\}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}$.

Definicija 1.4.5. Za topološki prostor X kažemo da je **Baireov**[15] **prostor** ako je svaki neprazan otvoren skup u X skup druge kategorije u X.

Propozicija 1.4.6. *Za topološki prostor X su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) X je Baireov prostor.

[15] René-Louis Baire (1874.–1932.), francuski matematičar

(ii) Ako je $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *niz otvorenih gustih podskupova od* X*, tada je njihov presjek* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ *gust u* X*.*

(iii) Svaki rezidualan skup u X *je gust u* X*.*

(iv) Ako je $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *niz zatvorenih podskupova od* X *takav da je* $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$*, tada je otvoren skup* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Int} F_k$ *gust u* X*.*

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Pretpostavimo da je X Baireov prostor, ali da postoji prebrojiva familija otvorenih gustih podskupova $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X čiji presjek $A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ nije gust u X. Tada postoji neprazan otvoren podskup U u X takav da je $A \cap U = \emptyset$. Odavde slijedi da je $X = (A\cap U)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup U^{\mathrm{c}}$, pa je onda

$$U = X\cap U = A^{\mathrm{c}} \cap U = \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^{\mathrm{c}} \cap U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k^{\mathrm{c}} \cap U).$$

Budući da je svaki skup $A_k^{\mathrm{c}} \cap U$ nigdje gust, slijedi da je U prve kategorije u X. No to je jedino moguće ako je $U = \emptyset$, što je kontradikcija s izborom skupa U.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Neka je $A \subseteq X$ rezidualan skup. Prema Napomeni 1.4.2 imamo $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} A_k$, za neki niz $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ podskupova od X sa svojstvom da su svi $\operatorname{Int} A_k$ gusti u X. Prema pretpostavci je presjek $C := \bigcap_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} \operatorname{Int} A_k$ gust u X. Jer je $C \subseteq A$, zaključujemo i da je A gust u X.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Neka je $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz zatvorenih skupova u X takav da je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = X$. Trebamo dokazati da je skup $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Int} F_k$ gust u X. Zaista, jer su svi skupovi ∂F_k nigdje gusti i zatvoreni u X, njihovi komplementi $(\partial F_k)^{\mathrm{c}}$ su otvoreni i gusti X. Slijedi da je skup $O := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\partial F_k)^{\mathrm{c}}$ rezidualan pa je prema pretpostavci gust u X. Iz

$$U^{\mathrm{c}} = X\setminus U = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Int} F_k\right) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (F_k \setminus \operatorname{Int} F_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \partial F_k = O^{\mathrm{c}}$$

vidimo da je $O \subseteq U$. Jer je O gust u X, zaključujemo da je i U gust u X, čime je tvrdnja dokazana.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Pretpostavimo da vrijedi (iv), ali da X nije Baireov prostor. Tada postoji neprazan otvoren skup U u X koji je prve kategorije. Neka je $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz nigdje gustih skupova u X takvih da je $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Tada je

$$X = U^{\mathrm{c}} \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \cdots$$

prebrojiva unija zatvorenih skupova. Budući da je $\operatorname{Int} \overline{A_k} = \emptyset$ za sve $k\in\mathbb{N}$, iz pretpostavke slijedi da je

$$\operatorname{Int}(U^{\mathrm{c}}) = \operatorname{Int}(U^{\mathrm{c}}) \cup \operatorname{Int} \overline{A_1} \cup \operatorname{Int} \overline{A_2} \cup \operatorname{Int} \overline{A_3} \cup \cdots$$

gust skup u X. Kako je $\operatorname{Int}(U^{\mathrm{c}}) \subseteq U^{\mathrm{c}}$, slijedi da je i U^{c} gust skup u X. Posebno, $U \cap U^{\mathrm{c}} \neq \emptyset$, što je nemoguće. Dakle, X je Baireov prostor. □

Sada smo spremni dokazati sljedeći fundamentalni rezultat.

Teorem 1.4.7 (Baireov teorem o kategoriji). *Svaki potpuno metrizablini topološki prostor* X *je Baireov prostor.*

Dokaz. Neka je d metrika na X koja inducira topologiju na X i s obzirom na koju je X potpun metrički prostor. Prema Propoziciji 1.4.6 dovoljno je dokazati da je za proizvoljan niz gustih otvorenih skupova $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X njihov presjek

$$A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$$

gust skup u X. Drugim riječima, za proizvoljne $x\in X$ i $r>0$ trebamo provjeriti da je $K(x,r)\cap A \neq \emptyset$.

Budući da je U_1 gust otvoren podskup od X, postoje $x_1 \in X$ i $0 < r_1 \le 1$ takvi da vrijedi

$$\overline{K}(x_1, r_1) \subseteq K(x,r) \cap U_1.$$

Slično, budući da je U_2 gust otvoren podskup od X, postoje $x_2 \in X$ i $0 < r_2 \leq \frac{1}{2}$ takvi da je

$$\overline{K}(x_2, r_2) \subseteq K(x_1, r_1) \cap U_2.$$

Koristeći induktivni argument, dolazimo do niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X i niza $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva, za koje vrijedi

$$0 < r_k \leq \frac{1}{k} \qquad \text{i} \qquad \overline{K}(x_{k+1}, r_{k+1}) \subseteq K(x_k, r_k) \cap U_k \qquad \text{za sve } k \in \mathbb{N}.$$

Za $k \in \mathbb{N}$ stavimo $C_k := \overline{K}(x_k, r_k)$. Tada je $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ padajući niz zatvorenih nepraznih podskupova od X. Iz $\operatorname{diam} C_k \leq 2r_k \leq \frac{2}{k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$ slijedi $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} C_k = 0$. Prema Cantorovom teoremu (Teorem 1.3.14) postoji $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Očito $y \in K(x, r) \cap A$, čime je dokaz teorema završen. □

Napomena 1.4.8. U raznim matematičkim disciplinama za svojstva koja vrijede na "tipičnim", odnosno na "gotovo svim", primjerima smatramo da su **generička svojstva**. Tako se npr. u prostorima mjere pod generičkim svojstvima smatraju ona svojstva koja vrijede gotovo svuda (tj. na komplementima skupova mjere 0), dok se u Baireovim prostorima (posebno potpuno metrizabilnim prostorima) pod generičkima svojstvima smatraju ona svojstva koja vrijede na rezidualnim skupovima. Preciznije, generički element Baireovog prostora X ima svojstvo P ako je skup $\{x \in X : P(x)\}$ rezidualan u X. Odgovarajući dualan pojam generičkom svojstvu je **zanemarivo svojstvo**. Dakle, u kontekstu Baireovih prostora, zanemariva svojstva su ona svojstva koja vrijede samo na skupovima prve kategorije.

Svojstvo	*Prostori mjere*	*Baireovi prostori*
zanemarivo	ispunjeno na skupu mjere 0	ispunjeno na skupu prve kategorije
generičko	ispunjeno gotovo svuda	ispunjeno na rezidualnom skupu

Kao što familija skupova mjere nula čini σ-ideal, tako i familija $\mathcal{F}$ svih skupova prve kategorije u topološkom prostoru čini σ-ideal. Drugim riječima, vrijedi:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- ako je $A \in \mathcal{F}$ i $B \subseteq A$, tada je i $B \in \mathcal{F}$;
- ako je $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz skupova u $\mathcal{F}$, tada je i $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$.

Sljedeći primjer pokazuje da generička svojstva u jednom smislu mogu biti zanemariva u drugom smislu:

Primjer 1.4.9. Poredajmo sve racionalne brojeve u niz $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Za sve $m, n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$r_{m,n} := \frac{1}{2^{m+n}} \qquad \text{i} \qquad R_{m,n} := \langle q_n - r_{m,n}, q_n + r_{m,n} \rangle.$$

Tada je

$$R := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}$$

rezidualan skup (kao prebrojv presjek otvorenih gustih skupova $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}$). S druge strane, skup R je Lebesgueove mjere 0. Zaista, budući da je Lebesgueova mjera (kao i svaka mjera) neprekidna odozgo i subaditivna, dobivamo

$$0 \leq \lambda(R) = \lim_{m\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(R_{m,n}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{m+n}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = 0,$$

pa je $\lambda(R) = 0$.

Za dodatne informacije oko dualnosti između koncepata mjere i kategorije zainteresiranog čitatelja upućujemo na [35].

Napomena 1.4.10. Neka je ZF Zermelo-Fraenkelova teorija skupova (bez Aksioma izbora AC). Jedna od bitno slabijih varijanti AC, a koja je u analizi često dovoljna da bi se dokazala većina željenih rezultata, je sljedeći aksiom:

Aksiom zavisnog izbora (DC)
Ako je S proizvoljan neprazan skup i $R \subseteq S \times S$ potpuna binarna relacija (tj. za svaki $x \in S$ postoji $y \in S$ takav da je xRy), tada postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u S takav da vrijedi $x_k R x_{k+1}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Analizom dokaza Baireovog teorema o kategoriji (BCT u daljnjem) nije teško ustanoviti da je BCT teorem sistema ZF+DC. Može se dokazati da vrijedi i obrat, odnosno da je DC teorem sistema ZF+BCT. Ukratko, BCT je ekvivalentan s DC. Također napomenimo da je DC striktno jači od **Aksioma prebrojivog izbora** AC_ω (koji postulira da za svaki prebrojiv indeksni skup I i svaku nepraznu familiju nepraznih u parovima disjunktinih skupova $\{X_i\}_{i\in I}$ postoji skup X koji sadrži točno jedan element svakog skupa X_i). Zainteresiranog čitatelja upućujemo na [24] i pripadne reference.

* * *

Sada ćemo dati neke primjene Baireovog teorema o kategoriji. Krećemo sa sljedećom jednostavnom posljedicom:

Korolar 1.4.11. *Svaki savršen podskup potpuno metrizabilnog prostora X je neprebrojiv.*

Dokaz. Neka je d metrika na X s obzirom na koju je X potpun metrički prostor Ako je A savršen podskup od X, onda je on zatvoren u X, pa je prema Propoziciji 1.3.11 (A, d) potpun (i očito savršen) metrički prostor. Ako je $\sigma : \mathbb{N} \to A$ neka bijekcija, tada je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\sigma(n)\}$. No to je u izravnoj kontradikciji s BCT (primijenjenog na A), jer su jednočlani skupovi u A nigdje gusti. □

Napomena 1.4.12. Primijetimo da nam Korolar 1.4.11 daje alternativni dokaz poznatih činjenica da je svaki pravi interval u $\mathbb{R}$ neprebrojiv, kao i da je Cantorov skup neprebrojiv (Primjer 1.4.4).

Korolar 1.4.13. *Svaki beskonačnodimenzionalni Banachov prostor X ima neprebrojivu algebarsku dimenziju, tj.* $\dim X > \aleph_0$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji Banachov prostor X takav da je $\dim X = \aleph_0$. To znači da X ima prebrojivu algebarsku bazu $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je X_k potprostor od X razapet vektorima $b_1, \ldots, b_k$. Kako je $\dim X_k = k < \aleph_0$, prema Propoziciji 1.3.12 X_k je zatvoren, pa je stoga nigdje gust u X (Primjer 1.4.3). Jer je $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ i X je Banachov, dolazimo do kontradikcije s BCT. □

Napomena 1.4.14. Kasnije ćemo dokazati i znatno jaču tvrdnju od Korolara 1.4.13, koja kaže da za beskonačnodimenzionalne Banachove prostore X zapravo vrijedi $\dim X = \mathrm{card}(X)$ (vidjeti Teorem 2.2.8). Posebno, u beskonačnodimenzionalnom slučaju uvijek vrijedi $\dim X \geq \mathfrak{c}$.

Jedna od interesantnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je tzv. **Thomaeova**[16] **funkcija** (također poznata kao **Riemannova**[17] ili **"popcorn" funkcija**). Ona je definirana s

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ i } \mathrm{M}(p,q) = 1, \\ 0, & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

te ima svojstvo da ima prekid u svakoj racionalnoj točki, dok je neprekidna u svim iracionalnim točkama. Možemo se pitati postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s obratnim svojstvom, tj. koja je neprekidna u svim racionalnim točkama, dok ima prekid u svim iracionalnim točkama? Kako bismo dali odgovor na to pitanje, najprije uvedimo sljedeće pojmove.

Definicija 1.4.15. Za podskup A topološkog prostora X kažemo da je:

[16] Carl Johannes Thomae (1840.–1921.), njemački matematičar
[17] Bernhard Riemann (1826.–1866.), njemački matematičar

- F_σ**-skup**, ako se A može napisati kao prebrojiva unija zatvorenih skupova,
- G_δ**-skup**, ako se A može napisati kao prebrojiv presjek otvorenih skupova.

Napomena 1.4.16. Neka je X topološki prostor.

(a) $A \subseteq X$ je F_σ-skup ako i samo ako je njegov komplement A^c G_δ-skup.

(b) Familija F_σ-skupova je zatvorena s obzirom na formiranje prebrojivih unija i konačnih presjeka. Analogno, familija G_δ-skupova je zatvorena s obzirom na formiranje prebrojivih presjeka i konačnih unija.

(c) Svaki F_σ-skup A u X je prve kategorije ili ima neprazan interior. Zaista, neka je $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$, gdje su F_k zatvoreni podskupovi od X. Ako svi ti skupovi F_k imaju prazan interior, tada je A prve kategorije. S druge strane, ako barem jedan od F_k-ova ima neprazan interior, onda svakako i A ima neprazan interior.

(d) Svaki gust G_δ-skup u X je rezidualan. Posebno, ako je X Baireov prostor, onda je prebrojiv presjek gustih G_δ-skupova u X gust G_δ-skup (vidjeti Propoziciju 1.4.6).

Propozicija 1.4.17. *Neka je X metrizabilan topološki prostor.*

(a) Svaki zatvoren podskup od X je G_δ-skup.

(b) Svaki otvoren podskup od X je F_σ-skup.

Dokaz. Dovoljno je dokazati (a). Neka je d metrika koja inducira topologiju na X. Ako je $A \subseteq X$ zatvoren, tada prema Propoziciji 1.2.36 imamo

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in X : d(x, A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Budući da je funkcija $x \mapsto d(x, A)$ neprekidna na X, svaki od skupova oblika $\{x \in X : d(x, A) < \lambda\}$ $(\lambda > 0)$ je otvoren u X. □

Neka je sada $X = \mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{Q}$ (kao i svaki prebrojiv podskup od $\mathbb{R}$) F_σ-skup. Odavde odmah zaključujemo da je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ G_δ-skup. Obrat ne vrijedi:

Propozicija 1.4.18. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *nije F_σ-skup, pa stoga $\mathbb{Q}$ nije G_δ-skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ F_σ-skup. Kako je $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ (jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$), prema (c) djelu Napomene 1.4.16, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je skup prve kategorije. Jer je $\mathbb{Q}$ skup prve kategorije, slijedi i da je $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ skup prve kategorije. No to je u kontradikciji s BCT. □

Uvedimo sljedeću kvantitativnu mjeru (ne)prekidnosti neke funkcije:

Definicija 1.4.19. Neka je $f : X \to Y$ funkcija između metričkih prostora X i Y. Za svaku točku $x_0 \in X$ definiramo **oscilaciju od f u x_0** s

$$\omega_f(x_0) := \inf_{\varepsilon>0} \operatorname{diam} f(K(x_0, \varepsilon)) = \inf_{\varepsilon>0} \sup\{d(f(x), f(x')) : x, x' \in K(x_0, \varepsilon)\}.$$

Napomena 1.4.20. Primijetimo da je f neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako je $\omega_f(x_0) = 0$.

Lema 1.4.21. *Za sve $\lambda > 0$, skup*

$$O(f, \lambda) := \{x \in X : \omega_f(x) < \lambda\}$$

je otvoren u X.

Dokaz. Neka je $x_0 \in O(f, \lambda)$. Tada je $\omega_f(x_0) < \lambda$ pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\operatorname{diam} f(K(x_0, \varepsilon)) = \sup\{d(f(x), f(x')) \ : \ x, x' \in K(x_0, \varepsilon)\} < \lambda.$$

Uzmimo sada proizvoljnu točku $x_1 \in K(x_0, \varepsilon)$ i izaberimo $\delta > 0$ takav da je $K(x_1, \delta) \subseteq K(x_0, \varepsilon)$ (npr. $\delta = \varepsilon - d(x_0, x_1)$). Tada je

$$\begin{aligned} \omega_f(x_1) &\leq \operatorname{diam} f(K(x_1, \delta)) = \sup\{d(f(x), f(x')) \ : \ x, x' \in K(x_1, \delta)\} \\ &\leq \sup\{d(f(x), f(x')) \ : \ x, x' \in K(x_0, \varepsilon)\} < \lambda, \end{aligned}$$

što pokazuje $K(x_0, \varepsilon) \subseteq O(f, \lambda)$. □

Propozicija 1.4.22. *Neka je $f : X \to Y$ funkcija između metričkih prostora X i Y. Tada vrijedi*

(a) Skup svih točaka u kojima je f neprekidna je G_δ-skup.

(b) Skup svih točaka u kojima f ima prekid je F_σ-skup.

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo jednu tvrdnju; npr. dokažimo (a). Označimo s $C(f)$ skup svih točaka $x \in X$ u kojima je f neprekidna. Tada je prema Napomeni 1.4.20

$$C(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in X \ : \ \omega_f(x) < \frac{1}{n} \right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O(f, \frac{1}{n}).$$

Prema Lemi 1.4.21 svi skupovi $O(f, \frac{1}{n})$ su otvoreni, tako da je C G_δ-skup. □

Kao direktnu posljedicu Propozicija 1.4.18 i 1.4.22 dobivamo:

Korolar 1.4.23. *Ne postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna u svim racionalnim brojevima i koja ima prekid u svim iracionalnim brojevima.*

Većina neprekidnih realnih funkcija realne varijable koje smo susreli tokom studija su bile ili svugdje derivabilne, ili u najgorem slučaju nisu bile derivabilne u konačno ili prebrojivo mnogo točaka (kao npr. funkcija $f(x) = |x|$). S druge strane, postoje neprekidne funkcije koje nisu nigdje derivabilne. Prvi primjer takve funkcije je našao Weierstrass[18] 1872. godine. Ona je originalno definirana kao Fourierov[19] red

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \tag{1.8}$$

gdje je $0 < a < 1$, b neparan prirodan broj i $ab > 1 + 3\pi/2$. Funkcija (1.8) je u literaturi poznata pod imenom **Weierstrassova funkcija**. Sada se možemo pitati koliko su derivabilne funkcije na $\mathbb{R}$ (ili na nekom intervalu u $\mathbb{R}$) zastupljene unutar svih neprekidnih funkcija. Odgovor na to pitanje nam se na prvi pogled može činiti iznenađujuć. Naime vrijedi:

Teorem 1.4.24. *Generička neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nije nigdje derivabilna. Drugim riječima, skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[a, b]$ koje nisu nigdje derivabilne čine rezidualan skup u funkcijskom prostoru $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.*

Radi jednostavnosti notacije, mi ćemo dokaz Teorema 1.4.24 dokazati za segment $[0, 1]$. Krećemo sa sljedećim pomoćnim tvrdnjama:

Lema 1.4.25. *Neka je X topološki prostor i $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz funkcija $f_k : X \to \mathbb{F}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to \mathbb{F}$. Ako je f neprekidna u točki $x_0 \in X$, tada za svaki niz $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u X, iz $x_k \to x_0$ slijedi $f_k(x_k) \to f(x_0)$.*

---

[18] Karl Weierstrass (1815.–1897.), njemački matematičar, poznat kao "otac moderne analize"

[19] Joseph Fourier (1768.–1830.), francuski matematičar i fizičar

Dokaz. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Budući da niz $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema f, postoji $k_1 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ za sve $k \geq k_1$ i sve $x \in X$. S druge strane, budući da je f neprekidna u x_0, prema Teoremu 1.2.38 postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ za sve $k \geq k_2$. Stavimo $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$. Tada za sve $k \geq k_0$ imamo

$$|f_k(x_k) - f(x_0)| \leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lema 1.4.26. *Skup svih Lipschitzovih funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je uniformno gust potprostor od $C([0,1])$.*

Dokaz. Tvrdnja direktno slijedi iz Weierstrassovog aproksimacijskog teorema da su polinomi uniformno gusti u $C([a,b])$ (a polinomi, kao i sve funkcije klase C^1 na segmentu, su Lipschitzove funkcije).

Prezentirat ćemo alternativni (i direktniji) dokaz tvrdnje. Neka je $f \in C([0,1])$. Jer je f neprekidna funkcija na segmentu, ona je uniformno neprekidna, pa za $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x, y \in [0,1]$ iz $|x - y| \leq \frac{1}{n}$ slijedi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Neka je $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna po dijelovima linearna funkcija takva da je $g(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})$ za sve $0 \leq k \leq n$. Tvrdimo da je g Lipschitzova i $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Zaista, za svaki $1 \leq k \leq n$ označimo s L_k koeficijent smjera (linearne) restrikcije od g na podsegment $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, tako da je $g(x) - g(y) = L_k(x - y)$ za $x, y \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Ako je $L := \max\{|L_1|, \ldots, |L_n|\}$, onda je jasno da vrijedi $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ za sve $x, y \in [0,1]$. Dakle, g je Lipschitzova.

Nadalje, za proizvoljan $x \in [0,1]$ izaberimo $1 \leq k \leq n$ takav da je $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Kako je $g([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]) \subseteq f([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}])$ (jer je f neprekidna), postoji $y \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ takav da je $g(x) = f(y)$. Slijedi $|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Kako je $x \in [0,1]$ bio proizvoljan, zaključujemo $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. □

Lema 1.4.27. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, stavimo*

$$A_n := \left\{ f \in C([0,1]) : \text{ postoji } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ takav da } |f(x+h) - f(x)| \leq nh \text{ za sve } 0 < h < \frac{1}{n} \right\}.$$

$$B_n := \left\{ f \in C([0,1]) : \text{ postoji } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{ takav da } |f(x-h) - f(x)| \leq nh \text{ za sve } 0 < h < \frac{1}{n} \right\}.$$

Tada su svi skupovi A_n i B_n zatvoreni i nigdje gusti u funkcijskom prostoru $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Dokaz. Mi ćemo tvrdnju pokazati samo za skupove A_n, budući da je dokaz za skupove B_n analogan. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$.

Dokažimo zatvorenost skupa A_n. Neka je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u A_n koji uniformno konvergira prema nekoj funkciji $f \in C([0,1])$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo neki $x_k \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ takav da je $|f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| \leq nh$ za sve $0 < h < \frac{1}{n}$. Tada, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu za nizove, postoji podniz od $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira prema nekoj točki $x_0 \in [0, 1-\frac{1}{n}]$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $x_k \to x_0$. Iz Leme 1.4.25 slijedi da $f_k(x_k + h) \to f(x_0 + h)$ i $f_k(x_k) \to f(x_0)$. Onda je i $|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq nh$ za sve $0 < h < \frac{1}{n}$. Dakle, $f \in A_n$, odakle zaključujemo da je A_n zatvoren podskup od $C([0,1])$.

Sada dokažimo da je svaki skup A_n nigdje gust u $C([0,1])$, odnosno da je $\operatorname{Int} A_n = \emptyset$ (jer je A_n zatvoren). Zbog Leme 1.4.26 dovoljno je dokazati da se u svakoj okolini proizvoljne Lipschitzove funkcije $f \in C([0,1])$ nalazi neka funkcija $f_1 \in C([0,1]) \setminus A_n$.
Fiksirajmo stoga Lipschitzovu funkciju $f \in C([0,1])$. Za $\varepsilon > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ neka je $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "cik-cak" funkcija takva da je $\widetilde{g}(\frac{j}{k}) = (-1)^j\varepsilon$ za sve $j \in \mathbb{Z}$ i $\tilde{g}$ je linearna na svakom segmentu oblika $[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}]$. Stavimo $g := \widetilde{g}|_{[0,1]}$. Tada za sve $x \in [0,1\rangle$ možemo naći dovoljno mali $\delta > 0$ takav da za sve $0 < h < \delta$ vrijedi $|g(x+h) - g(x)| = 2\varepsilon kh$. Definirajmo funkciju $f_1 := f + g$. Očito je $\|f_1 - f\|_\infty = \|g\|_\infty = \varepsilon$, tako da je $f_1 \in K(f, 2\varepsilon)$. S druge strane, ako s L označimo Lipschitzovu konstantu od f, onda za proizvoljnu točku $x \in [0,1\rangle$ i sve $0 < h < \delta$ imamo

$$\begin{aligned} 2\varepsilon kh - Lh &\leq |g(x+h) - g(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leq |(g(x+h) - g(x)) - (f(x+h) - f(x))| \\ &= |f_1(x+h) - f_1(x)|. \end{aligned}$$

Posebno, ako izaberemo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k > \frac{n+L}{2\varepsilon}$, dobivamo $|f_1(x+h) - f_1(x)| > nh$. Dakle, $f_1 \notin A_n$, što pokazuje $K(f, 2\varepsilon) \nsubseteq A_n$. Zbog proizvoljnosti od f i $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je $\operatorname{Int} A_n = \emptyset$. □

Dokaz teorema 1.4.24. Označimo s $\mathcal{D}$ skup svih funkcija $f \in C([0,1])$ koje su derivabilne u barem jednoj točki $x \in [0,1]$. Koristeći iste oznake kao u Lemi 1.4.27, imamo

$$\mathcal{D} \subseteq \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n \right).$$

Prema Lemi 1.4.27, svi skupovi A_n i B_n su nigdje gusti u $C([0,1])$, pa je $(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n)$ skup prve kategorije u $C([0,1])$. Tada je i $\mathcal{D}$ skup prve kategorije, kao podskup skupa prve kategorije, odakle zaključujemo da je skup $C([0,1]) \setminus \mathcal{D}$ rezidualan. $\square$

Kao direktnu posljedicu Teorema 1.4.24, BCT i Propozicije 1.4.6 dobivamo:

Korolar 1.4.28. *Skup svih neprekidnih funkcija $f \in C([a,b])$ koje nisu nigdje derivabilne čini gust podskup od $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.*

1.5 Kompaktnost u metričkim i normiranim prostorima

Definicija 1.5.1. Neka je X topološki prostor.

- **Pokrivač** skupa $A \subseteq X$ je bilo koja familija podskupova od X,

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I, U_i \subseteq X\},$$

  takva da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

- Ako su svi elementi U_i pokrivača $\mathcal{U}$ otvoreni skupovi, tada govorimo o **otvorenom pokrivaču**.

- **Potpokrivač** pokrivača $\mathcal{U}$ skupa A je podfamilija $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ koja je i sama pokrivač od A (tj. unija skupova iz $\mathcal{U}'$ je i dalje nadskup od A).

Definicija 1.5.2. Neka je X topološki prostor. Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je **kompaktan** ako se svaki otvoreni pokrivač od A može reducirati na konačan potpokrivač. Posebno, ako je $A = X$ kompaktan, onda kažemo da je X **kompaktan prostor**.

Napomena 1.5.3. Diretktno iz definicija kompaktnosti i relativne topologije (Definicija 1.2.21) slijedi da je podskup A topološkog prostora X kompaktan ako i samo je A, kao topološki prostor s obzirom na relativnu topologiju, kompaktan prostor.

Odmah istaknimo sljedeće dvije jednostavne činjenice.

Propozicija 1.5.4. *Svaki zatvoreni podskup A kompaktnog prostora X je i sam kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\{U_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač skupa A. Dodavanjem otvorenog skupa A^c dobivamo otvoreni pokrivač za X, koji prema pretpostavci ima konačan potpokrivač. Taj se potpokrivač sastoji od nekih $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ i možda A^c. Jer je $A^c \cap A = \emptyset$, zaključujemo da $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ pokrivaju A. $\square$

Propozicija 1.5.5. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Ako je $A \subseteq X$ kompaktan skup u X, onda je $f(A)$ kompaktan skup u Y.*

Posebno, kompaktnost je topološka invarijanta, tj. ako su topološki prostori X i Y homeomorfni, onda je X kompaktan ako i samo ako je Y kompaktan.

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ kompaktan i $\{V_i : i \in I\}$ otvoren pokrivač od $f(A)$, tako da je $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$. Tada je

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i).$$

Jer je f neprekidna, svi skupovi $f^{-1}(V_i)$ su otvoreni u X (Teorem 1.2.38). Stoga je $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ otvoreni pokrivač od A. Kako je A kompaktan, postoji konačno mnogo $i_1, \ldots, i_k \in I$ tako da je

$$A \subseteq f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_k}) = f^{-1}(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}) \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}.$$

Zaključujemo da je $f(A)$ kompaktan skup. $\square$

Alternativnu (i često praktičnu) formulaciju kompaktnosti možemo dati u terminima zatvorenih skupova.

Definicija 1.5.6. Za familiju skupova $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ kažemo da ima **svojstvo konačnih presjeka** ako svaka njena konačna podfamilija $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\} \subseteq \mathcal{F}$ ima neprazan presjek, tj. $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$.

Propozicija 1.5.7. *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako za svaku familiju $\mathcal{F}$ zatvorenih skupova u X sa svojstvom konačnih presjeka vrijedi $\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \neq \emptyset$.*

Dokaz. Za proizvoljnu familiju $\mathcal{A}$ podskupova od X promotrimo familiju komplemenata

$$\mathcal{A}_c := \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Tada očito vrijedi:

1. $\mathcal{A}$ je familija otvorenih podskupova od X ako i samo ako je $\mathcal{A}_c$ familija zatvorenih podskupova od X.

2. $\mathcal{A}$ je pokrivač od X ako i samo ako je $\bigcap_{B \in \mathcal{A}_c} B = \emptyset$.

3. Konačna podfamilija $\{A_1, \ldots, A_n\}$ od $\mathcal{A}$ pokriva X ako i samo ako je presjek odgovarajuće podfamilije komplemenata $\{X \setminus A_1, \ldots, X \setminus A_n\}$ od $\mathcal{A}_c$ prazan.

Stoga, tvrdnja da je prostor X kompaktan je prema kontrapoziciji ekvivalentna tvrdnji "za svaku familiju $\mathcal{U}$ otvorenih podskupova od X, ako nikoja konačna podfamilija od $\mathcal{U}$ ne pokriva X tada niti $\mathcal{U}$ ne pokriva X". To je pak prema 1.-3. ekvivalentno tvrdnji "za svaku familiju $\mathcal{F}$ zatvorenih podskupova od X, ako je presjek svake konačne podfamilije od $\mathcal{F}$ neprazan, tada je i presjek čitave familije $\mathcal{F}$ neprazan". Time smo dokazali propoziciju. $\square$

* * *

Napomena 1.5.8. Na DIFRAF-u smo dokazali fundamentalni **Heine-Borelov**[20,21] **teorem** koji karakterizira kompaktne skupove u $\mathbb{F}^n$ kao njegove zatvorene i ograničene podskupove. Ta se tvrdnja lako može poopćiti i na sve konačnodimenzionalne normirane prostore (provedite dokaz za DZ).

Jedna implikacija uvijek vrijedi u svim metričkim prostorima; svaki kompaktan podskup metričkog prostora X je zatvoren i ograničen.

Zaista, ako je $A \subseteq X$ kompaktan, tada je za proizvoljan $x \in X$, rastuća familija kugala $\{K(x,k) : k \in \mathbb{N}\}$ otvoreni pokrivač za X, pa posebno i za A. Stoga, prema pretpostavci postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A \subseteq K(x,k)$, odnosno A je ograničen.

Kako bismo dokazali zatvorenost od A, pretpostavimo da postoji $x_0 \in A^d \setminus A$. Za $k \in \mathbb{N}$ stavimo $U_k := \{x \in A : d(x,x_0) > \frac{1}{k}\}$. Onda je očito $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ (prebrojiv) otvoren pokrivač od A. Prema pretpostavci, već konačno mnogo skupova U_k pokriva A, tako da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x,x_0) > \frac{1}{n}$ za sve $x \in A$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je $x_0 \in A^d$. Dakle, $A^d \subseteq A$, odnosno A je zatvoren.

U beskonačnodimenzionalnim normiranim prostorima zatvorenost i ograničenost više nije dovoljna garancija za kompaktnost.

Primjer 1.5.9. Jedinična kugla/sfera u prostoru c_{00} nije kompaktna. Naime, već smo primijetili da kanonski niz $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz Primjera 1.3.2 nema konvergentan podniz, iako je $\|e_n\|_\infty = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Štoviše, uskoro ćemo vidjeti da Heine-Borelova karakterizacija kompaktnosti zapravo karakterizira konačnodimenzionalne normirane prostore (Teorem 1.5.13).

Definicija 1.5.10. Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je **totalno ograničen** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_k \in X$ tako da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K(x_j, \varepsilon)$.

[20] Eduard Heine (1821.–1881.), njemački matematičar

[21] Émile Borel (1871.–1956.), francuski matematičar i političar

Napomena 1.5.11.

(a) Očito je svaki totalno ograničen podskup od X ograničen, dok obrat ne vrijedi. Npr. skup $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ u c_{00} je ograničen, ali nije totalno ograničen.

(b) Podskup A metričkog prostora X je totalno ograničen ako i samo za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo točaka $a_1, \ldots, a_k \in A$ tako da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k K(a_j, \varepsilon)$. Zaista, pretpostavimo da je A totalno ograničen i neka je $\varepsilon > 0$. Prema pretpostavci, postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_k \in X$ tako da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k K(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $A \cap K(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ za sve $1 \leq j \leq k$ (u protivnom izbacimo kugle disjunktne s A), te neka je $a_j \in A \cap K(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$. Tada je $K(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq K(a_j, \varepsilon)$ za sve $1 \leq j \leq k$, tako da je $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k K(a_j, \varepsilon)$. Obrat je trivijalan.

U metričkim prostorima imamo i sljedeću korisnu karakterizaciju kompaktnosti.

Teorem 1.5.12. *Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) A je kompaktan skup.

(ii) A je potpun i totalno ograničen skup.

(iii) Svaki beskonačan podskup od A ima barem jedno gomilište u A.

(iv) Svaki niz u A ima konvergentan podniz s limesom u A.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Pretpostavimo da je $A \subseteq X$ kompaktan. Za svaki $\varepsilon > 0$ familija kugala $\{K(x, \varepsilon) : x \in A\}$ je otvoreni pokrivač od A, pa iz kompaktnosti od A slijedi da postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_k \in A$ tako da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k K(x_j, \varepsilon)$. Dakle, A je totalno ograničen.
Nadalje, neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u A. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je F_k zatvarač skupa $\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ (prema Napomenama 1.2.22 i 1.5.8 je svejedno je uzimamo li zatvarač u X ili A, jer je A zatvoren u X). Tada je $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ padajuć niz zatvorenih podskupova od A, tako da familija $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$ svakako ima svojstvo konačnih presjeka. Jer je A kompaktan, iz Propozicije 1.5.7 slijedi da postoji $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$. Tada svaka kugla $K(x, \varepsilon)$ siječe sve skupove F_k, tako da je $x_k \in K(x, \varepsilon)$ za beskonačno mnogo $k \in \mathbb{N}$. Posebno, za $\varepsilon = 1$ izaberimo proizvoljan $p_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_{p_1}, x) < 1$. Zatim, za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ izaberimo $p_1 < p_2$ tako da je $d(x_{p_2}, x) < \frac{1}{2}$. Induktivnim argumentom dobivamo podniz $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ od $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da vrijedi $d(x_{p_k}, x) < \frac{1}{k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$, tako da $x_{p_k} \to x$.

(ii) $\implies$ (iii). Pretpostavimo da je A potpun i totalno ograničen skup, te neka je $B \subseteq A$ beskonačan podskup. Jer je A totalno ograničen, prema Napomeni 1.5.11 postoji konačan podskup $F \subseteq A$ takav da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{x\in F} \overline{K}(x, 1)$. Kako je B beskonačan, postoji točka $x_1 \in F$ takva da je $B \cap \overline{K}(x_1, 1)$ beskonačan skup. Induktivno, pretpostavimo da smo za $k \in \mathbb{N}$ izabrali točke $x_1, \ldots, x_k \in A$ tako da je skup $B \cap \overline{K}(x_1, 1) \cap \cdots \cap \overline{K}(x_k, \frac{1}{k})$ beskonačan. Tada analognim arugmentom kao u prvom koraku izaberemo točku $x_{k+1} \in A$ takvu da je skup $B \cap \overline{K}(x_1, 1) \cap \cdots \cap \overline{K}(x_k, \frac{1}{k}) \cap \overline{K}(x_{k+1}, \frac{1}{k+1})$ beskonačan. Za $k \in \mathbb{N}$ neka je

$$E_k := A \cap \overline{K}(x_1, 1) \cap \cdots \cap \overline{K}(x_k, \frac{1}{k}).$$

Tada je $(E_k)_k$ padajuća familija nepraznih i zatvorenih podskupova od A, te $\operatorname{diam}(E_k) \leq \frac{2}{k}$ (tako da $\operatorname{diam}(E_k) \to 0$). Jer je A potpun, prema Cantorovom teoremu (Teorem 1.3.14) postoji točka $a \in A$ takva da je $a \in E_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Napokon, za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ i $y \in B \cap \overline{K}(x_1, 1) \cap \cdots \cap \overline{K}(x_k, \frac{1}{k})$ imamo $d(a, y) \leq d(a, x_k) + d(x_k, y) \leq \frac{2}{k}$, što pokazuje da je a gomilište skupa B.

(iii) $\implies$ (iv). Pretpostavimo da svaki beskonačan podskup od A ima barem jedno gomilište, te neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u A. Ako je slika tog niza konačna, tada je tvrdnja trivijalna (s obzirom da u tom slučaju niz ima konstantan podniz). Stoga pretpostavimo da je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ beskonačan podskup od A. Prema pretpostavci on ima gomilište u A; označimo ga s x. Tada je za sve $n \in \mathbb{N}$ presjek $K(x, \frac{1}{n}) \cap \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ beskonačan, pa sličnim argumentom kao u dokazu implikacije (i) $\implies$ (ii) dobivamo podniz od $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira prema x.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Pretpostavimo da svaki niz u A ima konvergentan podniz s limesom u A i neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač skupa A.

Tvrdnja 1. Postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in A$ postoji $i \in I$ takav da je $K(x, \delta) \subseteq U_i$. (Bilo koji takav broj $\delta > 0$ zove se **Lebesgueov**[22] **broj** pokrivača $\mathcal{U}$).

Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $x_k \in A$ takav da vrijedi $K(x_k, \frac{1}{k}) \cap U_i^c \neq \emptyset$ za sve $i \in I$. Prema pretpostavci, niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz s limesom $x \in A$. Izaberimo $i \in I$ takav da je $x \in U_i$. Jer je U_i otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U_i$. Nadalje, izaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$ i $d(x, x_k) < \frac{r}{2}$. Ako je $y \in K(x_k, \frac{1}{k})$, tako da je $d(y, x_k) < \frac{1}{k}$, onda je $d(y, x) \leq d(y, x_k) + d(x_k, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. To pokazuje inkluziju $K(x_k, \frac{1}{k}) \subseteq K(x, r) \subseteq U_i$, što je u kontradikciji s izborom x_k.

Tvrdnja 2. A je totalno ograničen skup.

Pretpostavimo suprotno. Tada prema Napomeni 1.5.11 postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki konačan podskup F od A vrijedi $A \nsubseteq \bigcup_{x\in F} K(x, \varepsilon)$. Posebno, za fiksirani $x_1 \in A$ postoji $x_2 \in A \setminus K(x_1, \varepsilon)$. Koristeći induktivni argument dolazimo do niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tako da vrijedi

$$x_{k+1} \in A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} K(x_j, \varepsilon) \right) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tada očito za sve $m \neq k$ vrijedi $d(x_k, x_m) \geq \varepsilon$. Stoga niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne može imati konvergentan podniz, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

Kako bismo završili dokaz implikacije (iv) $\Longrightarrow$ (i), izaberimo Lebesgueov broj $\delta > 0$ pokrivača $\mathcal{U}$. Zatim izaberimo $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in A$ tako da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(x_j, \delta)$. Po definiciji broja δ, za svaki $1 \leq j \leq n$ postoji $i_j \in I$ takav da je $K(x_j, \delta) \subseteq U_{i_j}$. Tada je

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(x_j, \delta) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}.$$

Dakle, $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ je konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$. Kako je $\mathcal{U}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je A kompaktan. $\square$

Notacija. Ako je X normiran prostor, u daljnjem ćemo otvorenu i zatvorenu jediničnu kuglu $K(0,1)$ i $\overline{K}(0,1)$ od X redom označavati s K_X i B_X, a jediničnu sferu $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ sa S_X. Onda je za $x \in X$ i $r > 0$, $K(x, r) = x + rK_X$, odnosno $\overline{K}(x, r) = x + rB_X$.

Teorem 1.5.13. *Neka je X normiran prostor. Tada je ekvivalentno:*

(i) X je konačnodimenzionalan.

(ii) Svaki zatvoren i ograničen skup u X je kompaktan.

(iii) Svaka točka $x \in X$ ima kompaktnu okolinu.

(iv) Postoji točka $x \in X$ koja ima kompaktnu okolinu.

(v) Jedinična sfera S_X je kompaktan skup u X.

U dokazu Teorema 1.5.13 koristit ćemo sljedeću korisnu pomoćnu tvrdnju (tzv. Rieszova lema), koja nam u općenitim normiranim prostorima donekle omogućuje da zaobiđemo koncept ortogonalnosti (koji je vezan za unitarne prostore).

Lema 1.5.14 (Rieszova[23] lema). *Neka je Y potprostor normiranog prostora X takav da $\overline{Y} \neq X$. Tada za svaki $0 < r < 1$ postoji $x \in S_X$ takav da je i $d(x, Y) > r$.*

[22] Henri Lebesgue (1875.–1941.) francuski matematičar
[23] Frigyes Riesz (1880.–1956.), mađarski matematičar

Dokaz. Jer je $0 \in Y$, najprije primijetimo da je svakako $d(x,Y) \leq 1$ za sve $x \in S_X$. Izaberimo vektor $x_1 \in X \setminus \overline{Y}$ i stavimo $R := d(x_1, Y)$. Primijetimo da je $R > 0$ (Propozicija 1.2.36). Za $\varepsilon > 0$ neka je $y_1 \in Y$ takav da je $\|y_1 - x_1\| < R + \varepsilon$. Neka je

$$x := \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|}.$$

Onda je $x \in S_X$ i vrijedi

$$\begin{aligned} d(x,Y) &= \inf_{y \in Y} \|y - x\| = \inf_{y\in Y} \left\| y + \frac{y_1}{\|x_1 - y_1\|} - \frac{x_1}{\|x_1 - y_1\|} \right\| \\ &= \inf_{y \in Y} \left\| \frac{y}{\|x_1 - y_1\|} + \frac{y_1}{\|x_1 - y_1\|} - \frac{x_1}{\|x_1 - y_1\|} \right\| = \frac{\inf_{y \in Y} \|y - x_1\|}{\|x_1 - y_1\|} = \frac{d(x_1, Y)}{\|x_1 - y_1\|} \\ &> \frac{R}{R + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Sada za dani $0 < r < 1$ preostaje izabrati $\varepsilon > 0$ tako da vrijedi $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$. □

Napomena 1.5.15. Ako je potprostor Y konačnodimenzionalan, tada možemo naći $x \in S_X$ takav da je $d(x,Y) = 1$. Naime, prema dokazu Rieszove leme, svaki traženi vektor x nalazi se u prostoru $Z := [Y \cup \{x_1\}]$, pri čemu je $x_1 \in X \setminus \overline{Y}$ proizvoljan fiksiran vektor. Ako je Y konačnodimenzionalan, isto vrijedi i Z. Stoga, za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo naći $x_k \in S_Z$ takav da je $d(x_k, Y) > 1 - \frac{1}{k}$. Time dobivamo niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u S_Z, a kako je S_Z kompaktna (jer je $\dim Z < \aleph_0$) postoji konvergentan podniz $(x_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ s limesom $x \in S_Z$. Kako je $\|x_{p_k} - y\| > 1 - \frac{1}{p_k}$ za sve $y \in Y$ i $k \in \mathbb{N}$, prelaskom na limes dobivamo $\|x - y\| \geq 1$ za sve $y \in Y$, tako da je $d(x, Y) = 1$.

S druge strane, ako je potprostor Y beskonačnodimenzionalan, tada ne mora postojati $x \in S_X$ takav da je $d(x,Y) = 1$.

Primjer 1.5.16. Promotrimo sljedeće potprostore realnog funkcijskog prostora $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$:

$$X := \{f \in C([0,1]) : f(1) = 0\} \qquad \text{i} \qquad Y := \left\{ f \in X : \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\},$$

tako da je $Y \leq X$. Tvrdimo da vrijedi $d(f,Y) < 1$ za sve $f \in S_X$. Kako bismo to dokazali, najprije primijetimo da za sve $f \in X$ vrijedi

$$d(f,Y) = \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right|. \tag{1.9}$$

(Za generalnu verziju te tvrdnje vidjeti Propoziciju 1.7.4.) Zaista, za proizvoljnu funkciju $g \in Y$ imamo

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt \right| = \left| \int_0^1 (f(t) - g(t))\,dt \right| \leq \|f - g\|_\infty,$$

što pokazuje $\left| \int_0^1 f(t)\,dt \right| \leq d(f,Y)$. Obratno, za $\varepsilon > 0$ izaberimo funkciju $f_0 \in X$ takvu da vrijedi

$$\|f_0\|_\infty \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{i} \qquad \int_0^1 f_0(t)\,dt = 1.$$

Npr. ako je $\delta := \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ (BSO $0 < \varepsilon < 1$), možemo uzeti da je f_0 identički jednaka $1 + \varepsilon$ na intervalu $[0, \delta]$ i da je f_0 linearna na intervalu $[\delta, 1]$. Tada za proizvoljnu funkciju $f \in X$ za $g := f - \left(\int_0^1 f(t)\,dt \right) f_0$ imamo $g \in Y$ i

$$\|f - g\|_\infty = \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right| \|f_0\| \leq (1+\varepsilon) \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right| \quad \Longrightarrow \quad d(f,Y) \leq (1+\varepsilon) \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right|.$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ zaključujemo $d(f,Y) \leq \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right|$.

Sada pretpostavimo da postoji funkcija $f \in S_X$ takva je $d(f, Y) = 1$. Prema (1.9), to znači da istovremeno vrijedi

$$\|f\|_\infty = 1 \qquad \text{i} \qquad \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = 1.$$

Odavde slijedi $1 = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt \le 1$, tako da je $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 1$, odnosno $\int_0^1 (1-|f(t)|)\,dt = 0$. Jer je funkcija $1 - |f|$ nenegativna i neprekidna, zaključujemo da je f konstanta $f = 1$ ili $f = -1$. U svakom slučaju $f(1) \neq 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $f \in X$.

Dokaz Teorema 1.5.13. Implikacija (i) $\implies$ (ii) slijedi iz prethodnog razmatranja, dok su implikacije (ii) $\implies$ (iii) i (iii) $\implies$ (iv) trivijalane (ako je svaki zatvoren i ograničen skup u X kompaktan, onda je za sve $x \in X$, $\overline{K}(x, 1)$ kompaktna okolina od x).

(iv) $\implies$ (v). Pretpostavimo da je $x \in X$ točka koja ima kompaktnu okolinu V. Tada postoji $r > 0$ takav da je $\overline{K}(x, r) \subseteq V$. Prema Propoziciji 1.5.4 $\overline{K}(x, r)$ je kompaktan skup, kao zatvoren podskup kompaktnog skupa. Jer je B_X homeomorfna s $\overline{K}(x, r)$, slijedi i da je B_X kompaktan skup (Propozicija 1.5.5). Onda je i S_X kompaktan skup kao zatvoren podskup od B_X.

(v) $\implies$ (i). Pretpostavimo da ne vrijedi (i), odnosno da je X beskonačnodimenzionalan. Najprije izaberimo proizvoljan vektor $x_0 \in S_X$. Prema Napomeni 1.5.15 postoji $x_1 \in S_X$ takav da je $d(x_1, [\{x_0\}]) \ge 1$. Induktivnim argumentom dobivamo niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u S_X takav da za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x_k, [\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}]) \ge 1$. Dakle, vrijedi $\|x_k - x_m\| \ge 1$ za sve $k \neq m$. Time smo našli niz u S_X koji nema konvergentan podniz pa stoga S_X (odn. B_X) nije kompaktan skup (Teorem 1.5.12). $\square$

* * *

Na kraju ovog odjeljka dokazat ćemo i neka poopćenja dobro nam poznatih tvrdnji o neprekidnim funkcijama definiranim na kompaktnim podskupovima od $\mathbb{F}^n$, kao i karakterizacije zatvarača kompaktnih skupova u metričkim prostorima koja će nam trebati kod kompaktnih operatora.

Propozicija 1.5.17. *Neka je X kompaktan topološki prostor i Y metrički prostor. Tada je svaka neprekidna funkcija $f : X \to Y$ zatvoreno preslikavanje, tj. za svaki zatvoren podskup C od X je $f(C)$ zatvoren podskup od Y.*

Posebno, ako je f injektivna funkcija, tada je f homeomorfizam na svoju sliku.

Dokaz. Neka je C zatvoren podskup od X. Jer je X kompaktan, C je također kompaktan (Propozicija 1.5.4), pa je prema Propoziciji 1.5.5 $f(C)$ kompaktan podskup od Y. Kako je Y metrički prostor, onda je $f(C)$ i zatvoren podskup od Y (Napomena 1.5.8). Dakle, f je zatvoreno preslikavanje.

Ako je f dodatno injektivna, tada trivijalno vrijedi $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ za svaki podskup $C \subseteq X$ (praslika od inverza), pa posebno i za sve zatvorene podskupove $C \subseteq X$. Prema Teoremu 1.2.38 i prvom dijelu dokaza zaključujemo da je inverz $f^{-1} : f(X) \to X$ također neprekidan. Dakle, f je homeomorfizam na svoju sliku. $\square$

Propozicija 1.5.18. *Neka su X i Y metrički prostori. Ako je X kompaktan, tada je svaka neprekidna funkcija $f : X \to Y$ ograničena i uniformno neprekidna.*

Dokaz. Ograničenost od f slijedi iz činjenice da je $f(X)$ kompaktan skup (Propozicija 1.5.5).

Neka je $\varepsilon > 0$. Jer je f neprekidna, za svaki $c \in X$ postoji $\delta_c > 0$ takav da vrijedi $f(K(c, \delta_c)) \subseteq K(f(c), \frac{\varepsilon}{2})$. Kako je $\{K(c, \delta_c) : c \in X\}$ otvoreni pokrivač kompaktnog prostora X, on ima Lebsesugeov broj $\delta > 0$ (vidjeti dokaz Teorema 1.5.12). Tada za svaki par točaka $x, y \in X$ iz $d(x, y) < \delta$ slijedi da postoji $c \in X$ takav da je $x, y \in K(c, \delta_c)$. Onda je $f(x), f(y) \in K(f(c), \frac{\varepsilon}{2})$, pa vrijedi

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f(c)) + d(f(c), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, f je uniformno neprekidna. $\square$

Definicija 1.5.19. Neka je X topološki prostor. Za $A \subseteq X$ kažemo da je **relativno kompaktan** ako je njegov zatvarač $\overline{A}$ kompaktan.

Koristeći analogne argumente kao u dokazu Teorema 1.5.12 nije teško dokazati sljedeći rezultat (provedite dokaz za DZ).

Korolar 1.5.20. *Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$. Promotrimo sljedeće tvrdnje:*

(i) A je relativno kompaktan.

(ii) Svaki niz u A ima podniz koji konvergira u X.

(iii) Svaki niz u A ima Cauchyjev podniz.

(iv) A je totalno ograničen skup.

Tada vrijedi: (i) $\iff$ (ii), (iii) $\iff$ (iv) i (i)/(ii) $\implies$ (iii)/(iv). Nadalje, ako je X potpun, sve te tvrdnje su međusobno ekvivalentne.

1.6 Ograničeni linearni operatori

Neka su X i Y vektorski prostori nad nad istim poljem $\mathbb{F}$. S $\mathrm{L}(X,Y)$ označamo skup svih linearnih operatora s X u Y. Kao što znamo, $\mathrm{L}(X,Y)$ ima strukturu vektorskog prostora nad $\mathbb{F}$ uz operacije po točkama:

$$(S+T)x := Sx + Tx, \qquad (\lambda S)x := \lambda(Sx), \qquad S,T \in \mathrm{L}(X,Y),\ \lambda \in \mathbb{F},\ x \in X.$$

Jezgru linearnog operatora $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ označavamo s $\ker T$, a njegovu sliku s $\operatorname{ran} T$. Dakle

$$\ker T = T^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : Tx = 0\} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{ran} T = T(X) = \{Tx : x \in X\}$$

i to su redom potprostori od X i Y.

Ako je $Y = X$ onda pišemo samo $\mathrm{L}(X)$, a ako je $Y = \mathbb{F}$ onda pišemo $X^\#$. Elementi od $X^\#$ se zovu linearni funkcionali na X, a prostor $X^\#$ se zove **algebarski dual** od X.

Definicija 1.6.1. Neka su X i Y normirani prostori. Za linearni operator $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ kažemo da je **ograničen** ako postoji konstanta $L \geq 0$ takva da vrijedi

$$\|Tx\| \leq L\|x\| \qquad \forall x \in X. \tag{1.10}$$

Skup svih ograničenih linearnih operatora s X u Y označavamo s $\mathrm{B}(X,Y)$. Ako je $X = Y$ pišemo $\mathrm{B}(X)$. Nadalje, skup svih ograničenih linearnih funkcionala $\mathrm{B}(X,\mathbb{F})$ označavamo s X^* i zovemo ga **(neprekidni) dual** od X.

Napomena 1.6.2. (a) Očito je $\mathrm{B}(X,Y)$ potprostor od $\mathrm{L}(X,Y)$.

(b) Treba razlikovati svojstvo ograničenosti linearnog operatora iz Definicije 1.6.1 i svojstvo ograničenosti linearnog operatora kao funkcije (što po definiciji znači da je slika ograničen podskup kodomene). Naime, jer je slika $\operatorname{ran} T$ linearnog operatora $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ potprostor od Y, $\operatorname{ran} T$ će biti ograničen skup u Y ako i samo ako je $\operatorname{ran} T = \{0\}$, odnosno ako i samo ako je T nuloperator.

(c) Linearni operator $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ je ograničen ako i samo ako ograničene podskupove od X slika u ograničene podskupove od Y (otuda i dolazi naziv "ograničen"). Zaista, ako je $\|Tx\| \leq L\|x\|$ za sve $x \in X$ i $S \subseteq X$ ograničen skup, onda postoji $M > 0$ takav da je $\|x\| \leq M$ za sve $x \in S$. Stoga je $\|Tx\| \leq L\|x\| \leq LM$ za sve $x \in S$, odnosno $T(S)$ je ograničen skup. Obratno, ako T slika ograničene skupove u ograničene skupove, onda je posebno $T(S_X)$ ograničen skup u Y pa postoji $M > 0$ takav da je $\|Tx\| \leq M$ za sve $x \in S_X$. Onda je za proizvoljan $x \in X$, $x \neq 0$, $\|Tx\| = \|x\|\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M\|x\|$, dok je za $x = 0$ trivijalno $T0 = 0$.

Propozicija 1.6.3. *Neka su X i Y normirani prostori. Za linearni operator $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) T je ograničen.

(ii) T je Lipschitz-neprekidan.

(iii) T je uniformno neprekidan.

(iv) T je (globalno) neprekidan.

(v) Postoji točka $x_0 \in X$ u kojoj je T neprekidan.

Dokaz. Implikacije (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (v) su trivijalne.

(i) $\implies$ (ii). Neka je $L \geq 0$ tako da vrijedi $\|Tx\| \leq L\|x\|$ za sve $x \in X$. Jer je T linearan, onda za sve $x, y \in X$ vrijedi $\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq L\|x - y\|$. Dakle, T je Lipschitz-neprekidan i $L_T \leq L$.

(v) $\implies$ (i). Pretpostavimo da je T neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$. Tvrdimo da je onda T neprekidan i u 0. Zaista, ako je V okolina od $0 = T0$, onda je $V + Tx_0$ okolina od Tx_0 (vidjeti Primjer 1.2.41) pa zbog neprekidnosti od T u x_0 postoji okolina U od x_0 takva da je $T(U) \subseteq V + Tx_0$. Onda je $U - x_0$ okolina od 0 i

$$T(U - x_0) = T(U) - T(x_0) \subseteq (V + Tx_0) - Tx_0 = V.$$

Nadalje, jer T neprekidan u 0 (i $T0 = 0$) za $\varepsilon = 1$ dobivamo $\delta > 0$ takav da je $\|Tx\| < 1$, čim je $\|x\| < \delta$. Tada za proizvoljan $x \in X$, $x \neq 0$ imamo

$$\|Tx\| = \frac{2}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|.$$

Dakle, T je ograničen. □

Za linearne funkcionale imamo i dodatan kriterij ograničenosti.

Propozicija 1.6.4. *Neka je X normiran prostor. Linearni funkcional $\varphi \in X^{\#}$ je ograničen ako i samo ako mu je jezgra zatvoren potprostor od X.*

Dokaz. Ako je φ ograničen, onda je on neprekidan (Propozicija 1.6.3), pa je stoga $\ker \varphi = f^{-1}(\{0\})$ zatvoren potprostor od X (Teorem 1.2.38).

Pretpostavimo sada da φ nije ograničen. Posebno, φ nije nulfunkcional, pa postoji $x_0 \in X \setminus \ker \varphi$. Jer φ nije ograničen, $\varphi(S_X)$ je neograničen skup u $\mathbb{F}$ (Napomena 1.6.2), pa postoji niz vektora $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u S_X takav da je $|\varphi(x_k)| \geq k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo novi niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X s

$$y_k := x_0 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x_k)} x_k.$$

Tada je $y_k \in \ker \varphi$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i $y_k \to x_0 \notin \ker \varphi$. Dakle, $\ker \varphi$ nije zatvorena. □

Napomena 1.6.5. Primijetimo da iz dokaza Propozicije 1.6.4 slijedi da je jezgra svakog neograničenog linearnog funkcionala na X (pravi) gust potprostor od X.

Propozicija 1.6.6. *Neka su X i Y normirani prostori.*

(i) Ako je X konačnodimenzionalan, onda je svaki linearni operator $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ ograničen.

(ii) Ako je X beskonačnodimenzionalan, tada postoji injektivan neograničen linearni operator $T \in \mathrm{L}(X)$.

(iii) Ako je X beskonačnodimenzionalan i $Y \neq \{0\}$, tada postoji neograničen linearni operator $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Posebno, neprekidni dual X^* je pravi potprostor algebarskog duala $X^{\#}$.

Dokaz. (i). Neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za X. Za svaki $x \in X$ neka je $\varphi_x : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ jedinstvena funkcija takva da je $x = \sum_{k=1}^n \varphi_x(k) b_k$. Tada je s

$$\|x\|' := \sum_{k=1}^n |\varphi_x(k)|$$

definirana norma na X. Jer je X konačnodimenzionalan, norme $\|\cdot\|'$ i $\|\cdot\|$ su ekvivalentne. Posebno, postoji $M > 0$ takav da je $\|x\|' \leq M\|x\|$ za sve $x \in X$. Za linearni operator $T : X \to Y$ stavimo $L := \max\{\|Tb_1\|, \ldots, \|Tb_n\|\}$. Tada je za sve $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \left\| T\left(\sum_{k=1}^n \varphi_x(k) b_k\right)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n \varphi_x(k) Tb_k\right\| \leq \sum_{k=1}^n |\varphi_x(k)| \|Tb_k\| \leq L\|x\|' \\ &\leq ML\|x\|.\end{aligned}$$

Dakle, T je ograničen.

Sada pretpostavimo da je $\dim X \geq \aleph_0$. Neka je $\mathcal{B}$ algebarska baza X (Teorem 1.1.9). Bez smanjenja općenitosti možemo prespostaviti da su svi vektori iz $\mathcal{B}$ norme 1 (u protivnom ih normiramo). Izaberimo proizvoljan prebrojiv podskup $\mathcal{C} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ od $\mathcal{B}$.

(ii). Definirajmo $T : \mathcal{B} \to X$ s

$$Tb_k := kb_k \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \text{i} \qquad Tb = b \quad \forall b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C},$$

te na jednoznačan način (po linearnosti) proširimo T do linearnog operatora $T \in \mathrm{L}(X)$. Očito je T injektivan, a jer je $b_k \in S_X$ i $\|Tb_k\| = k\|b_k\| = k$ za sve $k \in \mathbb{N}$ zaključujemo da T nije ograničen.

(iii). Pretpostavimo da $Y \neq \{0\}$ i fiksirajmo vektor $y_0 \in S_Y$. Definirajmo $T : \mathcal{B} \to Y$ s

$$Tb_k := ky_0 \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \text{i} \qquad Tb = 0 \quad \forall b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C},$$

te na jednoznačan način proširimo T do linearnog operatora $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Jer je $b_k \in S_X$ i $\|Tb_k\| = k\|y_0\| = k$ za sve $k \in \mathbb{N}$ zaključujemo da T nije ograničen. □

Napomena 1.6.7. Iz tvrdnje (ii) Propozicije 1.6.6 posebno slijedi da zatvorenost jezgre linearnog operatora između beskonačnodimenzionalnih normiranih prostora općenito nije dovoljna garancija za njegovu ograničenost (kao što to je to slučaj za linearne funkcionale, prema Propoziciji 1.6.4).

Propozicija 1.6.8. *Neka su X i Y normirani prostori.*

(i) Za $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ definiramo

$$\|T\| := \inf\{L \geq 0 : \|Tx\| \leq L\|x\| \,\forall x \in X\}$$

Tada je $\|T\|$ Lipschitzova konstanta od T (tj. $L_T = \|T\|$) i vrijedi

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| = \sup_{x \in K_X} \|Tx\|. \tag{1.11}$$

*(ii) $\|\cdot\|$ definira normu na vektorskom prostoru $\mathrm{B}(X, Y)$, koja se zove **operatorska norma**.*

(iii) Ako je Y Banachov prostor onda je i $\mathrm{B}(X, Y)$ (uz operatorsku normu) Banachov prostor. Posebno, neprekidni dual X^* je uvijek Banachov prostor.

(iv) Ako je Y Banachov prostor i $X_0 \leq X$ gust potprostor od X, tada se svaki $T \in \mathrm{B}(X_0, Y)$ na jedinstven način i bez povećanja norme proširuje do operatora $\overline{T} \in \mathrm{B}(X, Y)$ (dakle $\overline{T}|_{X_0} = T$ i $\|\overline{T}\| = \|T\|$).

Dokaz. (i). Iz definicije od $\|T\|$ slijedi

$$\|Tx\| \le \|T\|\|x\| \qquad \forall x \in X. \tag{1.12}$$

Onda za sve $x, y \in X$ vrijedi $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \le \|T\|\|x-y\|$, odakle dobivamo $L_T \le \|T\|$. Obratno, iz definicije Lipschitzove konstante L_T slijedi $\|Tx - Ty\| \le L_T\|x-y\|$ za sve $x, y \in X$. Posebno za $y = 0$ dobivamo $\|Tx\| \le L_T\|x\|$ za sve $x \in X$, odnosno $\|T\| \le L_T$. Dakle $L_T = \|T\|$, pa je prema Napomeni 1.2.33 i (1.12)

$$\begin{aligned}\|T\| = L_T &= \sup\left\{\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x-y\|} : x, y \in X,\, x \neq y\right\} = \sup\left\{\left\|T\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right\| : x, y \in X,\, x \neq y\right\} \\ &= \sup_{x \in S_X} \|Tx\| \le \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \le \|T\|.\end{aligned}$$

Time smo pokazali prve dvije jednakosti u (1.11). Napokon, ako je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u B_X takav da $\|Tx_k\| \to \|T\|$. Za $k \in \mathbb{N}$ stavimo $y_k := \frac{k}{k+1}x_k$. Onda je $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u K_X i $\|Ty_k\| = \frac{k}{k+1}\|Tx_k\| \to \|T\|$, što pokazuje $\sup_{x\in K_X}\|Tx\| = \|T\|$.

(ii). Provjeravamo svojstva norme. *Nenegativnost* je trivijalna.
Strogost. Očito je $\|0\| = 0$. Za $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ je $\|T\| = 0$ ako i samo ako je $\|Tx\| = 0$ za sve $\|x\| = 1$. Onda je i za sve $x \in X$, $x \neq 0$, $\|Tx\| = \|x\|\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = 0$, pa je stoga $T = 0$.
Apsolutna homogenost. Za $\lambda \in X$ imamo

$$\|\lambda T\| = \sup_{x\in S_X}\|\lambda(Tx)\| = \sup_{x\in S_X}|\lambda|\|Tx\| = |\lambda|\sup_{x\in S_X}\|Tx\| = |\lambda|\|T\|.$$

Nejednakost trokuta. Za $T_1, T_2 \in \mathrm{B}(X, Y)$ imamo

$$\begin{aligned}\|T_1 + T_2\| &= \sup_{x\in S_X}\|T_1x + T_2x\| \le \sup_{x\in S_X}(\|T_1x\| + \|T_2x\|) \le \sup_{x\in S_X}\|T_1x\| + \sup_{x\in S_X}\|T_2x\| \\ &= \|T_1\| + \|T_2\|.\end{aligned}$$

(iii). Pretpostavimo da je Y Banachov prostor. Neka je $\varepsilon > 0$ i $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathrm{B}(X, Y)$. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\|T_k - T_l\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k, l \ge k_0.$$

Tada je

$$\|T_kx - T_lx\| \le \|T_k - T_l\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{2}\|x\|, \quad \forall x \in X,\, k, l \ge k_0, \tag{1.13}$$

tako da je za svaki $x \in X$, $(T_kx)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Y. Jer je Y potpun, postoji

$$Tx := \lim_{k\to\infty} T_kx \in Y.$$

Na taj način dolazimo do preslikavanja $T : X \to Y$. Tvrdimo da je $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ i da $\|T_k - T\| \to 0$. Linearnost od T je očita. Naime, za $x, y \in X$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ iz neprekidnosti operacija zbrajanja i množenja skalarom slijedi

$$\begin{aligned}T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{k\to\infty} T_k(\lambda x + \mu y) = \lim_{k\to\infty}(\lambda T_kx + \mu T_ky) = \lambda\lim_{k\to\infty}T_kx + \mu\lim_{k\to\infty}T_ky \\ &= \lambda Tx + \mu Ty.\end{aligned}$$

Za proizvoljan $x \in S_X$ izaberimo $l \ge k_0$ takav da je

$$\|Tx - T_lx\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tada prema (1.13) za sve $k \geq k_0$ imamo

$$\|T_k x - Tx\| \leq \|T_k x - T_l x\| + \|T_l x - Tx\| < \varepsilon,$$

iz čega direktno slijedi

$$\|T_k - T\| = \sup_{x \in S_X} \|(T_k - T)x\| \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Posebno, $T - T_k \in \mathrm{B}(X, Y)$ (za $k \geq k_0$), tako da je i $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ kao suma $T = T_k + (T - T_k)$ operatora u $\mathrm{B}(X, Y)$, te $\|T_k - T\| \to 0$.

(iv). Za $x \in X$ zbog gustoće od X_0 u X postoji niz $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u X_0 takav da $x_k \to x$. Jer je $T \in \mathrm{B}(X_0, Y)$, niz $(Tx_k)_{k \in \mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u Y pa zbog potpunosti od Y postoji

$$\overline{T}x := \lim_{k \to \infty} Tx_k \in Y.$$

Tvrdimo da definicija od $\overline{T}x$ ne ovisi o samom izboru niza $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Zaista, neka je $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ neki drugi niz u X_0 takav da $y_k \to x$. Onda $x_k - y_k \to 0$ pa je stoga

$$0 = T0 = T\left(\lim_{k \to \infty} (x_k - y_k)\right) = \lim_{k \to \infty} (Tx_k - Ty_k) = \lim_{k \to \infty} Tx_k - \lim_{k \to \infty} Ty_k.$$

Tvrdimo da je s $x \mapsto \overline{T}x$ definiran ograničen linearni operator s X u Y i $\|\overline{T}\| = \|T\|$. Zaista, neka su $x, y \in X$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Izaberimo nizove $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ takve da $x_k \to x$ i $y_k \to y$. Onda $\lambda x_k + \mu y_k \to \lambda x + \mu y$, pa je

$$\overline{T}(\lambda x + \mu y) = \lim_{k \to \infty} T(\lambda x_k + \mu y_k) = \lim_{k \to \infty} (\lambda T x_k + \mu T y_k) = \lambda \overline{T}x + \mu \overline{T}y.$$

Nadalje, očito je $\|T\| \leq \|\overline{T}\|$. Obratno, za $x \in X$ neka je $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz u X_0 takav da $x_k \to x$. Onda je zbog neprekidnosti norme

$$\|\overline{T}x\| = \|\lim_{k \to \infty} Tx_k\| = \lim_{k \to \infty} \|Tx_k\| \leq \lim_{k \to \infty} \|T\|\|x_k\| = \|T\|\|x\|,$$

što pokazuje $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$. Napokon, ako je $\tilde{T} \in \mathrm{B}(X, Y)$ neko drugo proširenje od T, onda je $(\overline{T} - \tilde{T})|_{X_0} = 0$, pa je zbog gustoće od X_0 u X i neprekidnosti od $\overline{T} - \tilde{T}$ nužno $\overline{T} - \tilde{T} = 0$. □

Mi ćemo u daljnjem podrazumijevati da je prostor $\mathrm{B}(X, Y)$ opskrbljen s operatorskom normom.

Napomena 1.6.9.

(a) U ovom trenutku nije jasno da za beskonačnodimenzionalne normirane prostore X uvijek vrijedi $X^* \neq \{0\}$. Ta činjenica će slijediti iz Hahn-Banachovog teorema, kojeg ćemo uskoro dokazati.

(b) Koristeći Hahn-Banachov teorem ćemo također dokazati i obrat tvrdnje (iii) Propozicije 1.6.8 (Korolar 2.2.5), tako da je za $X \neq \{0\}$, Y Banachov prostor ako i samo ako je $\mathrm{B}(X, Y)$ Banachov prostor.

Propozicija 1.6.10. *Neka su X, Y i Z normirani prostori. Ako je $T \in \mathrm{B}(X, Y)$, $S \in \mathrm{B}(Y, Z)$, onda je $ST \in \mathrm{B}(X, Z)$ i $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ (submultiplikativnost operatorske norme).*

Dokaz. Za sve $x \in X$ imamo

$$\|(ST)x\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

odakle slijedi $ST \in \mathrm{B}(X, Z)$ i $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. □

Definicija 1.6.11. Neka su X i Y normirani prostori.

- Za linearni operator $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ kažemo da je **izometrija** ako vrijedi $\|Tx\| = \|x\|$ za sve $x \in X$. Ako je T pritom bijekcija, onda kažemo da je T **izometrički izomorfizam** s X na Y.

- Za ograničen bijektivni linearni operator $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ čiji je inverz $T^{-1} \in \mathrm{L}(Y,X)$ također ograničen kažemo da je **(topološki) izomorfizam** s X na Y.

- Kažemo da su normirani prostori X i Y **(izometrički) izomorfni** ako postoji (izometrički) izomorfizam $T \in \mathrm{B}(X,Y)$. Pritom pišemo:

$$\begin{aligned} X \cong Y, &\quad \text{ako su } X \text{ i } Y \text{ izometrički izomorfni,} \\ X \simeq Y, &\quad \text{ako su } X \text{ i } Y \text{ izomorfni.} \end{aligned}$$

Napomena 1.6.12. Neka su X i Y normirani prostori.

(a) Neka je $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ izometrija. Očito je T injekcija, čuva udaljenost (tj. $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ za sve $x, y \in X$) i $\|T\| = 1$. Nadalje, ako je X Banachov prostor, onda je njena slika $\operatorname{ran} T$ potpun pa stoga i zatvoren potprostor od Y (Propozicija 1.3.11). Zaista, neka je $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\operatorname{ran} T$. Onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji (zbog injektivnosti jedinstven) $x_k \in X$ takav da je $Tx_k = y_k$. Jer je $\|x_k - x_l\| = \|y_k - y_l\|$ za sve $k, l \in \mathbb{N}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u X pa zbog potpunosti od X postoji $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_k \in X$. Neprekidnost od T povlači $y_k \to Tx_0 \in \operatorname{ran} T$.

(b) Ako je $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ izometrički izomorfizam, onda je i inverz $T^{-1} \in \mathrm{L}(Y,X)$ izometrija (posebno ograničen). Naime za $y \in Y$ imamo $\|T^{-1}y\| = \|T(T^{-1}y)\| = \|y\|$.

(c) Prema Propoziciji 1.6.3 linearni operator $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ je homeomorfizam ako i samo ako je izomorfizam, odnosno ako i samo ako postoje konstante $m, M > 0$ takve da vrijedi

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Naime, jer je T bijekcija, nejednakost $m\|x\| \leq \|Tx\|$ za sve $x \in X$ je ekvivalentna s $\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$ za sve $y \in Y$. Posebno, ako je X Banachov prostor i $Y \simeq X$, onda je i Y Banachov prostor (tj. potpunost je invarijanta izomorfonosti).

(d) Relacije "izomorfnosti" odnosno "izometričke izomorfnosti" su relacije ekvivalencije na klasi svih normiranih prostora. Očito izometrička izomorfnost povlači izomorfnost, dok obrat općenito ne vrijedi. Naime, svaka dva normirana prostora iste konačne dimenzije su izomorfna (kao vektorski prostori, pa onda i kao normirani prostori prema tvrdnji (i) Propozicije 1.6.6). Posebno, $\ell_n^2 \simeq \ell_n^\infty$ (Primjer 1.2.2). S druge strane za $n \geq 2$, $\ell_n^2 \ncong \ell_n^\infty$, jer norma $\|\cdot\|_2$ zadovoljava relaciju paralelograma, dok ju norma $\|\cdot\|_\infty$ ne zadovoljava.

(e) Unutar kategorije normiranih prostora (morfizmi su ograničeni linearni operatori) nemoguće je razlikovati izometrički izomorfne normirane prostore, te se radi toga oni često identificiraju.

Korolar 1.6.13. *Neka je X normiran prostor i Y Banachov prostor. Ako je $X_0 \leq X$ gust potprostor od X onda je $\mathrm{B}(X_0, Y) \cong \mathrm{B}(X,Y)$. Posebno, $X_0^* \cong X^*$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 1.6.8 (iv), preslikavanje $T \mapsto \overline{T}$ je izometrički izomorfizam s $\mathrm{B}(X_0,Y)$ na $\mathrm{B}(X,Y)$ (s inverzom $S \mapsto S|_{X_0}$). □

Primjer 1.6.14. Neka je K kompaktan metrički prostor. Promatramo Banachov prostor $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$

(a) Za fiksiranu točku $x \in K$ definirajmo $\delta_x : C(K) \to \mathbb{F}$ s $\delta_x(f) := f(x)$ (evaluacija x). Očito je δ_x linearno preslikavanje i $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$, tako da je $\delta_x \in C(K)^*$ i $\|\delta_x\| \leq 1$. Ako uzmemo konstantnu funkciju $f = 1$, onda je očito $\|f\|_\infty = 1$ i $\delta_x(f) = 1$, tako da je $\|\delta_x\| = 1$ za sve $x \in K$. Za $x \in K$ se funkcional δ_x također zove **Diracov**[24] **funkcional** (**mjera**) u x.

[24]Paul Dirac (1902.–1984.), engleski matematičar i fizičar, jedan od utemeljitelja kvantne mehanike i elektrodinamike

(b) Za fiksiranu funkciju $g \in C(K)$ neka je $S : C(K) \to C(K)$ operator množenja s g, tj. $Sf := gf$. Očito je S linearan. Za $f \in C(K)$ imamo

$$\|Sf\|_\infty = \|gf\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty,$$

tako da je $\|S\| \leq \|g\|_\infty$. Slično kao u (a), ako uzmemo konstantnu funkciju $f = 1$, onda je $Sf = g$, tako da je $\|S\| = \|g\|_\infty$.

(c) Neka je $F : K \to H$ neprekidna surjekcija, gdje je H neki drugi (nužno kompaktan) topološki prostor i $u \in C(K)$ takva da je $|u(x)| = 1$ za sve $x \in K$. Definirajmo funkciju $R : C(H) \to C(K)$ s

$$Rf := u \cdot (f \circ F).$$

Očito je R linearan operator. Za $f \in C(H)$ imamo

$$\|Rf\|_\infty = \|u(f \circ F)\|_\infty = \max_{x \in K} |u(x)f(F(x))| = \max_{x \in K} |f(F(x))| = \max_{y \in H} |f(y)| = \|f\|_\infty.$$

Dakle, $\|Rf\|_\infty = \|f\|_\infty$, tako da je R izometrija. Nadalje, R je izometrički izomorfizam s $C(H)$ na $C(K)$ ako i samo ako je F homeomorfizam s K na H (dokažite za DZ).

Primjer 1.6.15. Neka je $[a, b]$ segment u $\mathbb{R}$. Promatramo realan Banachov prostor $(C([a, b]), \| \cdot \|_\infty)$.

(a) Definirajmo funkciju $V : C([a, b]) \to C([a, b])$ s

$$(Vf)(x) := \int_a^x f(t)\, dt.$$

Tvrdimo da je V ograničen linearni operator. Zaista, linearnost od V slijedi iz linearnosti (Riemannovog) integrala. Nadalje, za $f \in C([a, b])$ i $x \in [a, b]$ imamo

$$|(Vf)(x)| = \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|\, dt \leq \int_a^b |f(t)|\, dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty\, dt \leq (b - a)\|f\|_\infty.$$

Dakle, V je ograničen i $\|V\| \leq b - a$. Ako uzmemo konstantnu funkciju $f = 1$, onda je očito $\|Vf\|_\infty = b - a$, tako da je $\|V\| = b - a$.

Također primijetimo je $\operatorname{ran} V = \{f \in C^1([a, b]) : f(a) = 0\}$, tako da $\operatorname{ran} V$ nije zatvoren potprostor od $C([a, b])$. Štoviše, jer je $C^1([a, b])$ uniformno gust u $C([a, b])$ (direktna posljedica Weierstrassovog aproksimacijskog teorema ili Leme 1.4.26), lako se provjeri da je $\overline{\operatorname{ran} V} = \{f \in C([a, b]) : f(a) = 0\}$.

(b) Neka je $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Za $f \in C([a, b])$ definirajmo funkciju $Tf : [a, b] \to \mathbb{R}$ s

$$(Tf)(x) := \int_a^b K(x, y)f(y)\, dy.$$

Primijetimo da je $Tf \in C([a, b])$. Ako je $f = 0$ tvrdnja je trivijalna, pa pretpostavimo da $f \neq 0$. Za proizvoljne $x_1, x_2 \in [a, b]$ imamo

$$\begin{aligned} |(Tf)(x_1) - (Tf)(x_2)| = \left| \int_a^b (K(x_1, y) - K(x_2, y)f(y))\, dy \right| &\leq \int_a^b |K(x_1, y) - K(x_2, y)||f(y)|\, dy \\ &\leq (b - a)\|K(x_1, \cdot) - K(x_2, \cdot)\|_\infty \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Jer je K neprekidna na kompaktnom skupu $[a, b] \times [a, b]$, ona je uniformno neprekidna (Propozicija 1.5.18), pa stoga za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$(\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [a, b]) \left(\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta \implies |K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)\|f\|_\infty} \right).$$

Posebno, ako je $|x_1 - x_2| < \delta$, onda iz gornje nejednakosti dobivamo $|Tf(x_1) - Tf(x_2)| < \varepsilon$, čime smo pokazali (uniformnu) neprekidnost funkcije Tf.

Nadalje, s $T : C([a,b]) \to C([a,b])$, $f \mapsto Tf$, je definiran ograničen linearni operator. Linearnost od T ponovno slijedi iz linearnosti (Riemannovog) integrala. Nadalje, ako s M označimo maksimum funkcije $|K|$ na $[a,b] \times [a,b]$, za $f \in C([a,b])$ i $x \in [a,b]$ imamo

$$|Tf(x)| = \left| \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy \right| \le \int_a^b |K(x,y)||f(y)|\,dy \le M(b-a)\|f\|_\infty,$$

tako da je $\|T\| \le M(b-a)$ (za DZ pokušajte izračunati $\|T\|$).

Operator T se obično zove **integralni operator**, a funkcija K **jezgra** od T. Kasnije ćemo provesti detaljniju analizu operatora T (na različitim funkcijskim prostorima).

Primjer 1.6.16. Neka je $C^1([a,b])$ potprostor realnog Banachovog prostora $C([a,b])$ koji se sastoji od svih funkcija klase C^1. Promatramo operator deriviranja

$$D : C^1([a,b]) \to C([a,b]), \qquad Df := f'.$$

(a) Operator D nije ograničen s obzirom na normu $\|\cdot\|_\infty$ na $C^1([a,b])$. Naime, za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je $f_k(x) := \sin(kx)$. Za dovoljno velike $k \in \mathbb{N}$ je $\|f_k\|_\infty = 1$, dok je s druge strane $\|f_k'\|_\infty = k$.

(b) S druge strane, ako prostor $C^1([a,b])$ opskrbimo s prirodnijom i potpunom normom

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

(vidjeti Primjer 1.3.10 (b)), tada operator deriviranja D trivijalno postaje ograničen. Naime, $\|Df\|_\infty = \|f'\|_\infty \le \|f\|$.

Napomena 1.6.17. Ako je normiran prostor X konačnodimenzionalan i $T \in \mathrm{L}(X,Y) = \mathrm{B}(X,Y)$ (Propozicija 1.6.6), tada se zbog kompaktnosti jedinične sfere S_X supremum u (1.11) po S_X postiže, odnosno postoji $x \in S_X$ takav da je $\|Tx\| = \|T\|$.

Sljedeći primjer pokazuje da to općenito ne vrijedi ako X nije konačnodimenzionalan.

Primjer 1.6.18. Neka je $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ograničen niz u $\mathbb{F}$. Stavimo $M := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k|$ i pretpostavimo da je $|\lambda_k| < M$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Za $1 \le p < \infty$ neka je linearni operator $T : \ell^p \to \ell^p$ definiran s

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) := (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \lambda_3\xi_3, \ldots).$$

Tada je za sve $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \in \ell^p$, $x \ne 0$,

$$\|Tx\|_p^p = \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^p |\xi_k|^p < M^p \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p = M^p \|x\|_p^p,$$

tako da je $\|T\| \le M$, te ne postoji $x \in S_{\ell^p}$ takav da je $\|Tx\| = M$. S druge strane, za svaki kanonski vektor e_k vrijedi $\|Te_k\|_p = |\lambda_k|$, pa je stoga $\|T\| = \sup_{x\in S_{\ell^p}} \|Tx\|_p = M$.

Sljedeći primjer pokazuje da ograničenost linearnog operatora na nekoj algebarskoj bazi ne mora povlačiti njegovu (globalnu) ograničenost.

Primjer 1.6.19. Neka je $\mathcal{B}$ algebarska baza za prostor ℓ^2 koja sadrži skup $\mathcal{C}$ svih kanonskih vektora e_k. Definirajmo linearni funkcional $\varphi \in (\ell^2)^\#$ na bazi $\mathcal{B}$ s

$$\varphi(e_k) := 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \text{i} \qquad \varphi(b) = 0 \quad \forall b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}.$$

Očito je $|\varphi(x)| \le \|x\|_2$ za sve $x \in \mathcal{B}$. S druge strane, za $x_k := \frac{e_1+\ldots+e_k}{\sqrt{k}}$ imamo $\|x_k\|_2 = 1$ i $\varphi(x_k) = \sqrt{k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$, tako da φ nije ograničen.

1.7 Kvocijentni prostor normiranog prostora

Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $Y \le X$ njegov potprostor. Na X definiramo relaciju $\sim$ s

$$x \sim y \qquad \text{ako} \qquad x - y \in Y.$$

Kao što znamo (a i lako se provjeri), $\sim$ je relacija ekvivalencije na X. Kvocijentni skup $X/\sim$ označavamo s X/Y. Njegovi elementi su klase ekvivalencije

$$x + Y = \{x + y : y \in Y\}, \qquad x \in X.$$

Na X/Y uvodimo operacije zbrajanja i množenja skalarom na sljedeći način

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) := (x_1 + x_2) + Y, \qquad x_1, x_2 \in X$$

$$\lambda(x + Y) := (\lambda x) + Y, \qquad \lambda \in \mathbb{F}, x \in X.$$

Lako se provjeri da su te operacije dobro definirane (tj. ne ovise o izboru reprezentanata klasa) i da uz njih X/Y dobiva strukturu vektorskog prostora nad $\mathbb{F}$ kojeg zovemo **kvocijentni prostor** prostora X po potprostoru Y. Nulvektor u X/Y je očito klasa $Y = y + Y$, $y \in Y$.

Dimenzija prostora X/Y se zove **kodimenzija** od Y. Ako je $\mathcal{C}$ algebarska baza za Y i $\mathcal{B}$ algebarska baza za X koja sadrži $\mathcal{C}$ (Teorem 1.1.9), onda je $\{b + Y : b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}\}$ algebarska baza za X/Y. Posebno,

$$\dim Y + \dim(X/Y) = \dim X. \tag{1.14}$$

Prirodno preslikavanje

$$Q_Y : X \to X/Y, \qquad Q_Y x := x + Y$$

je očito linearno i zovemo ga **kvocijentni operator** s X na X/Y. Očito je $\ker Q_Y = Y$ i $\operatorname{ran} Q_Y = X/Y$.

Nadalje, ako je Z vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $T \in \mathrm{L}(X, Z)$ takav da je $Y \subseteq \ker T$, onda se T **linearno faktorizira** preko X/Y, tj. postoji jedinstven linearni operator $\widetilde{T} \in \mathrm{L}(X/Y, Z)$ takav da sljedeći dijagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "Q_Y"'] & & Z \\ & X/Y \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.15}$$

komutira, odnosno vrijedi $T = \widetilde{T} Q_Y$. Očito je $\operatorname{ran} \widetilde{T} = \operatorname{ran} T$.

Posebno, ako je $Y = \ker T$, onda je $\widetilde{T}$ injektivan jer je za $x \in X$, $0 = \widetilde{T} Q_Y x = Tx$ ekvivalentno s $x \in \ker T = Y$, odnosno s $Q_Y x = Y = 0_{X/Y}$. Stoga je u tom slučaju $\widetilde{T}$ izomorfizam vektorskih prostora $X/\ker T$ i $\operatorname{ran} T$ (**Prvi teorem o izomorfizmu za vektorske prostore**). Posljedično,

$$\dim \operatorname{ran} T = \dim(X/\ker T). \tag{1.16}$$

Primijetimo da je (1.16) u konačnodimenzionalnom slučaju (zajedno s (1.14) za $Y = \ker T$) upravo teorem o rangu i defektu. Posebno, ako je $\varphi \in X^{\#}$ linearni funkcional, onda je $\varphi \neq 0$ ako i samo ako mu je slika polje $\mathbb{F}$, odnosno ako i smo ako mu je jezgra kodimenzije 1.

Sada pretpostavimo da je X normiran prostor i $Y \le X$ njegov potprostor. Definiramo funkciju $\|\cdot\|_{X/Y} : X/Y \to \mathbb{R}$ s

$$\|x + Y\|_{X/Y} := d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x + y\|.$$

Ona je dobro definirana, jer ako je $x_1 + Y = x_2 + Y$, tako da je $x_1 - x_2 \in Y$, onda je

$$\|x_2 + Y\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x_2 + y\| = \inf_{y \in Y} \|x_2 + (x_1 - x_2 + y)\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + y\| = \|x_1 + Y\|_{X/Y}.$$

Nadalje, da bi $\|\cdot\|_{X/Y}$ bila norma na X/Y treba vrijediti $\|x + Y\|_{X/Y} = 0$ ako i samo ako je $x + Y = Y$ (nulvektor u X/Y), odnosno ako i samo ako je $x \in Y$. Da bi to vrijedilo, moramo dodatno pretpostaviti da je potprostor Y zatvoren (Propozicija 1.2.36).

Propozicija 1.7.1. *Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ zatvoren potprostor.*

(i) $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ *je normiran prostor.*

(ii) Za kvocijentni operator Q_Y vrijedi

$$Q_Y(K_X) = K_{X/Y}. \tag{1.17}$$

Posebno, Q_Y je ograničen, $\|Q_Y\| = 1$ (osim ako je $Y = X$, kada je $Q_Y = 0$), te je Q_Y otvoreno preslikavanje, tj. za svaki otvoren skup U u X, $Q(U)$ je otvoren skup u X/Y.

(iii) Neka je Z normiran prostor i $T \in \mathrm{L}(X, Z)$ takav da je $Y \subseteq \ker T$. Operator T je ograničen ako i samo ako je operator $\widetilde{T} \in \mathrm{L}(X/Y, Z)$ iz (1.15) ograničen. Pritom vrijedi $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Nadalje, T je otvoreno preslikavanje ako i samo ako je $\widetilde{T}$ otvoreno preslikavanje.

Napomena 1.7.2. Ako su X i Z normirani prostori, primijetimo da je linearni operator $T \in \mathrm{L}(X, Z)$ otvoreno preslikavanje ako i samo ako je $0 \in \operatorname{Int} T(K_X)$, odnosno ako i samo ako slika otvorene jedinične kugle u X po T sadrži neku otvorenu kuglu u Z s centrom u 0. Zaista, pretpostavimo da je $0 \in \operatorname{Int} T(K_X)$, tako da postoji $r > 0$ takav da je $rK_Z \subseteq T(K_X)$. Ako je $U \subseteq X$ otvoren skup, onda za svaki $x \in U$ postoji $r_x > 0$ takav da je $x + r_x K_X \subseteq U$. Slijedi

$$T(U) \subseteq \bigcup_{x \in U} (Tx + r_x r K_Z) \subseteq \bigcup_{x \in U} (Tx + r_x T(K_X)) = T\left(\bigcup_{x \in U} (x + r_x K_X)\right) \subseteq T(U),$$

tako da je $T(U) = \bigcup_{x \in U} (Tx + r_x r K_Z)$ otvoren skup kao unija otvorenih skupova. Obrat je trivijalan.

Nadalje, očito je svako linearno otvoreno preslikavanje $T \in \mathrm{L}(X, Z)$ surjektivno, jer je slika $\operatorname{ran} T$ otvoren potprostor od Z, tako da je $\operatorname{ran} T = Z$.

Dokaz Propozicije 1.7.1. (i). Provjeravamo svojstva norme. *Nenegativnost* je trivijalna.
Strogost. Za $x \in X$ je prema Propoziciji 1.2.36 $d(x, Y) = \|x + Y\|_{X/Y} = 0$ ako i samo ako je $x \in \overline{Y} = Y$ (Y je zatvoren), odnosno ako i samo ako je $x + Y = Y = 0_{X/Y}$.
Apsolutna homogenost. Za $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$ i $x \in X$ imamo

$$\begin{aligned} \|\lambda(x + Y)\|_{X/Y} &= \|\lambda x + Y\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + \lambda y\| = |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x + y\| \\ &= |\lambda| \|x + Y\|_{X/Y}, \end{aligned}$$

dok je za $\lambda = 0$ tvrdnja tivijalna.
Nejednakost trokuta. Jer je Y potprostor od X, najprije primijetimo da za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$\|x + Y\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y_1, y_2 \in Y} \|x + (y_1 + y_2)\|.$$

Stoga, za $x_1, x_2 \in X$ imamo

$$\begin{aligned} \|(x_1 + Y) + (x_2 + Y)\|_{X/Y} &= \|(x_1 + x_2) + Y\|_{X/Y} = \inf_{y_1, y_2 \in Y} \|x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\| \\ &\leq \inf_{y_1, y_2 \in Y} (\|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\|) = \inf_{y_1 \in Y} \|x_1 + y_1\| + \inf_{y_2 \in Y} \|x_2 + y_2\| \\ &= \|x_1 + Y\|_{X/Y} + \|x_2 + Y\|_{X/Y}. \end{aligned}$$

(ii). Jer je $0 \in Y$, očito je $\|Q_Y x\|_{X/Y} = d(x, Y) \leq \|x\|$ za sve $x \in X$, tako da je $Q_Y \in \mathrm{B}(X, X/Y)$ i $\|Q_Y\| \leq 1$. Dakle, $Q_Y(K_X) \subseteq K_{X/Y}$. Obratno, ako je $Q_Y x = x + Y \in K_{X/Y}$, tako da je $d(x, Y) < 1$, onda postoji $y \in Y$ takav da je $\|x + y\| < 1$, odnosno $x + y \in K_X$. Jer je $Q_Y(x + y) = Q_Y x$, zaključujemo $K_{X/Y} \subseteq Q_Y(K_X)$. Iz (1.17) i Napomene 1.7.2 slijedi da je Q_Y otvoreno preslikavanje.

(iii). Pretpostavimo da je T ograničen. Prema (1.17) je

$$\|\widetilde{T}\| = \sup_{Q_Y x \in K_{X/Y}} \|\widetilde{T}(Q_Y x)\| = \sup_{x \in K_X} \|\widetilde{T}(Q_Y x)\| = \sup_{x \in K_X} \|Tx\| = \|T\|.$$

Ako je pak $\widetilde{T}$ ograničen, onda je i T ograničen kao kompozicija $T = \widetilde{T}Q_Y$ ograničenih operatora.

Nadalje, ako je T otvoreno preslikavanje, onda je prema (1.17) $\widetilde{T}(K_{X/Y}) = \widetilde{T}(Q_Y(K_X)) = T(K_X)$, otvoren skup u Z, pa je stoga $\widetilde{T}$ otvoreno preslikavanje (Napomena 1.7.2). Obratno, ako je $\widetilde{T}$ otvoreno preslikavanje, onda je i T otvoreno preslikavanje kao kompozicija $T = \widetilde{T}Q_Y$ otvorenih preslikavanja. □

Koristeći koncept kvocijentnog prostora lako možemo dokazati sljedeće tvrdnje. Prva je direktno poopćenje Propozicije 1.6.4.

Propozicija 1.7.3. *Neka su X i Z normirani prostori i $T \in \mathrm{L}(X, Z)$ linearni operator čija je slika konačnodimenzionalna. Tada je T ograničen ako i samo ako je jezgra $\ker T$ zatvoren potprostor od X.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $Y := \ker T$ zatvoren potprostor od X. Onda je X/Y normiran prostor i $\dim(X/Y) = \dim \operatorname{ran} T < \aleph_0$. Prema Propoziciji 1.6.6 operator $\widetilde{T} \in \mathrm{L}(X/Y, Z)$ je ograničen. Stoga je i $T = Q_Y\widetilde{T}$ ograničen kao kompozicija ograničenih operatora. Obrat je trivijalan. □

Propozicija 1.7.4. *Neka je X normiran prostor i $\varphi \in X^*$. Tada vrijedi*

$$|\varphi(x)| = \|\varphi\| \cdot d(x, \ker \varphi) \qquad \forall x \in X.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\varphi \neq 0$ (tvrdnja je inače trivijalna). Jer je φ ograničen, $Y := \ker \varphi$ je zatvoren potprostor od X kodimenzije 1, $\widetilde{\varphi} : X/Y \to \mathbb{F}$ je izomorfizam jednodimenzionalnih prostora i $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ (Propozicija 1.7.1). Neka je $e \in X$ takav da je $Q_Y e \in S_{X/Y}$ i $|\widetilde{\varphi}(Q_Y e)| = \|\varphi\|$ (Napomena 1.6.17). Jer je $\dim(X/Y) = 1$, za sve $x \in X$ postoji $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da je $Q_Y(x - \lambda e) = 0$. Onda je $|\lambda| = \|Q_Y x\|_{X/Y}$ i

$$|\varphi(x)| = |\widetilde{\varphi}(Q_Y x)| = |\widetilde{\varphi}(Q_Y(\lambda e))| = |\lambda||\widetilde{\varphi}(Q_Y e)| = \|Q_Y x\|_{X/Y}\|\varphi\| = d(x, Y) \cdot \|\varphi\|.$$

□

Napomena 1.7.5. Usporedite sada jednakost iz Propozicije 1.7.4 s jednakosti (1.9) iz Primjera 1.5.16.

Prisjetimo se, ako je X vektorski prostor te Y i Z potprostori od X tada je njihova **suma** $Y + Z$ definirana kao najmanji potprostor od X koji sadrži $Y \cup Z$. To je točno skup $\{y + z : y \in Y, z \in Z\}$. Suma je **direktna** ako je $Y \cap Z = \{0\}$, što je ekvivalentno time da se svaki vektor $x \in Y + Z$ na jedinstven način može prikazati u obliku $x = y + z$ za $y \in Y$ i $z \in Z$. Direktnu sumu označavamo s $Y \dot{+} Z$.

Propozicija 1.7.6. *Neka je X normiran prostor i $Y, Z \leq X$ njegovi potprostori. Ako je Y zatvoren i Z konačnodimenzionalan, onda je njihova suma $Y + Z$ zatvoren potprostor od X.*

Dokaz. Slika $Q_Y(Z)$ od Z po kvocijentnom operatoru $Q_Y \in \mathrm{B}(X, X/Y)$ je konačnodimenzionalan, onda i zatvoren potprostor od X/Y (Propozicija 1.3.12). Stoga je i $Y + Z = Q_Y^{-1}(Q_Y(Z))$ zatvoren potpostor od X. □

Sljedeći primjer pokazuje da suma zatvorenih potprostora beskonačnodimenzionalnog normiranog prostora općenito ne mora biti zatvorena, čak niti ako je suma direktna.

Primjer 1.7.7. Neka su $Y, Z \leq \ell^2$ definirani s

$$Y := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \in \ell^2 : \xi_{2k} = 0 \,\forall k \in \mathbb{N}\} \quad \text{i} \quad Z := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \in \ell^2 : \xi_{2k-1} = k\xi_{2k} \,\forall k \in \mathbb{N}\}$$

Lako se provjeri da su Y i Z zatvoreni. Nadalje, $Y \cap Z = \{0\}$ i $Y + Z$ je gust potprostor od ℓ^2, jer sadrži c_{00}. Ako bi $Y + Z$ bio zatvoren, onda bi zbog gustoće bilo $Y + Z = \ell^2$. Posebno, $x := (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) \in Y + Z$ pa postoje $y \in Y$ i $z \in Z$ takvi da je $x = y + z$. Ako je $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$, onda je $\lambda_{2k} = \frac{1}{2k+1}$ i $\lambda_{2k-1} = \frac{k}{2k+1}$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Posebno, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k \neq 0$, tako da $z \notin \ell^2$, što je kontradikcija.

Definicija 1.7.8. Za svojstvo (P) definirano u terminu kategorije normiranih prostora kažemo da je **svojstvo triju prostora** (eng. three space property) ako za svaki normirani prostor X i njegov zatvoren potprostor Y vrijedi da ako neka dva prostora od X, Y i X/Y zadovoljavaju svojstvo (P) onda i treći prostor zadovoljava (P).

Propozicija 1.7.9. *Potpunost je svojstvo triju prostora. Drugim riječim, ako je X normiran prostor i $Y \leq X$ zatvoren potprostor, tada je X Banachov ako i samo ako su Y i X/Y Banachovi.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X Banachov i neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u X takav da je $\sum_{k=1}^{\infty} \|Q_Y x_k\|_{X/Y} < \infty$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo $y_k \in Y$ takav da je $\|x_k + y_k\| < \|Q_Y x_k\|_{X/Y} + \frac{1}{2^k}$. Tada je $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k + y_k\| < \infty$. Jer je X potpun, prema Teoremu 1.3.16 taj red konvergira u X i neka je $x := \sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) \in X$. Jer je Q_Y neprekidan, slijedi $Q_Y x = \sum_{k=1}^{\infty} Q_Y(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_Y x_k$. Pozivajući se ponovno na Teorem 1.3.16 zaključujemo da je X/Y Banachov.

Sada pretpostavimo da su prostori Y i X/Y Banachovi i neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X. Onda je i $(Q_Y x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X/Y (jer je Q_Y ograničen). Zbog potpunosti od X/Y postoji $z \in X$ takav da $Q_Y x_k \to Q_Y z$ u X/Y, što je ekvivalentno s $d(x_k - z, Y) \to 0$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je $y_k \in Y$ takav da je $\|x_k - z + y_k\| < d(x_k - z, Y) + \frac{1}{k}$. Posebno, $x_k - z + y_k \to 0$, pa iz $y_k = (x_k - z + y_k) + (z - x_k)$ slijedi da je $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Y. Zbog potpunosti od Y postoji $y := \lim_{k\to\infty} y_k \in Y$. Onda $x_k = (x_k - z + y_k) + (z - y_k) \to z - y$, čime je dokazana potpunost od X. $\square$

1.8 Separabilnost

Definicija 1.8.1. Za topološki prostor X kažemo da je **separabilan** ako X sadrži prebrojiv gust podskup.

Propozicija 1.8.2. *Neka je X topološki prostor.*

(i) Ako je $A \subseteq X$ separabilan podskup (s obzirom na relativnu topologiju), onda je i $\overline{A}$ separabilan.

(ii) Ako je X separabilan i $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija, gdje je Y neki drugi topološki prostor, onda je i Y separabilan (tj. neprekidna slika separabilnog prostora je separabilan prostor).

Dokaz. (i). Ako je C prebrojiv gust podskup od A onda je C također gust u $\overline{A}$. Naime, ako je V neprazan otvoren skup u $\overline{A}$ (relativna topologija), onda je $V = U \cap \overline{A}$ za neki neprazan otvoren skup U u X. Onda je $U \cap A \neq \emptyset$, a jer je C gust u A, $(U \cap A) \cap C \neq \emptyset$. Iz $U \cap A \subseteq V$ slijedi $V \cap C \neq \emptyset$.

(ii). Ako je C prebrojiv gust podskup od X, onda je prema Teoremu 1.2.38 $Y = f(X) = f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq Y$, tako da je $f(C)$ prebrojiv gust podskup od Y. $\square$

Propozicija 1.8.3. *Svaki podskup separabilnog metričkog prostora X je i sam separabilan.*

Dokaz. Neka je $C = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ gust podskup od X. Tada je familija kugala $\{K(x_k, \frac{1}{m}) : k, m \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv otvoreni pokrivač od X. Ako je A neprazan podskup od X, za svaki par $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takav da $A \cap K(x_k, \frac{1}{m}) \neq \emptyset$ izaberimo neki $a_{k,m} \in A \cap K(x_k, \frac{1}{m})$. Tada je $C' := \{a_{k,m}\}$ prebrojiv gust podskup od A. Naime, svaki $x \in A$ je sadržan u nekoj kugli $K(x_k, \frac{1}{m})$. Jer je $a_{k,m} \in K(x_k, \frac{1}{m})$ slijedi $d(x, a_{k,m}) \leq d(x, x_k) + d(x_k, a_{k,m}) < \frac{2}{m}$. $\square$

Propozicija 1.8.4. *Svaki kompaktan metrički prostor X je separabilan.*

Dokaz. Prema Teoremu 1.5.12 X je totalno ograničen. Stoga za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $n(k) \in \mathbb{N}$ i $x_{k,1}, \ldots, x_{k,n(k)} \in X$ tako da je $X = \bigcup_{j=1}^{n(k)} K(x_{k,j}, \frac{1}{k})$. Onda je očito $\{x_{k,j} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n(k)\}$ prebrojiv gust podskup od X. $\square$

Propozicija 1.8.5. *Neka je X normiran prostor.*

(i) Ako je $A \subseteq X$ prebrojiv podskup, onda je zatvarač linearne ljuske $\overline{[A]}$ separabilan potprostor od X.

(ii) Ako je $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva familija separabilnih potprostora od X, onda je i zatvarač njihove sume $\overline{\sum_k X_k}$ separabilan potprostor od X.

Dokaz. (i). Sve linearne kombinacije elemenata iz A s racionalnim koeficijentima (pri čemu ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ pod racionalnim brojem smatramo onaj kojemu su realni i imaginarni dio racionalni) očito čine prebrojiv gust podskup od $[A]$, pa stoga i od $\overline{[A]}$ (prema dokazu Propozicije 1.8.2).

(ii). Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je C_k prebrojiv gust podskup od X_k. Onda je očito skup svih konačnih suma elemenata iz $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ prebrojiv gust podskup od $\sum_k X_k$, pa stoga i od $\overline{\sum_k X_k}$. $\square$

Primjer 1.8.6. (a) Svaki normiran prostor X dimenzije $\dim X \leq \aleph_0$ je separabilan. To slijedi direktno iz Propozicije 1.8.5.

(b) Banachovi prostori c_0, c i ℓ^p za $1 \leq p < \infty$ su separabilni. Naime, jer je $\dim c_{00} = \aleph_0$ (skup kanonskih vektora e_k, $k \in \mathbb{N}$ je algebarska baza za c_{00}), c_{00} je gust separabilan potprostor od c_0 i ℓ^p za $1 \leq p < \infty$. Separabilnost od c_0 i ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ sada slijedi iz Propozicije 1.8.2. Neka je e konstantan niz čiji su svi elementi jednaki 1. Onda je $c = c_0 + \mathbb{F}e$, tako da je c separabilan prema Propoziciji 1.8.5.

(c) Banachov prostor $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, gdje je $[a,b]$ segement u $\mathbb{R}$, je separabilan. Naime, prema Weierstrassovom aproksimacijskom teoremu skup svih polinoma $\mathcal{P}|_{[a,b]}$ restringiranih na $[a,b]$ je uniformno gust potprostor od $C([a,b])$. Jer je $\dim \mathcal{P}|_{[a,b]} = \aleph_0$, $\mathcal{P}|_{[a,b]}$ je separabilan, pa je stoga i $C([a,b]) = \overline{\mathcal{P}|_{[a,b]}}$ separabilan (Propozicija 1.8.2).

Općenitije, ako je K kompaktan metrički prostor, koristeći Stone-Weierstrassov teorem (koji je generalizacija Weierstrassovog aproksimacijskog teorema) može se pokazati da je $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ separabilan Banachov prostor.

(d) Banachov prostor ℓ^∞ nije separabilan. Naime, za svaki neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ neka je χ_S karakteristična funkcija skupa S. Tada je $\chi_S \in \ell^\infty$, $\|\chi_S\|_\infty = 1$ i $\|\chi_S - \chi_{S'}\|_\infty = 1$ za sve neprazne i različite podskupove $S, S' \subseteq \mathbb{N}$. Jer je

$$\mathcal{F} := \left\{ K(\chi_S, \frac{1}{2}) : S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \right\}$$

familija međusobno disjunktnih otvorenih kugala u ℓ^∞ i $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathfrak{c}$, slijedi da je $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \mathfrak{c}$. Stoga, ako je $C \subseteq \ell^\infty$ gust skup, onda svaka kugla $K(\chi_S, \frac{1}{2}) \in \mathcal{F}$ sadrži barem jedan element $x_S \in C$. Jer su te kugle međusobno disjunktne, preslikavanje $K(\chi_S, \frac{1}{2}) \mapsto x_S$ je injekcija s $\mathcal{F}$ u C, tako da je $\mathrm{card}(C) \geq \mathrm{card}(\mathcal{F}) = \mathfrak{c}$. S druge strane, $\mathrm{card}(\ell^\infty) = \mathfrak{c}$ (jer je $\mathfrak{c} \leq \mathrm{card}(\ell^\infty) \leq \mathrm{card}(\mathbb{F}^\mathbb{N}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$), tako da je $\mathfrak{c}$ ujedno i najmanji kardinalni broj gustog skupa u ℓ^∞.

Propozicija 1.8.7. *Za normirane prostore je separabilnost svojstvo triju prostora.*

Dokaz. Neka je X normiran prostor, $Y \leq X$ zatvoren potprostor i $Q_Y \in \mathrm{B}(X, X/Y)$ kvocijentni operator.

Pretpostavimo da je X separabilan. Prema Propoziciji 1.8.3 je onda i Y separabilan. Jer je $X/Y = Q_Y(X)$ i Q_Y je neprekidan, separabilnost od X/Y slijedi iz Propozicije 1.8.2.

Obratno, pretpostavimo da su Y i X/Y separabilni, te C_1 i C_2 redom prebrojivi skupovi u Y i X takvi da je C_1 gust u Y i $Q_Y(C_2)$ gust u X/Y. Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Jer je $Q_Y(C_2)$ gust u X/Y, postoji $x_1 \in C_2$ takav da je $d(x_0 - x_1, Y) = \|Q_Y(x_0 - x_1)\|_{X/Y} < \frac{\varepsilon}{2}$. Onda postoji $y \in Y$ takav da je $\|(x_0 - x_1) - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jer je C_1 gust u Y, postoji $y_1 \in C_1$ takav da je $\|y - y_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Stoga je $\|x_0 - (x_1 + y_1)\| \leq \|x_0 - x_1 - y\| + \|y - y_1\| < \varepsilon$. Time smo dokazali da je prebrojiv skup $C_1 + C_2$ gust u X, tako da je X separabilan. $\square$

Napomena 1.8.8. Svaki separabilan metrički prostor X je kardinalnosti najviše $\mathfrak{c}$. Naime, ako je A prebrojiv gust podskup od X, za svaki $x \in X$ postoji niz $(a_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ u A koji konvergira prema X. Definirajmo funkciju $f : X \to A^\mathbb{N}$ s $f(x) := (a_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$. Jer je limes konvergentnog niza u metričkom prostoru jedinstven, f je injekcija. Dakle, $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(A^\mathbb{N}) = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Posebno, ako je X netrivijalan separabilan normiran prostor, onda je $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{c}$. Naime, za $x \in X \setminus \{0\}$ je $\mathbb{F}x \leq X$ i $\mathrm{card}(\mathbb{F}x) = \mathrm{card}(\mathbb{F}) = \mathfrak{c}$, što pokazuje $\mathrm{card}(X) \geq \mathfrak{c}$.

1.9 Duali prostora nizova

Prisjetimo se da za $1 \le p, q \le \infty$ kažemo da su međusobno **konjugirani eksponenti** ako vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (uz konvenciju $q = \infty$ ako je $p = 1$, kao i obratno).

Pretpostavimo da su $1 \le p, q \le \infty$ međusobno konjugirani eksponenti. Onda je za $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ i $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ prema Hölderovoj[25] nejednakosti $z := (\xi_k\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ i

$$\|z\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.18}$$

Stoga svakom $y \in \ell^q$ možemo pridružiti preslikavanje $\varphi_y : \ell^p \to \mathbb{F}$ definirano s

$$\varphi_y(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\eta_k, \qquad x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p, \quad y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q.$$

Očito je φ_y linearni funkcional na ℓ^p te je prema (1.18)

$$|\varphi_y(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\eta_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k\eta_k| = \|z\|_1 \le \|y\|_q\|x\|_p.$$

Dakle, $\varphi_y \in (\ell^p)^*$ i $\|\varphi_y\| \le \|y\|_q$ za sve $y \in \ell^q$. Na taj dolazimo do preslikavanja

$$\Phi : \ell^q \to (\ell^p)^*, \qquad \Phi(y) := \varphi_y, \tag{1.19}$$

koje je očito injektivan ograničen linearni operator s ℓ^q u $(\ell^p)^*$ i $\|\Phi\| \le 1$. Štoviše, vrijedi:

Teorem 1.9.1. *Ako je $1 \le p < \infty$ i $1 < q \le \infty$ njemu konjugirani eksponent, tada je preslikavanje Φ iz (1.19) izometrički izomorfizam s ℓ^q na $(\ell^p)^*$.*

Dokaz. Za $\varphi \in (\ell^p)^*$ definirajmo

$$\Psi(\varphi) := (\varphi(e_k))_{k\in\mathbb{N}},$$

gdje je $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz kanonskih vektora u $c_{00} \subset \ell^p$. Tvrdimo da je

$$\Psi(\varphi) \in \ell^q \qquad \text{i} \qquad \|\Psi(\varphi)\|_q \le \|\varphi\| \qquad \forall \varphi \in (\ell^p)^*, \tag{1.20}$$

tako da je s $\Psi : \varphi \mapsto \Psi(\varphi)$ definiran (očito linearni) ograničen operator s $(\ell^p)^*$ u ℓ^q norme $\|\Psi\| \le 1$. Fiksirajmo stoga $\varphi \in (\ell^p)^*$.

Ako je $p = 1$ (tako da je $q = \infty$), onda (1.20) slijedi direktno iz $|\varphi(e_k)| \le \|\varphi\|\|e_k\|_1 = \|\varphi\|$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Sada pretpostavimo da je $p > 1$ (tako da je $q < \infty$). Definirajmo niz $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s

$$\eta_k := \varphi(e_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo $\alpha_k \in \mathbb{F}$ takav da je $|\alpha_k| = 1$ i $\alpha_k\eta_k = |\eta_k|$, te definirajmo niz $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u $c_{00} \subset \ell^p$,

$$z_k := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j|\eta_j|^{q-1}e_j.$$

Tada je

$$\varphi(z_k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j|\eta_j|^{q-1}\eta_j = \sum_{j=1}^{k} |\eta_j|^q = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^p|\eta_j|^{p(q-1)} = \|z_k\|_p^p.$$

[25] Otto Hölder (1859.–1937.), njemački matematičar

Nadalje, jer je $\varphi \in (\ell^p)^*$ za $k \in \mathbb{N}$ je $|\varphi(z_k)| \leq \|\varphi\| \|z_k\|_p$, iz čega slijedi

$$\|z_k\|_p^p = \varphi(z_k) = |\varphi(z_k)| \leq \|\varphi\| \|z_k\|_p \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{k} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{k} |\eta_j|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \|z_k\|_p^{p-1} \leq \|\varphi\|.$$

Jer je $k \in \mathbb{N}$ bio proizvoljan, slijedi (1.20) i u tom slučaju.

Ostatak dokaza provodimo za proizvoljan $1 \leq p < \infty$. Dokažimo da su Φ i Ψ međusobno inverzna preslikavanja. Za $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ imamo

$$(\Psi \circ \Phi)(y) = \Psi(\varphi_y) = (\varphi_y(e_k))_k = (\eta_k)_k = y, \tag{1.21}$$

što pokazuje $\Psi \circ \Phi = I_{\ell^q}$. Obratno, za $\varphi \in (\ell^p)^*$ i $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ imamo

$$[(\Phi \circ \Psi)(\varphi)](x) = [\Phi(\Psi(\varphi))](x) = [\Phi((\varphi(e_k))_k)](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi(e_k) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right) = \varphi(x), \tag{1.22}$$

što pokazuje $\Phi \circ \Psi = I_{(\ell^p)^*}$. Napokon, jer je $\|\Phi\| \leq 1$ i $\|\Psi\| \leq 1$, za sve $y \in \ell^q$ slijedi

$$\|y\|_q = \|\Psi(\Phi(y))\|_q \leq \|\Psi\| \|\Phi\| \|y\|_q \leq \|y\|_q \qquad \Longrightarrow \qquad \|\Phi(y)\| = \|y\|_q,$$

odnosno Φ je izometrija. Istim argumentom (ili pozivom na Napomenu 1.6.12) zaključujemo da je $\Psi = \Phi^{-1}$ također izometrija, čime je dokaz završen. $\square$

Napomena 1.9.2. Očito su $p = q = 2$ međusobno konjugirani eksponenti, tako da iz Teorema 1.9.1 posebno slijedi $(\ell^2)^* \cong \ell^2$. To nije slučajno. Naime, ℓ^2 je zapravo Hilbertov[26] prostor (potpun unitarni prostor), budući da je norma $\|\cdot\|_2$ inducirana iz skalarnog produkta

$$\langle (\xi_k)_k, (\eta_k)_k \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}$$

(tj. vrijedi $\|(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_2^2 = \langle (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}, (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \rangle$ za sve $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$). Kasnije ćemo dokazati da je svaki Hilbertov prostor izometrički izomorfan svom dualu.

Napomena 1.9.3. Ako je $p = \infty$ (tako da je $q = 1$), onda nije teško vidjeti da je preslikavanje Φ definirano s (1.19) također izometrija s ℓ^1 u $(\ell^\infty)^*$. Naime, neka je $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo $\alpha_k \in \mathbb{F}$ takav da je $|\alpha_k| = 1$ i $\alpha_k \eta_k = |\eta_k|$. Ako je $x := (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, onda je $x \in S_{\ell^\infty}$ i

$$\|y\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \eta_k = [\Phi(y)](x) = |[\Phi(y)](x)| \leq \|\Phi(y)\| \|x\|_\infty = \|\Phi(y)\| \leq \|y\|_1.$$

S druge strane (unutar teorije ZFC), Φ neće biti surjektivno. Naime, uskoro ćemo dokazati Hahn-Banachov teorem (koji je teorem teorije ZFC, ali ne i od ZF) koji ukratko kaže da ako je X normiran prostor i $Y \leq X$, onda se se svaki ograničen linearni funkcional na Y može bez povećanja norme proširiti do ograničenog linearnog funkcionala na X (Teorem 2.1.9). Posebno, ako uzmemo $X = \ell^\infty$, $Y = c$ i

$$\omega \in c^*, \qquad \omega[(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}] := \lim_{k\to\infty} \xi_k \tag{1.23}$$

(primijetimo da je $\|\omega\| = 1$), onda se prema Hahn-Banachovom teoremu ω može proširiti do $\hat{\omega} \in (\ell^\infty)^*$ (s $\|\hat{\omega}\| = 1$). Pretpostavimo da postoji $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ takav da je $\Phi(y) = \hat{\omega}$. Onda je

$$\eta_k = [\Phi(y)](e_k) = \hat{\omega}(e_k) = \omega(e_k) = 0$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle $y = 0$ pa onda i $\hat{\omega} = \Phi(y) = 0$, što je kontradikcija, jer npr. za konstantan niz $e \in c$ sa svim vrijednostima 1 imamo $\hat{\omega}(e) = \omega(e) = 1$.

[26] David Hilbert (1862.–1943.), njemački matematičar i jedan od najutjecajnijih matematičara 19. i 20. stoljeća

Štoviše, jedna od posljedica Hahn-Banachovog teorema je da je dual svakog neseparabilnog normiranog prostora također neseparabilan (Korolar 2.2.3). Posebno, $(\ell^\infty)^* \not\cong \ell^1$.

Također napomenimo da je $(\ell^\infty)^* \cong \ell^1$ konzistentno s teorijom ZF (štoviše, $\Phi(\ell^1) = (\ell^\infty)^*$), tj. postoji model od ZF u kojemu je to zadovoljeno. Naravno, u takvom modelu ne može vrijediti AC, jer bi onda vrijedio i Hahn-Banachov teorem. Zainteresiranog čitatelja upućujemo na [28] i pripadne reference.

Napomena 1.9.4. Teorem 1.9.1 možemo poopćiti na L^p-prostore. Naime, neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ σ-konačan prostor mjere. Ako je $1 \le p < \infty$ i $1 < q \le \infty$ njemu konjugirani eksponent, tada je preslikavanje $\Phi : L^q(X, \mathcal{F}, \mu) \to L^p(X, \mathcal{F}, \mu)^*$ definirano s

$$[\Phi(g)](f) := \int_X fg\, d\mu, \quad g \in L^q, f \in L^p$$

izometrički izomorfizam (vidjeti npr. [15]).

Sljedeći rezultat, u kojem opisujemo duale prostora c_0 i c, ujedno pokazuje da Banachovi prostori mogu imati izometrički izomorfne duale, a da pritom sami nisu izometrički izomorfni.

Teorem 1.9.5. *Vrijedi:* $c_0^* \cong c^* \cong \ell^1$ *i* $c_0 \not\cong c$.

Dokaz. Najprije dokažimo $c_0^* \cong \ell^1$. Neka je $\Phi \in \mathrm{B}(\ell^1, (\ell^\infty)^*)$ izometrija iz Napomene 1.9.3 (za $p = \infty$ i $q = 1$), te neka je $\Phi_0 \in \mathrm{B}(\ell^1, c_0^*)$ definirano s

$$\Phi_0(y) := \Phi(y)|_{c_0}.$$

Jer je $c_0 \le \ell^\infty$, očito je $\|\Phi_0(y)\| \le \|\Phi(y)\| = \|y\|_1$ za sve $y \in \ell^1$. Slično kao i prije, za $\varphi \in c_0^*$ definiramo

$$\Psi(\varphi) := (\varphi(e_k))_{k\in\mathbb{N}}.$$

Onda je $\Psi(\varphi) \in \ell^1$ i $\|\Psi(\varphi)\|_1 \le \|\varphi\|$. Zaista, za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo $\alpha_k \in \mathbb{F}$ takav da je $|\alpha_k| = 1$ i $\alpha_k \varphi(e_k) = |\varphi(e_k)|$. Ako je

$$z_k := \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \in S_{c_0},$$

onda je

$$\sum_{j=1}^k |\varphi(e_k)| = \sum_{j=1}^k \alpha_k \varphi(e_k) = |\varphi(z_k)| \le \|\varphi\|,$$

odakle slijedi tvrdnja. Nadalje, preslikavanje $\Psi : c_0^* \to \ell^1$ je očito linearno, a isti račun kao u (1.21) i (1.22) (uz supstituciju $\Phi \to \Phi_0$) pokazuje $\Psi \circ \Phi_0 = I_{\ell^1}$ i $\Phi_0 \circ \Psi = I_{c_0^*}$ (primijetimo da za $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$ red $\sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k$ konvergira prema x u c_0). Dakle, $\Psi = \Phi_0^{-1}$ pa kao i prije iz $\|\Phi_0\| \le 1$ i $\|\Phi_0^{-1}\| \le 1$ slijedi da su Φ_0 i Φ_0^{-1} izometrije.

Sada dokažimo $c^* \cong \ell^1$. Neka je funkcional $\omega \in c^*$ definiran kao u (1.23). Prema Napomeni 1.9.3 ne postoji $y \in \ell^1$ takav da je $\omega \in \operatorname{ran} \Phi(y)|_c$ pa postupamo na sljedeći način. Za $(\alpha, y) \in \mathbb{F} \oplus_1 \ell^1$ definirajmo preslikavanje $\Phi_1(\alpha, y) : c \to \mathbb{F}$ s

$$[\Phi_1(\alpha, y)](x) := \alpha\omega(x) + [\Phi(y)](x) = \alpha \lim_{k\to\infty} \xi_k + \sum_{k=1}^\infty \xi_k \eta_k,$$

gdje je $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c$ i $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Očito je $\Phi_1 \in \mathrm{L}(\mathbb{F} \oplus_1 \ell^1, c^*)$. Nadalje za $\alpha \in \mathbb{F}$, $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ i $x \in c$ vrijedi

$$|[\Phi_1(\alpha, y)](x)| \le |\alpha||\omega(x)| + |[\Phi(y)](x)| \le |\alpha|\|x\|_\infty + \|y\|_1\|x\|_\infty = \|(\alpha, y)\|_1\|x\|_\infty.$$

Za $\varepsilon > 0$ neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k=1}^\infty |\eta_k| = \|y\|_1 < \sum_{k=1}^m |\eta_k| + \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $\xi \in \mathbb{F}$ takav da je $|\xi| = 1$ i $\xi\alpha = |\alpha|$, te za $1 \le k \le m$ neka je $\xi_k \in \mathbb{F}$ takav da je $|\xi_k| = 1$ i $\xi_k \eta_k = |\eta_k|$. Ako je

$$x := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi, \xi, \dots),$$

onda je $x \in S_c$ i

$$\begin{aligned}
|[\Phi_1(\alpha, y)](x)| &= \left| |\alpha| + \sum_{k=1}^{m} |\eta_k| + \xi \sum_{k=m+1}^{\infty} \eta_k \right| \geq |\alpha| + \sum_{k=1}^{m} |\eta_k| - \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \eta_k \right| \\
&\geq |\alpha| + \sum_{k=1}^{m} |\eta_k| - \sum_{k=m+1}^{\infty} |\eta_k| = |\alpha| + 2\sum_{k=1}^{m} |\eta_k| - \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \\
&> |\alpha| + \|y\|_1 - \varepsilon = \|(\alpha, y)\|_1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je Φ_1 izometrija.

Dokažimo surjektivnost od Φ_1 (tako da će onda i Φ_1^{-1} biti izometrija prema Napomeni 1.6.12). Neka je $\varphi \in c^*$. Prema prvom dijelu dokaza postoji jedinstven $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ takav da je

$$\varphi|_{c_0}(z) = [\Phi_0(y)](z) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \eta_k$$

za sve $z = (\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$. Označimo s e konstantan niz sa svim vrijednostima 1. Onda je za $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c$, $x - \omega(x)e \in c_0$, tako da je

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \varphi(x - \omega(x)e) + \omega(x)\varphi(e) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \omega(x)\eta_k) + \omega(x)\varphi(e) \\
&= \left(\varphi(e) - \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \right) \omega(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k,
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je $\varphi = \Phi_1(a, y)$, gdje je $\alpha := \varphi(e) - \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \in \mathbb{F}$.

Napokon, primijetimo da je $\mathbb{F} \oplus_1 \ell^1 \cong \ell^1$, preko izometričkog izomorfizma

$$(\lambda, (\xi_1, \xi_2, \ldots)) \mapsto (\lambda, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Preostaje dokazati da $c_0 \not\cong c$. U tu svrhu nađimo neke različite invarijante prostora c i c_0.

Neka je, kao i prije, $e = (1, 1, \ldots) \in S_c$. Ako je $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in c$ takav da je $\|e-x\|_\infty = \|e+x\|_\infty = 1$. Onda je svakako $|\xi_k - 1| \leq 1$ i $|\xi_k + 1| \leq 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$ tako da je nužno $x = 0$.

S druge strane, za svaki niz $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in S_{c_0}$ postoji $b \in c_0 \setminus \{0\}$ takav da je $\|a - b\|_\infty = \|a + b\|_\infty = 1$. Naime, jer $\alpha_k \to 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|\alpha_k| < \frac{1}{2}$ za sve $k \geq k_0$. Tada niz $b = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \in c_0$ definiran s

$$\mu_k := \begin{cases} 0, & k \leq k_0 \\ \frac{1}{k} & k > k_0. \end{cases}$$

očito zadovoljava tražene uvjete.

Sada lako zaključimo da $c_0 \not\cong c$. Naime, pretpostavimo da postoji izometrički izomorfizam $T : c_0 \to c$. Izaberimo $a \in S_{c_0}$ takav da je $Ta = e$ i neka je $b \in c_0 \setminus \{0\}$ takav da je $\|a-b\|_\infty = \|a+b\|_\infty = 1$. Onda je $\|e-Tb\|_\infty = \|e+Tb\|_\infty = 1$, odakle slijedi $Tb = 0$. Jer je T injektivan, mora biti $b = 0$; kontradikcija. □

Napomena 1.9.6. Direktna posljedica Teorema 1.9.1 i 1.9.5 i činjenice da su duali normiranih prostora uvijek Banachovi prostori (Propozicija 1.6.8) je da su ℓ^p Banachovi prostori za sve $1 \leq p \leq \infty$ (tvrdnja koju smo lako mogli i direktno dokazati).

Napomena 1.9.7. Primijetimo da je c_0 potprostor kodimenzije 1 u c, kao jezgra ograničenog linearnog funkcionala $\omega \in c^*$ definiranog s (1.23) (alternativno, $c = c_0 + \mathbb{F}e$, gdje je e konstantan niz sa svim vrijednostima 1). Nadalje, vrijedi $c_0 \simeq c$. Naime, neka je $T : c_0 \to c$ preslikavanje definirano s

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) := (\xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_3, \xi_1 + \xi_4, \ldots).$$

Lako se provjeri da je T ograničen linearni operator i $\|T\| \leq 2$, te da je sa $S : c \to c_0$,

$$S(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) := (\lim_{k\to\infty} \eta_k, \eta_1 - \lim_{k\to\infty} \eta_k, \eta_2 - \lim_{k\to\infty} \eta_k, \ldots)$$

definiran ograničen inverz od T i $\|S\| \leq 2$. Provjerite!

Napomena 1.9.8. Teorem 1.9.5 također pokazuje da za normirane prostore X i Y iz $X^* \cong Y^*$ općenito ne slijedi $X \cong Y$. Također, iz $X^* \cong Y^*$ ne mora slijediti niti $X \simeq Y$. Npr. neka je Y bilo koji pravi gust potprostor Banachovog prostora X (kao npr. $Y = c_{00}$ u $X = c_0$). Jer je potpunost invarijanta od $\simeq$ (vidjeti Napomenu 1.6.12), svakako $Y \not\simeq X$. S druge strane, iz Korolara 1.6.13 slijedi $Y^* \cong X^*$.

Također postoje i primjeri Banachovih prostora X i Y takvih da je $X^* \cong Y^*$ i $X \not\simeq Y$. Npr. neka je $c_0(\mathbb{R})$ skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takvih da je $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. Lako se provjeri da je $c_0(\mathbb{R})$ neseparabilan (realan) Banachov prostor uz uobičajene operacije i normu $\|\cdot\|_\infty$. Ako stavimo $X := C([0,1])$ i $Y := C([0,1]) \oplus_\infty c_0(\mathbb{R})$, tada se može pokazati da vrijedi $X^* \cong Y^*$. S druge strane, X je separabilan, dok je Y neseparabilan, tako da $X \not\simeq Y$.

Poglavlje 2

Hahn-Banachov teorem i posljedice

2.1 Hahn-Banachov teorem

Definicija 2.1.1. Neka je X vektorski prostor. Za $p : X \to \mathbb{R}$ kažemo da je **sublinearna funkcija** ako vrijedi:

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ za sve realne skalare $\lambda \geq 0$ i $x \in X$ (pozitivna homogenost),

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ za sve $x, y \in X$ (subaditivnost ili nejednakost trokuta).

Za svaku sublinearnu funkciju $p : X \to \mathbb{R}$ očito vrijedi $p(0) = 0$, te je p konveksna funkcija, tj.

$$p((1-t)x + ty) \leq (1-t)p(x) + tp(y) \qquad \forall x, y \in X,\ t \in [0, 1]$$

Primjer 2.1.2.

(a) Svaka polunorma na vektorskom prostoru je očito sublinearna funkcija.

(b) Svaki linearni funkcional na realnom vektorskom prostoru je sublinearna funkcija.

(c) Neka je Z topološki prostor. Na realnom Banachovom prostoru $C_b(Z)$ (Primjer 1.3.6) je s

$$p(f) := \sup_{t \in Z} f(t), \qquad f \in C_b(Z)$$

definirana sublinearna funkcija.

Teorem 2.1.3 (Hahn-Banachov[1,2] teorem proširenja). *Neka je X realan vektorski prostor i $p : X \to \mathbb{R}$ sublinearna funkcija. Ako je V potprostor od X i $\varphi \in V^{\#}$ linearni funkcional takav da vrijedi*

$$\varphi(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in V,$$

onda se φ može proširiti do linearnog funkcionala $\hat{\varphi} \in X^{\#}$ tako da vrijedi

$$\hat{\varphi}(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in X.$$

Dokaz Teorema 2.1.3 oslanja se na nekoliko pomoćnih rezultata.

Lema 2.1.4. *Neka je X realan vektorski prostor. Sublinearna funkcija $p : X \to \mathbb{R}$ je linearna ako i samo ako vrijedi $p(-x) = -p(x)$ za sve $x \in X$.*

[1] Hans Hahn (1879.–1934.), austrijski matematičar i filozof
[2] Stefan Banach (1892.–1945.), poljski matematičar

Dokaz. Ako je p linearna, trivijalno je $p(-x) = -p(x)$ za sve $x \in X$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $p(-x) = -p(x)$ za sve $x \in X$. Onda je očito p homogena. Dokažimo da je p aditivna. Koristeći subaditivnost od p za sve $x, y \in X$ dobivamo

$$p(x) + p(y) = -(p(-x) + p(-y)) \leq -p(-x-y) = p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

$\square$

Notacija. Za realan vektorski prostor X sa $\mathfrak{S}_X$ označavamo familiju svih sublinearnih funkcija $p : X \to \mathbb{R}$. Na $\mathfrak{S}_X$ definiramo relaciju parcijalnog uređaja s

$$p \leq q \qquad \text{ako} \qquad p(x) \leq q(x) \quad \forall x \in X.$$

Lema 2.1.5. *Neka je X realan vektorski prostor i $V \leq X$. Ako su $p \in \mathfrak{S}_X$ i $q \in \mathfrak{S}_V$ takve da je $q \leq p|_V$, onda postoji $r \in \mathfrak{S}_X$ takva da je $r|_V = q$ i $r \leq p$.*

Dokaz. Definirajmo $r : X \to \mathbb{R}$ s

$$r(x) := \inf_{v \in V} (q(v) + p(x-v)), \quad x \in X.$$

Tvrdimo da r ima tražena svojstva. Najprije dokažimo da je r dobro definirana funkcija. Fiksirajmo $x \in X$ i neka je $v \in V$. Prema pretpostavci je $q(-v) \leq p(-v)$, pa iz subaditivnosti od q slijedi

$$0 \leq q(v) + q(-v) \leq q(v) + p(-v) \quad \Longrightarrow \quad -p(-v) \leq q(v).$$

Koristeći pak subaditivnost od p imamo $p(-v) \leq p(-x) + p(x-v)$, a jer je $-p(-v) \leq q(v)$ slijedi

$$-p(-x) \leq -p(-v) + p(x-v) \leq q(v) + p(x-v).$$

Dakle, skup $\{q(v) + p(x-v) : v \in V\}$ je ograničen odozdo s $-p(-x)$ pa je vrijednost $r(x)$ dobro definirana i $r(x) \geq -p(-x)$.

Nadalje, jasno je da je r pozitivno homogena i da je $r(x) \leq p(x)$ za sve $x \in X$ (jer je $0 \in V$). Dokažimo da je $r(x) = q(x)$ za sve $x \in V$. Neka je stoga $x \in V$. Tada je za sve $v \in V$,

$$q(x) \leq q(v) + q(x-v) \leq q(v) + p(x-v) \leq p(v) + p(x-v),$$

tako da je

$$q(x) \leq r(x) = \inf_{v \in V} (q(v) + p(x-v)) \leq q(x) + p(x-x) = q(x).$$

Ostaje dokazati da je r subaditivna. Neka su $x, y \in X$ i $\varepsilon > 0$. Izaberimo $v, w \in V$ takve da je

$$q(v) + p(x-v) < r(x) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad q(w) + p(y-w) < r(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jer su p i q subaditivne, slijedi

$$q(v+w) + p(x+y-(v+w)) < r(x) + r(y) + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad r(x+y) < r(x) + r(y) + \varepsilon.$$

Proizvoljnost $\varepsilon > 0$ daje $r(x+y) \leq r(x) + r(y)$. $\square$

Lema 2.1.6. *Neka je X realan vektorski prostor. Tada za svaki $p \in \mathfrak{S}_X$ postoji minimalni $q \in \mathfrak{S}_X$ takav da je $q \leq p$.*

Dokaz. Stavimo

$$\mathcal{P} := \{r \in \mathfrak{S}_X : r \leq p\}.$$

Jer je $p \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{L} = \{r_i\}_{i \in I}$ neprazan lanac u $\mathcal{P}$. Za $x \in X$ definirajmo

$$r(x) := \inf_{i \in I} r_i(x).$$

Tvrdimo da je r dobro definirana sublinearna funkcija na X. Za $i \in I$ i $x \in X$ iz subaditivnosti od r_i i $r_i \le p$ slijedi $-p(-x) \le -r_i(-x) \le r_i(x)$, tako da je vrijednost $r(x)$ dobro definirana. Pozitivna homogenost od r je očita. Ako su $x, y \in X$ i $\varepsilon > 0$ izaberimo $i, j \in I$ takve da je

$$r_i(x) < r(x) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad r_j(y) < r(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jer je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{P}$, njegovi elementi r_i i r_j su usporedivi. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r_j \le r_i$. Onda je

$$r(x+y) \le r_j(x+y) \le r_j(x) + r_j(y) \le r_i(x) + r_j(y) < r(x) + r(y) + \varepsilon,$$

pa iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ slijedi subaditivnost od r. Iz definicije od r je jasno da je r donja međa za lanac $\mathcal{L}$. Stoga, prema Zornovoj lemi, $\mathcal{P}$ ima minimalni element; označimo ga s q.

Kako bismo završili dokaz leme, ostaje argumentirati da je q zapravo minimalni element u $\mathfrak{S}_X$. Zaista, ako je $q_0 \in \mathfrak{S}_X$ i $q_0 \le q$, onda je $q_0 \le p$. Dakle, $q_0 \in \mathcal{P}$ i $q_0 \le q$, pa zbog minimalnosti od q u $\mathcal{P}$ slijedi $q \le q_0$, odnosno $q_0 = q$. $\square$

Lema 2.1.7. *Neka je X realan vektorski prostor. Ako je $q \in \mathfrak{S}_X$ minimalni element, onda je q linearni funkcional na X.*

Dokaz. Prema Lemi 2.1.4 dovoljno je dokazati da za sve $x \in X$ vrijedi $q(-x) = -q(x)$.

Fiksirajmo stoga $x \in X$. Ako je $x = 0$ tvrdnja je trivijalna pa pretpostavimo $x \neq 0$. Neka je $V := \mathbb{R}x$ jednodimenzionalni potprostor od X razapet s x i definirajmo linearni funkcional $\varphi : V \to \mathbb{R}$ s

$$\varphi(\lambda x) := -\lambda q(-x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ako je $\lambda < 0$, onda je zbog pozitivne homogenosti od q, $\varphi(\lambda x) = q((-\lambda)(-x)) = q(\lambda x)$. Ako je $\lambda \ge 0$, onda subaditivnost od q daje $0 \le q(\lambda x) + q(-\lambda x)$, pa je

$$\varphi(\lambda x) = -\lambda q(-x) = -q(-\lambda x) \le q(\lambda x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi \le q|_V.$$

Prema Lemi 2.1.5 postoji sublinearna funkcija $r \in \mathfrak{S}_X$ takva da je $r \le q$ i $r|_V = \varphi$. Minimalnost od q implicira $r = q$, tako da je $\varphi = q|_V$. Stoga je prema definiciji od φ, $-q(-x) = \varphi(1x) = \varphi(x) = q(x)$, odnosno $q(-x) = -q(x)$. $\square$

Dokaz Teorema 2.1.3. Prema Lemi 2.1.5 postoji sublinearna funkcija $r \in \mathfrak{S}_X$ takva da je $r|_V = \varphi$ i $r \le p$. Prema Lemi 2.1.6 postoji minimalna sublinearna funkcija $\hat{\varphi} \in \mathfrak{S}_X$ takva da je $\hat{\varphi} \le r$. Prema Lemi 2.1.6, $\hat{\varphi}$ je linearni funkcional. Ostaje dokazati $\hat{\varphi}|_V = \varphi$. Iz $\hat{\varphi} \le r$ i $r|_V = \varphi$ slijedi $\hat{\varphi}|_V \le \varphi$. Stoga za proizvoljan $x \in V$ imamo $\hat{\varphi}(x) \le \varphi(x)$ i $-\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(-x) \le \varphi(-x) = -\varphi(x)$, odnosno $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$. $\square$

Korolar 2.1.8. *Neka je X vektorski prostor i p polunorma na X. Ako je $V \le X$ potprostor od X i $\varphi \in V^{\#}$ linearni funkcional takav da vrijedi*

$$|\varphi(x)| \le p(x) \qquad \forall x \in V,$$

onda se φ može proširiti do linearnog funkcionala $\hat{\varphi} \in X^{\#}$ tako da vrijedi

$$|\hat{\varphi}(x)| \le p(x) \qquad \forall x \in X.$$

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je X realan prostor. Jer je $\varphi|_V \le |\varphi|_V| \le p|_V$, prema Teoremu 2.1.3 postoji $\hat{\varphi} \in X^{\#}$ takav da je $\hat{\varphi}(x) \le p(x)$ za sve $x \in X$. Onda je i $-\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(-x) \le p(-x) = p(x)$, odnosno $|\hat{\varphi}(x)| \le p(x)$ za sve $x \in X$.

Sada pretpostavimo da je X kompleksan prostor. Neka su redom $X_{\mathbb{R}}$ i $V_{\mathbb{R}}$ vektorski prostori dobiveni iz X i V restrikcijom operacije množenja skalarom na $\mathbb{R}$. Očito je $V_{\mathbb{R}} \le X_{\mathbb{R}}$. Definirajmo $\varphi_0 : V \to \mathbb{R}$ s $\varphi_0(v) := \mathrm{Re}(\varphi(v))$ i primijetimo da je φ_0 linearni funkcional na $V_{\mathbb{R}}$. Nadalje, imamo

$$|\varphi_0(v)| \le |\varphi(v)| \le p(v) \qquad \forall v \in V.$$

Prema prvom dijelu dokaza postoji linearni funkcional $\hat{\varphi}_0 \in X_{\mathbb{R}}^{\#}$ takav da vrijedi

$$\hat{\varphi}_0|_V = \varphi_0 \qquad \text{i} \qquad |\hat{\varphi}_0(x)| \le p(x) \quad \forall x \in X.$$

Definirajmo $\hat{\varphi} : X \to \mathbb{C}$ s

$$\hat{\varphi}(x) := \hat{\varphi}_0(x) - i\hat{\varphi}_0(ix), \quad x \in X. \tag{2.1}$$

Jer je za $v \in V$

$$\hat{\varphi}_0(iv) = \operatorname{Re}(\varphi(iv)) = \operatorname{Re}(i\varphi(v)) = -\operatorname{Im}(\varphi(v)),$$

slijedi

$$\hat{\varphi}(v) = \hat{\varphi}_0(v) - i\hat{\varphi}_0(iv) = \operatorname{Re}(\varphi(v)) + i\operatorname{Im}(\varphi(v)) = \varphi(v),$$

tako da je $\hat{\varphi}$ proširenje od φ s V na X. Iz (2.1) direktno slijedi da je $\hat{\varphi}$ aditivan i $\mathbb{R}$-linearan, a ako u (2.1) umjesto x stavimo ix, dobivamo

$$\hat{\varphi}(ix) = \hat{\varphi}_0(ix) + i\hat{\varphi}_0(x) = i\hat{\varphi}(x).$$

Dakle, $\hat{\varphi}$ je $\mathbb{C}$-linearan, odnosno $\hat{\varphi} \in X^{\#}$. Preostaje dokazati da je $|\hat{\varphi}(x)| \le p(x)$ za sve $x \in X$. Neka je stoga $x \in X$ i izaberimo $\theta \in \mathbb{R}$ takav da je $\hat{\varphi}(e^{i\theta}x) = e^{i\theta}\hat{\varphi}(x) \in \mathbb{R}$. Onda je $e^{i\theta}\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}_0(e^{i\theta}x)$, tako da je

$$|\hat{\varphi}(x)| = |e^{i\theta}\hat{\varphi}(x)| = |\hat{\varphi}_0(e^{i\theta}x)| \le p(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}|p(x) = p(x)$$

za sve $x \in X$. □

Za normirane prostore najčešće se koristi sljedeća varijanta Hahn-Banachovog teorema:

Teorem 2.1.9 (**Hahn-Banachov teorem za normirane prostore**). *Neka je X normiran prostor i $Y \le X$. Ako je $\varphi \in Y^*$ ograničen linearni funkcional na Y, onda se φ bez povećanja norme može proširiti do ograničenog linearnog funkcionala $\hat{\varphi} \in X^*$, odnosno $\hat{\varphi}|_Y = \varphi$ i $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Dokaz. Definirajmo $p : X \to \mathbb{R}$ s $p(x) := \|\varphi\|\|x\|$. Primijetimo da je p polunorma na X (štoviše norma, ako $\varphi \ne 0$) i $|\varphi(y)| \le p(y)$ za sve $y \in Y$. Prema Korolaru 2.1.8 φ se može proširiti do linearnog funkcionala $\hat{\varphi} \in X^{\#}$ tako da vrijedi $|\hat{\varphi}(x)| \le p(x) = \|\varphi\|\|x\|$ za sve $x \in X$. Odavde vidimo da je $\hat{\varphi}$ ograničen i $\|\hat{\varphi}\| \le \|\varphi\|$. Jer je $\hat{\varphi}|_Y = \varphi$ trivijalno je $\|\varphi\| \le \|\hat{\varphi}\|$, tako da je $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$. □

Napomena 2.1.10. Za bilo koje proširenje $\hat{\varphi}$ od φ iz Teorema 2.1.9 kažemo da je **Hahn-Banachovo proširenje** od φ. Ono općenito ne mora biti jedinstveno.

2.2 Posljedice Hahn-Banachovog teorema

Korolar 2.2.1. *Neka je X netrivijalan normiran prostor. Za svaki $x \in X$ postoji $\psi \in S_{X^*}$ takav da je $\psi(x) = \|x\|$. Posebno, $X^* \ne \{0\}$, te za sve $x \in X$ vrijedi*

$$\|x\| = \max_{\varphi \in S_{X^*}} |\varphi(x)|. \tag{2.2}$$

Dokaz. Jer je $X \ne \{0\}$ i $\varphi(0) = 0$ za sve $\varphi \in X^*$, tvrdnju je dovoljno dokazati za $x \ne 0$. Definirajmo $\psi_0 : \mathbb{F}x \to \mathbb{F}$ s $\psi_0(\lambda x) := \lambda\|x\|$. Onda je $\psi_0(x) = \|x\|$ i $\|\psi_0\| = 1$ pa preostaje primijeniti Teorem 2.1.3 kako bismo dobili proširenje $\psi \in S_{X^*}$ od ψ_0. Jednakost (2.2) slijedi iz

$$\|x\| = |\psi(x)| \le \sup_{\varphi \in S_{X^*}} |\varphi(x)| \le \|x\|.$$

□

Korolar 2.2.2. *Neka je X normiran prostor i $Y \le X$.*

(i) Ako Y nije gust u X, onda za svaki $x \in X \setminus \overline{Y}$ postoji $\varphi \in S_{X^*}$ takav da je $Y \subseteq \ker\varphi$ i $\varphi(x) = d(x, Y) > 0$.

(ii) Vrijedi

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{\varphi \in S_{X^*} \cup \{0\} \\ Y \subseteq \ker \varphi}} \ker \varphi. \tag{2.3}$$

(iii) Y je gust u X ako i samo ako za sve $\varphi \in S_{X^*} \cup \{0\}$ iz $\varphi|_Y = 0$ slijedi $\varphi = 0$.

Dokaz. (i). Stavimo $Z := \overline{Y}$ i neka je $x \in X \setminus Z$. Onda je $Q_Z x \neq 0$ u kvocijentnom prostoru X/Z, gdje je $Q_Z \in \mathrm{B}(X, X/Z)$ kvocijentni operator. Prema Korolaru 2.2.1 postoji $\widetilde{\varphi} \in S_{(X/Z)^*}$ takav da je

$$\widetilde{\varphi}(Q_Z x) = \|Q_Z x\|_{X/Z} = d(x, Z) = d(x, Y) > 0.$$

Tada je s $\varphi := \widetilde{\varphi} \circ Q_Z$ definiran traženi funkcional (prema Propoziciji 1.7.1 je $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\| = 1$).

(ii). Označimo presjek u (2.3) sa Z. Ako je $\varphi \in X^*$ takav da je $Y \subseteq \ker \varphi$, onda je zbog zatvorenosti jezgre $\ker \varphi$ također $\overline{Y} \subseteq \ker \varphi$. Stoga je $\overline{Y} \subseteq Z$. Obratno, ako $x \in X \setminus \overline{Y}$, onda prema (i) postoji $\varphi \in S_{X^*}$ takav da je $Y \subseteq \ker \varphi$ i $\varphi(x) > 0$. Dakle, $x \notin Z$.

(iii). Tvrdnja slijedi direktno iz (ii), jer je u tom slučaju $\overline{Y} = \ker 0 = X$. □

Korolar 2.2.3. *Neka je X normiran prostor. Ako je dual X^* separabilan, onda je i X separabilan.*

Dokaz. Ako je X^* separabilan, onda je prema Propoziciji 1.8.3 S_{X^*} također separabilan. Neka je stoga $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv gust skup u S_{X^*}. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x_k \in S_X$ takav da je $|\varphi_k(x_k)| \geq \frac{1}{2}$. Stavimo $Y := \overline{[\{x_k : k \in \mathbb{N}\}]}$. Prema Propoziciji 1.8.5, Y je separabilan zatvoren potprostor od X. Tvrdimo da je $Y = X$. Zaista, neka je $\varphi \in S_{X^*} \cup \{0\}$ takav da je $Y \subseteq \ker \varphi$. Onda je $\varphi(x_k) = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi

$$\frac{1}{2} \leq |\varphi_k(x_k)| = |(\varphi_k - \varphi)(x_k)| \leq \|\varphi_k - \varphi\| \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Gustoća skupa $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ u S_{X^*} povlači $\varphi = 0$, tako da je $Y = \overline{Y} = X$ prema Korolaru 2.2.2. □

Napomena 2.2.4. Obrat Korolara 2.2.3 općenito ne vrijedi. Npr. prostor ℓ^1 je separabilan, ali $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ nije (vidjeti Teorem 1.9.1 i Primjer 1.8.6).

Prisjetimo se da smo za normirane prostore X i Y dokazali da iz potpunosti od Y slijedi i potpunost od $\mathrm{B}(X, Y)$ (Propozicija 1.6.8). Sada lako možemo dokazati i obrat te tvrdnje.

Korolar 2.2.5. *Neka su X i Y normirani prostori. Ako je $\mathrm{B}(X, Y)$ Banachov prostor i $X \neq \{0\}$, onda je i Y Banachov prostor.*

Dokaz. Neka je $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Y. Prema Korolaru 2.2.1 za fiksiran $x_0 \in S_X$ postoji $\varphi \in S_{X^*}$ takav da je $\varphi(x_0) = 1$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirajmo $T_k : X \to Y$ s $T_k x := \varphi(x) y_k$. Očito je $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathrm{B}(X, Y)$, te vrijedi $\|T_k - T_l\| \leq \|\varphi\| \|y_k - y_l\| = \|y_k - y_l\|$ za sve $k, l \in \mathbb{N}$, tako da je $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev niz. Jer je $\mathrm{B}(X, Y)$ Banachov, postoji $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ takav da $\|T_k - T\| \to 0$. Onda i $\|y_k - T x_0\| = \|T_k x_0 - T x_0\| \to 0$, odnosno $y_k \to T x_0$. □

Propozicija 2.2.6. *Neka je X beskonačnodimenzionalan normiran prostor. Tada postoje nizovi $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u S_X i $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u X^* takvi da vrijedi $\varphi_k(x_j) = \delta_{kj}$ za sve $k, j \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Tražene nizove konstruiramo induktivno. Neka je $x_1 \in S_X$ proizvoljan. Prema Korolaru 2.2.1 postoji $\varphi_1 \in S_X$ takav da je $\varphi_1(x_1) = 1$. Pretpostavimo da smo za $n \in \mathbb{N}$ našli $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ i $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ tako da vrijedi

$$\varphi_k(x_j) = \delta_{kj} \qquad \forall 1 \leq k, j \leq n.$$

Jer je $\dim X \geq \aleph_0$, postoji $x \in X \setminus [\{x_1, \ldots, x_n\}]$. Neka je

$$y := x - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) x_k \in X$$

Očito je $y \neq 0$ i $\varphi_k(y) = 0$ za sve $1 \leq k \leq n$. Stavimo

$$x_{n+1} := \frac{y}{\|y\|} \in S_X.$$

Ponovnom primjenom Korolara 2.2.1 dobivamo $\varphi \in S_{X^*}$ takav da je $\varphi(x_{n+1}) = 1$. Stavimo

$$\varphi_{n+1} := \varphi - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\varphi_k \in X^*.$$

Onda je $\varphi_{n+1}(x_k) = \varphi_k(x_{n+1}) = 0$ za sve $1 \leq k \leq n$ i $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = \varphi(x_{n+1}) = 1$. □

Definicija 2.2.7. Za nizove $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ iz Propozicije 2.2.6 kažemo da su međusobno **biortogonalni**.

Sada možemo dokazati najavljenu činjenicu da je algebarska dimenzija svakog beskonačnodimenzionalnog Banachovog prostora X jednaka $\mathrm{card}(X)$ (vidjeti Napomenu 1.4.14).

Teorem 2.2.8. *Neka je X beskonačnodimenzionalan Banachov prostor. Onda je* $\dim X = \mathrm{card}(X) \geq \mathfrak{c}$.

U dokazu Teorema 2.2.8 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju koja ukratko kaže da se svaki prebrojiv skup može prikazati kao neprebrojiva unija gotovo disjunktnih skupova.

Lema 2.2.9. *Neka je S prebrojiv skup. Tada postoji injekcija $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(S)$ takva da je $S = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} f(r)$, $\mathrm{card}(f(r)) = \aleph_0$ za sve $r \in \mathbb{R}$ i $\mathrm{card}(f(r) \cap f(s)) < \aleph_0$ za sve $r \neq s$.*

Dokaz. Tvrdnju je dovoljno dokazati za skup racionalnih brojeva $S = \mathbb{Q}$. Neka je $r \in \mathbb{R}$. Jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, postoji strogo rastući niz racionalnih brojeva $(q_k(r))_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{Q}$ koji konvergira prema r. Stavimo

$$f(r) := \begin{cases} \{q_1(r), q_2(r), \ldots\} \cup \{r\}, & r \in \mathbb{Q} \\ \{q_1(r), q_2(r), \ldots\}, & r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Na taj način dolazimo do injekcije $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ takve da je $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} f(r)$ i $\mathrm{card}(f(r)) = \aleph_0$ za sve $r \in \mathbb{R}$. Ostaje argumentirati da je $\mathrm{card}(f(r) \cap f(s)) < \aleph_0$ za sve $r \neq s$. Zaista, ako je $r \neq s$ i $\varepsilon := \frac{|r-s|}{2} > 0$, onda se gotovo svi članovi nizova $(q_k(r))_{k\in\mathbb{N}}$ i $(q_k(s))_{k\in\mathbb{N}}$ redom nalaze u intervalima $\langle r-\varepsilon, r+\varepsilon\rangle$ i $\langle s-\varepsilon, s+\varepsilon\rangle$. Jer su ti intervali međusobno disjunktni, mora biti $\mathrm{card}(f(r)\cap f(s)) < \aleph_0$. □

Dokaz Teorema 2.2.8. Neka je X Banachov prostor i $\dim X \geq \aleph_0$. Najprije dokažimo da X sadrži linearno nezavisan skup kardinaliteta $\mathfrak{c}$. Prema Propoziciji 2.2.6 postoje nizovi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u S_X i $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X^* takvi da vrijedi $\varphi_k(x_j) = \delta_{kj}$ za sve $k, j \in \mathbb{N}$. Prema Lemi 2.2.9 postoji injekcija $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takva da je $\mathrm{card}(f(r)) = \aleph_0$ za sve $r \in \mathbb{R}$ i $\mathrm{card}(f(r) \cap f(s)) < \aleph_0$ za sve $r \neq s$. Za $r \in \mathbb{R}$ definiramo

$$b_r := \sum_{k\in f(r)} \frac{x_k}{2^k}.$$

Tada je b_r dobro definirani element od X. Naime, jer je $\|x_k\| = 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$, gornji red konvergira aspolutno u X, pa onda i konvergira u X jer je X potpun (Teorem 1.3.16). Tvrdimo da je

$$\mathcal{L} := \{b_r : r \in \mathbb{R}\}$$

linearno nezavisan podskup od X. To po definiciji znači da je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan. Neka je stoga $\{r_1, \ldots, r_n\}$ konačan podskup od $\mathbb{R}$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_{r_j} = 0. \tag{2.4}$$

Onda za svaki $1 \le k \le n$ postoji

$$p(k) \in f(r_k) \setminus \left(\bigcup_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k\}} f(r_j) \right).$$

Naime, ako bi za neki $1 \le k \le n$ bilo $f(r_k) \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k\}} f(r_j)$, onda bi bilo $f(r_k) \subseteq \bigcup_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k\}} f(r_j) \cap f(r_k)$, što je nemoguće, jer je $\operatorname{card}(f(r_k)) = \aleph_0$ i $\operatorname{card}(f(r_j) \cap f(r_k)) < \aleph_0$ za sve $j \neq k$. Ako za fiksirani $1 \le k \le n$ na (2.4) djelujemo s $\varphi_{p(k)}$, dobivamo

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{p(k)}(b_{x_j}) = \alpha_k \varphi_{p(k)}(b_{x_k}) = \frac{\alpha_k}{2^{p(k)}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_k = 0.$$

Dakle, $\mathcal{L}$ je linearno nezavisan skup u X, tako da je $\dim X \ge \operatorname{card}(\mathcal{L}) = \mathfrak{c}$.

Napokon, neka je $\mathcal{B}$ algebarska baza za X, tako da je $\dim X = \operatorname{card}(\mathcal{B})$. Za proizvoljan neprazan skup S označimo sa $[S]^{<\omega}$ familiju svih nepraznih konačnih podskupova od S. Ako je $\operatorname{card}(S) \ge \aleph_0$, očito je $\operatorname{card}([S]^{<\omega}) = \operatorname{card}(S)$. Prema definiciji algebarske baze postoji surjekcija s $[\mathbb{F} \times \mathcal{B}]^{<\omega}$ na X. Dakle,

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(X) &\le \operatorname{card}([\mathbb{F} \times \mathcal{B}]^{<\omega}) = \operatorname{card}(\mathbb{F} \times \mathcal{B}) = \mathfrak{c} \cdot \dim X = \max\{\mathfrak{c}, \dim X\} \\ &= \dim X, \end{aligned}$$

jer je prema dokazanom $\dim X \ge \mathfrak{c}$. Kako je trivijalno $\dim X \le \operatorname{card}(X)$, zaključujemo $\dim X = \operatorname{card}(X)$. □

2.3 Dual, bidual i refleksivnost

Definicija 2.3.1. Neka je X normiran prostor.

- **Anihilator** skupa $A \subseteq X$ definiran je kao skup

$$A^{\perp} := \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 0 \ \forall x \in A\}.$$

- **Predanihilator** skupa $B \subseteq X^*$ definiran je kao skup

$$^{\perp}B := \{x \in X : \varphi(x) = 0 \ \forall \varphi \in B\}.$$

Napomena 2.3.2. Očito je $A^{\perp}$ zatvoren potprostor od X^* i $A^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$. Analogno, $^{\perp}B$ je zatvoren potprostor od X i $^{\perp}B = {}^{\perp}\overline{[B]}$.

Propozicija 2.3.3. *Neka je X normiran prostor i $A \subseteq X$. Tada je $^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{[A]}$. Posebno, ako je A potprostor od X onda je $^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{A}$.*

Dokaz. Očito je $^{\perp}(A^{\perp})$ zatvoren potprostor od X koji sadrži A, tako da je $\overline{[A]} \subseteq {}^{\perp}(A^{\perp})$. Posebno, ako je $\overline{[A]} = X$ onda je trivijalno $^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{[A]}$. Stoga pretpostavimo da $\overline{[A]} \neq X$ i neka je $x_0 \in X \setminus \overline{[A]}$. Prema Korolaru 2.2.2 postoji $\varphi \in S_{X^*}$ takav da je $\overline{[A]} \subseteq \ker \varphi$ i $\varphi(x_0) = d(x_0, \overline{[A]}) > 0$. Tada $x_0 \notin {}^{\perp}(A^{\perp})$ jer je $\varphi \in A^{\perp}$ i $\varphi(x_0) \neq 0$, tako da $^{\perp}(A^{\perp}) \subseteq \overline{[A]}$. □

Napomena 2.3.4. Ako je $\dim X \ge \aleph_0$, općenito je za $B \subseteq X^*$, $\overline{[B]} \subsetneq ({}^{\perp}B)^{\perp}$. Npr. ako je $X = c_0$ i ako X^* identificiramo s ℓ^1 na standardan način (Teorem 1.9.5), onda je $B := \{(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1 : \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0\}$ zatvoren potprostor od X^* i $({}^{\perp}B)^{\perp} = X^*$ (provjerite za DZ).

Kada uskoro uvedemo slabu* (ili w^*) topologiju na X^* (najslabija topologija na X^* s obzirom na koju su sve evaluacije $X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x)$, $x \in X$, neprekidne), onda koristeći odgovarajuću verziju Hahn-Baachovog teorema nije teško vidjeti da vrijedi $({}^{\perp}B)^{\perp} = \overline{[B]}^{w^*}$ (w^*-zatvarač od $[B]$).

Propozicija 2.3.5. *Neka je X normiran prostor i $Y \le X$ njegov zatvoren potprostor.*

(i) Preslikavanje $S : X^*/Y^\perp \to Y^*$ definirano s

$$S(\varphi + Y^\perp) := \varphi|_Y, \qquad \varphi \in X^*.$$

je izometrički izomorfizam s $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

(ii) Preslikavanje $T : (X/Y)^* \to Y^\perp$ definirano s

$$T(\widetilde{\varphi}) := \widetilde{\varphi} \circ Q_Y, \qquad \widetilde{\varphi} \in (X/Y)^*,$$

gdje je $Q_Y \in \mathrm{B}(X, X/Y)$ kvocijentni operator, je izometrički izomorfizam s $(X/Y)^*$ na $Y^\perp$.

Dokaz. (i). Najprije primijetimo da je preslikavanje S dobro definirano. Zaista, neka su $\varphi, \psi \in X^*$ takvi da je $\varphi + Y^\perp = \psi + Y^\perp$, odnosno $\varphi - \psi \in Y^\perp$. Onda je $(\varphi - \psi)(y) = 0$ za sve $y \in Y$, tako da je $\varphi|_Y = \psi|_Y$. Linearnost i injektivnost od S su očite. Nadalje, ako je $\varphi \in Y^*$ i $\hat{\varphi} \in X^*$ njegovo Hahn-Banachovo proširenje, onda je $S(\hat{\varphi} + Y^\perp) = \varphi$, tako da je S surjektivno, te je inverz $S^{-1} : Y^* \to X^*/Y^\perp$ dan s $S^{-1}(\varphi) = \hat{\varphi} + Y^\perp$.

Ostaje dokazati da je S izometrija. Za $\varphi \in X^*$ i proizvoljan $\psi \in Y^\perp$ je trivijalno $(\varphi + \psi)|_Y = \varphi|_Y$ tako da je

$$\|\varphi|_Y\| = \sup_{y \in S_Y} |(\varphi + \psi)(y)| \leq \sup_{x \in S_X} |(\varphi + \psi)(x)| = \|\varphi + \psi\|.$$

Odavde onda slijedi

$$\|\varphi|_Y\| \leq \inf_{\psi \in Y^\perp} \|\varphi + \psi\| = \|\varphi + Y^\perp\|_{X^*/Y^\perp}.$$

Također, jer je $\varphi + Y^\perp = \widehat{\varphi|_Y} + Y^\perp$, dobivamo i

$$\|\varphi + Y^\perp\|_{X^*/Y^\perp} = \|\widehat{\varphi|_Y} + Y^\perp\|_{X^*/Y^\perp} \leq \|\widehat{\varphi|_Y}\| = \|\varphi|_Y\|,$$

tako da je $\|S(\varphi + Y^\perp)\| = \|\varphi|_Y\| = \|\varphi + Y^\perp\|_{X^*/Y^\perp}$.

(ii). Ako je $\varphi \in Y^\perp$, tako da je $Y \subseteq \ker \varphi$, onda prema Propoziciji 1.7.1 postoji jedinstven $\widetilde{\varphi} \in (X/Y)^*$ takav da je $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ Q_Y$ i $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Drugim riječima, to točno znači da je preslikavanje T izometrički izomorfizam s $(X/Y)^*$ na $Y^\perp$. $\square$

Za normiran prostor X definiramo njegov **(neprekidni) bidual** s $X^{**} := (X^*)^*$. Za $x \in X$ definiramo funkciju $\hat{x} : X^* \to \mathbb{F}$ s

$$\hat{x}(\varphi) := \varphi(x), \quad \varphi \in X^*.$$

Očito je $\hat{x}$ linearni funkcional na X^*. Nadalje, iz definicije operatorske norme i Korolara 2.2.1 dobivamo

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\varphi \in S_{X^*}} |\hat{x}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in S_{X^*}} |\varphi(x)| = \|x\|.$$

Također, očito je $\widehat{\lambda x + \mu y} = \lambda\hat{x} + \mu\hat{y}$ za sve $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Drugim riječima, **kanonsko preslikavanje**

$$J_X : X \to X^{**}, \qquad J_X x := \hat{x}$$

je linearna izometrija.

Definicija 2.3.6. Upotpunjenje normiranog prostora X je uređeni par (Y, ϕ), gdje je Y Banachov prostor i $\phi : X \to Y$ linearna izometrija čija je slika gusta u Y.

Teorem 2.3.7. *Svaki normiran prostor X ima upotpunjenje, te je svako upotpunjenje od X jedinstveno do na izometrički izomorfizam.*

Dokaz. Egzistencija. Neka je $\phi = J_X$ i Y zatvarač slike $\operatorname{ran} J_X$ u X^{**}. Jer je X^{**} Banachov isto vrijedi i za njegov zatvoren potprostor Y, tako da je očito (Y, ϕ) upotpunjenje od X.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da su (Y_1, ϕ_1) i (Y_2, ϕ_2) dva upotpunjenja od X. Neka je $\psi : \operatorname{ran} \phi_1 \to Y_2$ preslikavanje definirano s $\psi := \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$. Očito je ψ linearna izometrija (kao kompozcija linearnih izometrija) i $\operatorname{ran} \psi = \operatorname{ran} \phi_2$. Prema Propoziciji 1.6.8, ψ se može na jedinstven način proširiti do ograničenog linearnog operatora $\overline{\psi} \in \mathrm{B}(Y_1, Y_2)$. Operator $\overline{\psi}$ je izometrija, jer je njegova restrikcija na gust potprostor $\operatorname{ran} \phi_1$ od Y_1 izometrija. Nadalje, iz $\operatorname{ran} \phi_2 \subseteq \operatorname{ran} \overline{\psi} \subseteq Y_2$, gustoće od $\operatorname{ran} \phi_2$ u Y_2 i činjenice da izometrije definirane na Banachovim prostoru imaju zatvorenu sliku (Napomena 1.6.12), slijedi da je $\overline{\psi}$ surjekcija, pa stoga izometrički izomorfizam s Y_1 na Y_2. $\square$

Primjer 2.3.8. Prostor c_{00} je očito gust u svakom ℓ^p za $1 \leq p < \infty$, tako da je ℓ^p upotpunjenje od $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$. Analogno, c_0 je upotpunjenje od $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.

Primjer 2.3.9. Koristeći Luzinov[3] teorem može se dokazati da je za $1 \leq p < \infty$, $C([a, b])$ gust potprostor u $L^p([a, b], \mathcal{B}, \lambda)$, gdje je $\mathcal{B}$ Borelova σ-algebra i λ Lebesgueova mjera na $[a, b]$ (vidjeti npr. [15]). Dakle, $L^p([a, b], \mathcal{B}, \lambda)$ je upotpunjenje od $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$.

Propozicija 2.3.10. *Neka su X i Y normirani prostori. Za $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ definiramo preslikavanje $T^* : Y^* \to X^*$ s*

$$T^*(\varphi) := \varphi \circ T, \qquad \varphi \in Y^*.$$

(i) $T^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$ *i* $\|T^*\| = \|T\|$.

(ii) $\ker T = {}^\perp(\operatorname{ran} T^*)$ *i* $\ker(T^*) = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

(iii) Dijagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle J_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J_Y} \\ X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{**} \end{array}$$

komutira, tj. vrijedi $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$, gdje je $T^{**} := (T^*)^* \in \mathrm{B}(X^{**}, Y^{**})$.

Dokaz. (i). Očito je $T^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$. Zbog submultiplikativnosti operatorske norme je $\|T^*(\varphi)\| = \|\varphi \circ T\| \leq \|T\|\|\varphi\|$ za sve $\varphi \in Y^*$, tako da je $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Obratno, za $x \in S_X$ prema Korolaru 2.2.1 postoji $\varphi \in S_{Y^*}$ takav da je $\varphi(Tx) = \|Tx\|$. Onda je

$$\|Tx\| = \varphi(Tx) = [T^*(\varphi)](x) \leq \|T^*\|\|\varphi\|\|x\| = \|T^*\|,$$

tako da je $\|T\| \leq \|T^*\|$. Dakle, $\|T^*\| = \|T\|$.

(ii). Prema Korolaru 2.2.1, za $x \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned} x \in \ker T \quad &\iff \quad \varphi(Tx) = 0 \ \ \forall \varphi \in X^* \quad \iff \quad [T^*(\varphi)](x) = 0 \ \ \forall \varphi \in X^* \\ &\iff \quad x \in {}^\perp(\operatorname{ran} T^*). \end{aligned}$$

Analogno, za $\psi \in Y^*$ vrijedi

$$\begin{aligned} \psi \in \ker(T^*) \quad &\iff \quad [T^*(\psi)](x) = 0 \ \ \forall x \in X \quad \iff \quad \psi(Tx) = 0 \ \ \forall x \in X \\ &\iff \quad \psi \in (\operatorname{ran} T)^\perp. \end{aligned}$$

(iii). Za $x \in X$ i $\varphi \in Y^*$ imamo

$$\begin{aligned} [T^{**}(J_X x)](\varphi) &= [T^{**}(\hat{x})](\varphi) = (\hat{x} \circ T^*)(\varphi) = \hat{x}(\varphi \circ T) = \varphi(Tx) = \widehat{Tx}(\varphi) \\ &= [J_Y(Tx)](\varphi). \end{aligned}$$

$\square$

[3]Nikolai Luzin (1883.–1950.), sovjetski i ruski matematičar

Definicija 2.3.11. Operator T^* iz Propozicije 2.3.10 se zove **dualni operator** od T.

Korolar 2.3.12. *Neka su X i Y normirani prostori. Preslikavanje $T \mapsto T^*$ je linearna izometrija s $B(X,Y)$ u $B(Y^*, X^*)$.*

Dokaz. Za $S, T \in \mathrm{B}(X,Y)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ očito vrijedi $(\lambda S + \mu T)^* = \lambda S^* + \mu T^*$. Preostaje primijeniti Propoziciju 2.3.10. □

Napomena 2.3.13. Primijetimo da pridruživanje $X \rightsquigarrow X^*$, $T \rightsquigarrow T^*$ definira kontravarijantni funktor s kategorije normiranih prostora u kategoriju Banachovih prostora (s ograničenim linearnim operatorima kao morfizmima), tj. vrijedi $(I_X)^* = I_{X^*}$ i $(ST)^* = T^*S^*$ za sve $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ i $S \in B(Y,Z)$ (gdje su X, Y i Z normirani prostori).

Korolar 2.3.14. *Neka su X i Y normirani prostori. Ako je $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ (izometrički) izomorfizam s X na Y, onda je i T^* (izometrički) izomorfizam s Y^* na X^*, te vrijedi $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Dokaz. Iz $T^{-1}T = I_X$, $TT^{-1} = I_Y$ i Napomene 2.3.13 slijedi $T^*(T^{-1})^* = I_{X^*}$ i $(T^{-1})^*T^* = I_{Y^*}$. Dakle, operator T^* je invertibilan i $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Posebno, jer je T izomorfizam, T^{-1} je ograničen, tako da je onda i $(T^{-1})^*$ ograničen, odnosno T^* je izomorfizam.

Ako je T pritom izometrija, onda je $T(S_X) = S_Y$, tako da za sve $\psi \in Y^*$ vrijedi

$$\|T^*(\psi)\| = \sup_{x \in S_X} |[T^*(\psi)](x)| = \sup_{x \in S_X} |\psi(Tx)| = \sup_{y \in S_Y} |\psi(y)| = \|\psi\|,$$

što pokazuje izometričnost od T^*. □

Napomena 2.3.15. Pretpostavimo da su prostori X i Y konačnodimenzionalni, redom s uređenim bazama $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ i $(f) = (f_1, \dots, f_m)$, te neka su $(e^*) = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ i $(f^*) = (f_1^*, \dots, f_m^*)$ pripadne dualne baze za X^* i Y^* (tj. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ za sve $1 \le i, j \le n$ i $f_k^*(f_l) = \delta_{kl}$ za sve $1 \le k, l \le m$). Za $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ neka su $T(f,e)$ i $T^*(e^*, f^*)$ matrični prikazi od T i T^* u parovima pripadnih baza. Tada je $T^*(e^*, f^*) = T(f,e)^t$ (tj. te matrice su međusobno transponirane). Naime, neka je $[\alpha_{ij}] = T(f,e) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ i $[\mu_{ij}] = T^*(e^*, f^*) \in M_{n,m}(\mathbb{F})$. Onda je $\mu_{ij} = [T^*(f_j^*)]e_i = f_j^*(Te_i) = \alpha_{ji}$ za sve $1 \le i \le n$ i $1 \le j \le m$.

Koristeći tu jednostavnu opservaciju, na eleganatan način možemo dokazati dobro poznatu činjenicu da je rang matrice po retcima jednak rangu matrice po stupcima. Naime, dovoljno je dokazati da operatori T i T^* imaju isti rang. Zaista, prema Propozicijama 2.3.10 i 2.3.5 je

$$d(T^*) = \dim \ker(T^*) = \dim(\operatorname{ran} T)^\perp = \dim(Y/\operatorname{ran} T) = \dim Y - \dim(\operatorname{ran} T) = m - r(T).$$

Jer je $\dim Y^* = \dim Y = m$, iz teorema o rangu i defektu slijedi $r(T^*) = m - d(T^*) = r(T)$.

* * *

Definicija 2.3.16. Za normiran prostor X kažemo da je **refleksivan** ako je kanonsko preslikavanje $J_X : X \to X^{**}$ surjektivno, odnosno izometrički izomorfizam s X na X^{**}.

Napomena 2.3.17. (a) Primijetimo da je normiran prostor X Banachov ako i samo ako je $J_X(X)$ zatvoren potprostor od X^{**} (vidjeti Napomenu 1.6.12 (a)).

(b) Kako je X^{**} uvijek Banachov prostor, svaki refleksivan normiran prostor je nužno Banachov.

(c) Svaki konačnodimenzionalni normiran prostor X je refleksivan (jer je u tom slučaju $\dim X^{**} = \dim X$, pa je prema teoremu o rangu i defektu J_X nužno surjekcija).

(d) Ako su X i Y izomorfni Banachovi prostori, tada je X refleksivan ako i samo ako je Y refleksivan. Zaista, pretpostavimo da je X refleksivan i neka je $T : X \to Y$ izomorfizam. Onda je prema Korolaru 2.3.14 T^{**} izomorfizam s X^{**} na Y^{**}, tako da je prema Propoziciji 2.3.10, $J_Y = T^{**} \circ J_X \circ T^{-1}$. Posebno, J_Y je surjekcija kao kompozicija surjekcija.

(e) Moguće je da su X i X^{**} izometrički izomorfni, ali da X nije refleksivan. Osnovni primjer takvog prostora je tzv. **Jamesov**[4] **prostor** $\mathcal{J}$ (npr. vidjeti [25]).

Napomena 2.3.18. Kada baratamo s višim dualima normiranog prostora X, radi preglednosti notacije elemente od X, X^*, X^{**}, itd. ćemo redom označavati s x, x^*, x^{**}, itd. dok ćemo djelovanja $x^*(x)$, $x^{**}(x^*)$, itd. redom označavati s $\langle x, x^*\rangle$, $\langle x^*, x^{**}\rangle$, itd. Tako je npr. u toj notaciji

$$\langle x^*, J_X x\rangle = \langle x, x^*\rangle, \quad x \in X, x^* \in X^*,$$

dok je za $T \in \mathrm{B}(X,Y)$

$$\langle Tx, y^*\rangle = \langle x, T^*y^*\rangle, \quad x \in X, y^* \in Y^*.$$

Nadalje, za $x^{**} \in X^{**}$ vrijedi

$$x^{**} \in \operatorname{ran} J_X \quad \iff \quad \exists x \in X \text{ takav da } \langle x^*, x^{**}\rangle = \langle x, x^*\rangle \;\; \forall x^* \in X^*.$$

Propozicija 2.3.19. *Neka je Y potprostor normiranog prostora X. Tada postoji izometrički izomorfizam $R : Y^{\perp\perp} \to Y^{**}$ takav da vrijedi $(Ry^{\perp\perp})(x^*|_Y) = y^{\perp\perp}(x^*)$ za sve $y^{\perp\perp} \in Y^{\perp\perp}$ i $x^* \in X^*$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 2.3.5 (ii), primijenjenoj na par $(X^*, Y^\perp)$, postoji izometrički izomorfizam $V : Y^{\perp\perp} \to (X^*/Y^\perp)^*$ takav da vrijedi

$$\langle x^* + Y^\perp, Vy^{\perp\perp}\rangle = \langle x^*, y^{\perp\perp}\rangle$$

za sve $y^{\perp\perp} \in Y^{\perp\perp}$ i $x^* \in X^*$. Nadalje, prema Propoziciji 2.3.5 (i) postoji izometrički izomorfizam $S : X^*/Y^\perp \to Y^*$ takav da vrijedi

$$\langle y, S(x^* + Y^\perp)\rangle = \langle y, x^*\rangle$$

za sve $x^* \in X^*$ i $y \in Y$. Onda je prema Korolaru 2.3.14 i dualni operator $S^* : Y^{**} \to (X^*/Y^\perp)^*$ izometrički izomorfizam. Napokon, traženi izometrički izomorfizam $R : Y^{\perp\perp} \to Y^{**}$ je dan s $R := (S^*)^{-1}V$. Zaista, ako je $y^{\perp\perp} \in Y^{\perp\perp}$ i $x^* \in X^*$ onda je

$$\begin{aligned}\langle x^*|_Y, Ry^{\perp\perp}\rangle &= \langle S(x^* + Y^\perp), Ry^{\perp\perp}\rangle = \langle x^* + Y^\perp, S^*[(S^*)^{-1}Vy^{\perp\perp}]\rangle = \langle x^* + Y^\perp, Vy^{\perp\perp}\rangle \\ &= \langle x^*, y^{\perp\perp}\rangle,\end{aligned}$$

kao što je trebalo dokazati. □

Lema 2.3.20. *Potprostor Y normiranog prostora X je refleksivan ako i samo ako vrijedi $J_X(Y) = Y^{\perp\perp}$.*

Dokaz. Identificirajmo Y^* i Y^{**} redom s $X^*/Y^\perp$ i $Y^{\perp\perp}$ preko izometričkih izomorfizama S i R iz Propozicija 2.3.5 i 2.3.19.

Najprije pretpostavimo da je Y refleksivan. Neka je $y^{\perp\perp}$ element iz $Y^{\perp\perp}$ i $y^{**} = Ry^{\perp\perp}$ pripadni element iz Y^{**}. Onda postoji $y \in Y$ takav da je $J_Y y = y^{**}$. Za $x^* \in X^*$ slijedi

$$\langle x^*, y^{\perp\perp}\rangle = \langle x^* + Y^\perp, y^{**}\rangle = \langle y, x^* + Y^\perp\rangle = \langle y, x^*\rangle,$$

tako da je $J_X y = y^{\perp\perp}$. To pokazuje $Y^{\perp\perp} \subseteq J_X(Y)$. Obratno, ako je $y \in Y$ i $y^\perp \in Y^\perp$, onda je trivijalno $\langle y^\perp, J_X y\rangle = \langle y, y^\perp\rangle = 0$, tako da je $J_X(Y) \subseteq Y^{\perp\perp}$. Dakle, $J_X(Y) = Y^{\perp\perp}$.

Sada pretpostavimo da je $J_X(Y) = Y^{\perp\perp}$. Neka je y^{**} element od Y^{**} i $y^{\perp\perp}$ pripadni element od $Y^{\perp\perp}$. Prema pretpostavci postoji $y \in Y$ takav da je $J_X y = y^{\perp\perp}$. Onda je za sve $x^* + Y^\perp$ (kao elemente od Y^*),

$$\langle x^* + Y^\perp, y^{**}\rangle = \langle x^*, y^{\perp\perp}\rangle = \langle y, x^*\rangle = \langle y, x^* + Y^\perp\rangle,$$

tako da je $y^{**} = J_X y$. Dakle, Y je refleksivan. □

Propozicija 2.3.21. *Svaki zatvoren potprostor Y refleksivnog Banachovog prostora X je refleksivan.*

[4] Robert C. James (1918.–2004.), američki matematičar

Dokaz. Za $x \in X$ je $x \in {}^\perp(Y^\perp)$ ako i samo ako je $\langle y^\perp, J_X x\rangle = \langle x, y^\perp\rangle = 0$ za sve $y^\perp \in Y^\perp$, odnosno ako i samo ako je $J_X x \in Y^{\perp\perp}$. Jer je X refleksivan, za svaki $y^{\perp\perp} \in Y^{\perp\perp}$ postoji $x \in X$ takav da je $y^{\perp\perp} = J_X x$, tako da je $J_X({}^\perp(Y^\perp)) = Y^{\perp\perp}$. Prema Propoziciji 2.3.3 je ${}^\perp(Y^\perp) = Y$ pa refleksivnost od Y slijedi iz Leme 2.3.20. □

Propozicija 2.3.22. *Banachov prostor X je refleksivan ako i samo ako je njegov dual X^* refleksivan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X refleksivan. Neka je $x^{***} \in X^{***}$. Neka je $x^{**} \in X^{**}$ i $x \in X$ takav da je $J_X x = x^{**}$. Onda je $x^{***}J_X \in X^*$ i

$$\langle x^{**}, x^{***}\rangle = \langle J_X x, x^{***}\rangle = \langle x, x^{***}J_X\rangle = \langle x^{***}J_X, J_X x\rangle = \langle x^{***}J_X, x^{**}\rangle,$$

odnosno $x^{***} = J_{X^*}(x^{***}J_X)$. Dakle, $J_{X^*}(X^*) = X^{***}$, odnosno X^* je refleksivan.

Obratno, pretpostavimo da je X^* refleksivan. Tada je prema dokazanom X^{**} refleksivan, pa je prema Propoziciji 2.3.21 njegov zatvoren potprostor $\operatorname{ran} J_X$ refleksivan. Jer je X izometrički izomorfan s $\operatorname{ran} J_X$, slijedi da je X također refleksivan (Napomena 2.3.17). □

Korolar 2.3.23. *Za Banachove prostore refleksivnost je svojstvo triju prostora.*

Dokaz. Neka je X Banachov prostor i $Y \leq X$ njegov zatvoren potprostor.

Najprije pretpostavimo da je X refleksivan. Refleksivnost od Y slijedi iz Propozicije 2.3.21. Dokažimo refleksivnost od X/Y. Prema Propozicijama 2.3.21 i 2.3.22 $Y^\perp$ je refleksivan kao zatvoren potprostor refleksivnog prostora X^*. Jer je $(X/Y)^* \cong Y^\perp$ (Propozicija 2.3.5), prostor $(X/Y)^*$ je refleksivan. Onda je i X/Y refleksivan kao Banachov prostor s refleksivnim dualom (Propozicija 2.3.22).

Sada pretpostavimo da su Y i X/Y refleksivni prostori. Neka je $x^{**} \in X^{**}$. Označimo s T izometrički izomorfizam s $(X/Y)^*$ na $Y^\perp$ iz Propozicije 2.3.5. Tada je $x^{**}T \in (X/Y)^{**}$, pa iz refleksivnosti od X/Y dobivamo $x \in X$ takav da je $J_{X/Y}(x+Y) = x^{**}T$. Onda za proizvoljan $y^\perp \in Y^\perp$ imamo

$$\langle y^\perp, x^{**}\rangle = \langle T^{-1}y^\perp, x^{**}T\rangle = \langle T^{-1}y^\perp, J_{X/Y}(x+Y)\rangle = \langle x+Y, T^{-1}y^\perp\rangle = \langle x, y^\perp\rangle = \langle y^\perp, J_X x\rangle.$$

Odavde zaključujemo da je $x^{**} - J_X x \in Y^{\perp\perp}$. Prema Lemi 2.3.20 postoji $y \in Y$ takav da je $J_X y = x^{**} - J_X x$, tako da je $x^{**} = J_X(y+x) \in \operatorname{ran} J_X$. Dakle, $\operatorname{ran} J_X = X^{**}$, odnosno X je refleksivan. □

Refleksivni prostori dijele neka dobra svojstva s prostorima koji su izomorfni Hilbertovim prostorima. Kao ilustraciju navodimo sljedeći rezultat.

Propozicija 2.3.24. *Neka je X refleksivan Banachov prostor.*

(i) Operatorska norma svakog ograničenog linearnog funkcionala $x^* \in X^*$ se postiže na S_X, tj. postoji $x \in S_X$ takav da je $|x^*(x)| = \|x^*\|$.

(ii) Ako je Y potprostor od X koji nije gust u X, onda postoji $x \in S_X$ takav da je $d(x, Y) = 1$.

Dokaz. (i). Prema Korolaru 2.2.1 za $x^* \in X^*$ postoji $x^{**} \in S_{X^{**}}$ takav da je $\|x^*\| = \langle x^*, x^{**}\rangle$. Jer je $S_{X^{**}} = J_X(S_X)$, postoji $x \in S_X$ takav da je $x^{**} = J_X x$. Stoga je $\|x^*\| = \langle x^*, J_X x\rangle| = |x^*(x)|$.

(ii). Prema Korolaru 2.2.2 postoji $x^* \in S_{X^*}$ takav da je $Y \subseteq \ker x^*$, a prema (i) postoji $x \in S_X$ takav da je $|x^*(x)| = \|x^*\| = 1$. Koristeći Propoziciju 1.7.4 dobivamo

$$1 = |x^*(x)| = d(x, \ker x^*) \leq d(x, Y) \leq \|x\| = 1.$$

□

Napomena 2.3.25. Primijetimo da je svojstvo (ii) Propozicije 2.3.24 pojačanje Rieszove leme koje smo već dokazali da vrijedi za konačnodimenzionalne normirane prostore (Napomena 1.5.15).

Napomena 2.3.26. Fundamentalni **Jamesov teorem** (vidjeti [31]) kaže da svojstvo (i) Propozicije 2.3.24 zapravo karkterizira refleksivne prostore, Dakle, Banachov prostor X je refleksivan ako i samo ako svi $x \in X^*$ postižu operatorsku normu na S_X.

Primjer 2.3.27. Banachov prostor ℓ^p je refleksivan za sve $1 < p < \infty$. Zaista, ako je q konjugirani eksponent od p, označimo s $\Phi_p : \ell^p \to (\ell^q)^*$ i $\Phi_q : \ell^q \to (\ell^p)^*$ izometričke izomorfizme iz Teorema 1.9.1. Ako je $x^{**} \in (\ell^p)^{**}$, onda je $x^{**} \circ \Phi_q \in (\ell^q)^*$ pa postoji jedinstven $x = (\xi_k)_k \in \ell^p$ takav da je $x^{**} \circ \Phi_q = \Phi_p(x)$. Stoga, ako je $x^* \in (\ell^p)^*$ i $y = (\eta_k)_k \in \ell^q$ jedinstven takav da je $\Phi_q(y) = x^*$, onda je

$$\langle x^*, x^{**} \rangle = \langle \Phi_q(y), x^{**} \rangle = \langle y, \Phi_p(x) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k = \langle x, \Phi_q(y) \rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

Dakle, $x^{**} = J_{\ell^p} x$, tako da je J_{ℓ^p} surjekcija.

Primjer 2.3.28. Općenitije, ako je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere, tada je prostor $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ refleksivan za sve $1 < p < \infty$. Dokaz je suštinski isti kao za Primjer 2.3.27, pri čemu koristimo Napomenu 1.9.4 (za detalje vidjeti npr. [15]).

Primjer 2.3.29. Banachovi prostori c_0, c, ℓ^1 i ℓ^∞ nisu refleksivni. Naime, jer je $c_0^* \cong c^* \cong \ell^1$ i $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ (vidjeti Teoreme 1.9.1 i 1.9.5), prema Propoziciji 2.3.22 dovoljno je dokazati da jedan od tih prostora nije refleksivan. Npr. c_0 nije refleksivan jer je separabilan, dok $c_0^{**} \cong \ell^\infty$ nije separabilan (Primjer 1.8.6). U to smo se mogli uvjeriti i primjenom Propozicije 2.3.24. Naime, definirajmo $x^* : c_0 \to \mathbb{F}$ s

$$x^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}.$$

Lako se provjeri da je $x^* \in c_0^*$, $\|x^*\| = 1$ i $|x^*(x)| < 1$ za sve $x \in S_{c_0}$.

Primjer 2.3.30. Banachov prostor $C([a, b])$ nije refleksivan. Zaista, jer je $[a, b]$ homeomorfan s $[0, 1]$ (afina transformacija), prema Primjeru 1.6.14 prostori $C([a, b])$ i $C([0, 1])$ su izometrički izomorfni. Stoga je dovoljno dokazati da $C([0, 1])$ nije refleksivan. Pretpostavimo suprotno. Onda bi prema Propoziciji 2.3.24 i njegov zatvoren potpostor $X := \{f \in C([0, 1]) : f(1) = 0\}$ bio refleksivan. Ako je $Y := \{f \in X : \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$, onda je Y zatvoren potprostor od X i prema Primjeru 1.5.16 vrijedi $d(f, Y) < 1$ za sve $f \in S_X$. To je kontradikcija s Propozicijom 2.3.24.

Štoviše, funkcijski prostori $C(K)$ su refleksivni samo u trivijalnom slučaju. Naime, imamo sljedeću karakterizaciju:

Propozicija 2.3.31. *Neka je K kompaktan metrički prostor. Tada je Banachov prostor $C(K)$ refleksivan ako i samo ako je K konačan.*

Napomena 2.3.32. Ako su A i B proizvoljna dva neprazna međusobno disjunktna zatvorena skupa u metričkom prostoru X, tada postoji neprekidna funkcija $f : X \to [-1, 1]$ takva da je $f|_A = 1$ i $f|_B = -1$. Naime, možemo definirati

$$f(x) := \frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}, \quad x \in X$$

(vidjeti Propoziciju 1.2.36).

Dokaz Propozicije 2.3.31. Pretpostavimo da je $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ konačan metrički prostor. Onda je K diskretan, tako da su sve funkcije $f : K \to \mathbb{F}$ trivijalno neprekidne. Za svaki $1 \le i \le n$ neka je $e_i : K \to \mathbb{F}$ funkcija definirana s $e_i(x_j) := \delta_{ij}$, $1 \le j \le n$. Očito je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ linearno nezavisan skup u $C(K)$. Nadalje, jer je za sve $g \in C(K)$ očito $g = \sum_{i=1}^n g(x_i) e_i$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza za $C(K)$. Dakle, $\dim C(K) = \operatorname{card}(K) = n < \aleph_0$, tako da je $C(K)$ refleksivan prema Napomeni 2.3.17.

Sada pretpostavimo da je K beskonačan. Jer je K kompaktan, prema Teoremu 1.5.12 K ima barem jedno gomilište $x_0 \in K$. Neka je $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ injektivan niz u $K \setminus \{x_0\}$ koji konvergira prema x_0. Tada su za sve $k \in \mathbb{N}$ skupovi $A_k := \{x_1, \ldots, x_k\}$ i $B_k := \{x_j : j > k\} \cup \{x_0\}$ zatvoreni, neprazni i disjunktni u K pa prema Napomeni 2.3.32 postoji neprekidna funkcija $f_k : K \to [-1, 1]$ takva da je $f_k|_{A_k} = 1$ i $f_k|_{B_k} = -1$.

Definirajmo funkciju $\varphi : C(K) \to \mathbb{F}$ s

$$\varphi(f) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x_k)}{2^k} - f(x_0), \quad f \in C(K).$$

Očito je φ dobro definirani linearni funkcional na $C(K)$. Nadalje, za $f \in S_{C(K)}$ je

$$|\varphi(f)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(x_k)|}{2^k} + |f(x_0)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + 1 = 2, \tag{2.5}$$

tako da je $\varphi \in C(K)^*$ i $\|\varphi\| \leq 2$. Ako je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $S_{C(K)}$ iz prethodnog paragrafa, onda je

$$\varphi(f_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^k} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} + 1 = 2 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\|\varphi\| = 2$. Tvrdimo da φ ne postiže normu na $S_{C(K)}$. Zaista, ako bi postojala $f \in S_{C(K)}$ takva da je $|\varphi(f)| = 2$ onda bi iz (2.5) slijedilo $|f(x_k)| = 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i $|f(x_0)| = 1$. Zamjenom f s $-\overline{f(x_0)}f$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f(x_0) = -1$. Za $\alpha := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x_k)}{2^k} \in \mathbb{F}$ imamo $|\alpha| \leq 1$ i $|\alpha+1| = 2$, tako da je $\alpha = 1$. Onda je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x_k)}{2^k} = 1$, pa iz $|\operatorname{Re}(f(x_k))| \leq |f(x_k)| = 1$ slijedi $f(x_k) = \operatorname{Re} f(x_k) = 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Jer $x_k \to x_0$, onda je zbog neprekidnosti od f nužno $f(x_0) = 1$, što je kontradikcija. Stoga, prema Propoziciji 2.3.24, $C(K)$ nije refleksivan. $\square$

Poglavlje 3

Fundamentalni teoremi teorije Banachovih prostora

3.1 Princip uniformne ograničenosti

Lema 3.1.1. *Neka su X i Y normirani prostori i $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{B}(X, Y)$. Ako postoji podskup $D \subseteq X$ druge kategorije takav da je $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$ za sve $x \in D$, onda je skup $\mathcal{F}$ ograničen, tj. $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$.*

Napomena 3.1.2. Za skup $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{B}(X, Y)$ koji je ograničen u operatorskoj normi također kažemo da je **uniformno ograničen**.

Dokaz Leme 3.1.1. Za $T \in \mathcal{F}$ i $k \in \mathbb{N}$ neka je $C_k(T) := \{x \in X : \|Tx\| \le k\}$. Očito su svi skupovi $C_k(T)$ zatvoreni u X. Stoga je i skup

$$C_k := \bigcap_{T\in\mathcal{F}} C_k(T) = \{x \in X : \|Tx\| \le k \quad \forall T \in \mathcal{F}\}$$

zatvoren u X, za sve $k \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci je

$$D \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \left\{x \in X : \sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\right\}.$$

Jer je D druge kategorije u X, barem jedan od skupova C_k mora biti druge kategorije u X. Posebno, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da skup $C_k = \overline{C_k}$ ima neprazan interior. Dakle, postoje $x_0 \in C_k$ i $r > 0$ takvi da je $x_0 + rB_X \subseteq C_k$, odnosno

$$\|Tx_0 + rTx\| = \|T(x_0 + rx)\| \le k \qquad \text{za sve } T \in \mathcal{F} \text{ i } x \in B_X.$$

Onda je za proizvoljan $T \in \mathcal{F}$ i $x \in B_X$,

$$\|Tx\| = \frac{1}{r}\|rTx\| \le \frac{1}{r}\left(\|Tx_0 + rTx\| + \|Tx_0\|\right) \le \frac{2k}{r} \quad \Longrightarrow \quad \|T\| \le \frac{2k}{r}$$

tako da je $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| \le \frac{2k}{r}$. □

Definicija 3.1.3. Neka je X normiran prostor.

- Za $A \subseteq X$ kažemo da je **slabo ograničen**, ako vrijedi $\sup_{x\in A} |x^*(x)| < \infty$ za sve $x^* \in X^*$.
- Za $B \subseteq X^*$ kažemo da je **slabo*-ograničen**, ako vrijedi $\sup_{x^*\in B} |x^*(x)| < \infty$ za sve $x \in X$.

Napomena 3.1.4. Neka je X normiran prostor.

(a) Ako je $A \subseteq X$ ograničen (s obzirom na normu), onda je A i slabo ograničen. Naime, ako je $\sup_{x \in A} \|x\| \leq M$ za neki $M \geq 0$, onda je $\sup_{x \in A} |x^*(x)| \leq M\|x^*\|$ za sve $x^* \in X^*$. Nadalje, $A \subseteq X$ je slabo ograničen ako i samo ako je $J_X(A) \subseteq X^{**}$ slabo $*$-ograničen, gdje je $J_X : X \to X^{**}$ kanonsko preslikavanje. Naime, po definiciji od J_X je $\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, J_X x \rangle$ za sve $x \in X$ i $x^* \in X^*$, tako da je $\sup_{x \in A} |x^*(x)| = \sup_{x^{**} \in J_X(A)} |\langle x^*, x^{**} \rangle|$.

(b) Analogno, ako je $B \subseteq X^*$ ograničen (s obzirom na operatorsku normu), onda je B slabo ograničen. Nadalje, ako je $B \subseteq X^*$ slabo ograničen, onda je B slabo*-ograničen. Naime, da je $B \subseteq X^*$ slabo ograničen znači da je $\sup_{x^* \in B} |\langle x^*, x^{**} \rangle| < \infty$ za sve $x^{**} \in X^{**}$. Onda posebno za $x^{**} \in X^{**}$ oblika $x^{**} = J_X x$, $x \in X$, imamo $\sup_{x^* \in B} |x^*(x)| = \sup_{x^* \in B} |\langle x^*, J_X x \rangle| < \infty$.

Teorem 3.1.5. *Neka je X normiran prostor. Za $A \subseteq X$ je ekvivalentno:*

$$A \text{ je ograničen} \iff A \text{ je slabo ograničen.}$$

Dokaz. Prema Napomeni 3.1.4 dovoljno je dokazati da slaba ograničenost od A povlači ograničenost od A. Prema Napomeni 3.1.4 slaba ograničenost od A je ekvivalentna slabom*-ograničenosti od $J_X(A)$ u X^{**}. Dakle, vrijedi $\sup_{x^{**} \in J_X(A)} |\langle x^*, x^{**} \rangle| < \infty$ za sve $x^* \in X^*$. Jer je X^* uvijek Banachov prostor (Propozicija 1.6.8), prema Baireovom teoremu o kategoriji (Teorem 1.4.7) X^* je Baireov prostor, stoga druge kategorije. Iz Leme 3.1.1 primijenjene na $\mathcal{F} = J_X(A)$ i $D = X^*$ slijedi da je $\sup_{x \in A} \|J_X x\| < \infty$. Jer je J_X izometrija, to je ekvivalentno sa $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$. □

Teorem 3.1.6. *Neka je X Banachov prostor. Za $B \subseteq X^*$ je ekvivalentno:*

$$B \text{ je uniformno ograničen} \iff B \text{ je slabo ograničen} \iff B \text{ je slabo*-ograničen.}$$

Dokaz. Prema Napomeni 3.1.4 dovoljno je dokazati da slaba*-ograničenost od B povlači njegovu uniformnu ograničenost. Neka je stoga B slabo*-ograničen. Jer je X Banachov, on je druge kategorije prema Baireovom teoremu o kategoriji. Uniformna ograničenost od B sada slijedi direktno iz Leme 3.1.1 (za $D = X$). □

Sljedeći jednostavan primjer pokazuje da je pretpostavka potpunosti od X u Teoremu 3.1.6 esencijalna.

Primjer 3.1.7. Promotrimo prostor c_{00} s obzirom na proizvoljnu p-normu ($1 \leq p \leq \infty$). Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je $\varphi_k : c_{00} \to \mathbb{F}$ definiran s $\varphi_k((\xi_k)_k) := k\xi_k$. Tada su očito svi φ_k ograničeni linearni funkcionali na c_{00} i $\|\varphi_k\| = \varphi_k(e_k) = k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle, skup $B := \{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ nije uniformno ograničen. S druge strane je B slabo*-ograničen, jer svaki niz u c_{00} ima samo konačno mnogo vrijednosti različitih od 0.

Teorem 3.1.8 (Princip uniformne ograničenosti / Banach-Steinhausov[1,2] teorem). *Neka je X Banachov prostor i Y normiran prostor. Za $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{B}(X, Y)$ je ekvivalentno:*

(i) $\mathcal{F}$ je uniformno ograničen.

(ii) $\{Tx : T \in \mathcal{F}\}$ je ograničen skup u Y za sve $x \in X$.

(iii) $\{Tx : T \in \mathcal{F}\}$ je slabo ograničen skup u Y za sve $x \in X$.

Dokaz. Očito (i) $\Longrightarrow$ (ii). Prema Teoremu 3.1.5 je (ii) $\iff$ (iii), dok prema Lemi 3.1.1 (za $D = X$, koji je druge kategorije prema Baireovom teoremu o kategoriji) (ii) $\Longrightarrow$ (i). □

Korolar 3.1.9 (Banach-Steinhausov teorem). *Neka je X Banachov prostor i Y normiran prostor. Ako je $(T_k)_k$ niz u $\mathrm{B}(X, Y)$ takav da za sve $x \in X$ niz $(T_k x)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergira u Y, onda je $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uniformno ograničen i $T : X \to Y$ definiran s $Tx := \lim_{k \to \infty} T_k x$, $x \in X$, je ograničen linearni operator.*

[1]Stefan Banach (1892.–1945.), poljski matematičar

[2]Hugo Dyonizy Steinhaus (1887.–1972.), poljski matematičar

Dokaz. Jer za proizvoljan $x \in X$ niz $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira u Y, skup $\{T_k x : k \in \mathbb{N}\}$ je ograničen, pa uniformna ograničenost niza $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ slijedi direktno iz Principa uniformne ograničenosti.

Neka je $T : X \to Y$ definiran s $Tx := \lim_{k\to\infty} T_k x$, $x \in X$. Iz linearnosti limesa i svih operatora T_k dobivamo linearnost od T. Nadalje, za sve $x \in S_X$ je

$$\|Tx\| = \left\|\lim_{k\to\infty} T_k x\right\| = \lim_{k\to\infty} \|T_k x\| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k x\| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\| < \infty,$$

tako da je T ograničen. $\square$

Sada ćemo prezentirati jednu zgodnu primjenu Banach-Steinhausovog teorema u teoriji Fourierovih redova.

Primjer 3.1.10 (Konvergencija Fourierovih redova). Neka je $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi\rangle\}$ jedinična kružnica u $\mathbb{C}$. Za funkciju $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ i $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ ćemo (malo neprecizno) pisati $f(\theta)$ za $f(e^{i\theta})$.

Promatramo kompleksan Banachov prostor $C(\mathbb{S}^1)$ svih neprekidnih funkcija $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$. Za $f \in C(\mathbb{S}^1)$ i $n \in \mathbb{Z}$ definiramo **n-ti Fourierov koeficijent od f** s

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta. \tag{3.1}$$

Fourierov red od f definiran je s

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Želimo ustanoviti je li moguće rekonstruirati funkciju $f \in C(\mathbb{S}^1)$ iz njenog Fourierovog reda, odnosno pripadnih koeficijenata.

Najprije pretpostavimo da je f trigonometrijski polinom, tj. da postoji $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je

$$f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{in\theta}$$

za neke $\alpha_{-N}, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$. Jer je

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2\pi, & n = 0 \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

slijedi

$$\hat{f}(n) = \alpha_n \quad \text{za sve } |n| \le N \qquad \text{i} \qquad \hat{f}(n) = 0 \quad \text{za sve } |n| > N. \tag{3.2}$$

tako da se svaki trigonometrijski polinom podudara s svojim Fourierovim redom. Radi toga je prirodno pitati se da li Fourierov red općenite neprekidne funkcije $f \in C(\mathbb{S}^1)$ konvergira prema f? Kako bismo precizirali pitanje konvergencije, za svaki $N \in \mathbb{N}$ definiramo **operator N-te parcijalne sume** $S_N : C(\mathbb{S}^1) \to C(\mathbb{S}^1)$ sa

$$S_N f(\theta) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi\rangle. \tag{3.3}$$

Stoga je precizna formulacija našeg pitanja:

$$\text{Vrijedi li } \lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_\infty = 0 \text{ za sve } f \in C(\mathbb{S}^1)?$$

Primjetimo da su svi operatori S_N linearni i ograničeni. Naime, jer je za $f \in C(\mathbb{S}^1)$ očito $|\hat{f}(n)| \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty$ za sve $n \in \mathbb{Z}$, imamo grubu ocjenu $|S_N f(e^{i\theta})| \le \frac{2N+1}{2\pi}\|f\|_\infty$. Dakle, $S_N \in \mathrm{B}(C(\mathbb{S}^1))$ i $\|S_N\| \le \frac{2N+1}{2\pi}$ za sve $N \in \mathbb{N}$. Posebno, ako je odgovor na naše pitanje potvrdan, iz Banach-Steinhausovog teorema će slijediti da niz je $(S_N)_N$ uniformno ograničen.

U tu svrhu računamo operatorske norme od S_N. Fiksirajmo $N \in \mathbb{N}$ i $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Ako (3.1) ubacimo u (3.3) za fiksiran $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ dobivamo

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \, d\phi \right) e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(\phi) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\phi)} \right) d\phi. \tag{3.4}$$

Jer je

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\phi)} = e^{-iN(\theta-\phi)} \sum_{n=0}^{2N} e^{in(\theta-\phi)} = e^{-iN(\theta-\phi)} \frac{1 - e^{i(2N+1)(\theta-\phi)}}{1 - e^{i(\theta-\phi)}} = \frac{e^{-iN(\theta-\phi)} - e^{i(N+1)(\theta-\phi)}}{1 - e^{i(\theta-\phi)}}$$
$$= \frac{e^{i(N+1)(\theta-\phi)} - e^{-iN(\theta-\phi)}}{e^{i(\theta-\phi)} - 1},$$

množenjem brojnika i nazivnika s $e^{-\frac{i}{2}(\theta-\phi)}$ dobivamo

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\phi)} = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})(\theta-\phi)} - e^{-i(N+\frac{1}{2})(\theta-\phi)}}{e^{\frac{i}{2}(\theta-\phi)} - e^{-\frac{i}{2}(\theta-\phi)}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(\theta-\phi))}{\sin(\frac{\theta-\phi}{2})}.$$

Ako to ubacimo u (3.4), dobivamo

$$S_N f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})(\theta-\phi))}{\sin(\frac{\theta-\phi}{2})} \, d\phi. \tag{3.5}$$

Pretpostavimo da je niz $(S_N)_N$ uniformno ograničen i neka je $M := \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| < \infty$. Onda su svi dualni operatori $S_N^* : C(\mathbb{S}^1)^* \to C(\mathbb{S}^1)^*$ ograničeni s istom konstantom M. Naime, prema Propoziciji 2.3.10 je $\|S_N^*\| = \|S_N\| \leq M$ za sve $N \in \mathbb{N}$. Za $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ neka je δ_θ Diracova mjera u θ, tj. $\delta_\theta(f) = f(\theta)$, $f \in C(\mathbb{S}^1)$. U Primjeru 1.6.14 smo vidjeli da je $\delta_\theta \in C(\mathbb{S}^1)^*$ i $\|\delta_\theta\| = 1$. Posebno, za $\theta = 0$ imamo

$$\|S_N^* \delta_0\| \leq \|S_N^*\| \leq M \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Neka je $f \in C(\mathbb{S}^1)$. Iz (3.5) dobivamo

$$\langle f, S_N^* \delta_0 \rangle = \langle S_N f, \delta_0 \rangle = S_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\phi)}{\sin(\frac{\phi}{2})} \, d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) D_N(\phi) \, d\phi,$$

gdje je

$$D_N(\phi) := \sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\phi)}{\sin(\frac{\phi}{2})}$$

Dirichletova[3] **jezgra stupnja** N. Očito je

$$\|S_N^* \delta_0\| = \sup_{f \in S_{C(\mathbb{S}^1)}} |\langle f, S_N^* \delta_0 \rangle| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N(\phi)| \, d\phi.$$

Za fiksirani $N \in \mathbb{N}$ neka je $g_N := \operatorname{sgn} D_N = \frac{\overline{D_N}}{|D_N|}$. Jer je g_N izmjeriva 2π-periodična funkcija, prema Luzinovom teoremu (vidjeti npr. [15]) postoji niz neprekidnih 2π-periodičnih funkcija $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takav da je $|f_k| \leq 1$ i $f_k(\phi) \to g_N(\phi)$ za gotovo sve $\phi \in \mathbb{R}$. Ako svaku funkciju f_k poistovjetimo s odgovarajućem funkcijom na $\mathbb{S}^1$ (preko $f_k(e^{i\theta}) = f_k(\theta)$, $\theta \in [0, \pi\rangle$), onda je prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_k, S_N^* \delta_1 \rangle = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\phi) D_N(\phi) \, d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_N(\phi) D_N(\phi) \, d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N(\phi)| \, d\phi.$$

[3] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.–1859.), njemački matematičar

Dakle,

$$\|S_N^*\delta_0\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(\phi)|\, d\phi.$$

S druge strane, jer je $|\sin\phi| \leq |\phi|$, imamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |D_N(\phi)|\, d\phi &\geq \int_0^{2\pi} \left|\sin((N+\frac{1}{2})\phi)\right| \cdot \frac{2}{\phi}\, d\phi = \left[\text{supstitucija } \psi = (N+\frac{1}{2})\phi\right] = \int_0^{(2N+1)\pi} |\sin\psi| \cdot \frac{2}{\psi}\, d\psi \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k\pi}\left(\int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} |\sin\psi|\, d\psi\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Jer $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$, dobivamo kontradikciju s (3.6). Dakle, $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\| = \infty$, pa posebno postoji funkcija $f \in C(\mathbb{S}^1)$ čiji Fourierov red ne konvergira uniformno prema f.

Štoviše, iz dokazanog i Leme 3.1.1 primijenjene na niz funkcionala $(S_N^*\delta_0)_N$ zaključujemo znatno više:

Korolar 3.1.11. *Skup svih funkcija $f \in C(\mathbb{S}^1)$ za koje niz $(S_N f(0))_N$ konvergira prema $f(0)$ čini skup prve kategorije u $C(\mathbb{S}^1)$.*

3.2 Teoremi o otvorenom preslikavanju i zatvorenom grafu

Teorem 3.2.1 (**Teorem o otvorenom preslikavanju - jaka forma**). *Neka je X Banachov prostor, Y normiran prostor i $T \in \mathrm{B}(X,Y)$. Tada vrijedi točno jedna od sljedećih dviju tvrdnji:*

(i) Slika od T je skup prve kategorije u Y.

(ii) Y Banachov prostor, T je surjekcija i otvoreno preslikavanje.

U dokazu Teorema 3.2.1 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Lema 3.2.2. *Neka su X i Y normirani prostori, te $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ operator čija je slika skup druge kategorije u Y. Onda postoji $\delta > 0$ takav da je $\delta K_Y \subseteq \overline{T(K_X)}$.*

Dokaz. Iz $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kK_X$ slijedi $\operatorname{ran} T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kT(K_X)$, a jer je $\operatorname{ran} T$ druge kategorije u Y, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{Int}\overline{kT(K_X)} \neq \emptyset$. Onda je i $\operatorname{Int}\overline{T(K_X)} \neq \emptyset$ (jer je za sve $\alpha \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ preslikavanje $y \mapsto \alpha y$ izomorfizam, posebno homeomorfizam od Y). Stoga postoji $y_0 \in \overline{T(K_X)}$ i $\delta > 0$ takvi da je $y_0 + \delta K_Y \in \overline{T(K_X)}$. Onda je i $-y_0 + \delta K_Y \in \overline{T(K_X)}$ (jer je $-K_Z = K_Z$ u svakom normiranom prostoru Z), tako da je

$$2\delta K_Y = (y_0 + \delta K_Y) + (-y_0 + \delta K_Y) \subseteq \overline{T(K_X)} + \overline{T(K_X)} \subseteq \overline{T(K_X + K_X)} = \overline{T(2K_X)} = 2\overline{T(K_X)},$$

odnosno $\delta K_Y \subseteq \overline{T(K_X)}$. □

Dokaz Teorema 3.2.1. Pretpostavimo da ne vrijedi (i), tj. da je $\operatorname{ran} T$ skup druge kategorije u Y, i dokažimo da onda vrijedi tvrdnja (ii). Prema Lemi 3.2.2 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$\delta K_Y \subseteq \overline{T(K_X)}. \qquad (3.8)$$

Tvrdimo da iz (3.8) i potpunosti od X slijedi

$$\frac{\delta}{2} K_Y \subseteq T(K_X). \qquad (3.9)$$

Onda će iz Napomene 1.7.2 slijediti da je T otvoreno preslikavanje.

Kako bismo dokazali (3.9) stavimo $\varepsilon_0 := 1$ i uzmimo proizvoljan niz strogo pozitivnih realnih brojeva $(\varepsilon_k)_k$ takav da je $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k < 1$ (npr. $\varepsilon_k = \frac{1}{3^k}$). Iz (3.8) trivijalno slijedi

$$(\varepsilon_k\delta)K_Y \subseteq \overline{T(\varepsilon_k K_X)} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Za proizvoljan $y \in \delta K_Y$ zbog (3.8) postoji $x_0 \in K_X$ takav da je $\|y - Tx_0\| < \varepsilon_1 \delta$. Jer je $y - Tx_0 \in \varepsilon_1 \delta K_Y \subseteq \overline{T(\varepsilon_1 K_X)}$, postoji $x_1 \in \varepsilon_1 K_X$ takav da je $\|(y - Tx_0) - Tx_1\| < \varepsilon_2 \delta$. Induktivnim argumentom dolazimo do niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X tako da vrijedi $x_k \in \varepsilon_k K_X$ i

$$\left\| y - T\left(\sum_{j=0}^{k} x_j\right)\right\| < \varepsilon_{k+1}\delta \tag{3.10}$$

za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Jer je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 2 \tag{3.11}$$

i jer je X potpun, prema Teoremu 1.3.16 postoji $x := \sum_{k=0}^{\infty} x_k \in X$. Zbog (3.11) je $x \in 2K_X$. Napokon, jer je T neprekidan i $\varepsilon_k \to 0$, prelaskom na limes u (3.10) dobivamo $Tx = y$. Time smo dokazali $\delta K_Y \subseteq T(2K_X) = 2T(K_X)$, što je ekvivalentno s (3.9).

Ostaje dokazati da je Y Banachov prostor. Prema dokazanom T je otvoreno preslikavanje pa je stoga $\operatorname{ran} T = Y$ (Napomena 1.7.2). Neka je $Z := \ker T$, što je zatvoren potprostor od X. Prema Propoziciji 1.7.1 postoji jedinstven $\widetilde{T} \in \mathrm{B}(X/Z, Y)$ takav da je $T = \widetilde{T} Q_Z$, gdje je $Q_Z \in \mathrm{B}(X, X/Z)$ kvocijentni operator. Nadalje, jer je T otvoreno preslikavanje, isto vrijedi i za $\widetilde{T}$ (Propozicija 1.7.1). Također je $\operatorname{ran}\widetilde{T} = \operatorname{ran} T = Y$ i $\widetilde{T}$ je očito injektivan. Sve zajedno, $\widetilde{T}$ je linearni homeomorfizam s X/Z na Y. Prema Napomeni 1.6.12 to je ekvivalentno s time da je $\widetilde{T}$ izomorfizam s X/Z na Y. Napokon, jer je X potpun, prema Propoziciji 1.7.9 isto vrijedi i za X/Z pa je stoga $Y \simeq X/Z$ potpun. Time je dokaz teorema u potpunosti završen. □

Teorem 3.2.3 (**Teorem o otvorenom preslikavanju - standardna forma**). *Neka su X i Y Banachovi prostori. Ako je $T : X \to Y$ surjektivan ograničen linearni operator, onda je T otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Prema Baireovom teoremu o kategoriji $Y = \operatorname{ran} T$ je Baireov prostor, stoga druge kategorije. Iz Teorema 3.2.1 slijedi da je T otvoreno preslikavanje. □

Korolar 3.2.4 (**Banachov teorem o izomorfizmu / Teorem o ograničenom inverzu**). *Neka su X i Y Banachovi prostori. Ako je $T : X \to Y$ ograničena linearna bijekcija, onda je njen inverz $T^{-1} : Y \to X$ ograničen linearni operator, tj. $T^{-1} \in \mathrm{B}(Y, X)$. Posljedično, svaka ograničena linearna bijekcija između Banachovih prostora je izomorfizam.*

Dokaz. Prema Teoremu 3.2.3 svaka linearna surjekcija $T : X \to Y$ je otvoreno preslikavanje. Ako je T bijekcija, otvorenost od T je ekvivalentna s neprekidnosti inverza T^{-1}. Stoga je T^{-1} neprekidan tako da je T izomorfizam. □

Korolar 3.2.5 (**Prvi teorem o izomorfizmu za Banachove prostore**). *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T : X \to Y$ ograničen linearni operator. Normirani prostori $X/\ker T$ i $\operatorname{ran} T$ su izomorfni ako i samo ako je $\operatorname{ran} T$ zatvoren potprostor od Y. U tom slučaju je izomorfizam s $X/\ker T$ na $\operatorname{ran} T$ dan s $x + \ker T \mapsto Tx$, $x \in X$.*

Dokaz. Stavimo $Z := \ker T$, što je zatvoren potprostor od X (jer je T ograničen). Prema Propoziciji 1.7.9 X/Z je Banachov prostor. Ako je $X/Z \simeq \operatorname{ran} T$, onda je $\operatorname{ran} T$ potpun pa onda i zatvoren potprostor od Y (Propozicija 1.3.11).

Sada pretpostavimo da je $\operatorname{ran} T$ zatvoren potprostor od Y. Neka je $\widetilde{T}_0 : X/Z \to \operatorname{ran} T$ jedinstven linearni operator takav da je $T = \widetilde{T}_0 Q_Z$, gdje je $Q_Z \in \mathrm{B}(X, X/Z)$ kvocijentni operator ($\widetilde{T}_0$ se podudara s $\widetilde{T}$, samo što smo za kodomenu uzeli $\operatorname{ran} T$). Tada je $\widetilde{T}_0$ ograničena bijekcija (Propozicija 1.7.1). Jer je $\operatorname{ran} T$ zatvoren, pa stoga i potpun (Propozicija 1.3.11), prema Banachovom teoremu o izomorfizmu (Korolar 3.2.4) $\widetilde{T}_0$ je izomorfizam s X/Z na $\operatorname{ran} T$. □

Korolar 3.2.6. *Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ dvije norme na vektorskom prostoru X s obzirom na koje je X Banachov prostor. Ako postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi $\|x\|' \le M\|x\|$ za sve $x \in X$, onda su te norme ekvivalentne, tj. postoji konstanta $m > 0$ takva da vrijedi $m\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\|$ za sve $x \in X$.*

Dokaz. Prema pretpostavci, jedinični operator $I_X : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$ je ograničen, trivijalno bijektivan linearan operator. Jer je X Banachov prostor s obzirom na obje norme, iz Banachovog teorema o izomorfizmu (Korolar 3.2.4) slijedi da je I_X izomorfizam. Stoga postoji konstanta $m > 0$ takva da je $m\|x\| \leq \|x\|'$ za sve $x \in X$ (vidjeti Napomenu 1.6.12). □

Također imamo i sljedeću alternativnu formulaciju Teorema o otvorenom preslikavanju koja se često koristi u praksi.

Teorem 3.2.7 (**Teorem o zatvorenom grafu**). *Neka su X i Y Banachovi prostori. Linearni operator $T : X \to Y$ je neprekidan ako i samo ako ima zatvoren graf.*

Napomena 3.2.8. Neka su X i Y normirani prostori.

(a) Graf funkcije $f : X \to Y$,
$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\},$$
je po definciji podskup od $X \times Y$. U Primjeru 1.2.2 smo $X \times Y$ opskrbili s familijom normi $\{\|\cdot\|_p\}_{1\leq p\leq\infty}$ i pripadni normiran prostor zmo označili s $X \oplus_p Y$. Jer su sve te norme ekvivalentne, zatvorenost grafa $\Gamma(f)$ u $X \times Y$ je nedvosmisleno definirana.

(b) Prema karakterizaciji zatvorenosti u metričkim prostorima putem nizova (Propozicija 1.2.36), za funkciju $f : X \to Y$ je $\Gamma(f)$ zatvoren u $X \oplus_p Y$ ako i samo ako za svaki niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X iz $x_k \to x$ i $f(x_k) \to y$ za neke $x \in X$ i $y \in Y$ slijedi $y = f(x)$. Posebno, ako je f neprekidna, $\Gamma(f)$ je zatvoren skup u $X \oplus_p Y$.

(c) Ako je graf funkcije $f : X \to Y$ zatvoren, onda su sve praslike $f^{-1}(\{y\})$, $y \in X$, zatvoreni skupovi u X. Naime, ako je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz u $f^{-1}(\{y\})$ takav da $x_k \to x \in X$ onda je $f(x_k) = y$ za sve $k \in \mathbb{N}$ pa trivijalno $f(x_k) \to y$. Stoga zatvorenost od $\Gamma(f)$ povlači $y = f(x)$, odnosno $x \in f^{-1}(\{y\})$. Posebno, linearni operatori $T : X \to Y$ čiji je graf zatvoren imaju zatvorenu jezgru. Obrat općenito ne vrijedi (vidjeti Propoziciju 1.6.6).

(d) Graf svakog linearnog operatora $T : X \to Y$ je očito potprostor od $X \times Y$. Nadalje, iz (b) i linearnosti od T slijedi da T ima zatvoren graf ako i samo ako za svaki niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X iz $x_k \to 0$ i $Tx_k \to y \in Y$ slijedi $y = 0$.

Dokaz Teorema 3.2.7. Prema Napomeni 3.2.8 dovoljno je dokazati da zatvorenost grafa od $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ povlači ograničenost (odnosno neprekidnost) od T. Jer su X i Y Banachovi prostori isto vrijedi i za $X \oplus_p Y$ ($1 \leq p \leq \infty$). Stoga, ako je $\Gamma(T)$ zatvoren, on je također Banachov prostor. Neka je $S : \Gamma(T) \to X$ preslikavanje definirano s $S(x, Tx) := x$. Očito je S linearna bijekcija s inverzom $S^{-1} : X \to \Gamma(T)$, $S^{-1}x = (x, Tx)$. Jer je $\|S(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|(x, Tx)\|_p$ za sve $x \in X$, S je ograničen. Prema Banachovom teoremu o izomorfizmu (Korolar 3.2.4) S^{-1} je ograničen operator, tako da je
$$\|Tx\| \leq \|(x, Tx)\|_p = \|S^{-1}x\|_p \leq \|S^{-1}\|\|x\|$$
za sve $x \in X$. Dakle, T je ograničen i $\|T\| \leq \|S^{-1}\|$. □

Napomena 3.2.9. Obje pretpostavke potpunosti i linearnosti u Teoremu o zatvorenom grafu su nužne kako bi se dokazala neprekidnost operatora. Nužnost potpunosti ćemo demonstrirati u Primjeru 3.3.10, dok nužnost linearnosti pokazuje funkcija $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, definirana s
$$f(\alpha) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$
Očito f ima zatvoren graf i prekid u 0.

S druge strane, nije teško vidjeti da ako je K kompaktan metrički prostor, onda je svaka funkcija $f : K \to K$ koja ima zatvoren graf nužno neprekidna (DZ).

Napomena 3.2.10. Može se dokazati da su unutar ZF-teorije Teorem o otvorenom preslikavanju (OMT), Banachov teorem o izomorfizmu (BIT) i Teorem o zatvorenom grafu (CGT) ekvivalentni teoremi. Primijetimo da smo mi dokazli implikacije OMP $\Longrightarrow$ BIT $\Longrightarrow$ CGT, a nije teško vidjeti i da CGT $\Longrightarrow$ OMP (pokušajte to dokazati za DZ). Također, svaki od njih implicira Princip uniformne ograničenosti (UBP). U prezentiranim dokazima UBP i OMT koristili smo Baireov teorem o kategoriji za kojeg smo u Napomeni 1.4.10 komentirali da je ekvivalentan Aksiomu zavisnog izbora (DC). Može se dokazati da je UBP teorem sustava ZF+AC$_\omega$, gdje je AC$_\omega$ Aksiom prebrojivog izbora (vidjeti [14] i pripadne reference). Posebno, jer je AC$_\omega$ striktno slabiji od DC, zaključujemo da ZF+UBP$\not\Longrightarrow$ DC. U [28, Section 2.4] se tvrdi i da je UBP ekvivalentan s OMT/BIT/CGT. U tom su slučaju OMT/BIT/CGT teoremi sustava ZF+AC$_\omega$ pa stoga ne impliciraju DC (vidjeti i raspravu: `https://math.stackexchange.com/questions/146910/does-the-open-mapping-theorem-imply-the-baire-category-theorem?noredirect=1&lq=1`).

3.3 Posljedice Teorema o otvorenom preslikavanju

U ovom odjeljku ćemo prezentirati neke bitne posljedice Teorema o otvorenom preslikavanju. Krećemo sa sljedećom interesantnom posljedicom, koja kratko kaže da se svaki separabilan Banachov prostor može realizirati kao kvocijent od ℓ^1. Naime, vrijedi:

Teorem 3.3.1 (**Banach-Mazurova**[4,5] **karakterizacija separabilnih Banachovih prostora**). *Banachov prostor X je separabilan ako i samo ako postoji zatvoren potprostor Y od ℓ^1 takav da je $X \simeq \ell^1/Y$.*

Dokaz. Jer je separabilnost svojstvo triju prostora (Propozicija 1.8.7), za svaki zatvoren potprostor Y od ℓ^1 je ℓ^1/Y separabilan prostor. Stoga, ako je $X \simeq \ell^1/Y$, onda je i X separabilan.

Sada pretpostavimo da je X separabilan. Prema Prvom teoremu o izomorfizmu za Banachove prostore (Korolar 3.2.5), dovoljno je dokazati da postoji ograničena linearna surjekcija $T : \ell^1 \to X$. U tu svrhu izaberimo niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u B_X čija je slika $C := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ gusta u B_X (jer je X separabilan, isto vrijedi i za B_X prema Propoziciji 1.8.3). Ako je $(\xi_k)_k \in \ell^1$ tada je red $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k$ apsolutno konvergentan, pa stoga i konvergentan u X (zbog potpunosti, prema Teoremu 1.3.16). Stoga je s $T : \ell^1 \to X$,

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k$$

dobro definirano preslikavanje. Očito je T linearan operator i $\|Tz\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|z\|_1$ za sve $z = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, tako da je $T \in \mathrm{B}(\ell^1, X)$ i $\|T\| \leq 1$.

Ostaje dokazati surjektivnost od T. Jer je $\operatorname{ran} T$ potprostor od X, dovoljno je dokazati inkluziju $B_X \subseteq \operatorname{ran} T$. Neka je stoga $x \in B_X$. Jer je C gust u B_X postoji $p_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x - x_{p_1}\| < \frac{1}{2}$. Onda je $2(x - x_{p_1}) \in B_X$ pa postoji $p_2 > p_1$ takav da je $\|2(x - x_{p_1}) - x_{p_2}\| < \frac{1}{2}$, odnosno

$$\left\| x - x_{p_1} - \frac{x_{p_2}}{2} \right\| < \frac{1}{4}.$$

Induktivno dolazimo do podniza $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tako da vrijedi

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{p_j}}{2^{j-1}} \right\| < \frac{1}{2^k}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle, $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{p_j}}{2^{j-1}}$. Definirajmo niz $z = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $\xi_{p_j} = \frac{1}{2^{j-1}}$ za sve $j \in \mathbb{N}$ i $\xi_k = 0$ za sve $k \in \mathbb{N} \setminus \{p_1, p_2, \ldots\}$. Očito je $z \in \ell^1$ i $Tz = x$. Time je dokaz teorema završen. $\square$

[4] Stefan Banach (1892.–1945.), poljski matematičar

[5] Stanislaw Mazur (1905.–1981.), poljski matematičar

Sada ćemo ilustrirati jednu primjenu Teorema o otvorenom preslikavanju u teoriji Fourierovih redova. Promatramo kompleksan Banachov prostor $L^1(\mathbb{S}^1)$ s normaliziranom Lebesgueovom mjerom, tako da je za $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$,

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\, d\theta,$$

gdje smo kao u Primjeru 3.1.10 za $\theta \in [0, 2\pi\rangle$, $f(\theta)$ identificirali s $f(e^{i\theta})$. Analogno kao za funkcije iz $C(\mathbb{S}^1)$, za $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ i $n \in \mathbb{Z}$ definiramo n-ti Fourierov koeficijent s

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta$$

i pripadni Fourierov red s

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Označimo s $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ skup svih kompleksnih ograničenih obostrano beskonačnih nizova $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Jer je $\ell^\infty(\mathbb{Z}) = C_b(\mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}$ smo opskrbili s diskretnom topologijom), prema Primjeru 1.3.6 $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachov prostor. Neka je $c_0(\mathbb{Z})$ skup svih obostrano beskonačnih nizova $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ za koje vrijedi $\lim_{|n|\to\infty} \xi_n = 0$ (za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|\xi_n| < \varepsilon$ za za sve $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq n_0$). Lako se provjeri da je $c_0(\mathbb{Z})$ zatvoren potprostor od $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, tako da je $c_0(\mathbb{Z})$ i sam Banachov s obzirom na normu $\|\cdot\|_\infty$.

Ako je $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$, očito je $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Naime

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\, d\theta = \|f\|_1 \tag{3.12}$$

za sve $n \in \mathbb{Z}$. Vrijedi i više:

Teorem 3.3.2 (**Riemann-Lebesgueova lema**). *Za sve $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ je $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$.*

Dokaz. Jer su trigonometrijski polinomi gusti u $C(\mathbb{S}^1)$ (trigonometrijska forma Weierstrassovog aproksimacijskog teorema) i jer je $C(\mathbb{S}^1)$ gust u $L^1(\mathbb{S}^1)$ (Luzinov teorem), trigonometrijski polinomi čine gust podskup od $L^1(\mathbb{S}^1)$ (za detalje npr. vidjeti [15]). Stoga za $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ i $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ i trigonometrijski polinom $g = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{in\theta}$ takav da je $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Jer je $\hat{g}(n) = 0$ za $|n| > N$ (prema (3.2)), slijedi

$$|\hat{f}(n)| = |\hat{f}(n) - \hat{g}(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} (f(\theta) - g(\theta))e^{-in\theta}\, d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|\, d\theta = \|f - g\|_1 < \varepsilon$$

za sve $|n| > N$. Dakle, $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$. □

Sada ćemo dokazati da generički niz u $c_0(\mathbb{Z})$ nije niz Fourierovih koeficijenata funkcija iz $L^1(\mathbb{S}^1)$.

Korolar 3.3.3. *Označimo s Y skup svih nizova $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ za koje postoji funkcija $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ takva da je $\hat{f}(n) = \xi_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Tada je Y skup prve kategorije u $c_0(\mathbb{Z})$. Posebno, $c_0(\mathbb{Z}) \setminus Y$ je rezidualan, pa stoga gust skup u $c_0(\mathbb{Z})$.*

Dokaz. Definirajmo preslikavanje $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{S}^1) \to c_0(\mathbb{Z})$ s

$$\mathcal{F}(f) := (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}, \quad f \in L^1(\mathbb{S}^1).$$

Prema (3.12), $\mathcal{F}$ je ograničen linearni operator i $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. Očito je $Y = \operatorname{ran} \mathcal{F}$. Tvrdimo da je $\mathcal{F}$ injekcija. Neka je stoga $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ takva da je $\mathcal{F}(f) = 0$, odnosno $\hat{f}(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Ako je proizvoljan $g = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{in\theta}$ trigonometrijski polinom, onda je

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\, d\theta = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{in\theta}\, d\theta = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \hat{f}(-n)\, d\theta = 0.$$

Iz gustoće trigonometrijskih polinoma u $C(\mathbb{S}^1)$ slijedi

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\,d\theta = 0$$

za sve $g \in C(\mathbb{S}^1)$. Koristeći standardne argumente, zaključujemo da je $f = 0$.

Kako bismo došli do kontradikcije, pretpostavimo da je $Y = \operatorname{ran}\mathcal{F}$ skup druge kategorije u $c_0(\mathbb{Z})$. Onda je prema jakoj formi Teorema o otvorenom preslikavanju (Teorem 3.2.1) Y Banachov prostor i $\mathcal{F}$ je izomorfizam s $L^1(\mathbb{S}^1)$ na Y. Posebno, za $M := \|\mathcal{F}^{-1}\|$ dobivamo da je

$$\|f\|_1 \leq M \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$$

za sve $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$. Onda je posebno za Dirichletovu jezgru $D_N(\phi) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi}$, $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{D_N}(n)| = 1$, dok je s druge strane prema (3.7), $\|D_N\|_1 \to \infty$ kada $N \to \infty$. S time smo dobili kontradikciju. Dakle, $Y = \operatorname{ran}\mathcal{F}$ je skup prve kategorije u $c_0(\mathbb{Z})$. Onda je $c_0(\mathbb{Z}) \setminus Y$ rezidualan $c_0(\mathbb{Z})$, pa je zbog potpunosti od $c_0(\mathbb{Z})$, Baireovog teorema o kategoriji i Propozicije 1.4.6, $c_0(\mathbb{Z}) \setminus Y$ gust u $c_0(\mathbb{Z})$. □

* * *

Neka je X vektorski prostor i Y njegov potprostor. Prisjetimo se da za potprostor Z od X kažemo da je **algebarski direktni komplement** od Y ako vrijedi $Y \dot{+} Z = X$. Očito je $X = Y \dot{+} Z$ ako i samo ako se svaki $x \in X$ na jedinstven način može prikazati kao suma $x = y + z$ za neke $y \in Y$ i $z \in Z$. Kao što znamo, algebarski direktni komplement općenito nije jedinstven.

Napomena 3.3.4. Neka je X vektorski prostor.

(a) Svaki potprostor $Y \leq X$ ima algebarski direktni komplement. Naime, ako je $Y = \{0\}$ (odnosno $Y = X$) možemo uzeti $Z = X$ (odnosno $Z = \{0\}$). Stoga pretpostavimo da $Y \neq \{0\}$ i $Y \neq X$. Neka je $\mathcal{B}_Y$ algebarska baza za Y. Jer je $\mathcal{B}_Y$ linearno nezavisan skup u X, prema Teoremu 1.1.9 postoji algebarska baza $\mathcal{B}_X$ za X koja sadrži $\mathcal{B}_Y$. Jer $Y \neq X$, $\mathcal{B}_X \setminus \mathcal{B}_Y \neq \emptyset$, pa je stoga $Z := [\mathcal{B}_X \setminus \mathcal{B}_Y]$ očito direktni komplement od Y.

(b) Za linearni operator $P : X \to X$ kažemo da je **projektor (idempotent)** ako vrijedi $P^2 = P$. Očito je P projektor ako i samo ako je $I_X - P$ projektor. Nadalje, vrijedi

$$\ker P = \operatorname{ran}(I_X - P) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{ran} P = \ker(I_X - P) = \{x \in X : Px = x\}, \tag{3.13}$$

tako da je $X = \ker P \dot{+} \operatorname{ran} P$.

Obratno, ako je $X = Y \dot{+} Z$, za $x \in X$ izaberemo jedinstvene $y \in Y$ i $z \in Z$ takve da je $x = y + z$ te definiramo $P_Y x := y$. Lako se provjeri da je $P_Y : X \to X$ jedinstven projektor sa slikom Y i jezgrom Z. Nadalje, očito je $P_Z = I - P_Y$.

U kategoriji normiranih (Banachovih) prostora bismo dodatno željeli da projektori pripadnih direktnih sumanada budu ograničeni operatori. Budući da iz (3.13) slijedi da ograničeni projektori imaju zatvorenu sliku (i naravno jezgru), to nas dovodi do sljedeće definicije:

Definicija 3.3.5. Neka je X normiran prostor. Za potprostor $Y \leq X$ kažemo da je **(topološki) komplementabilan** u X ako je Y zatvoren u X i ako ima zatvoren direktni komplement, tj. ako postoji zatvoren potprostor $Z \leq X$ takav da vrijedi $Y \dot{+} Z = X$.

Propozicija 3.3.6. *Neka je X normiran prostor.*

(i) Za projektor $P : X \to X$ je ekvivalentno:

$$P \text{ ima zatvoren graf} \iff P \text{ ima zatvorenu jezgru i sliku.}$$

(ii) Zatvoren potprostor Y od X je komplementablan u X ako i samo ako postoji projektor $P : X \to X$ sa zatvorenim grafom takav da je $\operatorname{ran} P = Y$.

Dokaz. (i). Pretpostavimo da P ima zatvorenu jezgru i sliku. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u X takav da $x_k \to 0$ i $Px_k \to y$ za neki $y \in X$. Jer je $\operatorname{ran} P$ zatvorena, $y \in \operatorname{ran} P$, tako da je $Py = y$. Nadalje, iz $\ker P \ni (P - I_X)x_k \to y$ i zatvorenosti od $\ker P$ slijedi $y \in \ker P$, Dakle $y = Py = 0$, čime smo pokazali zatvorenost od $\Gamma(P)$ (vidjeti Napomenu 3.2.8).

Obratno, neka je $\Gamma(P)$ zatvoren. Zatvorenost od $\ker P$ slijedi iz Napomene 3.2.8. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\operatorname{ran} P$ koji konvergira prema $x \in X$. Jer je $x_k = Px_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$, zatvorenost od $\Gamma(P)$ povlači $Px = x$. Stoga je $x \in \operatorname{ran} P$, čime smo dokazali zatvorenost od $\operatorname{ran} P$.

(ii). Pretpostavimo da postoji projektor $P : X \to X$ sa zatvorenim grafom takav da je $Y = \operatorname{ran} P$. Onda su prema (i) Y i $Z := \ker P$ zatvoreni potprostori od X. Jer je $X = Y \dotplus Z$ (Napomena 3.3.4), Y je komplementabilan u X.

Obratno, neka je Y komplementabilan u X i $Z \leq X$ zatvoren direktni komplement od Y. Onda je prema (i) graf projektora $P_Y : X \to X$ sa slikom Y i jezgrom Z (Napomena 3.3.4) zatvoren. □

Napomena 3.3.7. Ako je $\dim X \geq \aleph_0$, moguće je da projektor $P : X \to X$ ima zatvorenu jezgru (sliku), a da pritom nema zatvorenu (sliku) jezgru. To je ekvivalentno s činjenicom da zatvoreni potprostori od X općenito imaju nezatvorene direktne komplemente. U to se lako možemo uvjeriti. Naime, uzmimo bilo koji neograničen linearni funkcional $\varphi \in X^{\#}$ (takav postoji prema Propoziciji 1.6.6). Onda je prema Propoziciji 1.6.4, $Z := \ker\varphi$ nezatvoren (gust) potprostor od X kodimenzije 1 u X. Neka je $x \in X$ takav da je $X = Z \dotplus \mathbb{F}x$. Tada je $\mathbb{F}x$ zatvoren potprostor od X koji ima nezatvoren direktni komplement Z.

U svakom normiranom prostoru imamo netrivijalnu klasu komplementabilnih potprostora.

Propozicija 3.3.8. *Neka je X normiran prostor.*

(i) Svaki konačnodimenzionalan potprostor od X je komplementabilan u X.

(ii) Svaki zatvoren potprostor od X konačne kodimenzije je komplementabilan u X.

Dokaz. Neka je $Y \leq X$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da Y nije $\{0\}$ niti X.

(i). Pretpostavimo da je $n := \dim Y < \aleph_0$, neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za Y i $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ pripadna dualna baza za $Y^{\#}$ (dakle, $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ za sve $1 \leq i, j \leq n$). Zbog konačnodimenzionalnosti od Y je $Y^{\#} = Y^*$ (Propozicija 1.6.6), pa prema Hahn-Banachovom teoremu (Teorem 2.1.9) postoje $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ takvi da je $x_i^*|_Y = b_i^*$ za sve $1 \leq i \leq n$. Neka je $P : X \to X$ preslikavanje definirano s

$$Px := \langle x, x_1^*\rangle x_1 + \ldots + \langle x, x_n^*\rangle x_n.$$

Iz definicije je jasno da je P ograničen linearni projektor sa slikom Y, tako da je Y komplementabilan u X prema Propoziciji 3.3.6.

(ii). Neka je sada Y zatvoren i $m := \dim(X/Y) < \aleph_0$. Ako je $\{e_1 + Y, \ldots, e_m + Y\}$ baza za X/Y, onda je $Z := [\{e_1, \ldots, e_m\}]$ potprostor od X konačne dimenzije m, tako da je Z zatvoren u X (Propozicija 1.3.12). Iz definicije od Z je jasno da vrijedi $Y \dotplus Z = X$, tako da je Y komplementabilan u X. □

Rezimirajmo dosadašenje rezultate kada je originalni prostor X potpun.

Korolar 3.3.9. *Neka je X Banachov prostor.*

(i) Projektor $P : X \to X$ ograničen ako i samo ako ima zatvorenu jezgru i sliku.

(ii) Potpostor Y od X je komplementabilan u X ako i samo ako postoji ograničen projektor $P : X \to X$ takav da je $\operatorname{ran} P = Y$.

(iii) Ako je X direktna suma zatvorenih potpostora Y i Z, onda vrijedi $X/Y \simeq Z$, $X/Z \simeq Y$ i $X \simeq Y \oplus_p Z$, gdje je $1 \leq p \leq \infty$.

Dokaz. (i). Tvrdnja slijedi direktno iz Propozicije 3.3.6 i Teorema o zatvorenom grafu (Teorem 3.2.7).

(ii). Tvrdnja slijedi direktno iz (i) i Propozicije 3.3.6.

(iii). Prema (ii), projektor $P_Y : X \to X$ sa slikom Y i jezgrom Z je ograničen. Stoga je prema Prvom teoremu o izomorfizmu za Banachove prostore (Korolar 3.2.5) $Y = \operatorname{ran} P_Y \simeq X/\ker P_Y = X/Z$. Analogno dobivamo $X/Z \simeq Y$. Nadalje, za proizvoljan $1 \leq p \leq \infty$ je $Y \oplus_p Z$ Banachov prostor i preslikavanje $T : Y \oplus_p Z \to X$ dano s $T(y, z) := y + z$ je ograničena linearna bijekcija (ograničenost od T je trivijalna za $p = 1$, dok za ostale p ograničenost dobivamo iz ekvivalencija p-normi). Preostaje primijeniti Banachov teorem o izomorfizmu (Korolar 3.2.4). □

Sljedeći primjer pokazuje da na nepotpunom normiranom prostoru općenito postoje neograničeni projektori koji imaju zatvorenu jezgru i sliku (pa stoga i zatvoren graf prema Propoziciji 3.3.6). Posebno, zatvoreni komplementabilni potprostori u takvom prostoru ne moraju biti slike ograničenih projektora (tako da tvrdnje (i) i (ii) Korolara 3.3.9 općenito ne vrijede bez pretpostavke potpunosti).

Primjer 3.3.10. Za $1 \leq p \leq \infty$ promatramo normiran prostor $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ i preslikavanje $P : c_{00} \to c_{00}$ definirano s

$$P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) := (\xi_1 - 2\xi_2, 0, \xi_3 - 4\xi_4, 0, \ldots, \xi_{2k-1} - 2k\xi_{2k}, 0, \ldots).$$

Očito je P linearni projektor te

$$\operatorname{ran} P = \{(\xi_k)_k \in c_{00} : \xi_{2k} = 0 \, \forall k \in \mathbb{N}\} \quad \text{i} \quad \ker P = \{(\xi_k)_k \in c_{00} : \xi_{2k-1} = 2k\xi_{2k} \, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Lako se provjeri da su $\ker P$ i $\operatorname{ran} P$ zatvoreni potprostori od c_{00} (kao presjeci jezgara odgovarajućih ograničenih linearnih funkcionala), pa je prema Propoziciji 3.3.6 $\Gamma(P)$ također zatvoren. S druge strane, P nije ograničen jer očito $\|Pe_{2k}\|_p = \|-2ke_{2k-1}\|_p = 2k \to \infty$ kada $k \to \infty$ (kao i obično, $(e_k)_k$ je kanonska algebarska baza za c_{00}).

Prirodno je pitati se postoje li Banachovi prostori u kojima nije svaki zatvoren potprostor komplementabilan. Odgovor je potvrdan. Imamo sljedeći rezultat, koji je ujedno i prvi takav dobiveni primjer.

Teorem 3.3.11 (**Phillips**[6]). *Zatvoren potprostor c_0 od ℓ^∞ nije komplementabilan u ℓ^∞.*

Dokaz. Tokom ovog dokaza ćemo reći da normiran prostor X ima svojstvo (P) ako postoji prebrojiva familija $\mathcal{F} \subseteq X^*$ čiji je presjek jezgara jednak nulprostoru. Primijetimo da je to ekvivalentno kao da kažemo da $\mathcal{F}$ separira točke od X, tj. za svaka dva različita $x, y \in X$ postoji $z^* \in \mathcal{F}$ takav da je $z^*(x) \neq z^*(y)$. Ako X ima svojstvo (P) očito ga ima i svaki potprostor od X (jer je za sve $x^* \in X^*$, $x^*|_Y \in Y^*$), kao i svaki normiran prostor koji je izomorfan s X.

Primijetimo da ℓ^∞ zadovoljava (P). Naime, za $k \in \mathbb{N}$ neka je $e_k^* : \ell^\infty \to \mathbb{F}$, $e_k^*(\xi_1, \xi_2, \ldots) = \xi_k$. Očito su svi e_k^* ograničeni linearni funkcionali norme 1 i $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \ker e_k^* = \{0\}$, tako da je $\mathcal{F} = \{e_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva separirajuća familija za ℓ^∞.

Pretpostavimo da je c_0 komplementabilan u ℓ^∞. Tada postoji zatvoren potprostor $Y \leq \ell^\infty$ takav da je $c_0 \dotplus Y = \ell^\infty$. Onda je prema Korolaru 3.3.9 $\ell^\infty/c_0 \cong Y$. Jer ℓ^∞ ima svojstvo (P) isto vrijedi i za Y pa stoga i za ℓ^∞/c_0. Sada ćemo dokazati da ℓ^∞/c_0 nema svojstvo (P), čime ćemo dobiti kontradikciju s pretpostavkom da je c_0 komplementabilan u ℓ^∞.

Prema Lemi 2.2.9 postoji injekcija $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takva da je $\operatorname{card}(f(r)) = \aleph_0$ za sve $r \in \mathbb{R}$ i $\operatorname{card}(f(r) \cap f(s)) < \aleph_0$ za sve $r \neq s$. Za svaki $r \in \mathbb{R}$ neka je $x_r \in \ell^\infty$ definiran s

$$x_r := \chi_{f(r)}$$

(karakteristična funkcija skupa $f(r)$). Iz $\operatorname{card}(f(r)) = \aleph_0$ slijedi $x_r \notin c_0$ za sve $r \in \mathbb{R}$. Nadalje, za $r, s \in \mathbb{R}$ iz $x_r - x_s \in c_0$ slijedi $x_r = x_s$. Naime, jer su x_r i x_s nizovi sastavljeni od 0 i 1 iz $x_r - x_s \in c_0$ svakako slijedi $x_r - x_s \in c_{00}$. To onda znači da se x_r i x_s razlikuju najviše u konačno mnogo vrijednosti. Jer su $f(r)$ i $f(s)$ beskonačni skupovi, onda je svakako i $f(r) \cap f(s)$ beskonačan skup. To je jedino moguće ako je $r = s$. Dakle, sve klase $x_r + c_0$, $r \in \mathbb{R}$, u kvocijentnom prostoru ℓ^∞/c_0 su međusobno različite.

[6]Ralph Saul Phillips (1913.–1998.), američki matematičar

Neka je $y^* \in (\ell^\infty/c_0)^*$. Tvrdimo da postoji najviše prebrojivo mnogo realnih brojeva r takvih da je $y^*(x_r + c_0) \neq 0$. Zaista, jer je

$$\{r \in \mathbb{R} : y^*(x_r + c_0) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ r \in \mathbb{R} : |y^*(x_r + c_0)| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

dovoljno je dokazati da je svaki skup $A_n := \left\{r \in \mathbb{R} : |y^*(x_r + c_0)| \geq \frac{1}{n}\right\}$ prebrojiv. Štoviše, mi ćemo dokazati da su svi skupovi A_n konačni. Neka je stoga $n \in \mathbb{N}$ i $r_1, \ldots, r_m \in A_n$, tako da je $|y^*(x_{r_j} + c_0)| \geq \frac{1}{n}$ za sve $1 \leq j \leq m$. Za svaki j izaberimo skalar α_j modula 1 tako da vrijedi $\alpha_j y^*(x_{r_j} + c_0) = |y^*(x_{r_j} + c_0)|$. Neka je

$$x := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{r_j} \in \ell^\infty.$$

Zbog svojstava funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, svi osim evenutalno konačno mnogo članova niza x su modula 1, tako da je $\|x + c_0\|_{\ell^\infty/c_0} = 1$. Stoga je

$$\|y^*\| \geq |y^*(x + c_0)| = \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y^*(x_{r_j} + c_0) \right| = \sum_{j=1}^{m} |y^*(x_{r_j} + c_0)| \geq \frac{m}{n}.$$

Dakle, $\mathrm{card}(A_n) \leq \lfloor n\|y^*\| \rfloor$ je konačan kao što smo tvrdili.

Neka je sada $\mathcal{F}$ proizvoljna prebrojiva familija u X^*. Prema dokazanom, skup

$$\bigcup_{y^* \in \mathcal{F}} \{r \in \mathbb{R} : y^*(x_r + c_0) \neq 0\}$$

je najviše prebrojiv. Jer je $\mathrm{card}\{x_r + c_0 : r \in \mathbb{R}\} = \mathfrak{c}$, svakako postoji $r \in \mathbb{R}$ takav da je $y^*(x_r + c_0) = 0$ za sve $y^* \in \mathcal{F}$. Dakle, $x_r + c_0 \neq c_0$ i $x_r + c_0 \in \bigcap_{y^* \in \mathcal{F}} \ker y^*$. Jer je $\mathcal{F}$ bila proizvoljna prebrojiva familija u X^*, zaključujemo da ℓ^∞/c_0 ne zadovoljava (P). Stoga c_0 nije komplementabilan u ℓ^∞. □

Napomena 3.3.12. J. Lindenstrauss[7] i L. Tzafriri[8] su 1971. godine dokazali da ako Banachov prostor X ima svojstvo da je svaki njegov zatvoren potprostor komplementabilan u X, tada je X nužno Hilbertov prostor (tj. norma od X je inducirana iz skalarnog produkta). Uskoro ćemo dokazati da vrijedi i obrat, tj. da je svaki zatvoren potprostor Hilbertovog prostora komplementabilan.

Prisjetimo se, u odjeljku 1.9 smo dokazali da su Banachovi prostori c_0 i c izomorfni, nisu izometrički izomorfni, te su im duali izometrički izomorfni s ℓ^1. Koristeći Teorem 3.3.11 sada nije teško ustanoviti da se prostori c_0 i c ne mogu realizirati kao duali nekog normiranog prostora:

Korolar 3.3.13. *Ne postoji normiran prostor X takav da je $X^* \simeq c_0$ ili $X^* \simeq c$.*

U dokazu Korolara 3.3.13 ćemo koristiti sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Lema 3.3.14. *Neka je X normiran prostor.*

(i) $\mathrm{ran}\, J_{X^*}$ *je komplementabilan potprostor od X^{***}.*

(ii) Ako postoji normiran prostor Y takav da vrijedi $X \simeq Y^*$, onda je $\mathrm{ran}\, J_X$ *komplementabilan potprostor od X^{**}.*

Dokaz. (i). Definiramo $P : X^{***} \to X^{***}$ kao kompoziciju

$$P := J_{X^*}(J_X)^*,$$

[7] Joram Lindenstrauss (1936.–2012.) izraelski matematičar

[8] Lior Tzafriri (1936.–2008.), izraelski matematičar

gdje je $J_X^* : X^{***} \to X^*$ dualan operator od J_X. Tvrdimo je P projektor sa slikom $\operatorname{ran} J_{X^*}$. Kako bismo dokazali da je $P^2 = P$, dovoljno je dokazati da je $J_X^* J_{X^*}$ identiteta na X^*. Zaista, za proizvoljne $x \in X$ i $x^* \in X^*$ imamo

$$\langle x, J_X^* J_{X^*} x^* \rangle = \langle J_X x, J_{X^*} x^* \rangle = \langle x^*, J_X x \rangle = \langle x, x^* \rangle,$$

odakle slijedi $J_X^* J_{X^*} = I_{X^*}$. Nadalje, Iz $J_X^* J_{X^*} = I_{X^*}$ također slijedi da je $\operatorname{ran} J_X^* = X^*$, odnosno J_X^* je surjekcija. Stoga je $\operatorname{ran} P = \operatorname{ran} J_{X^*}$, pa iz Korolara 3.3.9 slijedi da je $\operatorname{ran} J_{X^*}$ komplementabilan potprostor od X^{***}.

(ii). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Y Banachov prostor. Naime, u protivnom možemo prijeći na upotpunjenje Z od Y (Teorem 2.3.7), za koje prema Korolaru 1.6.13 vrijedi $Z^* \cong Y^*$. Jer je $Y^* \simeq X$, prostor X je također Banachov. Neka je $T : X \to Y^*$ izomorfizam. Prema (i) postoji ograničen projektor $P : Y^{***} \to Y^{***}$ sa slikom $\operatorname{ran} J_{Y^*}$. Jer je $T^{**} : X^{**} \to Y^{***}$ izomorfizam (Korolar 2.3.14), onda je $R := (T^{**})^{-1} P T^{**} : X^{**} \to X^{**}$ ograničen projektor sa slikom $\operatorname{ran} J_X$. Zaista, jer je $P^2 = P$, očito je $R^2 = R$, a jer dijagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y^* \\ {\scriptstyle J_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_{Y^*}} \\ X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{***} \end{array}$$

komutira (Propozicija 2.3.10) imamo

$$\operatorname{ran} R = (T^{**})^{-1} P T^{**}(X) = (T^{**})^{-1} P(Y) = (T^{**})^{-1} J_{Y^*}(Y^*) = J_X T^{-1}(Y^*) = J_X(X) = \operatorname{ran} J_X.$$

□

Dokaz Korolara 3.3.13. Jer je $c_0 \simeq c$ (Napomena 1.9.7), dovoljno je dokazati da ne postoji normiran prostor Y takav da je $Y^* \simeq c_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $Y^* \simeq c_0$ za neki normiran prostor Y. Onda je prema Lemi 3.3.14 $\operatorname{ran} J_{c_0}$ komplementabilan potprostor u c_0^{**} pa prema Korolaru 3.3.9 postoji ograničen projektor $P : c_0^{**} \to c_0^{**}$ sa slikom $\operatorname{ran} J_{c_{00}}$. Neka su $S : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ i $T : \ell^1 \to c_0^*$ standardni izometrički izomorfizmi (Teoremi 1.9.1 i 1.9.5). Ako definiramo $R : \ell^\infty \to \ell^\infty$ kao kompoziciju $R := S^{-1} T^* P (S^{-1} T^*)^{-1}$, onda se lako provjeri da je R projektor od ℓ^∞ sa slikom c_0 (provjerite za DZ). Time smo dobili kontradikciju s Teoremom 3.3.11. □

Na kraju ovog odjeljka se prisjetimo da smo u Primjeru 1.7.7 pokazali da direktna suma dvaju zatvorenih potprostora Banachovog prostora općenito ne mora biti zatvoren potprostor. Imamo sljedeći kriterij kada će to vrijediti:

Korolar 3.3.15. *Neka je X Banachov prostor. Ako su Y i Z zatvoreni potprostori od X takvi da je $Y \cap Z = \{0\}$, tada je njihova direktna suma $Y \dotplus Z$ zatvoren potprostor od X ako i samo ako postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi $\|y\| \le M\|y + z\|$ za sve $y \in Y$ i $z \in Z$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $Y \dotplus Z$ zatvoren, stoga Banachov potprostor od X. Onda je preslikavanje $P : Y \dotplus Z \to Y \dotplus Z$ definirano s $P(y + z) := y$ linearni projektor sa slikom Y i jezgrom Z. Jer su Y i Z zatvoreni, P je ograničen prema Korolaru 3.3.9. Stoga je za $M := \|P\|$, $\|y\| = \|P(y + z)\| \le M\|y + z\|$ za sve $y \in Y$ i $z \in Z$.

Obratno, pretpostavimo da postoji $M > 0$ tako da vrijedi $\|y\| \le M\|y + z\|$ za sve $y \in Y$ i $z \in Z$. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $Y \dotplus Z$. Za $k \in \mathbb{N}$ neka su $y_k \in Y$ i $z_k \in Z$ jedinstveni takvi da je $x_k = y_k + z_k$. Onda je za $k, l \in \mathbb{N}$

$$\|y_k - y_l\| \le M\|y_k - y_l + z_k - z_l\| = M\|x_k - x_l\|,$$

što pokazuje da je $(y_k)_k$ Cauchyjev niz u Y. Zbog potpunosti od Y postoji $y \in Y$ takav da $y_k \to y$. Onda je i $(z_k)_k$ Cauchyjev niz, jer za $k, l \in \mathbb{N}$ imamo

$$\|z_k - z_l\| = \|y_k + z_l - (y_k + z_l)\| + \|y_k - y_l\| = \|x_k - x_l\| + \|y_k - y_l\|.$$

Zbog potpunosti od Z postoji $z \in Z$ takav da $z_k \to z$. Onda očito $x_k = y_k + z_k \to y + z \in Y \dotplus Z$. □

Poglavlje 4

Lokalno konveksni prostori i slabe topologije

4.1 Aksiomi separacije za topološke prostore

S obzirom da je pojam topološkog prostora dosta općenit, u njima ne moraju vrijediti neka svojstva na koja smo navikli da vrijede u metričkim prostorima. Npr. u generalnim topološkim prostorima jednočlani skupovi ne moraju biti zatvoreni, kao što konvergentni nizovi mogu imati više različitih limesa (ekstreman primjer je indiskretna topologija s obzirom na koju svi nizovi konvergiraju prema svim točkama prostora; vidjeti Napomenu 1.2.25). Zbog toga često zahtijevamo da dani prostor zadovoljava dodatne pretpostavke, tzv. aksiome separacije označene s $T_0, \ldots, T_4$, što su svojstva koja nam garantiraju egzistenciju otvorenih skupova koji međusobno separiraju različite točke ili zatvorene skupove danog prostora.

Definicija 4.1.1. Neka je X topološki prostor. Kažemo da je X:

- T_0**-prostor** ako za svake dvije različite točke iz X barem jedna od njih ima okolinu koja ne sadrži drugu točku.
- T_1**-prostor** ako za svake dvije različite točke u X svaka od njih ima okolinu koja ne sadrži drugu točku.
- T_2**-prostor** ili **Hausdorffov prostor**[1] ako svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline, tj. za sve $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje okoline U od x i V od y takve da je $U \cap V = \emptyset$.
- T_3**-prostor** ili **regularan prostor** ako je X T_1-prostor, te za svaki zatvoren skup A u X i svaku točku $x \in X \setminus A$ postoje međusobno disjunktni otvoreni skupovi U i V u X takvi da je $A \subseteq U$ i $x \in V$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$**-prostor** ili **potpuno regularan prostor** ako je X T_1-prostor, te za svaki zatvoren skup A u X i svaku točku $x \in X \setminus A$ postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ takva da je $f|_A = 0$ i $f(x) = 1$.
- T_4**-prostor** ili **normalan prostor** ako je X T_1-prostor, te za svaka dva međusobno disjunktna zatvorena skupa A i B u X postoje međusobno disjunktni otvoreni skupovi U i V u X takvi da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$.

Ako je X T_j-prostor, također kažemo da X **zadovoljava aksiom** T_j ili da je topologija od X T_j**-topologija**.

Napomena 4.1.2. (a) Topološki prostor X je T_1-prostor ako i samo ako su svi jednočlani skupovi (točke) zatvoreni u X. Zaista, ako je X T_1-prostor i $x \in X$, onda za svaki $y \in X$, $y \neq x$, postoji otvorena okolina U_y od y takva da $x \notin U_y$. Stoga je $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ otvoren, odnosno $\{x\}$ je zatvoren skup u X. Obratno, ako je $\{x\}$ zatvoren skup, onda je $X \setminus \{x\}$ otvorena okolina svake točke $y \neq x$.

[1] Felix Hausdorff (1868.–1942.), njemački matematičar i jedan od utemeljitelja moderne topologije

(b) Vrijedi

$$T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Zaista, evidentno vrijedi $T_2 \implies T_1 \implies T_0$. Prema (a) su jednočlani skupovi u T_1-prostorima zatvoreni, odakle slijede implikacije $T_4 \implies T_3 \implies T_2$. Neka je sada X $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, A zatvoren skup u X i $x \in X \setminus A$. Prema pretpostavci postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ takva da je $f|_A = 0$ i $f(x) = 1$. Onda su $U := f^{-1}(\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle)$ i $V := f^{-1}(\langle \frac{1}{2}, \infty\rangle)$ međusobno disjunktni otvoreni skupovi u X takvi da je $A \subseteq U$ i $x \in V$. Napokon, implikacija $T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}}$ slijedi iz Urisonove leme (Teorem 4.1.6).

Primjer 4.1.3. Neka je X proizvoljan skup.

(a) Ako X ima barem 2 elementa, onda evidentno indiskretna topologija $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, X\}$ nije T_0.

(b) U diskretnoj topologiji $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ su svi skupovi otvoreni i zatvoreni, tako da je $\mathcal{T}_d$ trivijalo T_4.

(c) Na X možemo definirati tzv. **kofinitnu topologiju** $\mathcal{T}_{cf}$ i **koprebrojivu topologiju** $\mathcal{T}_{cc}$ s

$$\mathcal{T}_{cf} := \{U \subseteq X : U = \emptyset \text{ ili } \operatorname{card}(X \setminus U) < \aleph_0\},$$
$$\mathcal{T}_{cc} := \{U \subseteq X : U = \emptyset \text{ ili } \operatorname{card}(X \setminus U) \leq \aleph_0\}.$$

Očito su obje topologije $\mathcal{T}_{cf}$ i $\mathcal{T}_{cc}$ T_1-topologije. Pritom je $\mathcal{T}_{cf}$ Hausdorffova ako i samo ako je X konačan, dok je $\mathcal{T}_{cc}$ Hausdorffova ako i samo ako je X prebrojiv (i posljedično se onda pripadna topologija podudara s diskretnom topologijom).

Propozicija 4.1.4. *Svaki metrizabilan prostor i svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Dokaz. Neka su A i B dva međusobno disjunktna zatvorena skupa u topološkom prostoru X.

Najprije pretpostavimo da je X metrizabilan prostor i neka je pripadna topologija od X inducirana iz metrike d. Slično kao u Napomeni 2.3.32, definiramo funkciju $f : X \to [0,1]$ s

$$f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)},$$

koja je neprekidna te vrijedi $f|_A = 0$ i $f|_B = 1$. Stoga su $U := f^{-1}(\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle)$ i $V := f^{-1}(\langle \frac{1}{2}, \infty\rangle)$ međusobno disjunktni otvoreni skupovi u X takvi da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$.

Sada pretpostavimo da je X kompaktan Hausdorffov prostor. Jer su A i B zatvoreni u X, prema Propoziciji 1.5.4 oni su kompaktni. Najprije fiksirajmo $x \in A$. Jer je X Hausdorffov, za svaki $y \in B$ postoje međusobno disjunktne otvorene okoline U_x od x i V_y od y. Tada je $\{V_y : y \in B\}$ otvoreni pokrivač od B pa zbog kompaktnosti od B postoji konačan potpokrivač $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$. Tada su

$$U_x := \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k} \qquad \text{i} \qquad V_x := \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$$

međusobno disjunktni otvoreni skupovi u X takvi da je $x \in U_x$ i $B \subseteq V_x$. Nadalje, zbog kompaktnosti od A otvoreni pokrivač $\{U_x : x \in A\}$ od A ima konačan potpokrivač $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$. Tada su

$$U := \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k} \qquad \text{i} \qquad V := \bigcap_{k=1}^{m} V_{x_k}$$

međusobno disjunktni otvoreni skupovi u X takvi da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$. □

Napomena 4.1.5. (a) Prema Propoziciji 1.5.4 svaki zatvoren podskup kompaktnog prostora X je kompaktan. Obrat također vrijedi ako je X Hausdorffov, tako da je za podskupove kompaktnog Hausdorffovog prostora X zatvorenost ekvivalentna kompaktnosti. Zaista, ako je $A \subseteq X$ kompaktan, onda prema dokazu drugog dijela Propozicije 4.1.4 za svaki $x \in X \setminus A$ postoji otvorena okolina U_x takva da je $U_x \cap A = \emptyset$, odnosno $U_x \subseteq X \setminus A$. Stoga je skup $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$ otvoren, odnosno A je zatvoren.

(b) Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dvije topologije na skupu X takve da je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Ako je $\mathcal{T}_1$ Hausdorffova topologija i $\mathcal{T}_2$ kompaktna topologija, onda je nužno $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Zaista, neka je $A \subseteq X$ $\mathcal{T}_2$-zatvoren skup. Jer je X $\mathcal{T}_2$-kompaktan, isto vrijedi i za A. Kako je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, A je također $\mathcal{T}_1$-kompaktan (jer je svaki $\mathcal{T}_1$-otvoren pokrivač od A također $\mathcal{T}_2$-otvoren pokrivač od A). Kako je $\mathcal{T}_1$ Hausdorffova topologija, prema (a) je A $\mathcal{T}_1$-zatvoren. Time smo pokazali da su svi $\mathcal{T}_2$-zatvoreni skupovi ujedno i $\mathcal{T}_1$-zatvoreni skupovi, pa prelaskom na komplemenete dobivamo $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Dakle, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(c) Direktno iz (b) slijedi da je svaka neprekidna bijekcija $f : X \to Y$, gdje je X kompaktan, a Y Hausdorffov prostor, nužno homeomorfizam.

U normalnim prostorima vrijede sljedeća dva fundamentalna teorema, čiji se dokazi mogu naći u standardnoj literaturi iz realne analize ili opće topologije (vidjeti npr. [15] ili [33]).

Teorem 4.1.6 (**Urisonova**[2] **lema**)**.** *Neka je X normalan prostor. Za svaka dva zatvorena međusobno disjunktna podskupa A i B u X postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ takva da vrijedi $f|_A = 0$ i $f|_B = 1$.*

Teorem 4.1.7 (**Tietzeov**[3] **teorem proširenja**)**.** *Neka je X normalan prostor. Ako je $A \subseteq X$ zatvoren skup, onda svaku neprekidnu funkciju $f : A \to [a,b]$ možemo proširiti do neprekidne funkcije $F : X \to [a,b]$, tj. $F|_A = f$.*

Napomena 4.1.8. Za T_1-prostore X vrijede i obrati Teorema 4.1.6 i 4.1.7. Naime, ako su A i B dva zatvorena međusobno disjunktna skupa u X, onda je karakteristična funkcija χ_B neprekidna na $A \cup B$. Ako postoji neprekidna funkcija $F : X \to [0,1]$ takva da je $F|_{A\cup B} = \chi_B$, onda su $F^{-1}(\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle)$ i $F^{-1}(\langle \frac{1}{2}, \infty\rangle)$ međusobno disjunktni otvoreni skupovi u X koji redom sadrže A i B.

Korolar 4.1.9. *Neka je X normalan prostor. Ako je $A \subseteq X$ zatvoren skup, onda svaku neprekidnu funkciju $f : A \to \mathbb{F}$ možemo proširiti do neprekidne funkcije $F : X \to \mathbb{F}$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neka je $g := \frac{f}{1+|f|}$. Tada je $g : A \to \langle -1, 1\rangle$ neprekidna funkcija pa prema Tietzeovom teoremu proširenja postoji neprekidna funkcija $G : X \to [-1,1]$ takva da je $G|_A = g$. Jer je G neprekidna, $B := G^{-1}(\{-1,1\})$ je zatvoren skup u X i očito $A \cap B = \emptyset$. Prema Urisonovoj lemi postoji neprekidna funkcija $h : X \to [0,1]$ takva da je $h|_A = 1$ i $h|_B = 0$. Stavimo $H := hG$. Tada je $H : X \to \langle -1, 1\rangle$ neprekidna funkcija i $H|_A = G|_A$. Ako definiramo $F := \frac{H}{1-|H|}$, onda je $F : X \to \mathbb{R}$ tražena neprekidna funkcija takva da je $F|_A = f$.

Ako je pak $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, onda primijenimo prethodni argument na realni i imaginarni dio od f. $\square$

4.2 Baza i podbaza topologije, aksiomi prebrojivosti

Definicija 4.2.1. Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ dvije topologije na skupu X. Ako vrijedi $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, onda kažemo da je $\mathcal{T}_1$ **slabija (grublja)** od $\mathcal{T}_2$, odnosno da je $\mathcal{T}_2$ **jača (finija)** od $\mathcal{T}_1$.

Primjer 4.2.2. Na svakom skupu X je očito je indiskretna topologija $\mathcal{T}_i$ najslabija topologija na X, dok je diskretna topologija $\mathcal{T}_d$ najjača topologija na X. Nadalje, ako su $\mathcal{T}_{cf}$ i $\mathcal{T}_{cc}$ kofinitna i koprebrojiva topologija na X (Primjer 4.1.3) vrijedi $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}_{cf} \subseteq \mathcal{T}_{cc} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Definicija 4.2.3. Neka je X skup i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija skupova na X. Najslabiju topologiju na X koja sadrži familiju $\mathcal{E}$ označavamo s $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ i zovemo **topologijom generiranom s** $\mathcal{E}$.

Napomena 4.2.4. Prethodna definicija je smislena, jer je svaka topologija na X sadržana u diskretnoj topologiji i presjek proizvoljne familije topologija na X je također topologija na X. Dakle, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ je presjek svih topologija na X koje sadrže $\mathcal{E}$.

Definicija 4.2.5. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X.

[2] Pavel Samuilovič Urison (1898.–1924.), sovjetski matematičar

[3] Heinrich Franz Friedrich Tietze (1880.–1964.), austrijski matematičar

- **Baza okolina** točke $x \in X$ je svaka familija skupova $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa sljedeća dva svojstva:
  - (N1) Svi skupovi iz $\mathcal{N}_x$ su okoline od x (tj. za svaki $V \in \mathcal{N}_x$ postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U \subseteq V$).
  - (N2) Svaka okolina od x sadrži neki element iz $\mathcal{N}_x$ (tj. ako je $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ onda postoji $V \in \mathcal{N}_x$ takva da je $V \subseteq U$).
- **Baza** za $\mathcal{T}$ je svaka familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ koja sadrži baze okolina svih točaka $x \in X$.
- **Podbaza** za $\mathcal{T}$ je svaka familija $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}$.

Primjer 4.2.6. Ako je X metrički prostor, onda je familija svih otvorenih kugala s centrom u $x \in X$ baza okolina od x, tako da je familija svih otvorenih kugala u X baza pripadne (metričke) topologije.

Propozicija 4.2.7. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X. Familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je baza za $\mathcal{T}$ ako i samo ako se svaki neprazan skup $U \in \mathcal{T}$ može prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}$. Ako je $U \in \mathcal{T}$, onda za svaki $x \in U$ postoji $V_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in V_x \subseteq U$. Stoga je $U = \bigcup_{x \in U} V_x$.

Obratno, pretpostavimo da se svaki neprazan skup $U \in \mathcal{T}$ može prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$. Ako je $x \in X$, onda je očito $\mathcal{N}_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$ baza okolina od x. Naime, ako je $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$, onda je prema pretpostavci U unija elemenata iz $\mathcal{B}$ pa svakako postoji $V \in \mathcal{N}_x$ takav da je $V \subseteq U$. □

Propozicija 4.2.8. *Neka je X skup. Familija skupova $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je baza neke topologije $\mathcal{T}$ na X ako i samo ako vrijedi:*

(i) $\mathcal{B}$ je pokrivač od X, tj. svaka točka iz X se nalazi u nekom skupu iz $\mathcal{B}$.

(ii) Za sve $U, V \in \mathcal{B}$ i sve $x \in U \cap V$ postoji $W \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in W \subseteq (U \cap V)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ na X. Svojstvo (i) je trivijalno ispunjeno. Neka su $U, V \in \mathcal{B}$ i $x \in U \cap V$. Prema pretpostavci $\mathcal{B}$ sadrži neku bazu okolina $\mathcal{N}_x$ od x. Jer je $U \cap V \in \mathcal{T}$ (dakle okolina od x), postoji $W \in \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{B}$ takav da je $x \in W \subseteq (U \cap V)$.

Obratno, pretpostavimo da familija $\mathcal{B}$ zadovoljava (i) i (ii). Definiramo familiju $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq X : \text{za svaki } x \in U \text{ postoji } V \in \mathcal{B} \text{ takav da vrijedi } x \in V \subseteq U\}.$$

Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X i da je $\mathcal{B}$ baza za X. Zaista, trivijalno je $\emptyset \in \mathcal{T}$, a jer je $\mathcal{B}$ pokrivač od X, također je $X \in \mathcal{T}$. Očito je familija $\mathcal{T}$ zatvorena na proizvoljne unije. Neka su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Ako je $x \in U_1 \cap U_2$ tada postoje $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in V_1 \subseteq U_1$ i $x \in V_2 \subseteq U_2$. Zbog svojstva (ii) postoji $W \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in W \subseteq (V_1 \cap V_2) \subseteq (U_1 \cap U_2)$. Dakle, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Induktivnim argumentom dobivamo da je familija $\mathcal{T}$ zatvorena na konačne presjeke. Dakle, $\mathcal{T}$ je topologija na X. Napokon, očito je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ i za svaki $x \in X$ je $\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ baza okolina od x, tako da je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}$. □

Propozicija 4.2.9. *Neka je X skup i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija skupova na X. Tada se topologija $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ generirana s $\mathcal{E}$ sastoji od $\emptyset$, X i unija svih konačnih presjeka elemenata familije $\mathcal{E}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija koja se sastoji od $\emptyset$, X i unija svih konačnih presjeka elemenata familije $\mathcal{E}$. Očito svaka topologija koja sadrži $\mathcal{E}$ mora sadržavati i $\mathcal{T}$, pa je posebno $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Obratno, jer je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ i jer je $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ najslabija topologija na X koja sadrži $\mathcal{E}$, dovoljno je dokazati da je $\mathcal{T}$ topologija. Zaista, ako je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija koja se sastoji od X i svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{E}$, onda $\mathcal{B}$ evidentno zadovoljava oba uvjeta Propozicije 4.2.8, tako da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije $\mathcal{T}'$ na X. Napokon, prema Propoziciji 4.2.7 $\mathcal{T}'$ se sastoji od proizvoljnih unija skupova iz $\mathcal{B}$, tako da je $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. □

Propozicija 4.2.10. *Neka su X i Y topološki prostori. Ako je topologija od Y generirana s familijom skupova $\mathcal{E}$, tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna ako i samo ako je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki $V \in \mathcal{E}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz Propozicije 4.2.9 i činjenice da praslike komutiraju s unijama i presjecima. □

Definicija 4.2.11. Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da zadovoljava:

- **Prvi aksiom prebrojivosti** ako sve točke iz X imaju prebrojivu bazu okolina.
- **Drugi aksiom prebrojivosti** ako topologija $\mathcal{T}$ ima prebrojivu bazu.

Napomena 4.2.12. Očito drugi aksiom prebrojivosti povlači prvi aksiom prebrojivosti.

Primjer 4.2.13. (a) Svaki metrizabilan prostor X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Zaista, za svaki $x \in X$ je familija otvorenih kugala $\{K(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ (s obzirom na neku metriku koja inducira pripadnu topologiju) prebrojiva baza okolina od x.

(b) Ako je X neprebrojiv skup, tada obje topologije $\mathcal{T}_{cf}$ i $\mathcal{T}_{cc}$ ne zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti. Dokažimo npr. da $\mathcal{T}_{cc}$ ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Naime, ako je $x \in X$ proizvoljna točka i $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva familija $\mathcal{T}_{cc}$-otvorenih okolina od x, onda je $U := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ $\mathcal{T}_{cc}$-otvorena okolina od x. Izaberimo proizvoljnu točku $y \in U$, $y \neq x$ (takva sigurno postoji jer je U neprebrojiv). Onda je i $V := U \setminus \{y\}$ $\mathcal{T}_{cc}$-otvorena okolina od x koja ne sadrži niti jedan skup U_k.

Propozicija 4.2.14. *Neka je X topološki prostor.*

(i) Ako X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, onda je X separabilan.

(ii) Ako je X metrizabilan, onda X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako i samo ako je X separabilan.

Dokaz. (i). Pretpostavimo da X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, tako da postoji prebrojiva baza topologije $\mathcal{B} = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo $x_k \in U_k$. Tvrdimo da je $C := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv gust skup u X. Zaista, $X \setminus \overline{C}$ je otvoren skup koji očito ne sadrži niti jedan element iz $\mathcal{B}$. Jer je $\mathcal{B}$ baza pripadne topologije, to je jedino moguće ako je $X \setminus \overline{C} = \emptyset$ (Propozicija 4.2.7), odnosno ako je C gust u X. Dakle, X je separabilan.

(ii). Sada pretpostavimo da je X metrizabilan i neka je d metrika koja inducira pripadnu topologiju. Prema (i) trebamo dokazati da separabilnost od X povlači drugi aksiom prebrojivosti. Neka je stoga $C := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv gust skup u X. Tvrdimo da je

$$\mathcal{B} := \left\{ K(x_k, \frac{1}{n}) : k, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(očito prebrojiva) baza za X. Neka je $U \subseteq X$ proizvoljan neprazan otvoren skup i $x \in U$. Prema Propoziciji 4.2.8 trebamo dokazati da postoje $k, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in K(x_k, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Najprije, jer je U otvoren, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $K(x, \frac{2}{n}) \subseteq U$. Zbog gustoće od C u X postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K(x, \frac{1}{n})$. Tada za sve $y \in K(x_k, \frac{1}{n})$ imamo $d(x, y) \leq d(x, x_k) + d(x_k, y) < \frac{2}{n}$, što pokazuje $K(x_k, \frac{1}{n}) \subseteq K(x, \frac{2}{n}) \subseteq U$. □

Primjer 4.2.15. Jer je Banachov prostor ℓ^∞ neseparabilan (Primjer 1.8.6 (d)), on ne zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Analogno kao u metrizabilnom slučaju, za topološke prostore X koji zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti zatvarače skupova u X i neprekidnost funkcija $f : X \to Y$ možemo okarakterizirati preko nizova (vidjeti Propoziciju 1.2.36 i Teorem 1.2.38).

Propozicija 4.2.16. *Neka je X topološki prostor koji zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.*

(i) Svaka točka $x \in X$ ima prebrojivu padajuću bazu okolina $\mathcal{N}_x = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$, tj. vrijedi $U_{k+1} \subseteq U_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Ako je $A \subseteq X$, tada se točka $x \in X$ nalazi u zatvaraču $\overline{A}$ ako i samo ako postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u A koji konvergira prema x.

(iii) *Funkcija $f : X \to Y$, gdje je Y neki drugi topološki prostor, je neprekidna ako i samo ako za svaki niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X koji konvergira prema nekom $x_0 \in X$, niz $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira prema $f(x_0)$, tj. $x_k \to x_0 \implies f(x_k) \to f(x_0)$.*

Dokaz. (i). Neka je $\{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza okolina od x. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ stavimo $U_k := \bigcap_{j=1}^k V_j$. Tada je očigledno $\mathcal{N}_x = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva padajuća baza okolina od x.

(ii). Neka je $x_0 \in X$. Ako postoji niz u A koji konvergira prema x_0, onda svaka okolina od x_0 siječe A, tako da je prema Napomeni 1.2.19 svakako $x_0 \in \overline{A}$ (primijetimo da nam za ovaj smjer nije bila bitna pretpostavka da X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti).

Obratno, neka je $x \in \overline{A}$. Prema (i), postoji prebrojiva padajuća baza okolina $\mathcal{N}_x = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ od x. Prema Napomeni 1.2.19 za sve $k \in \mathbb{N}$ postoji $x_k \in A \cap U_k$. Ako je U proizvoljna okolina od x tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in U_{k_0} \subseteq U$. Jer je familija $\mathcal{N}_x$ padajuća, onda je $x_k \in U_k \subseteq U_{k_0}$ za sve $k \geq k_0$. Dakle, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je niz u A takav da $x_k \to x$.

(iii). Nužnost vrijedi uvijek prema Teoremu 1.2.38, dok je dokaz dovoljnosti potpuno isti kao dokaz implikacije (v) $\implies$ (iii) Teorema 1.2.38. $\square$

Primjer 4.2.17. Neka je X neprebrojiv skup i $\mathcal{T}_{cc}$ koprebrojiva topologija na X (Primjer 4.2.13 (b)). Ako je A proizvoljan pravi neprebrojiv podskup od X, onda je $\mathcal{T}_{cc}$-zatvarač od A čitav X, dok za $x \in X \setminus A$ ne postoji niz u A koji $\mathcal{T}_{cc}$-konvergira prema x. Naime, proizvoljan niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X je $\mathcal{T}_{cc}$-konvergentan ako i samo ako je eventualno konstantan. Zaista, ako je $\mathcal{T}_{cc} - \lim_{k\to\infty} x_k = x$ onda je $U := (X \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$ otvorena okolina od x. Jer je $x = \mathcal{T}_{cc} - \lim_{k\to\infty} x_k$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in U$ za sve $k \geq k_0$, odnosno $x_k = x$ za sve $k \geq k_0$. Posebno, skup svih limesa $\mathcal{T}_{cc}$-konvergentnih nizova u A je točno skup A.

4.3 Mreže

Ulogu nizova u topološkim prostorima koji ne zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti preuzimaju tzv. mreže. Za razliku od nizova, koji su indeksirani prirodnim brojevima, mreže mogu biti indeksirane proizvoljnim usmjerenim skupovima.

Definicija 4.3.1. Usmjeren skup je uređen par $(\Lambda, \lesssim)$ koji se sastoji od skupa Λ i binarne relacije $\lesssim$ na Λ koja ima sljedeća tri svojstva:

- Za sve $\alpha \in \Lambda$ vrijedi $\alpha \lesssim \alpha$ (refleksivnost).
- Za sve $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ iz $\alpha \lesssim \beta$ i $\beta \lesssim \gamma$ slijedi $\alpha \lesssim \gamma$ (tranzitivnost).
- Za sve $\alpha, \beta \in \Lambda$ postoji $\gamma \in \Lambda$ takav da vrijedi $\alpha \lesssim \gamma$ i $\beta \lesssim \gamma$ (usmjerenost).

Napomena 4.3.2. (a) Često ćemo implicitno podrazumijevati relaciju $\lesssim$, tako da ćemo samo reći da je Λ usmjeren skup.

(b) Induktivnim argumentom lako dobivamo da za svaki konačan podskup $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ od Λ postoji $\alpha_0 \in \Lambda$ takav da vrijedi $\alpha_k \lesssim \alpha_0$ za sve $1 \leq k \leq n$.

(c) Za $\alpha, \beta \in \Lambda$ pišemo $\alpha \gtrsim \beta$ ako vrijedi $\beta \lesssim \alpha$.

Primjer 4.3.3. (a) Skup $\mathbb{R}$ (kao i svaki njegov podskup) sa standardnim uređajem je usmjeren skup.

(b) Neka je X proizvoljan skup i Fin(X) familija svih konačnih podskupova od X. Tada je Fin(X) usmjeren skup s obzirom na skupovnu inkluziju, tj. $A \lesssim B$ ako $A \subseteq B$. Svojstvo usmjerenosti je očito ispunjeno za skup $C := A \cup B$, tj. $A \lesssim C$ i $B \lesssim C$.

(c) Neka je X topološki prostor i $\mathcal{N}_x$ proizvoljna baza okolina točke $x \in X$, usmjerena s obzirom na *obratnu inkluziju*, tj. za $U, V \in \mathcal{N}_x$ je $U \lesssim V$ ako je $V \subseteq U$. Tada je $\mathcal{N}_x$ usmjeren skup. Pritom je za $U, V \in \mathcal{N}_x$ svojstvo usmjerenosti zadovoljeno za okolinu $W \in \mathcal{N}_x$ takvu da je $W \subseteq (U \cap V)$, tj. $U \lesssim W$ i $V \lesssim W$.

(d) Kartezijev produkt $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ dvaju usmjerenih skupova $(\Lambda_1, \lesssim_1)$ i $(\Lambda_2, \lesssim_2)$ je usmjeren skup s obzirom na usmjerenje
$$(\alpha_1, \beta_1) \lesssim (\alpha_2, \beta_2) \qquad \text{ako je} \qquad \alpha_1 \lesssim_1 \alpha_2 \ \text{ i } \ \beta_1 \lesssim_2 \beta_2.$$

Definicija 4.3.4. **Mreža** ili **hiperniz** u skupu X je svaka funkcija $x : \Lambda \to X$, čija je domena Λ usmjeren skup. Za svaki $\alpha \in \Lambda$ vrijednost $x(\alpha)$ označavamo s x_α i pišemo $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ ili $x = (x_\alpha)_\alpha$ kada se skup Λ podrazumijeva.

Jer je skup $\mathbb{N}$ sa svojim standardnim uređajem usmjeren skup, svaki niz je očito mreža dok obrat očito ne vrijedi. Pojam konvergencije mreža definiramo na analogan način kao za nizove.

Definicija 4.3.5. Za mrežu $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ u topološkom prostoru X kažemo da je **konvergentna** ako postoji točka $x_0 \in X$ takva da za svaku okolinu U od x_0 postoji $\alpha_U \in \Lambda$ takav da vrijedi $x_\alpha \in U$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_U$. U tom slučaju kažemo da $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ **konvergira prema** x_0, a točku x_0 zovemo **limes** mreže $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Pišemo $\lim_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha = x_0$ ili $x_\alpha \to x_0$.

Primjer 4.3.6. Riemannov integral ograničene funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ možemo definirati kao limes mreže Riemannovih (integralnih) suma. Naime, neka je Λ skup svih uređenih parova oblika (P, S), gdje je $P = [a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b]$ subdivizija od $[a, b]$ i $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ podskup od $[a, b]$ takav da je $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ za sve $1 \leq i \leq n$. Neka je $|P| := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$ (očica subdivizije P). Na Λ definiramo usmjerenje $\lesssim$ s
$$(P_1, S_1) \lesssim (P_2, S_2) \qquad \text{ako je} \qquad |P_2| \leq |P_1|.$$
Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija, za svaki $(P, S) \in \Lambda$ definiramo pripadnu Riemannovu sumu sa
$$\sigma_f(P, S) := \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1}).$$
Prema Darbouxovom teoremu (vidjeti npr. [20]) f je Riemann integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako postoji realan broj I sa svojstvom da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku subdiviziju $P = [a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b]$ od $[a, b]$ za koju je $|P| < \delta$ i svaki izbor točaka $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ vrijedi $|\sigma_f(P, S) - I| < \varepsilon$. U tom slučaju je $I = \int_a^b f(t)\, dt$. Primijetimo da to upravo znači da je f Riemann integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako je mreža $(\sigma_f(P, S))_{(P,S) \in \Lambda}$ konvergentna, te je $\lim_{(P,S) \in \Lambda} \sigma_f(P, S) = \int_a^b f(t)\, dt$.

Propozicija 4.3.7. *Neka je $\mathcal{E}$ podbaza topologije topološkog prostora X. Mreža $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ u X konvergira prema $x_0 \in X$ ako i samo za svaki $U \in \mathcal{E}$ koji sadrži x_0 postoji $\alpha_U \in \Lambda$ takav da vrijedi $x_\alpha \in U$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_U$.*

Dokaz. Nužnost je očigledna. Dokažimo dovoljnost. Neka je U proizvoljna okolina od x_0. Prema Propoziciji 4.2.9 postoji konačno mnogo elemenata $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{E}$ tako da vrijedi $x_0 \in (U_1 \cap \ldots \cap U_n) \subseteq U$. Prema pretpostavci, za svaki $1 \leq k \leq n$ postoji $\alpha_k \in \Lambda$ takav da je $x_\alpha \in U_k$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_k$. Neka je $\alpha_U \in \Lambda$ takav da je $\alpha_U \gtrsim \alpha_k$ za sve $1 \leq k \leq n$ (Napomena 4.3.2). Onda je evidentno $x_\alpha \in (U_1 \cap \ldots \cap U_n) \subseteq U$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_U$. Dakle, $x_\alpha \to x_0$. $\square$

Kao što znamo limes konvergentnog niza u metrizabilnom prostoru je jedinstven. Analogno vrijedi za konvergentne mreže u Hausdorffovom prostoru. Štoviše:

Propozicija 4.3.8. *Topološki prostor X je Hausdorffov ako i samo ako svaka konvergentna mreža u X ima jedinstven limes.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X Hausdorffov prostor i pretpostavimo da postoji mreža $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ u X koja konvergira prema različitim točkama $x, y \in X$. Kako je X Hausdoffov, postoje disjunktne otvorene okoline U od x i V od y. Jer $x_\alpha \to x$ postoji $\alpha_U \in \Lambda$ takav da vrijedi $x_\alpha \in U$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_U$, a jer $x_\alpha \to y$ postoji $\alpha_V \in \Lambda$ takav da vrijedi $x_\alpha \in V$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_V$. Zbog usmjerenosti od Λ postoji $\beta \in \Lambda$ takav da je $\beta \gtrsim \alpha_U$ i $\beta \gtrsim \alpha_V$. Tada je $x_\beta \in U \cap V = \emptyset$, što je kontradikcija.

Obratno, pretpostavimo da X nije Hausdorffov. Tada postoje dvije različite točke $x, y \in X$ koje ne možemo separirati otvorenim okolinama, tj. svake dvije otvorene okoline U od x i V od y imaju neprazan presjek. Neka su redom $\mathcal{N}_x$ i $\mathcal{N}_y$ familije svih otvorenih okolina od x i y usmjerene obratnom inkluzijom kao u Primjeru 4.3.3 (c), te neka je njihov kartezijev produkt $\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ usmjeren kao u Primjeru 4.3.3 (d). Definiramo mrežu $z : \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y \to X$ sa $z(U,V) := z_{(U,V)}$, gdje je $z_{(U,V)}$ proizvoljna točka iz $U \cap V$. Tvrdimo da $z_{(U,V)} \to x$ i $z_{(U,V)} \to y$. Zaista, ako je U_0 proizvoljna okolina od x i V_0 proizvoljna okolina od y onda za sve $U \in \mathcal{N}_x$ i $V \in \mathcal{N}_y$ iz $U \subseteq U_0$ i $V \subseteq V_0$ slijedi $z_{U,V} \in U \cap V \subseteq U_0 \cap V_0$, odnosno $z_{(U,V)} \in U$ i $z_{(U,V)} \in V$ za sve $(U,V) \gtrsim (U_0, V_0)$. □

Koristeći mreže sada lako možemo dati analogne karakterizacije zatvarača skupa odnosno neprekidnosti funkcije kao u Propoziciji 4.2.16.

Propozicija 4.3.9. *Neka je X topološki prostor.*

(i) Ako je $A \subseteq X$, tada se točka $x_0 \in X$ nalazi u zatvaraču $\overline{A}$ ako i samo ako postoji mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u A koja konvergira prema x_0. Posebno, A je zatvoren ako i samo ako za svaku mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u A koja konvergira prema $x_0 \in X$ slijedi $x_0 \in A$.

(ii) Funkcija $f : X \to Y$, gdje je Y neki drugi topološki prostor, je neprekidna ako i samo ako za svaku mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X koja konvergira prema nekom $x_0 \in X$, mreža $(f(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ konvergira prema $f(x_0)$, tj. $x_\alpha \to x_0 \implies f(x_\alpha) \to f(x_0)$.

Dokaz. (i). Neka je $x_0 \in X$. Ako postoji mreža u A koja konvergira prema x_0, onda svaka okolina od x_0 siječe A, tako da je $x_0 \in \overline{A}$ (Napomena 1.2.19).

Obratno, neka je $x_0 \in \overline{A}$ i neka je $\mathcal{N}_{x_0}$ familija svih okolina od x_0 usmjerena s obrnutnom inkluzijom (Primjer 4.3.3). Definiramo mrežu $x : \mathcal{N}_{x_0} \to X$ s $x(U) := x_U$, gdje je x_U proizvoljan element iz $A \cap U$ (Napomena 1.2.19). Evidentno $x_U \to x_0$.

(ii). Pretpostavimo da je f neprekidna i neka je $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u X koja konvergira prema $x_0 \in X$. Ako je V otvorena okolina od $f(x_0)$, tada je $f^{-1}(V)$ otvorena okolina točke x_0 (Teorem 1.2.38). Jer $x_\alpha \to x_0$, postoji $\alpha_V \in \Lambda$ takav da je $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_V$, odnosno $f(x_\alpha) \in V$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Zbog proizvoljnosti od V zaključujemo $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.

Obratno, pretpostavimo da za svaku mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X vrijedi $x_\alpha \to x_0 \implies f(x_\alpha) \to f(x_0)$. Neka je $A \subseteq X$ i $y_0 \in f(\overline{A})$, tada postoji $x_0 \in \overline{A}$ takav da je $y_0 = f(x_0)$. Prema (i) postoji mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u A takva da $x_\alpha \to x_0$. Tada je, prema pretpostavci, $(f(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u $f(A)$ takva da $f(x_\alpha) \to f(x_0)$. Prema (i) je $y_0 = f(x_0) \in \overline{f(A)}$. Dakle, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Jer je $A \subseteq X$ bio proizvoljan, neprekidnost od f slijedi iz Teorema 1.2.38. □

Korolar 4.3.10. *Za dvije topologije $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ na skupu X je ekvivalentno:*

(i) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

(ii) Za svaku mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X i $x_0 \in X$ iz $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}_2} x_0$ slijedi $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}_1} x_0$.

Posebno, topologije $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ su jednake ako i samo ako imaju iste konvergentne mreže.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii) je trivijalno.

(ii) $\implies$ (i). Inkluzija $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ je ekvivalentna tvrdnji da su svi $\mathcal{T}_1$-zatvoreni skupovi također $\mathcal{T}_2$-zatvoreni. Neka je stoga $A \subseteq X$ $\mathcal{T}_1$-zatvoren skup, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u A i $x_0 \in X$ tako da $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}_2} x_0$. Onda, prema pretpostavci, $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}_1} x_0$. Jer je A $\mathcal{T}_1$-zatvoren, iz Propozicije 4.3.9 (i) slijedi $x_0 \in A$. Dakle, A je $\mathcal{T}_2$-zatvoren prema obratnom smjeru Propozicije 4.3.9 (i). □

4.4 Topologije inducirane familijama funkcija

Definicija 4.4.1. Neka je je X skup i $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ familija funkcija $f_i : X \to Y_i$, gdje je Y_i topološki prostor za sve $i \in I$. **Slaba topologija na X inducirana familijom $\mathcal{F}$** je najslabija topologija na X s obzirom na koju su sve funkcije f_i, $i \in I$, neprekidne. Označavamo ju sa $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Napomena 4.4.2. Jer su sve funkcije $f_i : X \to Y_i$ neprekidne, svakako je $f_i^{-1}(V) \in \sigma(X, \mathcal{F})$ za sve $i \in I$ i $V \in \mathcal{T}_i$. Stoga je podbaza topologije $\sigma(X, \mathcal{F})$ familija skupova

$$\mathcal{E} = \{f_i^{-1}(V) : i \in I, V \in \mathcal{T}_i\}, \tag{4.1}$$

koju zovemo **standardna podbaza**. Prema Propoziciji 4.2.9 $\sigma(X, \mathcal{F})$ se sastoji od unija svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{E}$ (evidentno su $\emptyset, X \in \mathcal{E}$).

Propozicija 4.4.3. *Uz iste oznake kao u Definiciji 4.4.1 mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X $\sigma(X, \mathcal{F})$-konvergira prema $x_0 \in X$ ako i samo ako vrijedi $f_i(x_\alpha) \to f_i(x_0)$ za sve $i \in I$ (konvergencija u Y_i).*

Dokaz. Jer su sve funkcije $f_i \in \mathcal{F}$ neprekidne s obzirom na toplogiju $\sigma(X, \mathcal{F})$, prema Propoziciji 4.3.9 vrijedi $f_i(x_\alpha) \to f_i(x_0)$ za sve $i \in I$

Obratno, pretpostavimo da za mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X vrijedi $f_i(x_\alpha) \to f_i(x_0)$ za sve $i \in I$. Za fiksiran $i \in I$ neka je V okolina od $f_i(x_0)$. Tada postoji $\alpha_{i,V} \in \Lambda$ takav da je $f_i(x_\alpha) \in V$, odnosno $x_\alpha \in f_i^{-1}(V)$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_{i,V}$. Jer je familija (4.1) podaza za $\sigma(X, \mathcal{F})$, iz Propozicije 4.3.7 slijedi $x_\alpha \to x_0$ u $\sigma(X, \mathcal{F})$. $\square$

Propozicija 4.4.4. *Neka je Z topološki prostor. Uz iste oznake kao u Definiciji 4.4.1 funkcija $g : Z \to X$ je neprekidna s obzirom na $\sigma(X, \mathcal{F})$-topologiju na X ako i samo ako su sve funkcije $f_i \circ g : Z \to Y_i$, $i \in I$, neprekidne.*

Dokaz. Nužnost je očigledna. Dokažimo dovoljnost. Pretpostavimo stoga da su sve funkcije $f_i \circ g : Z \to Y_i$, $i \in I$, neprekidne. Ako je $(z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u Z koja konvergira prema $z_0 \in Z$, tada prema Propoziciji 4.3.9 vrijedi $f_i(g(z_\alpha)) \to f_i(g(z_0))$ za sve $i \in I$. Prema Propoziciji 4.4.3 to je ekvivalentno s $g(z_\alpha) \to g(z_0)$ u $\sigma(X, \mathcal{F})$, tako da je g neprekidna prema Propoziciji 4.3.9. $\square$

Definicija 4.4.5. Neka je X skup i $\mathcal{F}$ familija funkcija s domenom X. Kažemo da familija $\mathcal{F}$ **razdvaja točke** od X ako za svaki par različitih točaka $x_1, x_2 \in X$ postoji funkcija $f \in \mathcal{F}$ takva da vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Propozicija 4.4.6. *Uz iste oznake kao u Definiciji 4.4.1 ako su svi prostori Y_i, $i \in I$, Hausdorffovi i ako familija $\mathcal{F}$ razdvaja točke od X, onda je $(X, \sigma(X, \mathcal{F}))$ Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Kako familija $\mathcal{F}$ razdvaja točke od X, postoji $i \in I$ takav da je $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$, a jer je Y_i Hausdorffov postoje međusobno disjunktne otvorene okoline V_1 od $f(x_1)$ i V_2 od x_2. Tada su $f_i^{-1}(V_1)$ i $f_i^{-1}(V_2)$ međusobno disjunktne $(X, \sigma(X, \mathcal{F}))$-otvorene okoline od x_1 i x_2. $\square$

Napomena 4.4.7. Ako familija $\mathcal{F}$ razdvaja točke od X i ako svaki od prostora Y_i, $i \in I$, zadovoljava aksiom separacije T_0, T_1, T_2, T_3 ili $T_{3\frac{1}{2}}$, tada se može pokazati da topologija $\sigma(X, \mathcal{F})$ zadovoljava taj isti aksiom separacije (dokaz za T_0 i T_1 je analogan kao za Propoziciju 4.4.6, dok za T_3 ili $T_{3\frac{1}{2}}$ treba malo posla). S druge strane, može se desiti da $\sigma(X, \mathcal{F})$ ne zadovoljava aksiom T_4 iako su svi Y_i T_4-prostori.

Primjer 4.4.8. Neka je $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ familija topoloških prostora i $X := \prod_{i\in I} X_i$ njihov kartezijev produkt. Za svaki $j \in I$ neka je π_j projekcija s X na X_j, tj. $\pi_j : X \to X_j$, $\pi_j : (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$. **Produktna topologija $\mathcal{T}_{pr}$** na X je slaba topologija na X inducirana familijom projekcija $\{\pi_i\}_{i\in I}$, tj. $\mathcal{T}_{pr} = \sigma(X, \{\pi_i\}_{i\in I})$.

Njena standardna podbaza se sastoji od svih skupova oblika $\pi_j^{-1}(V) = \prod_{i\in I} V_i$, gdje je $V_j = V$ otvoren u X_j za neki $j \in I$ i $V_i = X_i$ za sve $i \neq j$.

Nadalje, prema Propoziciji 4.4.3, mreža $((x_i^\alpha)_{i\in I})_{\alpha\in\Lambda}$ u X konvergira u produktnoj topologiji prema $(x_i^0)_{i\in I} \in X$ ako i samo ako vrijedi $x_i^\alpha \to x_i^0$ za sve $i \in I$.

Također, kako familija $\{\pi_i\}_{i\in I}$ očito razdvaja točke od X, X je Hausdorffov čim su svi prostori X_i Hausdorffovi.

Propozicija 4.4.9. *Uz iste oznake kao u Definiciji 4.4.1, ako familija $\mathcal{F}$ razdvaja točke od X, onda je preslikavanje $F : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ definirano s $F(x) := (f_i(x))_{i\in I}$ homeomorfizam na svoju sliku s obzirom na $\sigma(X,\mathcal{F})$-topologiju na X i produktnu topologiju na $\prod_{i\in I} Y_i$.*

Dokaz. Pretpostavka da familija $\mathcal{F}$ razdvaja točke od X je ekvivalentna injektivnosti preslikavanja F. Nadalje, prema Propoziciji 4.4.3 i Primjeru 4.4.8, mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X $\sigma(X,\mathcal{F})$-konvergira prema $x_0 \in X$ ako i samo ako mreža $(F(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda} = ((f_i(x_\alpha))_{i\in I})_{\alpha\in\Lambda}$ konvergira prema $F(x_0) = (f_i(x_0))_{i\in I}$ u produktnoj topologiji na $\prod_{i\in I} Y_i$. Prema Propoziciji 4.3.9 F je homeomorfizam na svoju sliku. □

Bez dokaza navodimo sljedeći fundamentalni teorem (za dokaz vidjeti npr. [15] ili [33])

Teorem 4.4.10 (**Tihonovljev**[4] **teorem**). *Kartezijev produkt proizvoljne familije kompaktnih topoloških prostora je (uz produktnu topologiju) kompaktan prostor.*

4.5 Topološki vektorski prostori i lokalno konveksni prostori

Notacija. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za $\lambda \in \mathbb{F}$ i $A, B \subseteq X$ pišemo

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\} \qquad \text{i} \qquad A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Skup $A + B$ se zove i **Minkowskijeva suma** skupova A i B.

Definicija 4.5.1. Neka je X vektorski prostor. Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je:

- **Konveksan** ako vrijedi $(1-t)A + tA \subseteq A$ za sve $t \in [0,1]$.
- **Balansiran**, ako vrijedi $\lambda A \subseteq A$ za sve skalare $\lambda \in \mathbb{F}$ takve da je $|\lambda| \leq 1$.
- **Apsolutno konveksan**, ako je A konveksan i balansiran.

Primjer 4.5.2. (a) Neka je $X = \mathbb{F}$, kao vektorski prostor nad samim sobom. Onda je svaki balansiran podskup od $\mathbb{F}$ točno jednog od sljedećeg oblika:

$$\emptyset, \quad X, \quad \{0\}, \quad \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| < r\}, \quad \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \leq r\},$$

gdje je $r > 0$ (provjerite za DZ).

(b) Neka je $X = \mathbb{R}^2$. Tada je $A := ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ nekonveksan balansiran podskup.

Napomena 4.5.3. Neka je X vektorski prostor.

(a) Ako su $A, B \subseteq X$ konveksni skupovi, onda su i λA i $A + B$ konveksni skupovi za sve $\lambda \in \mathbb{F}$. Zaista, za sve $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $t \in [0,1]$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ imamo

$$(1-t)(\lambda a_1) + t(\lambda a_2) = \lambda[(1-t)a_1 + ta_2] \in \lambda A,$$

$$(1-t)(a_1 + b_1) + t(a_2 + b_2) = [(1-t)a_1 + ta_2] + [(1-t)b_1 + tb_2] \in A + B.$$

(b) Koristeći indukciju nije teško vidjeti (provjerite za DZ) da je podskup A od X konveksan ako i samo ako vrijedi $\sum_{k=1}^n t_k A \subseteq A$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ takve da je $\sum_{k=1}^n t_k = 1$.

Nadalje, jer je presjek proizvoljne familije konveksnih skupova u X konveksan skup, svaki $A \subseteq X$ je sadržan u najmanjem konveksnom skupu kojeg označavamo s $\operatorname{conv}(A)$ i zovemo **konveksna ljuska** od A. Ako je A neprazan, koristeći prethodnu opservaciju lako se provjeri da vrijedi

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n t_k a_k : n \in \mathbb{N},\, a_1, \ldots, a_n \in A,\, t_1, \ldots, t_n \in [0,1],\, \sum_{k=1}^n t_k = 1 \right\}. \tag{4.2}$$

[4] Andrej Nikolajevič Tihonov (1906.–1993.), sovjetsko-ruski matematičar i geofizičar

(c) Analogno, jer je presjek proizvoljne familije balansiranih skupova u X balansiran skup, svaki $A \subseteq X$ je sadržan u najmanjem balansiranom skupu kojeg označavamo s $\mathrm{bal}(A)$ i zovemo **balansirana ljuska** od A. Evidentno je

$$\mathrm{bal}(A) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| \leq 1} \lambda A.$$

(d) Podskup $A \subseteq X$ je apsolutno konveksan ako i samo ako vrijedi

$$\lambda x + \mu y \in A \quad \text{za sve } x, y \in A \text{ i } \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ takve da je } |\lambda| + |\mu| \leq 1. \tag{4.3}$$

Zaista, iz uvjeta (4.3) za $\mu = 0$ dobivamo balansiranost od A, dok za $\lambda = 1 - t$ i $\mu = t$, $t \in [0, 1]$, dobivamo konveksnost od A. Obratno, neka je A apsolutno konveksan, $x, y \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ takvi da je $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Tvrdimo da je $\lambda x + \mu y \in A$. Ako je $\lambda = 0$ ili $\mu = 0$ tvrdnja direktno slijedi iz balansiranosti od A. Stoga pretpostavimo da je $\lambda, \mu \neq 0$. Onda je $x' := \frac{\lambda}{|\lambda|} x \in A$ i $y' := \frac{\mu}{|\mu|} y \in A$ (balansiranost) i

$$z' := \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} x' + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} y' \in A$$

(konveksnost). Napokon, jer je $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, ponovnim pozivom na balansiranost od A zaključujemo

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) z' \in A.$$

(e) Konveksna ljuska balansiranog skupa je balansiran (stoga apsolutno konveksan) skup. Zaista, ako je $A \subseteq X$ balansiran i $x \in \mathrm{conv}(A)$, onda je prema (4.2) $x = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k$ za neke $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ takve da je $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$. Ako je $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| \leq 1$, onda je zbog balansiranosti od A, $a_k' := \lambda a_k \in A$ za sve $1 \leq k \leq n$. Stoga je

$$\lambda x = \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k' \in \mathrm{conv}(A).$$

(f) S druge strane, balansirana ljuska konveksnog skupa ne treba biti konveksan skup. Primjer takvog skupa je $A := [-1, 1] \times \{1\}$ u $X = \mathbb{R}^2$ ($\mathrm{bal}(A)$ je unija dva jednakokračna trokuta s vrhovima u $(0, 0), (-1, 1), (1, 1)$ i $(0, 0), (1, -1), (-1, -1)$).

Definicija 4.5.4. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

- Za Hausdorffovu topologiju $\mathcal{T}$ na X kažemo da je **vektorska topologija** ako su s obzirom na nju operacije zbrajanja $+ : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ i množenja skalarom $\mathbb{F} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ neprekidne funkcije (s obzirom na produktnu topologiju na $X \times X$ i $\mathbb{F} \times X$). U tom slučaju za par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **topološki vektorski prostor**.
- Za vektorsku topologiju $\mathcal{T}$ na X kažemo da je **lokalno konveksna** ako $\mathcal{T}$ ima bazu koja se sastoji od konveksnih skupova. U tom slučaju za par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **lokalno konveksan prostor**.
- Za vektorsku topologiju $\mathcal{T}$ na X kažemo da je **normabilna** ako je ona inducirana iz neke norme na X. U tom slučaju za par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **normabilan prostor**.

Napomena 4.5.5. Neka je X topološki vektorski prostor.

(a) Po definiciji produktne topologije, neprekidnost zbrajanja znači da za sve $x_1, x_2 \in X$ i svaku okolinu V od $x_1 + x_2$ postoje okoline U_1 od x_1 i U_2 od x_2 takve da je $U_1 + U_2 \subseteq V$. Analogno, neprekidnost množenja skalarom znači da za sve $x \in X$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ i svaku okolinu V od λx postoji okolina U od x i $\delta > 0$ tako da vrijedi $\mu U \subseteq V$ za sve $|\mu - \lambda| < \delta$.

(b) Za svaki vektor $v \in X$ je pripadna translacija $T_v : X \to X$, $T_v(x) = x + v$ homeomorfizam s inverzom T_{-v}. Slično, za svaki skalar $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ je pripadno množenje $M_\lambda : X \to X$, $M_\lambda(x) = \lambda x$ (linearni) homeomorfizam s inverzom $M_{\frac{1}{\lambda}}$.

(c) Jer su sve translacije T_v, $v \in X$, homeomorfizmi svaka vektorska topolologija $\mathcal{T}$ je **translacijski invarijantna**, tj. skup $U \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako je neka/svaka od njegovih translacija $v + U$, $v \in X$, otvorena. Zbog toga je $\mathcal{T}$ potpuno određena proizvoljnom bazom okolina nekog vektora, npr. nulvektora 0. Proizvoljnu bazu okolina od 0 zovemo **lokalnom bazom** za $\mathcal{T}$.

(d) Ako je $A \subseteq X$ konveksan skup, onda je i $x + A$ konveksan za sve $x \in X$ (Napomena 4.5.3 (a)). Stoga je X lokalno konveksan ako i samo ako X ima lokalnu bazu koja se sastoji od konveksnih skupova.

(e) U kategoriji topoloških vektorskih prostora **izomorfizmi** su linearni homeomorfizmi. Drugim riječima, izomorfizam između dva topološka vektorska prostora X i Y je neprekidna linearna bijekcija $T : X \to Y$ čiji je inverz $T^{-1} : Y \to X$ također neprekidan.

Primjer 4.5.6. (a) Neka je X normabilan prostor i neka je njegova topologija $\mathcal{T}$ inducirana iz norme $\|\cdot\|$ (odnosno pripadne metrike $d(x, y) = \|x-y\|$). Tada je $\mathcal{T}$ očito vektorska topologija (vidjeti Primjer 1.2.34). Nadalje, jer je svaka (otvorena ili zatvorena) kugla u normiranom prostoru konveksna, svaki normabilan prostor je lokalno konveksan prostor. Obrat općenito ne vrijedi.

(b) Za metriku d na vektorskom prostoru X kažemo da je **translacijski invarijantna** ako vrijedi

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \text{za sve } x, y, z \in X.$$

Lako se provjeri da je zbrajanje s obzirom na topologiju induciranu iz proizvoljne translacijski invarijantne metrike na X neprekidno. Naime, neka su $x, y \in X$ i $r > 0$. Onda za pripadne otvorene d-kugle vrijedi

$$K\left(x, \frac{r}{2}\right) + K\left(y, \frac{r}{2}\right) \subseteq K(x + y, r).$$

S druge strane, množenje skalarom ne mora biti neprekidno. Npr. diskretna metrika na X je očito translacijski invarijantna, no s obzirom na nju je množenje skalarom neprekidno ako i samo ako je X trivijalan prostor (provjerite za DZ).

(c) Neka je $0 < p < 1$. Nije teško dokazati (DZ) da za sve $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|\xi + \eta|^p \leq |\xi|^p + |\eta|^p. \tag{4.4}$$

Stoga je i za $0 < p < 1$ s

$$\ell^p := \left\{ x = (\xi_k)_k : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}$$

definiran potprostor od $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$. S druge strane za $0 < p < 1$, s

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

nije definirana norma na ℓ^p jer ne zadovoljava nejednakost trokuta. Ipak, prema (4.4), za sve $x, y \in \ell^p$ vrijedi $\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$, tako da je s

$$d_p(x, y) := \|x - y\|_p^p,$$

definirana metrika na ℓ^p koja je očito translacijski invarijantna. Stoga je s obzirom na pripadnu topologiju zbrajanje na ℓ^p neprekidno (prema (b)), a lako se provjeri i neprekidnost množenja skalarom (DZ). Dakle, ℓ^p je topološki vektorski prostor. S druge strane, taj prostor nije lokalno konveksan. Zaista, pretpostavimo suprotno. Tada kugla $K(0, 1)$ u ℓ^p sadrži neku konveksnu okolinu U od 0. Onda postoji $\delta > 0$ takav da je $K(0, 2\delta) \subseteq U$, a jer je U konveksna, vrijedi $\operatorname{conv}(K(0, 2\delta)) \subseteq$

$U \subseteq K(0,1)$. Ako je $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kanonski niz vektora u $c_{00} \subset \ell^p$, onda je $\delta^{\frac{1}{p}} e_k \in K(0, 2\delta)$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Jer je $0 < p < 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\delta n^{1-p} > 1$. Onda je zbog konveksnosti

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta^{\frac{1}{p}} e_k \in \operatorname{conv}(K(0,2\delta)) \subseteq K(0,1) \quad\Longrightarrow\quad \delta n^{1-p} = \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta^{\frac{1}{p}} e_k \right\|_p^p < 1,$$

što je kontradikcija. Posebno, za $0 < p < 1$ prostor ℓ^p nije normabilan.

Lema 4.5.7. *Neka je X topološki vektorski prostor.*

(i) Ako su A i B podskupovi od X, pri čemu je jedan od njih otvoren, onda je $A + B$ otvoren skup.

(ii) Ako je U proizvoljna okolina 0, onda postoji otvorena okolina V od 0 takva da vrijedi

$$-V = V, \quad V + V \subseteq U \quad i \quad \overline{V} \subseteq U.$$

Posebno, X ima lokalnu bazu koja se sastoji od zatvorenih skupova.

(iii) Ako su A i B međusobno disjunktni podskupovi od X, pri čemu je A kompaktan i B zatvoren, onda postoji otvorena okolina V od 0 takva da vrijedi

$$(A + V) \cap (B + V) = \emptyset.$$

Posebno, X je regularan (tj. T_3-)topološki prostor.

(iv) Ako su A i B podskupovi od X, pri čemu je jedan od njih kompaktan, a drugi zatvoren, tada je $A + B$ zatvoren skup.

(v) Ako je $A \subseteq X$ otvoren skup, onda je i $\operatorname{conv}(A)$ otvoren skup.

Dokaz. (i). Pretpostavimo da je npr. A otvoren. Onda je prema Napomeni 4.5.5 (b) svaka njegova translacija $T_x(A) = x + A$, $x \in X$, otvorena u X tako da je $A + B = \bigcup_{x\in B}(x + A)$ otvoren skup.

(ii). Neka je $U \in \mathcal{N}$. Jer je zbrajanje $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ neprekidno (u $(0,0)$), postoje otvorene okoline V_1 i V_2 od 0 takve da je $V_1 + V_2 \subseteq U$. Onda je

$$V := V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$$

otvorena okolina 0 takva da je $-V = V$ i $V + V \subseteq U$. Posebno je $V \cap ((X \setminus U) + V) = \emptyset$. Prema (i) je $(X \setminus U) + V$ otvoren skup u X, takav da je $\overline{V} \cap ((X \setminus U) + V) = \emptyset$. Kako je $0 \in V$, posebno je $\overline{V} \cap (X \setminus U) = \emptyset$, odnosno $\overline{V} \subseteq U$.

(iii). Ako je $A = \emptyset$ tvrdnja je trivijalna pa pretpostavimo da $A \neq \emptyset$. Neka je $x \in A$. Jer je B zatvoren, $x \in X \setminus B$, te je vektorska topologija translacijski invarijantna, prema (ii) postoji otvorena okolina V'_x od 0 takva da je

$$-V'_x = V'_x \quad \text{i} \quad (x + V'_x + V'_x) \cap B = \emptyset. \tag{4.5}$$

Ponovnom primjenom (ii) sada na okolinu V'_x od 0 dobivamo novu otvorenu okolinu V_x od 0 takvu da je

$$-V_x = V_x \quad \text{i} \quad V_x + V_x \subseteq V'_x. \tag{4.6}$$

Jer je $0 \in V_x$, svakako je $(V_x + V_x + V_x) \subseteq (V_x + V_x + V_x + V_x)$, tako da iz (4.5) i (4.6) slijedi da je $x + V_x + V_x + V_x$ otvorena okolina od x disjunktna s B. Zbog simetrije od V_x (tj. $V_x = -V_x$) je

$$(x + V_x + V_x) \cap (B + V_x) = \emptyset. \tag{4.7}$$

Jer $\{x + V_x : x \in A\}$ otvoreni pokrivač kompaktnog skupa A, postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_n \in A$ tako da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(x_k + V_{x_k})$. Stavimo $V := \bigcap_{k=1}^{k} V_{x_k}$. Onda je

$$A + V \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(x_k + V_{x_k} + V) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(x_k + V_{x_k} + V_{x_k})$$

i prema (4.7) nikoji skup $x_k + V_{x_k} + V_{x_k}$ ne siječe $B + V$.

(iv). Uzmimo npr. da je A kompaktan, a B zatvoren. Ako je $x \in X \setminus (A+B)$, onda je $A \cap (x-B) = \emptyset$. Jer je $x - B$ zatvoren i A kompaktan, prema (iii) postoji otvorena okolina V od 0 takva da je $(A+V) \cap (x-B+V) = \emptyset$. Onda je $(A+B+V) \cap (x+V) = \emptyset$ tako da je posebno $(A+B) \cap (x+V) = \emptyset$. Dakle, $x + V$ je otvorena okolina od x sadržana u $X \setminus (A+B)$.

(v). Neka je $x \in \operatorname{conv}(A)$. Prema Napomeni 4.5.3 (b) postoje $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ i $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ takvi da je $\sum_{k=1}^n t_k = 1$ i $x = \sum_{k=1}^n t_k x_k$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $t_1 \neq 0$. Stavimo $v := \sum_{k=2}^n t_k x_k \in X$. Prema Napomeni 4.5.5 (b) je skup $t_1 A + v = (T_v \circ M_{t_1})(A)$ otvoren u X i

$$x \in (t_1 A + v) \subseteq \sum_{k=1}^n t_k A \subseteq \operatorname{conv}(A).$$

Jer je vektor $x \in \operatorname{conv}(A)$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\operatorname{conv}(A)$ otvoren skup. □

Propozicija 4.5.8. *Neka je X topološki vektorski prostor.*

(i) Svaka okolina 0 sadrži balansiranu otvorenu okolinu 0.

(ii) Svaka konveksna okolina 0 (ako postoji), sadrži apsolutno konveksnu otvorenu okolinu 0.

Posebno, svaki topološki vektorski prostor ima lokalnu bazu koja se sastoji od otvorenih balansiranih skupova, dok svaki lokalno konveksan prostor ima lokalnu bazu koja se sastoji od otvorenih apsolutno konveksnih skupova.

Dokaz. (i). Neka je U proizvoljna okolina 0. Zbog neprekidnosti (u $(0,0)$) operacije množenja skalarom $\mathbb{F} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ postoji otvorena okolina V od 0 i $\delta > 0$ tako da vrijedi $\lambda V \subseteq U$ za sve $|\lambda| \leq \delta$. Neka je

$$W := \delta \operatorname{bal}(V) = \bigcup_{|\lambda| \leq \delta} \lambda V.$$

Tada je W balansirana otvorena okolina 0 koja je sadržana u U.

(ii). Ako je U konveksna okolina 0, prema (i) postoji balansirana otvorena okolina W od 0 takva da je $W \subseteq U$. Tada je prema Napomeni 4.5.3 (e) i Lemi 4.5.7 (v) $V := \operatorname{conv}(W)$ apsolutno konveksna otvorena okolina 0 koja je sadržana u U.

Stoga, ako je $\mathcal{N}'$ proizvoljna lokalna baza za X, primjenom konstrukcije (i) na svaki $U \in \mathcal{N}'$ dobivamo novu lokalanu bazu $\mathcal{N}$ koja se sastoji od balansiranih otvorenih skupova.

Ako je pak X lokalno konveksan i $\mathcal{N}'$ lokalna baza za X koja se sastoji od konveksnih skupova, primjenom konstrukcije (ii) na svaki $U \in \mathcal{N}'$ dobivamo novu lokalnu bazu $\mathcal{N}$ koja se sastoji od apsolutno konveksnih otvorenih skupova. □

Lokalno konveksne topologije na vektorskom prostoru X često zadajemo preko separirajuće familije polunormi.

Definicija 4.5.9. Neka je X vektorski prostor i $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ familija polunormi na X.

- Kažemo da je $\mathcal{P}$ **separirajuća** ako za proizvoljan $x \in X$ iz $p_i(x) = 0$ za sve $i \in I$ slijedi $x = 0$.
- **Topologija generirana familijom polunormi** $\mathcal{P}$ je slaba topologija $\sigma(X, \mathcal{F})$ inducirana familijom funkcija
$$\mathcal{F} = \{p_{i,y} : x \mapsto p_i(x-y) : i \in I, y \in X\}. \tag{4.8}$$

Propozicija 4.5.10. *Neka je X vektorski prostor i $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ separirajuća familija polunormi na X. Tada je topologija $\mathcal{T}$ generirana familijom $\mathcal{P}$ lokalno konveksna. Pritom apsolutno konveksnu lokalnu bazu topologije $\mathcal{T}$ čine skupovi oblika*

$$U(0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon) := \{x \in X : p_{i_1}(x) < \varepsilon, \ldots, p_{i_n}(x) < \varepsilon\},$$

gdje su $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ *i* $\varepsilon > 0$.

Nadalje, ako je familija $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ *prebrojiva, onda je s* $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) := \max_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)} \right) \tag{4.9}$$

definirana translacijski invarijantna metrika čija se inducirana topologija podudara s topologijom $\mathcal{T}$.

Dokaz. Za svaki $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ i $\varepsilon > 0$ stavimo

$$\begin{aligned} U(x_0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon) &:= x_0 + U(0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon) \\ &= \{x \in X : \, p_{i_1}(x - x_0) < \varepsilon, \ldots, p_{i_n}(x - x_0) < \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ako je $\mathcal{F}$ kao u (4.8), tada je iz definicije topologije $\mathcal{T} = \sigma(X, \mathcal{F})$ jasno da su svi skupovi $U(x_0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon)$ otvoreni, jer je $U(x_0, p_i, \varepsilon) = p_{i,x_0}^{-1}(\langle -\infty, \varepsilon\rangle)$ i $U(x_0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon) = U(x_0, p_{i_1}, \varepsilon) \cap \cdots \cap U(x_0, p_{i_n}, \varepsilon)$.

Nadalje, za mrežu $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ i $x_0 \in X$ vrijedi

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_i(x_\alpha - x_0) \to 0 \quad \text{za sve } i \in I. \tag{4.11}$$

Zaista, prema Propoziciji 4.4.3 imamo $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0$ ako i samo ako $p_{i,y}(x_\alpha) \to p_{i,y}(x_0)$ za sve $y \in X$ i $i \in I$. Stoga, ako $p_i(x_\alpha - x_0) \to 0$ za sve $i \in I$, onda je prema (1.1)

$$|p_{i,y}(x_\alpha) - p_{i,y}(x_0)| = |p_i(x_\alpha - y) - p_i(x_0 - y)| \le p_i(x_\alpha - x_0) \to 0 \quad \forall x \in X, i \in I.$$

Neka je $\mathcal{T}'$ topologija na X generirana sa svim skupovima oblika (4.10). Iz Propozicije 4.3.7 i definicije skupova (4.10) slijedi da za mrežu $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ i $x_0 \in X$ vrijedi $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}'} x_0$ ako i samo ako $p_i(x_\alpha - x_0) \to 0$ za sve $i \in I$ odnosno, prema (4.11), ako i samo ako $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0$. Dakle, topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ imaju iste konvergentne mreže, pa su prema Korolaru 4.3.10 nužno jednake.

Nadalje, jer je familija polunormi $\{p_i\}_{i \in I}$ separairajuća, familija funkcija $\mathcal{F}$ razdvaja točke (u smislu Definicije 4.4.5). Stoga je prema Propoziciji 4.4.6 prostor $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov.

Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ lokalno konveksna topologija na X te da su sve bazne okoline $U(0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon)$ apsolutno konveksni skupovi. Najprije dokažimo da je $\mathcal{T}$ vektorska topologija. Neka je stoga $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža u $X \times X$ koja konvergira prema $(x_0, y_0) \in X \times X$. Prema (4.11) to znači da $p_i(x_\alpha - x_0) \to 0$ i $p_i(y_\alpha - y_0) \to 0$ za sve $i \in I$. Onda

$$p_i(x_\alpha + y_\alpha - (x_0 + y_0)) \le p_i(x_\alpha - x_0) + p_i(y_\alpha - y_0) \to 0 \quad \forall i \in I,$$

čime je dokazana neprekidnost operacije zbrajanja. Slično, neka je $(\lambda_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža u $\mathbb{F} \times X$ koja konvergira prema $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{F} \times X$. Prema (4.11) to znači da $|\lambda_\alpha - \lambda_0| \to 0$ i $p_i(x_\alpha - x_0) \to 0$ za sve $i \in I$. Onda

$$p_i(\lambda_\alpha x_\alpha - \lambda_0 x_0) \le p_i(\lambda_\alpha(x_\alpha - x_0)) + p_i((\lambda_\alpha - \lambda_0)x_0) = |\lambda_\alpha| p_i(x_\alpha - x_0) + |\lambda_\alpha - \lambda_0| p_i(x_0) \to 0 \quad \forall i \in I,$$

jer iz $|\lambda_\alpha - \lambda_0| \to 0$ slijedi da postoji $\alpha_0 \in \Lambda$ takav da je $|\lambda_\alpha| \le |\lambda_0| + 1$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Time je dokazana neprekidnost operacije množenja skalarom.

Ostaje provjeriti da je svaki skup $U(0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon)$ apsolutno konveksan. Provjeravamo uvjet (4.3). Za $x, y \in U(0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $|\lambda| + |\mu| \le 1$, imamo

$$p_i(\lambda x + \mu y) \le |\lambda| p_i(x) + |\mu| p_i(y) < \varepsilon$$

za sve $i \in \{i_1, \ldots, i_n\}$, tako da je $\lambda x + \mu y \in U(0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, \varepsilon)$.

Pretpostavimo da je sada da je familija $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ prebrojiva. Očito je s (4.9) definirana nenegativna i simetrična funkcija. Strogost od d slijedi iz pretpostavke da je $\mathcal{P}$ separarajuća, dok nejednakost trokuta od d slijedi iz strogog rasta funkcije $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ na $[0, +\infty\rangle$ i nejednakosti trokuta svih polunormi

p_i. Dakle, d je metrika na X, a iz same definicije je jasno da je d translacijski invarijantna. Označimo s $\mathcal{T}_0$ topologiju induciranu iz d. Tvrdimo da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

Za $x \in X$ i $r > 0$ neka je

$$K(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

pripadna d-otvorena kugla oko x radijusa r. Očito je $K(0,r) = X \in \mathcal{T}$ za sve $r \geq 1$. Ako je $0 < r < 1$, izaberimo najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $rk \geq 1$. Onda je $x \in K(0,r)$ ako i samo ako je $\frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} < ir$ za sve $1 \leq i < k$, odnosno ako i samo ako je $p_i(x) < \frac{ir}{1-ir}$ za sve $1 \leq i < k$. Dakle, ako za $1 \leq i < k$ stavimo $\varepsilon_i := \frac{ir}{1-ir} > 0$, odavde vidimo da je

$$K(0,r) = U(0,p_1,\varepsilon_1) \cap \ldots \cap U(0,p_{k-1},\varepsilon_{k-1}).$$

$\mathcal{T}$-otvoren skup. Jer su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_0$ translacijski invarijantne, zaključujemo $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$.

Preostaje dokazati inkluziju $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_0$. Najprije dokažimo da svaka $\mathcal{T}$-bazna okolina $U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon)$ sadrži neku kuglu $K(0,r)$. Neka je stoga $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Ako je $0 < r < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)n}$ i $x \in K(0,r)$ onda je svakako $\frac{1}{n} \cdot \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} < r$, što je ekvivalentno s $p_i(x) < \frac{rn}{1-rn} < \varepsilon$ za sve $1 \leq i \leq n$. Dakle, $K(0,r) \subseteq U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon)$. Napokon, za fiksiran $x \in U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon)$ neka je $0 < \varepsilon_x < \varepsilon$ takav da je $x \in U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon_x)$. Prema dokazanom, postoji $r_x > 0$ takav da je $K(0,r_x) \subseteq U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon-\varepsilon_x)$. Onda je

$$K(x,r_x) = x + K(0,r_x) \subseteq U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon_x) + U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon-\varepsilon_x) \subseteq U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon).$$

Dakle,

$$U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon) = \bigcup_{x \in U(0,p_1,\ldots,p_n,\varepsilon)} K(x,r_x) \subseteq \mathcal{T}_0,$$

odakle slijedi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_0$, odnosno $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$. □

Uskoro ćemo vidjeti da se svaki lokalno konveksan prostor može realizirati kao u Propoziciji 4.5.10 (vidjeti Teorem 4.6.5).

Definicija 4.5.11. Neka je X topološki vektorski prostor.

- Za mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X kažemo da je **Cauchyjeva mreža** ako za svaku okolinu U od 0 postoji $\alpha_U \in \Lambda$ takav da vrijedi $x_\alpha - x_\beta \in U$ za sve $\alpha, \beta \gtrsim \alpha_U$.
- Za X kažemo da je **potpun** ako svaka Cauchyjeva mreža u X konvergira.
- Za X kažemo da je **Fréchetov**[5] **prostor** ako je topologija od X generirana s prebrojivom separirajućom familijom polunormi, te je s obzirom na nju X potpun prostor.

Napomena 4.5.12. Neka je X topološki vektorski prostor.

(a) Mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X je Cauchyjeva ako i samo ako mreža $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda}$ konvergira prema $0 \in X$ s obzirom na standardno usmjerenje na $\Lambda \times \Lambda$ (Primjer 4.3.3 (d)).

(b) Svaka konvergentna mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X je Cauchyjeva. Naime, prema Lemi 4.5.7 (ii) za proizvoljnu okolinu U od 0 postoji okolina V od 0 takva da je $-V = V$ i $V + V \subseteq U$. Ako $x_\alpha \to x_0$ onda postoji $\alpha_V \in \Lambda$ takav da je $x_\alpha \in x_0 + V$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_V$. Onda je

$$x_\alpha - x_\beta \in (x_0 + V) - (x_0 + V) = V + V \subseteq U$$

za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$.

[5] René Maurice Fréchet (1878.–1973.), francuski matematičar

(c) Svaki potpun potprostor Y od X je zatvoren. Zaista, neka je $x_0 \in \overline{Y}$, prema Propoziciji 4.2.16 postoji mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u Y takva da $x_\alpha \to x_0$. Onda je, prema (b), $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ Cauchyjeva mreža u Y koja zbog potpunosti od Y konvergira prema nekom vektoru $y_0 \in Y$. Kako je X Hausdorffov prostor, prema Propoziciji 4.3.8 mora biti $x_0 = y_0 \in Y$, što pokazuje $\overline{Y} = Y$.

(d) Ako X zadovoljava *prvi aksiom prebrojivosti*, onda je X potpun ako i samo ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira. Zaista, pretpostavimo da svaki Cauchyjev niz u X konvergira i neka je $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ proizvoljna Cauchyjeva mreža u X. Prema Propoziciji 4.2.16 i Lemi 4.5.7 (ii) X ima prebrojivu lokalnu bazu $\mathcal{N} = \{U_1, U_2, \ldots\}$ takvu da vrijedi

$$U_{k+1} \subseteq (U_{k+1} + U_{k+1}) \subseteq U_k$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 1$ postoji $\alpha_1 \in \Lambda$ takav da je $x_\alpha - x_\beta \in U_1$ za sve $\alpha, \beta \gtrsim \alpha_1$. Analogno, za $k = 2$ postoji $\alpha_2 \in \Lambda$, $\alpha_2 \gtrsim \alpha_1$ (ovdje koristimo usmjerenost od Λ) takav da je $x_\alpha - x_\beta \in U_2$ za sve $\alpha, \beta \gtrsim \alpha_2$. Induktivnim argumentom dolazimo do rastućeg niza niza $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u Λ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_\alpha - x_\beta \in U_k \qquad \text{čim je } \alpha, \beta \gtrsim \alpha_k.$$

Slijedi da je $(x_{\alpha_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X pa prema pretpostavci on konvergira prema nekom vektoru $x_0 \in X$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_0 = 0$. Neka je U proizvoljna okolina 0. Onda postoji $k_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $U_{k_1} \subseteq U$. Jer $x_{\alpha_k} \to 0$ postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{\alpha_k} \in U_{k_1+1}$ za sve $k \geq k_2$. Prema konstrukciji je $x_\alpha - x_\beta \in U_{k_1+1}$ za sve $\alpha, \beta \gtrsim \alpha_{k_1+1}$. Neka je $k_3 := \max\{k_1 + 1, k_2\}$. Onda je

$$x_\alpha = (x_\alpha - x_{\alpha_{k_3}}) + x_{\alpha_{k_3}} \in U_{k_1+1} + U_{k_1+1} \subseteq U_{k_1} \subseteq U$$

za sve $\alpha \gtrsim \alpha_{k_3}$, što pokazuje da $x_\alpha \to 0$. Obrat je naravno trivijalan.

(e) Direktno iz (d) slijedi da je svaki normiran prostor potpun/Banachov (u standardnom smislu) ako i samo ako je potpun kao topološki vektorski prostor.

(f) Ako je topologija $\mathcal{T}$ od X inducirana iz neke translacijski invarijantne metrike d, onda je $(X, \mathcal{T})$ potpun (kao topološki vektorski prostor) ako i samo ako je (X, d) potpun (kao metrički prostor). Posebno, ako je $\mathcal{T}$ generirana prebrojivom familijom polunormi, onda je prema Propoziciji 4.5.10 X Fréchetov prostor ako i samo ako je (X, d) potpun metrički prostor s obzirom na metriku d definiranu s (4.9) (ili bilo koju drugu translacijski invarijantnu metriku koja inducira topologiju $\mathcal{T}$). Posljedično je, prema Baireovom teoremu o kategoriji (Teorem 1.4.7), svaki Fréchetov prostor Baireov prostor.

Primjer 4.5.13. (a) Neka je X topološki prostor. Na vektorskom (realnom ili kompleksnom) prostoru $C(X)$ svih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{F}$ definiramo tri bitne topologije:

- **topologiju točkovne konvergencije** $\mathcal{T}_{pc}$ kao lokalno konveksnu topologiju generiranu separirajućom familijom polunormi

$$p_x(f) := |f(x)|, \quad x \in X,\ f \in C(X).$$

- **topologiju uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima** $\mathcal{T}_{ucc}$ kao lokalnu konveksnu topologiju generiranu separirajućom familijom polunormi

$$p_K(f) = \max_{x\in K} |f(x)|, \quad K \subseteq X \text{ kompaktan skup},\ f \in C(X).$$

- **topologiju uniformne konvergencije** $\mathcal{T}_{uc}$ kao topologiju generiranu skupovima oblika

$$U(f, \varepsilon) := \{g \in C(X) : \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}, \quad f \in C(X),\ \varepsilon > 0.$$

Jer su jednočlani skupovi u X kompaktni, vrijedi

$$\mathcal{T}_{pc} \subseteq \mathcal{T}_{ucc} \subseteq \mathcal{T}_{uc}.$$

Pritom vrijedi $\mathcal{T}_{pc} = \mathcal{T}_{ucc}$ ako je X diskretan, odnosno $\mathcal{T}_{ucc} = \mathcal{T}_{uc}$ ako je X kompaktan.

Primijetimo da je topologija $\mathcal{T}_{uc}$ inducirana iz translacijski invarijantne metrike

$$d_\infty(f, g) := \min \left\{ 1, \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \right\},$$

tako da je zbrajanje na $C(X)$ $\mathcal{T}_{uc}$-neprekidno (Napomena 4.5.6). S druge strane, množenje skalarom općenito ne mora biti neprekidno s obzirom na topologiju $\mathcal{T}_{uc}$ na $C(X)$ (to se desi čim u $C(X)$ postoji neograničena funkcija, kao npr. u slučaju kada je X proizvoljan otvoren podskup od $\mathbb{F}^n$). Dakle, ako X nije kompaktan, općenito $\mathcal{T}_{uc}$ nije vektorska topologija na $C(X)$.

Nadalje, pretpostavimo da prostor X ima svojstvo da postoji prebrojiva familija kompaktnih skupova $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ u X takva da vrijedi

$$K_k \subseteq \operatorname{Int} K_{k+1} \qquad \text{za sve } k \in \mathbb{N} \qquad \text{i} \qquad X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k \tag{4.12}$$

Uz tu je pretpostavku svaki kompaktan podskup od X sadržan u nekom skupu K_k, tako da je topologija $\mathcal{T}_{ucc}$ generirana već s prebrojivo mnogo polunormi $\{p_{K_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Nadalje, nije teško vidjeti da je s obzirom na nju $C(X)$ Fréchetov prostor (sve ove tvrdnje provjerite za DZ).

Također primijetimo da svojstvo (4.12) ima svaki otvoren podskup X od $\mathbb{F}^n$, pri čemu za $k \in \mathbb{N}$ možemo uzeti skup

$$K_k := \left\{ x \in X : \, d_2(x, \partial X) \geq \frac{1}{k}, \, \|x\|_2 \leq k \right\}. \tag{4.13}$$

(b) Neka je $C^\infty([0,1])$ (realan ili kompleksan) vektorski prostor svih funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{F}$ klase C^∞. Primijetimo da na $C^\infty([0,1])$ ne postoji norma s obzirom na koju je operator deriviranja $D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$, $Df = f'$, ograničen. Zaista, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $t \in [0,1]$ neka je $f_k(t) := e^{kt}$. Onda za svaku normu $\|\cdot\|$ na $C^\infty([0,1])$ vrijedi $\|f_k'\| = k\|f_k\|$ za sve $k \in \mathbb{N}$. S druge strane, na $C^\infty([0,1])$ možemo definirati lokalno konveksnu topologiju generiranu prebrojivom familijom separirajućih polunormi

$$p_k(f) = \|f^{(k)}\|_\infty = \max\{|f^{(k)}(t)| : \, t \in [0,1]\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \, f \in C^\infty([0,1]).$$

Onda je s obzirom na tu topologiju $C^\infty([0,1])$ Fréchetov prostor te je operator deriviranja D neprekidan (DZ).

(c) Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Označimo s $C^\infty(\Omega)$ (realan ili kompleksan) vektorski prostor svih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{F}$ klase C^∞. Za svaku uređenu n-torku $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nenegativnih cijelih brojeva (multiindeks) pišemo

$$\partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \qquad \text{i} \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

gdje je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (ako je neki $\alpha_i = 0$, onda odgovarajući izraz naprosto izostavljamo).

Neka je $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ prebrojiva familija kompaktnih podskupova od Ω koja zadovoljava (4.12) za $X = \Omega$ (npr. skupovi iz (4.13)). Na $C^\infty(\Omega)$ definiramo topologiju $\mathcal{T}_{C^\infty}$ kao lokalno konveksnu topologiju generiranu separirajućom familijom polunormi

$$p_{\alpha,k}(f) := \max_{x \in K_k} |(\partial^\alpha) f(x)|, \quad \alpha \text{ multiindeks}, \, k \in \mathbb{N}.$$

Lako se vidi da topologija $\mathcal{T}_{C^\infty}$ ne ovisi o izboru konkretne familije $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Nadalje, kako je familija polunormi $\{p_{\alpha,k}\}_{\alpha,k}$ prebrojiva, prema Propoziciji 4.5.10 topologija $\mathcal{T}_{C^\infty}$ je metrizabilna. Štoviše, uz tu topologiju je $C^\infty(\Omega)$ Fréchetov prostor te su svi diferencijalni operatori $\partial^\alpha : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ neprekidan.

(d) **Schwartzov[6] prostor** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ opisno je definiran kao skup svih funkcija iz $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ čije sve derivacije trnu u beskonačnosti brže nego sve potencije od x. Preciznije, za svaka dva multiindeksa α, β i $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ neka je

$$p_{(\alpha,\beta)}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha(\partial^\beta f)(x)|.$$

Tada je

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \, p_{(\alpha,\beta)}(f) < \infty \ \text{ za sve multiindekse } \alpha, \beta\}.$$

Osnovni primjer Schwartzove funkcije je

$$f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-a\|x\|^2}$$

za proizvoljan $a > 0$ i multiindeks α.

Nadalje, očito je $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ potprostor od $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ te je $x^\alpha(\partial^\alpha f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ za sve $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i multiindekse α, β. Kako je s $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$ definirana prebrojiva separirajuća familija polunormi na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nije teško vidjeti da je s obzirom na topologiju generiranu tim polunormama $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Fréchetov prostor, te da su svi diferencijalni operatori $\partial^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ neprekidni (DZ).

Definicija 4.5.14. Neka je X topološki vektorski prostor. **Dual** (ili **dualni prostor**) od X je skup svih neprekidnih linearnih funkcionala na X. Označavamo ga s X^*.

Očito je X^* potprostor algebarskog duala $X^\#$.

Propozicija 4.5.15. *Neka je X topološki vektorski prostor i $\varphi : X \to \mathbb{F}$ linearni funkcional. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) φ je neprekidan.

(ii) φ je neprekidan u nekoj točki iz X.

(iii) φ je ograničen na nekoj okolini U od 0, tj. $\sup_{x\in U} |\varphi(x)| < \infty$.

(iv) $\ker\varphi$ je zatvoren potprostor od X.

Nadalje, ako je X lokalno konveksan prostor čija je topologija generirana separirajućom familijom polunormi $\{p_i\}_{i\in I}$, onda su uvjeti (i)–(iv) ekvivalentni s

(v) Postoji konstanta $C > 0$ i konačno mnogo indeksa $i_1, \dots, i_n \in I$ tako da za sve $x \in X$ vrijedi

$$|\varphi(x)| \le C \max\{p_{i_1}(x), \dots, p_{i_n}(x)\}. \tag{4.14}$$

Dokaz. Jer je vektorska topologija translacijski invarijantna (Napomena 4.5.5), očito je (i) $\iff$ (ii). Također je evidentno (i) $\implies$ (iv) i (i) $\implies$ (iii) jer je zbog neprekidnosti $\{x \in X : |\varphi(x)| < 1\}$ otvorena okolina 0.

(iii) $\implies$ (ii). Pretpostavimo da je U okolina od 0 takva da je $M := \sup_{x\in U} |f(x)| < \infty$. Onda je za $\varepsilon > 0$, $V := \frac{\varepsilon}{M+1}U$ okolina 0 takva da je $|\varphi(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in V$. Dakle, φ je neprekidan u 0.

(iv) $\implies$ (iii). Pretpostavimo da je $\ker\varphi$ zatvoren potprostor od X. Ako je $\varphi = 0$, tvrdnja je trivijalna, pa pretpostavimo da $\varphi \neq 0$. Neka je $x_0 \in X$ takav da je $\varphi(x_0) = 1$. Jer $x_0 \notin \ker\varphi$, prema Propoziciji 4.5.8 postoji balansirana okolina V od 0 takva da je $(x_0 + V) \cap \ker\varphi = \emptyset$. Tvrdimo da je $|\varphi(x)| < 1$ za sve $x \in V$. Zaista, ako bi postojao $x \in V$ takav da je $|\varphi(x)| \ge 1$, onda bi vrijedilo $\varphi(\lambda x) = -1$ za neki skalar $|\lambda| \le 1$, tako da je $\varphi(x_0 + \lambda x) = 0$. S druge strane, jer je V balansirana okolina 0, $\lambda x \in V$, pa je $x_0 + \lambda x \in (x_0 + V) \cap \ker\varphi = \emptyset$, što je kontradikcija.

Neka je sada X lokalno konveksan prostor čija je topologija generirana separirajućom familijom polunormi $\{p_i\}_{i\in I}$. Koristimo iste oznake kao u Propoziciji 4.5.10.

[6]Laurent Schwartz (1915.–2002.), francuski matematičar

(v) $\implies$ (iii). Iz nejednakosti (4.14) posebno slijedi $|\varphi(x)| \le C$ za sve $x \in U(0, p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, 1)$.

(i) $\implies$ (v). Pretpostavimo da je φ neprekidan. Onda je $U := \{x \in X : |\varphi(x)| < 1\}$ otvorena okolina 0 pa prema Propoziciji 4.5.10 postoje $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ i $\varepsilon > 0$ takvi da je $U(0, p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, \varepsilon) \subseteq U$, odnosno $|\varphi(x)| < 1$ za sve $x \in U(0, p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, \varepsilon)$. Neka je $x \in X$. Tvrdimo da je zadovoljena nejednakost (4.14) za $C = \frac{2}{\varepsilon}$. Zaista, stavimo $M_x := \max\{p_{i_1}(x), \dots, p_{i_n}(x)\}$. Ako je $M_x = 0$, onda je $kx \in U(0, p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, \varepsilon)$ za sve $k \in \mathbb{N}$, tako da je $|\varphi(x)| < \frac{1}{k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$, odnosno $\varphi(x) = 0$. Stoga je u tom slučaju nejednakost (4.14) trivijalno ispunjena za sve konstante $C > 0$. Pretpostavimo da $M_x > 0$. Onda je

$$\frac{\varepsilon x}{2M_x} \in U(0, p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, \varepsilon) \quad \implies \quad \left|\varphi\left(\frac{\varepsilon x}{2M_x}\right)\right| < 1 \quad \iff \quad |\varphi(x)| < \frac{2}{\varepsilon} M_x.$$

□

Općeniti topološki vektorski prostori mogu imati trivjalni dual. S druge strane, uskoro ćemo vidjeti da je dual svakog netrivijalnog lokalno konveksnog prostora netrivijalan (Teorem 4.7.1).

Napomena 4.5.16. Neka su X i Y lokalno konveksni prostori čije su topologije redom generirane familijama polunormi $\{p_i\}_{i\in I}$ i $\{q_j\}_{j\in J}$. Koristeći analogno rezoniranje kao u dokazu Propozicije 4.5.15 nije teško vidjeti (provjerite za DZ) da su za linearni operator $T : X \to Y$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) T je neprekidan.

(ii) T je neprekidan u nekoj točki iz X.

(iii) Za svaki $j \in J$ postoji $C > 0$ i konačno mnogo indeksa $i_1, \dots, i_n \in I$ tako da za sve $x \in X$ vrijedi

$$q_j(Tx) \le C \max\{p_{i_1}(x), \dots, p_{i_n}(x)\}.$$

Teorem 4.5.17. *Na svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru postoji jedinstvena vektorska topologija. Posebno, svaki konačnodimenzionalan topološki vektorski prostor je potpun i svaka dva topološka vektorska prostora iste konačne dimenzije su izomorfna (tj. linearno homeomorfna).*

Dokaz. Neka je $\dim X = n < \aleph_0$ i fiksirajmo neku bazu $\{b_1, \dots, b_n\}$ za X. Tada je s

$$T : \mathbb{F}^n \to X, \qquad T(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \tag{4.15}$$

definiran izomorfizam vektorskih prostora. Onda je topologija $\mathcal{T}$ na X inducirana s T, tj.

$$\mathcal{T} := \{T(U) : U \subseteq \mathbb{F}^n \text{ otvoren}\}$$

vektorska topologija na X.

Neka je sada $\mathcal{T}'$ neka druga vektorska topologija na X. Onda je s (4.15) definiran linearni homeomorfizam s $\mathbb{F}^n$ na $(X, \mathcal{T}')$. Naime, prema definiciji vektorske topologije su operacije zbrajanja i množenja skalarom neprekidne, odakle slijedi neprekidnost od T. Trebamo dokazati i da je inverz $T^{-1} : X \to \mathbb{F}^n$ neprekidan. Neka su redom S i K jedinična sfera i otvorena jedinična kugla u $\mathbb{F}^n$. Zbog kompaktnosti od S je $T(S)$ kompaktan, pa stoga zatvoren skup u X jer je X Hausdorffov (Napomena 4.1.5). Jer je $T0 = 0$ i T je injektivan, $0 \notin T(S)$. Prema Propoziciji 4.5.8 postoji balansirana $\mathcal{T}'$-otvorena okolina V od 0 takva da je $V \cap T(S) = \emptyset$. Jer je V balansiran i T^{-1} je linearan operator, $T^{-1}(V)$ je balansiran skup u $\mathbb{F}^n$ koji je disjunktan sa S. Jer je $0 \in V$, mora biti $T^{-1}(V) \subseteq K$. Ako za svaki $1 \le j \le n$ s π_j označimo projekciju na j-tu koordinatu, onda je $\varphi_j := \pi_j \circ T^{-1}$ linearni funkcional na X i $T^{-1} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Jer je $T^{-1}(V) \subseteq K$, svi funkcionali φ_j su ograničeni na V, tako da je T^{-1} neprekidan prema Propoziciji 4.5.15. Stoga je T homeomorfizam. Slijedi da je skup $V \subseteq X$ $\mathcal{T}'$-otvoren ako i samo ako je $T^{-1}(V)$ otvoren u $\mathbb{F}^n$, odnosno ako i samo ako je V $\mathcal{T}$-otvoren. Dakle, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Ako je sad X proizvoljan topološki vektorski prostor konačne dimenzije n, onda je prema dokazanom X izomorfan s $\mathbb{F}^n$. Posebno X je potpun jer je takav $\mathbb{F}^n$ prema Napomeni 4.5.12 (d). Napokon, jer je izomorfnost relacija ekvivalencije, zaključujemo da su svaka dva n-dimenzionalna topološka vektorska prostora izomorfna. □

4.6 Minkowskijev funkcional

Definicija 4.6.1. Neka je X vektorski prostor.

- Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je **apsorbirajuć** ako za svaki $x \in X$ postoji $\delta > 0$ takav da je $x \in \lambda A$ za sve $\lambda \in \mathbb{F}$ takve da je $|\lambda| \geq \delta$.
- **Minkowskijev funkcional** apsorbirajućeg skupa A je funkcija $p_A : X \to \mathbb{R}$ definirana s

$$p_A(x) := \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

Ako je $A \subseteq X$ apsorbirajuć očito je p_A dobro definiran. Nadalje, $0 \in A$ pa onda i $0 \in \lambda A$ za sve $\lambda \in \mathbb{F}$, tako da je $p_A(0) = 0$.

Propozicija 4.6.2. *Neka je X vektorski prostor i $A \subseteq X$ apsorbirajuć konveksan podskup.*

(i) p_A je nenegativna sublinearna funkcija.

(ii) Ako je A apsolutno konveksan, onda je p_A polunorma na X.

Dokaz. (i). Nenegativnost od p_A je očita. Najprije dokažimo da je p_A pozitivno homogena funkcija. Neka je stoga $x \in X$ i $\lambda \geq 0$. Ako je $\lambda = 0$ tvrdnja je trivijalna. Ako je $\lambda \neq 0$, onda je

$$p_A(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \lambda \inf\left\{\frac{t}{\lambda} > 0 : x \in \frac{t}{\lambda}A\right\} = \lambda p_A(x).$$

Preostaje dokazati subaditivnost od p_A. Najprije primijetimo da je

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A. \tag{4.16}$$

Zaista, neka je $x \in X$ takav da je $p_A(x) < 1$. Onda postoji $0 < r < 1$ takav da je $\frac{x}{r} \in A$. Kako je A konveksan i $0 \in A$ (jer je A apsorbirajuć) imamo $x = (1-r)0 + r(\frac{x}{r}) \in A$. Neka su $x, y \in X$ i $\varepsilon > 0$. Stavimo $t := p_A(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ i $s := p_A(y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Koristeći pozitivnu homogenost od p_A imamo $p_A(\frac{x}{t}) < 1$ i $p_A(\frac{y}{s}) < 1$, pa je prema (4.16) nužno $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in A$. Konveksnost od A onda povlači

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \cdot \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \cdot \frac{y}{s} \in A.$$

Odavde dobivamo $p_A(x+y) \leq s+t = p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$. Jer je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

(ii). Pretpostavimo da je A apsolutno konveksan. Prema (i) dovoljno je dokazati da je p_A apsolutno homogen. Zaista, jer je A balansiran, za $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ imamo $\frac{|\lambda|}{\lambda}A = A$. Stoga je

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= |\lambda| p_A\left(\frac{\lambda x}{|\lambda|}\right) = |\lambda| \inf\left\{t > 0 : x \in t\left(\frac{|\lambda|}{\lambda}A\right)\right\} = |\lambda| \inf\{t > 0 : x \in tA\} \\ &= |\lambda| p_A(x). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.6.3. *Neka je X topološki vektorski prostor. Tada je svaka okolina 0 apsorbirajuća.*

Dokaz. Neka je U okolina 0 i $x \in X$. Zbog neprekidnosti preslikavanja $\mathbb{F} \to X$, $\lambda \mapsto \lambda x$ je skup $\{\lambda \in \mathbb{F} : \lambda x \in U\}$ okolina 0 u $\mathbb{F}$. Stoga sadrži neki interval/krug oko 0, tj. postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\lambda x \in U$, za sve $|\lambda| \leq \varepsilon$, odnosno $x \in \mu U$ za sve $|\mu| \geq \frac{1}{\varepsilon}$. $\square$

Sljedeći primjer pokazuje da apsorbirajuć podskup topološkog vektorskog prostora općenito ne mora biti okolina 0.

Primjer 4.6.4. Neka je $X = \mathbb{R}^2$ i $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$. Tada je A apsorbirajuć podskup od $\mathbb{R}^2$, ali $(0,0) \notin \operatorname{Int} A$.

Teorem 4.6.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ lokalno konveksan prostor i $\mathcal{N}$ lokalna baza za X koja se sastoji od apsolutno konveksnih otvorenih skupova. Svakom članu $V \in \mathcal{N}$ pridružimo pripadni Minkowskijev funkcional p_V. Tada vrijedi:*

(i) $V = \{x \in X : p_V(x) < 1\}$ *za sve* $V \in \mathcal{N}$.

(ii) $\{p_V : V \in \mathcal{N}\}$ *je separirajuća familija neprekidnih polunormi na* X.

(iii) Topologija $\mathcal{T}$ *se podudara s topologijim generiranom familijom* $\{p_V : V \in \mathcal{N}\}$.

Posebno, topologija svakog lokalno konveksnog prostora generirana je familijom separirajućih polunormi.

Dokaz. Prema Lemi 4.6.3 je svaka okolina 0 apsorbirajuća pa je stoga p_V dobro definiran za sve $V \in \mathcal{N}$.

(i). Neka je najprije $x \in V$. Zbog neprekidnosti preslikavanja $\mathbb{F} \to X$, $\lambda \mapsto \lambda x$, skup $\{\lambda \in \mathbb{F} : \lambda x \in V\}$ je otvorena okolina 1 u $\mathbb{F}$. Stoga postoji $t > 1$ takav da je $tx \in V$, odnosno $x \in \frac{1}{t}V$. Slijedi $p_V(x) \leq \frac{1}{t} < 1$, odnosno $V \subseteq \{x \in X : p_V(x) < 1\}$. Obratna inkluzija slijedi iz dokaza Propozicije 4.6.2 (i).

(ii). Prema Propoziciji 4.6.2 je p_V polunorma na X za sve $V \in \mathcal{N}$. Neka je $V \in \mathcal{N}$, $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Za proizvoljan $x \in x_0 + \varepsilon V$ imamo $x - x_0 \in \varepsilon V$ pa je prema (i) i (1.1)

$$|p_V(x) - p_V(x_0)| \leq p_V(x - x_0) < \varepsilon.$$

Time smo dokazali da su svi p_V, $V \in \mathcal{B}$, neprekidni. Nadalje, jer je $\mathcal{T}$ Hausdorffova topologija za svaki $x \in X$, $x \neq 0$, postoji $V \in \mathcal{N}$ takav da $x \notin V$. Prema (i) je $p_V(x) \geq 1$. Dakle, familija $\{p_V : V \in \mathcal{N}\}$ je separirajuća.

(iii). Neka je $\mathcal{T}'$ topologija generirana familijom polunormi $\{p_V : V \in \mathcal{N}\}$, tj.

$$\mathcal{T}' = \sigma(X, \mathcal{F}) \qquad \text{gdje je} \qquad \mathcal{F} = \{p_{V,y} : x \mapsto p_V(x - y) : V \in \mathcal{N}, y \in X\}.$$

Jer je $\mathcal{T}$ vektorska topologija, prema (ii) su sve funkcije $x \mapsto p_V(x - y)$, $V \in \mathcal{N}, y \in X$ $\mathcal{T}$-neprekidne, tako da je $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Obratno, ako je $V \in \mathcal{N}$, onda je prema notaciji iz (4.10),

$$V = \{x \in X : p_V(x) < 1\} = U(0, p_V, 1)$$

$\mathcal{T}'$-otvorena okolina 0. Jer su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ vektorske topologije, slijedi $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. □

Definicija 4.6.6. Neka je X topološki vektorski prostor. Za $A \subseteq X$ kažemo da je:

- **Ograničen** ako za svaku okolinu U od 0 postoji $t > 0$ takav da je $A \subseteq tU$.
- **Totalno ograničen** ako za svaku okolinu U od 0 postoji konačan podskup $F \subset X$ takav da vrijedi $A \subseteq F + U$.

Napomena 4.6.7. (a) U svakom normiranom prostoru se terminologija ograničenih odnosno totalno ograničenih skupova podudara s uobičajenom terminologijom tih pojmova (vidjeti Definicije 1.2.14 i 1.5.10).

(b) U topološkom vektorskom prostoru X je svaki totalno ograničen podskup $A \subseteq X$ ograničen. Zaista, neka je U proizvoljna otvorena okolina 0. Prema Propoziciji 4.5.8 i Lemi 4.5.7 (ii) postoji balansirana otvorena okolina V od 0 takva da je $V + V \subseteq U$. Jer je A totalno ograničen, postoji konačan podskup $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ takav da vrijedi $A \subseteq F + V$. Jer je V otvorena okolina 0, koristeći analogni argument kao u dokazu Leme 4.6.3 za svaki $1 \leq j \leq n$ dobivamo $0 < \delta_j < 1$ takav da je $\delta_j x_j \in V$. Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Jer je V balansirana okolina 0, imamo $\delta x_j \in V$ za sve $1 \leq j \leq n$, tako da je

$$\delta A \subseteq \delta F + \delta V \subseteq V + V \subseteq U.$$

(c) U topološkom vektorskom prostoru X je svaki kompaktan podskup K od X totalno ograničen. Zaista, neka je U proizvoljna otvorena okolina 0. Onda je $\{x+U : x \in K\}$ otvoreni pokrivač od K pa postoji konačan podskup $F \subseteq K$ takav da je $K \subseteq F + U$.

Teorem 4.6.8. *Neka je X topološki vektorski prostor. Tada je ekvivalentno:*

(i) X je normabilan.

(ii) X je lokalno konveksan te sadrži ograničenu okolinu 0.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Ako je X normabilan, tada su sve otvorene/zatvorene kugle u X (s obzirom na neku normu koja inducira pripadnu topologiju) s centrom u 0 konveksne i ograničene.

(ii) $\implies$ (i). Pretpostavimo sada da je X lokalno konveksan i neka je U ograničena okolina 0. Jer je svaki podskup ograničenog skupa u X očito ograničen, prema Propoziciji 4.5.8 možemo pretpostaviti da je, uz ograničenost, U također apsolutno konveksan. Tada je

$$\mathcal{N} := \left\{ \frac{1}{k} U : k \in \mathbb{N} \right\}$$

prebrojiva lokalna baza za X. Zaista, ako je V proizvoljna okolina 0, zbog ograničenosti od U postoji $t > 0$ takav da je $U \subseteq tV$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $t < k$. Jer je U balansiran, imamo

$$\frac{1}{k} U = \frac{1}{t} \left(\frac{t}{k} U \right) \subseteq \frac{1}{t} U \subseteq V.$$

Nadalje, tvrdimo da pripadni Minkowskijev funkcional p_U definira neprekidnu normu na X. Prema Propoziciji 4.6.2, p_U je polunorma na X, dok neprekidnost od p_U slijedi iz Teorema 4.6.5. Jer je topologija na X Haudorffova (posebno T_1), postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $x \notin \frac{1}{k}U$. Onda zbog balansiranosti od U, $x \notin tU$ za sve $t < \frac{1}{k}$, što pokazuje $p_U(x) \geq \frac{1}{k}$. Stoga ako stavimo $\|\cdot\| := p_U$, prema Teoremu 4.6.5 imamo $K_{\|\cdot\|}(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\} = U$ i topologija inducirana iz te norme se podudara s originalnom topologijom na X. □

Na kraju ovog odjeljka dokažimo i sljedeću generalizaciju Teorema 1.5.13.

Teorem 4.6.9. *Neka je X topološki vektorski prostor. Tada je ekvivalentno:*

(i) X je konačnodimenzionalan.

(ii) X sadrži kompaktnu okolinu 0.

(iii) X sadrži totalno ograničenu okolinu 0.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 4.5.17. Naime, ako je $\dim X = n < \aleph_0$, onda je X izomorfan (tj. linearno homeomorfan) s $\mathbb{F}^n$. Ako je $T : \mathbb{F}^n \to X$ proizvoljni izomorfizam (npr. definiran s (4.15)), i B zatvorena jedinična kugla u $\mathbb{F}^n$, onda je B kompaktna okolina 0 u $\mathbb{F}^n$ (prema Heine-Borelovom svojstvu), tako da je $T(B)$ kompaktna okolina 0 u X.

(ii) $\implies$ (iii). Tvrdnja slijedi direktno iz Napomene 4.6.7 (c).

(iii) $\implies$ (i). Pretpostavimo da X sadrži totalno ograničenu okolinu U od 0. Jer je svaki podskup totalno ograničenog skupa totalno ograničen, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je U balansirana. Prema Napomeni 4.6.7 (a) U je ograničen, tako da je prema dokazu Teorema 4.6.8, s

$$\mathcal{N} := \left\{ \frac{1}{2^k} U : k \in \mathbb{N} \right\}$$

definirana lokalna baza za X. Jer je U totalno ograničen, postoji konačan podskup $F \subseteq X$ takav da je $U \subseteq F + \frac{1}{2}U$. Neka je $Y = [F]$ (linearna ljuska od F). Onda je svakako $U \subseteq Y + \frac{1}{2}U$, što je ekvivalentno s $\frac{1}{2}U \subseteq Y + \frac{1}{4}U$. Dakle,

$$U \subseteq \left(Y + \frac{1}{2} U \right) \subseteq \left(Y + Y + \frac{1}{4} U \right) = Y + \frac{1}{4} U.$$

Koristeći induktivni argument dobivamo

$$U \subseteq Y + \frac{1}{2^k}U \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Jer je $\mathcal{N}$ lokalna baza za X, zaključujemo

$$U \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(Y + \frac{1}{2^k}U \right) \subseteq \overline{Y}. \tag{4.17}$$

Jer je F konačan, Y je konačne dimenzije. Prema Teoremu 4.5.17 Y je potpun, pa je prema Napomeni 4.5.12 (c) Y zatvoren u X. Dakle, prema (4.17) je $U \subseteq \overline{Y} = Y$. Jer je U okolina 0, ona je apsorbirajuća prema Lemi 4.6.3. Stoga je $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kU \subseteq Y$, odnosno $X = Y$ je konačnodimenzionalan. □

4.7 Geometrijska forma Hahn-Banachovog teorema

U lokalno konveksnim prostorima vrijedi sljedeća geometrijska varijanta Hahn-Banachovog teorema.

Teorem 4.7.1 (**Hahn-Banachov separacijski teorem**). *Neka je X lokalno konveksan prostor, te A i B međusobno disjunktni neprazni konveksni podskupovi od X*

(i) Ako je A otvoren, onda postoji $\varphi \in X^*$ i realan broj γ tako da vrijedi

$$\operatorname{Re}\varphi(a) < \gamma \leq \operatorname{Re}\varphi(b)$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$.

(ii) Ako je A kompaktan i B zatvoren, onda postoji $\varphi \in X^*$ i realni brojevi γ_1 i γ_2 tako da vijedi

$$\operatorname{Re}\varphi(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re}\varphi(b)$$

za sve $a \in A$ i $b \in B$.

U dokazu Teorema 4.7.1 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju:

Lema 4.7.2. *Svaki (ne nužno neprekidni) nenul linearni funkcional na topološkom vektorskom prostoru X je otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je $\varphi \in X^\#$, $\varphi \neq 0$. Onda je φ surjektivan pa svakako postoji $x_0 \in X$ takav da je $\varphi(x_0) = 1$. Neka je U proizvoljan otvoren skup u X i $y \in \varphi(U)$, tako da je $y = \varphi(x)$ za neki $x \in U$. Iz neprekidnosti funkcije $\mathbb{F} \to X$, $\gamma \mapsto x + \gamma x_0$ u $\gamma = 0$ dobivamo $\delta > 0$ takav da je $x + \gamma x_0 \in U$ za sve $|\gamma| < \delta$. Onda je $y + \gamma \in \varphi(U)$ za sve $|\gamma| < \delta$, odnosno otvoreni krug $K_{\mathbb{F}}(y, \delta)$ je sadržan u $\varphi(U)$. Dakle, $\varphi(U)$ je otvoren skup u $\mathbb{F}$. □

Dokaz Teorema 4.7.1. Najprije primijetimo da je tvrdnje dovoljno dokazati za slučaj kada je X realan prostor. Zaista, pretpostavimo da teorem vrijedi za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Onda u slučaju (i) postoji neprekidni $\mathbb{R}$-linearni funkcional $\varphi_0 : X \to \mathbb{R}$ i realan broj γ takav da vrijedi $\varphi_0(a) < \gamma \leq \varphi_0(b)$ za sve $a \in A$ i $b \in B$. Onda je s $\varphi : X \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix),$$

definiran neprekidni $\mathbb{C}$-linearni funkcional na X (tj. $\varphi \in X^*$) takav da vrijedi $\operatorname{Re}\varphi(a) < \gamma \leq \operatorname{Re}\varphi(b)$ za sve $a \in A$ i $b \in B$ (vidjeti dokaz Korolara 2.1.8). Analogno za slučaj (ii). Stoga u daljnjem pretpostavljamo da je X realan prostor.

(i). Fiksirajmo $a_0 \in A$ i $b_0 \in B$. Stavimo

$$x_0 := b_0 - a_0 \qquad \text{i} \qquad C := A - B + x_0.$$

Prema Lemi 4.5.7 (i) i Napomeni 4.5.3 (a) C je otvorena konveksna okolina 0 u X. Neka je $p := p_C$ Minkowskijev funkcional od C. Prema Lemi 4.6.3 i Propoziciji 4.6.2 (i) p je sublinearna funkcija na X. Iz $A \cap B = \emptyset$ slijedi $x_0 \notin C$, tako da je $p(x_0) \geq 1$ prema Propoziciji 4.6.2 (iii).

Neka je $V := \mathbb{R}x_0$ i definirajmo linearni funkcional $\varphi_0 : V \to \mathbb{R}$ s

$$\varphi_0(tx_0) := t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tvrdimo da vrijedi $\varphi_0 \leq p$ na V. Zaista, za $t \geq 0$ imamo $\varphi_0(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$, dok za $t < 0$ iz nenegativnosti od p slijedi $t = \varphi_0(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$.

Prema Hahn-Banachovom teoremu proširenja (Teorem 2.1.3), postoji linearni funkcional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\varphi|_V = \varphi_0 \qquad \text{i} \qquad \varphi(x) \leq p(x)$$

za sve $x \in X$. Posebno je $\varphi(x) \leq 1$ za sve $x \in C$, tako da je $\varphi(x) \geq -1$ za sve $x \in -C$. Stoga je $|\varphi(x)| \leq 1$ za sve $x \in C \cap (-C)$. Jer je $C \cap (-C)$ otvorena okolina 0, iz Propozicije 4.5.15 slijedi neprekidnost od φ, tj. $\varphi \in X^*$.

Nadalje, za $a \in A$ i $b \in B$ imamo $a - b + x_0 \in C$, pa je zbog $\varphi(x_0) = 1$ i otvorenosti od C,

$$\varphi(a) - \varphi(b) + 1 = \varphi(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1$$

(vidjeti dokaz Teorema 4.6.5 (i)). Dakle $\varphi(a) < \varphi(b)$, tako da su $\varphi(A)$ i $\varphi(B)$ su međusobno disjunktni podskupovi od $\mathbb{R}$, takvi da se $\varphi(A)$ nalazi s lijeve strane u odnosu na $\varphi(B)$. Nadalje, prema Lemi 4.7.2 $\varphi(A)$ je otvoren u $\mathbb{R}$. Stoga, ako stavimo $\gamma := \sup \varphi(A)$ dobivamo $\varphi(a) < \gamma \leq \varphi(b)$ za sve $a \in A$ i $b \in B$, kao što je i trebalo pokazati.

(ii). Jer je X lokalno konveksan prostor, prema Lemi 4.5.7 (iii) postoji konveksna otvorena okolina V od 0 takva da je $(A + V) \cap (B + V) = \emptyset$. Jer je $B \subseteq B + V$, onda je svakako i $(A + V) \cap B = \emptyset$. Prema tvrdnji (i), primijenjenoj na skup $A + V$ umjesto A, dobivamo $\varphi \in X^*$ takav da su $\varphi(A + V)$ i $\varphi(B)$ međusobno disjunktni konveksni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $\varphi(A + V)$ otvoren te se nalazi s lijeve strane u odnosu na $\varphi(B)$. Jer je $\varphi(A)$ kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ sadržan u $\varphi(A + V)$, imamo $\sup \varphi(A) < \inf \varphi(B)$, što je ekvivalentno iskazanoj tvrdnji.

□

Napomena 4.7.3. Primijetimo da u dokazu dijela (i) Teorema 4.7.1 nismo koristili lokalnu konveksnost prostora X, tako da tvrdnja (i) vrijedi u svakom topološkom vektorskom prostoru.

Korolar 4.7.4. *Ako je X lokalno konveksan prostor, onda X^* razdvaja točke od X. Posebno, ako je X netrivijalan, onda je i X^* netrivijalan.*

Dokaz. Pretpostavimo da $X \neq \{0\}$ i neka su $x, y \in X$ dva različita vektora. Tvrdnja slijedi direktno iz tvrdnje (ii) Teorema 4.7.1 primijenjene na jednočlane skupove $A = \{x\}$ i $B = \{y\}$. □

Korolar 4.7.5. *Neka je X lokalno konveksan prostor i Y potprostor od X.*

(i) Ako Y nije gust u X, onda za svaki $x_0 \in X \setminus \overline{Y}$ postoji $\varphi \in X^*$ takav da je $\varphi(x_0) = 1$ i $\varphi(x) = 0$ za sve $x \in Y$.

(ii) Ako je $\varphi \in Y^*$ tada postoji $\hat{\varphi} \in X^*$ takav da je $\hat{\varphi}|_Y = \varphi$.

Dokaz. (i). Prema Teoremu 4.7.1 (ii) primijenjenom na $A = \{x_0\}$ i $B = \overline{Y}$ postoji $\varphi_0 \in X^*$ takav da $\varphi_0(x_0) \notin \varphi_0(Y)$. Dakle, $\varphi_0(Y)$ je pravi potprostor od $\mathbb{F}$, iz čega nužno slijedi $\varphi_0(Y) = \{0\}$. Preostaje definirati $\varphi := \frac{\varphi_0}{\varphi_0(x_0)}$.

(ii). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $\varphi \neq 0$. Onda postoji $x_0 \in Y$ takav da je $\varphi(x_0) = 1$. Jer je φ neprekidan na Y, $Y_0 := \ker \varphi$ je zatvoren potprostor od Y pa se x_0 ne nalazi u X-zatvaraču od Y_0 (tj. zatvaraču od Y_0 kao podskupa od X). Naime, prema definiciji relativne topologije, Y-zatvarač od Y_0 jednak je presjeku Y i X-zatvarača od Y_0, tako da je $Y_0 = \overline{Y_0}^Y = Y \cap \overline{Y_0}^X$.

Prema (i) postoji $\hat{\varphi} \in X^*$ takav da je $\hat{\varphi}(x_0) = 1$ i $\hat{\varphi}(x) = 0$ za sve $x \in Y_0$. Fiksirajmo $x \in Y$. Onda je $x - \varphi(x)x_0 \in Y_0$ tako da je

$$\hat{\varphi}(x) - \varphi(x) = \hat{\varphi}(x) - \varphi(x)\hat{\varphi}(x_0) = \hat{\varphi}(x - \varphi(x)x_0) = 0.$$

Dakle, $\hat{\varphi}|_Y = \varphi$. □

Korolar 4.7.6. *Neka je X lokalno konveksan prostor i B zatvoren apsolutno konveksan podskup od X. Ako je $x_0 \in X \setminus B$ onda postoji $\varphi \in X^*$ takav da je $\varphi(x_0) > 1$ i $|\varphi(x)| \le 1$ za sve $x \in B$.*

Dokaz. Prema Teoremu 4.7.1 (ii) primijenjenom na $A = \{x_0\}$ i B iz iskaza postoji $\varphi_0 \in X^*$ takav da $\varphi_0(x_0) \notin \overline{\varphi_0(B)}$. Jer je B apsolutno konveksan isto vrijedi i za $\varphi_0(B)$ pa onda i za njegov zatvarač $\overline{\varphi_0(B)}$ (DZ). Prema Primjeru 4.5.2 (a) postoji $s > 0$ takav da je

$$\overline{\varphi_0(B)} = \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \le s\}.$$

Ako je $\varphi_0(x_0) = re^{i\theta}$ za neko $r > 0$ i $\theta \in [0, 2\pi\rangle$, onda je nužno $r > s$. Stoga, ako definiramo

$$\varphi := \frac{1}{se^{i\theta}}\varphi_0,$$

onda je $\varphi \in X^*$, $\varphi(x_0) > 1$ i $|\varphi(x)| \le 1$ za sve $x \in B$. □

4.8 Slaba topologija lokalno konveksnog prostora

Teorem 4.8.1. *Neka je X vektorski prostor, X' potprostor algebarskog duala $X^{\#}$ koji razdvaja točke od X i $\mathcal{T} = \sigma(X, X')$ slaba topologija na X inducirana s X'.*

(i) $\mathcal{T}$ je lokalno konveksna topologija na X koja se podudara s topologijom generiranom separirajućom familijom polunormi $x \mapsto |\varphi(x)|$, $\varphi \in X'$.

(ii) Vrijedi $(X, \mathcal{T})^* = X'$, tj. dualan prostor od X s obzirom na topologiju $\mathcal{T}$ je X'.

U dokazu Teorema 4.8.1 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Lema 4.8.2. *Neka je X vektorski prostor i $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ konačan podskup algebarskog duala $X^{\#}$. Za $\varphi \in X^{\#}$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $\varphi \in [\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}]$, tj. φ je linearna kombinacija funkcionala $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

(ii) Postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $x \in X$ vrijedi

$$|\varphi(x)| \le C \max_{1 \le i \le n} |\varphi_i(x)|.$$

(iii) $\bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi$.

Dokaz. Očito vrijedi (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Definirajmo preslikavanje $\phi : X \to \mathbb{F}^n$ s

$$\phi(x) := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)). \tag{4.18}$$

Očito je ϕ linearni operator. Prema pretpostavci je $\ker \phi \subseteq \ker \varphi$, tako da je s

$$\psi_0(\phi(x)) := \varphi(x) \tag{4.19}$$

dobro definiran linearni funkcional na $\operatorname{ran} \phi(X)$. Neka je ψ proizvoljan linearni funkcional na $\mathbb{F}^n$ koji proširuje ψ_0. Onda postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$\psi(u_1, \ldots, u_n) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n. \tag{4.20}$$

Stoga je prema (4.18), (4.19) i (4.20)

$$\varphi(x) = \psi(\phi(x)) = \psi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x)$$

za sve $x \in X$. □

Dokaz Teorema 4.8.1. (i). Neka je $x_0 \in X$ i $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ proizvoljna mreža u X. Prema Propoziciji 4.4.3 vrijedi

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x_\alpha) \to \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in X'.$$

Označimo s $\mathcal{T}'$ topologiju generiranu polunormama $x \mapsto |\varphi(x)|$, $\varphi \in X'$. Onda prema dokazu Propozicije 4.5.10 vrijedi

$$x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}'} x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\varphi(x_\alpha - x_0)| \to 0 \quad \forall \varphi \in X'.$$

Zbog linearnosti svakog $\varphi \in X'$, $|\varphi(x_\alpha - x_0)| \to 0$ je ekvivalentno s $\varphi(x_\alpha) \to \varphi(x_0)$. Stoga zaključujemo da topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ imaju iste konvergentne mreže, pa su one prema Korolaru 4.3.10 nužno jednake. Posebno, prema Propoziciji 4.4.3 je $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ lokalno konveksna topologija na X.

(ii). Prema definiciji od $\mathcal{T} = \sigma(X, X')$ je svaki $\varphi \in X'$ neprekidan na X. Obratno, neka je φ $\mathcal{T}$-neprekidan linearni funkcional na X. Prema Propoziciji 4.5.15 (v) postoji $C > 0$ i konačan podskup $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq X'$ tako da za sve $x \in X$ vrijedi

$$|\varphi(x)| \leq C \max_{1\leq i\leq n} |\varphi_i(x)|.$$

Iz Leme 4.8.2 slijedi $\varphi \in [\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}] \subseteq X'$, jer je prema pretpostavci X' potprostor od $X^\#$. Dakle, $(X, \mathcal{T})^* = X'$. □

Definicija 4.8.3. Neka je X lokalno konveksan prostor. Topologija $\sigma(X, X^*)$ inducirana svim neprekidnim linearnim funkcionalima na X zove se **slaba topologija** (ili **w-topologija**). Također ju označavamo s $\mathcal{T}_w$.

Napomena 4.8.4. Neka je $(X, \mathcal{T})$ lokalno konveksan prostor.

(a) Prema Korolaru 4.7.4 X^* razdvaja točke od X, tako da je prema Teoremu 4.8.1 $(X, \mathcal{T}_w)$ lokalno konveksan prostor. Slično kao u Propoziciji 4.5.10, za $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ i $\varepsilon > 0$ pišemo

$$U(0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varepsilon) := \{x \in X : |\varphi_1(x)| < \varepsilon, \dots, |\varphi_n(x)| < \varepsilon\} \tag{4.21}$$

i familija tih skupova čini apsolutno konveksnu lokalnu bazu slabe topologije.

(b) Jer su prema definiciji svi elementi duala X^* neprekidni, očito je $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}$. Nadalje, za mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X i $x_0 \in X$ vrijedi

$$x_\alpha \xrightarrow{w} x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x_\alpha) \to \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in X^*.$$

(c) Ako je X beskonačnodimenzionalan, onda svaka slaba okolina 0 sadrži neki beskonačnodimenzionalni potprostor od X. Zaista, dovoljno je to pokazati da vrijedi za sve bazne okoline $U(0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varepsilon)$. Neka su stoga $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ i $\varepsilon > 0$. Onda je očito

$$Y := \bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i \subseteq U(0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varepsilon).$$

Nadalje, jer je Y kodimenzije najviše n u X, Y je nužno beskonačnodimenzionalan, jer je X takav (naime, prema (1.14) imamo $\dim X \leq n + \dim Y$).

Posebno, ako je X beskonačnodimenzionalan niti jedna slaba okolina 0 nije ograničena, pa stoga prema Teoremu 4.6.8 slaba topologija nije normabilna.

(d) Prema Teoremu 4.8.1 je $(X, \mathcal{T}_w)^* = X^*$, odnosno linearni funkcional na X je neprekidan (u originalnoj topologiji na X) ako i samo ako je slabo neprekidan.

(e) Podskup A od X je slabo ograničen u smislu Definicije 4.6.6 (tj. za svaku slabu okolinu U od 0 postoji $t > 0$ takav da je $A \subseteq tU$) ako i samo ako je slabo ograničen u smislu Definicije 3.1.3 (tj. $\sup_{x\in A} |\varphi(x)| < \infty$ za sve $\varphi \in X^*$). Zaista, jer familija skupova iz (4.21) čini lokalnu bazu slabe topologije na X, slaba ograničenost od A u smislu Definicije 4.6.6 je ekvivalentna s time da za svaki $\varepsilon > 0$ i konačan broj $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ postoji $t > 0$ takav da je

$$A \subseteq tU(0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varepsilon) = \{x \in X : |\varphi_1(x)| < t\varepsilon, \ldots, |\varphi_n(x)| < t\varepsilon\},$$

a to upravno znači da su svi funkcionali $\varphi \in X^*$ ograničene funkcije na A.

Nadalje, ako je X normiran prostor, slaba ograničenost od $A \subseteq X$ je prema Teoremu 3.1.5 ekvivalentna s time da je A ograničen u normi. Posebno, svaki slabo konvergentan niz u normiranom prostoru X je ograničen u normi.

Primjer 4.8.5. U ovisnosti o $1 \le p \le \infty$ analizirajmo slabu konvergenciju kanonskog niza vektora $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u Banachovom prostoru ℓ^p.

- Ako je $p > 1$, onda $e_k \xrightarrow{w} 0$. Zaista, najprije prepostavimo da je $1 < p < \infty$. Ako je $\varphi \in (\ell^p)^*$, onda Prema Teoremu 1.9.1 postoji jedinstven $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ (gdje je kao i obično q konjuigrani eksponent od p) takav da je $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\eta_k$ za sve $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Onda je $\lim_{k\to\infty} \varphi(e_k) = 0$. Prema Napomeni 4.8.4 (b) to je ekvivalentno s $e_k \xrightarrow{w} 0$.

  Sada pretpostavimo da je $p = \infty$. Ako bi bilo $e_k \not\xrightarrow{w} 0$, onda bi postojao $\varepsilon > 0$, $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ i podniz $(e_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ od $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $|\varphi(e_{p_k})| \ge \varepsilon$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo $\lambda_k \in \mathbb{F}$ takav da je $|\lambda_k| = 1$ i $\lambda_k\varphi(e_{p_k}) = |\varphi(e_{p_k})|$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $x_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{p_k}$. Onda je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ i vrijedi $\|x_n\|_\infty = 1$ te $\varphi(x_n) = \sum_{k=1}^{n} |f(e_{p_k})| \ge n\varepsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Time smo došli do kontradikcije s pretpostavkom da je φ ograničen.

- S druge strane, u prostoru ℓ^1 niz $(e_k)_k$ nije slabo konvergentan. Naime, za $\varphi \in (\ell^1)^*$ induciran nizom $(-1, 1, -1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$, odnosno $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\xi_k$, $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, imamo $\varphi(e_k) = (-1)^k$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Napomena 4.8.6. Poznati *Schurov teorem* kaže da se *za nizove u* ℓ^1 slaba konvergencija i konvergencija u normi podudaraju, tj. za proizvoljan niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u ℓ^1 i $x_0 \in \ell^1$ vrijedi

$$\|x_n - x_0\|_1 \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \xrightarrow{w} x_0.$$

To nipošto ne znači da se na ℓ^1 slaba topologija podudara s topologijom induciranom iz norme. Naime, kao što ćemo uskoro vidjeti, na beskonačnodimenzionalnim normiranim prostrima slaba topologija ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti (Propozicija 4.8.7), tako da nizovi nisu dovoljni za opis slabe topologije (tj. za to su nam nužne mreže). Dokaz Schurovog teorema možete npr. naći u [13, 30].

U mnogim situacijama je slaba topologija na lokalno konveksnom prostoru X strogo slabija od originalne topologije. Također se može desiti da se one podudaraju. Npr. prema Teoremu 4.8.1 se za proizvoljan lokalno konveksan prostor X slaba topologija na $(X, \mathcal{T}_w)$ podudara s $\mathcal{T}_w$. S druge strane, za normirane prostore imamo sljedeći rezultat.

Propozicija 4.8.7. *Neka je X normiran prostor. Tada je ekvivalentno:*

(i) X je konačnodimenzionalan.

(ii) Slaba topologija na X se podudara s topologijom induciranom iz norme.

(iii) Slaba topologija na X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

Dokaz. Očito (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Pretpostavimo da slaba topologija na X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Onda prema Napomeni 4.8.4 (a) postoji prebrojiva familija $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ okolina 0 oblika

$$U_n = U(0, \varphi_1^n, \ldots, \varphi_{k(n)}^n, \varepsilon_n),$$

gdje je za $n \in \mathbb{N}$, $k(n) \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > 0$ i $\varphi_1^n, \ldots, \varphi_{k(n)}^n \in X^*$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$S = \{\varphi_i^n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k(n)\}.$$

Tvrdimo da S razapinje X^*, tj. da sve svaki $\varphi \in X^*$ može prikazati kao (konačna) linearna kombinacija funkcionala iz S. Fiksirajmo stoga $\varphi \in X^*$. Zbog neprekidnosti od φ je

$$U := \{x \in X : |\varphi(x)| < 1\}$$

(otvorena) okolina 0 pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$U_n = U(0, \varphi_1^n, \ldots, \varphi_{k(n)}^n, \varepsilon_n) \subseteq U.$$

Stavimo

$$Y_n := \bigcap_{1 \leq i \leq k(n)} \ker \varphi_i^n.$$

Onda je $Y_n \subseteq U$ (Napomena 4.8.4). Fiksirajmo $x \in Y_n$. Onda je za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ i $\lambda x \in Y_n$ (jer je Y_n potprostor od X), tako da je $\lambda x \in U$. Dakle, $|\lambda||\varphi(x)| = |\varphi(\lambda x)| < 1$ za sve $\lambda \in \mathbb{F}$, tako da je nužno $\varphi(x) = 0$. Odavde zaključujemo da je $Y_n \subseteq \ker \varphi$, pa je prema Lemi 4.8.2 $\varphi \in [\{\varphi_1^n, \ldots, \varphi_{k(n)}^n\}] \subseteq [S]$.

Napokon, jer je S prebrojiv i $[S] = X^*$, zaključujemo $\dim X^* \leq \aleph_0$. Kako je X^* uvijek Banachov prostor (Propozicija 1.6.8, iz Korolara 1.4.13 slijedi $\dim X^* < \aleph_0$. Stoga je i $\dim X < \aleph_0$. □

Napomena 4.8.8. Ako je X beskonačnodimenzionalan normiran prostor, onda prema Propoziciji 4.8.7 slaba topologija na X ne zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Stoga u tom slučaju nizovi neće biti dovoljni za opis slabe konvergencije, već moramo raditi s mrežama.

Propozicija 4.8.9. *Neka su Y i Y normirani prostori. Za linearni operator $T : X \to Y$ je ekvivalentno:*

(i) T je ograničen (tj. T je $(\|\cdot\|, \|\cdot\|)$-neprekidan).

(ii) T je $(\|\cdot\|, w)$-neprekidan.

(iii) T je (w, w)-neprekidan.

Dokaz. Očito (iii) $\implies$ (ii).

(ii) $\implies$ (i). Pretpostavimo da je T $(\|\cdot\|, w)$-neprekidan. Trebamo pokazati da je $T(S_X)$ u normi ograničen podskup od Y. Neka je $\varphi \in Y^*$. Onda je φ slabo neprekidan. Jer je T $(\|\cdot\|, w)$-neprekidan, slijedi da je $\varphi \circ T \in X^*$. Stoga je $\varphi \circ T$ ograničen, odnosno $\sup_{x \in S_X} |\varphi(Tx)| < \infty$. Jer to vrijedi za sve $\varphi \in Y^*$, zaključujemo da je $T(S_X)$ slabo ograničen u Y. Prema Teoremu 3.1.5 to je ekvivalentno s time da je $T(S_X)$ ograničen u normi.

(i) $\implies$ (iii). Pretpostavimo da je T ograničen i neka je $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža u X koja slabo konvergira prema $x_0 \in X$. Jer je T ograničen, za svaki $\varphi \in Y^*$ je $\varphi \circ T \in X^*$, pa iz $x_\alpha \xrightarrow{w} x_0$ slijedi

$$\varphi(Tx_\alpha) = (\varphi \circ T)(x_\alpha) \to (\varphi \circ T)(x_0) = \varphi(Tx_0)$$

za sve $\varphi \in Y^*$. Prema Napomeni 4.8.4 (b) to upravo znači da $Tx_\alpha \xrightarrow{w} Tx_0$. □

Jer je slaba topologija lokalno konveksnog prostora X slabija od originalne topologije, za svaki podskup A od X je $\overline{A} \subseteq \overline{A}^w$ (tj. zatvarač od A u originalnoj topologiji je sadržan u slabom zatvaraču od A). Općenito je ta inkluzija striktna. Npr. u svakom beksonačnodimenzionalnom normiranom prostoru X je sfera S_X očito zatvorena u normi, dok je $\overline{S_X}^w = B_X$ (provjerite za DZ). S druge strane, za konveksne skupovi se ti zatvarači podudaraju. Naime, imamo sljedeći bitan rezultat.

Teorem 4.8.10 (Mazur). *Neka je X lokalno konveksan prostor i $A \subseteq X$ konveksan podskup. Onda je $\overline{A}^w = \overline{A}$. Posebno, konveksan podskup u X je zatvoren ako i samo ako je slabo zatvoren.*

Dokaz. Prema prethodnom komentaru dovoljno je dokazati da vrijedi $\overline{A}^w \subseteq \overline{A}$. Ako je $\overline{A} = X$ to je trivijalno, pa pretpostavimo da postoji $x_0 \in X \setminus \overline{A}$. Prema Hahn-Banachovom separacijskom teoremu (Teorem 4.7.1 (b)) postoji $\varphi \in X^*$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da za sve $x \in \overline{A}$ vrijedi

$$\operatorname{Re}\varphi(x_0) < \gamma < \operatorname{Re}\varphi(x).$$

Onda je skup $\{x \in X : \operatorname{Re}\varphi(x) < \gamma\}$ slaba okolina od x_0 koja ne siječe A. Dakle, $x_0 \notin \overline{A}^w$. Time smo dokazali teorem. $\square$

Korolar 4.8.11. *Neka je X lokalno konveksan prostor koji ima prebrojivu lokalnu bazu. Ako je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u X koji slabo konvergira prema $x_0 \in X$, onda postoji niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u $\operatorname{conv}(\{x_k : k \in \mathbb{N}\})$ koji konvergira prema x_0 u originalnoj topologiji na X.*

Dokaz. Neka je $A := \operatorname{conv}(\{x_k : k \in \mathbb{N}\}) \subseteq X$. Onda je prema Teoremu 4.8.10 $x_0 \in \overline{A}^w = \overline{A}$. Jer prema pretpostavci X ima prebrojivu lokalnu bazu (stoga zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti), preostaje primijeniti Propoziciju 4.2.16 (ii). $\square$

Primjer 4.8.12. U Primjeru 4.8.5 smo vidjeli da za $1 < p \leq \infty$ u svakom prostoru ℓ^p vrijedi $e_k \xrightarrow{w} 0$. Prema Korolaru 4.8.11 neka konveksna kombinacija vektora e_k, $k \in \mathbb{N}$, konvergira u p-normi prema 0. Konkretno, za $n \in \mathbb{N}$ neka je $y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k$. Onda je $y_n \in \operatorname{conv}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ i

$$\|y_n\|_p = \begin{cases} n^{\frac{1}{p}-1} & \text{za } 1 < p < \infty \\ \frac{1}{n} & \text{za } p = \infty. \end{cases}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, tako da svakako $\|y_n\|_p \to 0$.

S druge strane, ne postoji konveksna kombinacija vektora e_k, $k \in \mathbb{N}$, koja u 1-normi konvergira prema 0. Zaista, za proizvoljne $n \in \mathbb{N}$ i $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^n t_k = 1$, imamo

$$\|t_1e_1 + \ldots + t_ne_n\|_1 = \sum_{k=1}^n t_k = 1.$$

4.9 Slaba* topologija na dualu lokalno konveksnog prostora

Neka je X lokalno konveksan prostor. Analogno kao u kontekstu normiranih prostora, za svaki $x \in X$ definiramo funkciju $\hat{x} : X^* \to \mathbb{F}$ s

$$\hat{x}(\varphi) := \varphi(x), \quad \varphi \in X^*$$

i kanonsko preslikavanje

$$J_X : X \to (X^*)^\#, \qquad J_X x := \hat{x}.$$

Očito je J_X linearno preslikavanje te je njegova slika $\operatorname{ran} J_X = \{\hat{x} : x \in X\}$ vektorski potprostor algebarskog duala od X^* koja razdvaja točke od X^*.

Definicija 4.9.1. Neka je X lokalno konveksan prostor. **Slaba*-topologija** (ili **w^*-topologija**) na X^* je topologija $\sigma(X^*, \operatorname{ran} J_X)$, tj. najslabija topologija na X^* s obzirom na koju su sve funkcije $\hat{x}$, $x \in X$, neprekidne. Označavamo ju i s $\mathcal{T}_{w^*}$.

Imamo sljedeće w^*-analogone Napomene 4.8.4 i Propozicije 4.8.7.

Napomena 4.9.2. Neka je X lokalno konveksan prostor.

(a) Prema Teoremu 4.8.1 (za $X' = \operatorname{ran} J_X$) slaba*-topologija na X^* je lokalno konveksna topologija. Za $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X^*$ i $\varepsilon > 0$ pišemo

$$U(0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{\varphi \in X^* : |\varphi(x_1)| < \varepsilon, \ldots, |\varphi(x_n)| < \varepsilon\} \tag{4.22}$$

i familija tih skupova čini apsolutno konveksnu lokalnu bazu slabe*-topologije.

(b) Za mrežu $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X^* i $\varphi_0 \in X^*$ vrijedi

$$\varphi_\alpha \xrightarrow{w^*} \varphi_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_\alpha(x) \to \varphi_0(x) \quad \forall x \in X.$$

(c) Ako je X beskonačnodimenzionalan (što je prema Hahn-Banachovom separacijskom teoremu ekvivalentno s time da je X^* beskonačnodimenzionalan), onda svaka slaba*-okolina 0 sadrži neki beskonačnodimenzionalni potprostor od X^*. Posebno, u tom slučaju niti jedna slaba*-okolina 0 nije ograničena, pa stoga prema Teoremu 4.6.8 slaba*-topologija nije normabilna.

(d) Prema Teoremu 4.8.1 je $(X^*, \mathcal{T}_{w^*})^* = \operatorname{ran} J_X$, odnosno linearni funkcional φ na X^* je slabo*-neprekidan ako i samo ako postoji (nužno jedinstven) $x \in X$ takav da vrijedi $\varphi = \hat{x} = J_X x$.

(e) Podskup A od X^* je slabo*-ograničen u smislu Definicije 4.6.6 (tj. za svaku slabu*-okolinu U od 0 postoji $t > 0$ takav da je $A \subseteq tU$) ako i samo ako samo ako je slabo*-ograničen u smislu Definicije 3.1.3 (tj. $\sup_{\varphi\in A} |\varphi(x)| < \infty$ za sve $x \in X$).

Nadalje, ako je X Banachov prostor, slaba*-ograničenost od $A \subseteq X^*$ je prema Teoremu 3.1.6 ekvivalentna s time da je A uniformno ograničen (tj. ograničen u operatorskoj normi). Posebno, svaki slabo*-konvergentan niz u X^* je uniformno ograničen. Za razliku od analogne tvrdnje za slabu topologiju, Primjer 3.1.7 pokazuje da je ovdje krucijalna pretpostavka potpunosti od X. Naime, ako je za $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in c_{00}^*$ definiran s $\varphi_n((\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}) := n\xi_n$, onda niz $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo*-konvergira prema 0, iako nije uniformno ograničen.

Propozicija 4.9.3. *Neka je X normiran prostor. Promotrimo sljedeće uvjete:*

(i) X je konačnodimenzionalan.

(ii) Slaba-topologija na X^* se podudara s topologijom induciranom iz operatorske norme.*

(iii) Slaba-topologija na X^* zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.*

Tada su uvjeti (i) i (ii) ekvivalentni i povlače uvjet (iii). Nadalje, ako je X Banachov prostor, onda su sva tri uvjeta ekvivalentna.

Dokaz. Očito (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii), dok (ii) $\implies$ (i) slijedi iz Napomene 4.9.2 (c).

Pretpostavimo sada da je X Banachov prostor. Koristeći analogne argumente kao u dokazu implikacije (iii) $\implies$ (i) Propozicije 4.8.7 dobili bismo prebrojiv podskup S od X takav da je $X = [A]$. Onda bi iz Korolara 1.4.13 slijedilo $\dim X < \aleph_0$ (provjerite sve detalje za DZ). □

Napomena 4.9.4. U kontrastu s Propozicijom 4.8.7 za slabu topologiju, u Propoziciji 4.9.3 implikacija (iii) $\implies$ (i) općenito ne vrijedi ako X nije potpun prostor. Na primjer, neka je X bilo koji normiran prostor prebrojive algebarske dimenzije (npr. $X = c_{00}$). Fiksirajmo neku algebarsku bazu $\mathcal{B} = \{b_n : b \in \mathbb{N}\}$ za X, te za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$p_n(x^*) := |x^*(b_n)|, \quad x^* \in X^*.$$

Onda je $\mathcal{P} := \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva separirajuća familija polunormi na X^* i topologija na X^* generiana familijom $\mathcal{P}$ je upravo slaba*-topologija na X^*. S druge strane, jer je familija $\mathcal{P}$ prebrojiva, iz Propozicije 4.5.10 slijedi da je slaba*-topologija na X^* metrizabilna, pa posljedično zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti.

Slabo*-neprekidni linearni operatori između duala normiranih prostora su upravo dualni operatori ograničenih linearnih operatora. Preciznije, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Propozicija 4.9.5. *Neka su X i Y normirani prostori. Linearni operator $S : Y^* \to X^*$ je neprekidan u paru slabih*-topologija ako i samo ako postoji ograničen linearni operator $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ takav da je $S = T^*$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je $S = T^*$ za neki $T \in \mathrm{B}(X, Y)$. Neka je $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u Y^* koja slabo*-konverigra prema $\varphi_0 \in Y^*$, tj. $\varphi_\alpha(y) \to \varphi_0(y)$ za sve $y \in Y$. Onda

$$(S\varphi_\alpha)(x) = \varphi_\alpha(Tx) \to \varphi_0(Tx) = (S\varphi_0)(x)$$

za sve $x \in X$, odnosno $S\varphi_\alpha \overset{w^*}{\to} S\varphi_0$.

Obratno, pretpostavimo da je S (w^*, w^*)-neprekidan. Za fiksirani $x \in X$ je s

$$\varphi \mapsto (S\varphi)(x), \quad \varphi \in Y^*,$$

definiran w^*-neprekidni linearni funkcional na Y pa prema Napomeni 4.9.2 (d) postoji jedinstven $Tx \in Y$ takav da vrijedi

$$(S\varphi)(x) = \widehat{Tx}(\varphi) = \varphi(Tx) \quad \forall\varphi \in Y^*. \tag{4.23}$$

Definirajamo preslikavanje $T : X \to Y$ s $T : x \mapsto Tx$. Lako se provjeri da je T linearni operator (DZ). Tvrdimo da je da operator T ograničen i da vrijedi $S = T^*$. Najprije primijetimo da je S ograničen. Zaista, neka je $(\varphi_k)_k$ niz u Y^* takav da $\|\varphi_k\| \to 0$ i $\|S\varphi_k - \psi\| \to 0$ za neki $\psi \in X^*$. Onda $\varphi_k \overset{w^*}{\to} 0$ pa (w^*, w^*)-neprekidnost od S povlači $S\varphi_k \overset{w^*}{\to} 0$. Također, $S\varphi_k \overset{w^*}{\to} \psi$. Jer je slaba*-topologija Hausdorffova, nužno je $\psi = 0$. Jer su X^* i Y^* uvijek Banachov prostori, zaključujemo da je S ograničen prema teoremu o zatvorenom grafu (Teorem 3.2.7). Prema Korolaru 2.2.1 za $x \in X$ imamo

$$\|Tx\| = \sup_{\varphi\in S_{Y^*}} |\varphi(Tx)| = \sup_{\varphi\in S_{Y^*}} |(S\varphi)(x)| \le \|S\|\|x\|,$$

tako da je T ograničen, a iz (4.23) je jasno da je $S = T^*$. □

Slaba*-topologija zadovoljava sljedeće bitno svojstvo.

Teorem 4.9.6 (**Banach-Alaogluov[7] teorem**). *Neka je X lokalno konveksan prostor i V okolina 0 u X. Onda je skup*

$$K(V) := \{\varphi \in X^* : |\varphi(x)| \le 1 \text{ za sve } x \in V\}$$

slabo-kompaktan.*

Napomena 4.9.7. Skup $K(V)$ iz Teorema 4.9.6 se obično zove **polara** od V. Očito je $K(V)$ apsolutno konveksan w^*-zatvoren podskup od X^*.

Dokaz Teorema 4.9.6. Neka je $\mathbb{F}^X = \prod_{x\in X}\mathbb{F}$ opskrbljen s produktnom topologijom $\mathcal{T}_{pr}$ (vidjeti Primjer 4.4.8). Prema Propoziciji 4.4.9 se relativna produktna topologija na $X^* \subseteq \mathbb{F}^X$ podudara sa slabom *-topologijom na X^*, odnosno inkluzija

$$\iota : (X^*, \mathcal{T}_{w^*}) \to (\mathbb{F}^X, \mathcal{T}_{pr}), \qquad \iota(\varphi) = \varphi$$

je homeomorfizam na svoju sliku. Najprije dokažimo da je $K(V)$ $\mathcal{T}_{pr}$-zatvoren podskup od $\mathbb{F}^X$. Zaista, neka je $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u $K(V)$ i $\varphi \in \mathbb{F}^X$ tako da $\varphi_\alpha \overset{\mathcal{T}_{pr}}{\to} \varphi$. To znači da vrijedi $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ za sve $x \in X$. Onda za $x, y \in X$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ imamo

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x + \mu y) &= \lim_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(\lambda x + \mu y) = \lim_{\alpha\in\Lambda}(\lambda\varphi_\alpha(x) + \mu\varphi_\alpha(y)) = \lambda \lim_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(x) + \mu \lim_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(y)\\ &= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).\end{aligned}$$

Dakle, φ je linearni funkcional na X. Nadalje, jer je $|\varphi_\alpha(x)| \le 1$ za sve $x \in V$ i $\alpha \in \Lambda$, onda je i $|\varphi(x)| \le 1$ za sve $x \in V$. Posebno, jer je V okolina 0 u X i φ je ograničen na V, prema Propoziciji 4.5.15 φ je neprekidan. Sve zajedno, $\varphi \in K(V)$, pa $\mathcal{T}_{pr}$-zatvorenost od $K(V)$ slijedi iz Propozicije 4.3.9.

[7] Leonidas Alaoglu (1914.–1981.), kanadsko-američki matematičar

Nadalje, jer je prema Lemi 4.6.3 svaka okolina 0 u X apsorbirajuća, za svaki $x \in X$ postoji $r(x) > 0$ takav da je $x \in r(x)V$. Stoga je

$$|\varphi(x)| \leq r(x) \quad \text{za sve } x \in X \text{ i } \varphi \in K(V),$$

odnosno

$$K(V) \subseteq \prod_{x \in X} B_{\mathbb{F}}(0, r(x)), \tag{4.24}$$

gdje je za $x \in X$, $B_{\mathbb{F}}(0, r(x))$ zatvoreni krug u $\mathbb{F}$ s centrom u 0 radijusa $r(x)$. Prema Tihonovljevom teoremu (Teorem 4.4.10) $\prod_{x \in X} B_{\mathbb{F}}(0, r(x))$ je $\mathcal{T}_{pr}$-kompaktan prostor. Jer je prema dokazanom $K(V)$ $\mathcal{T}_{pr}$-zatvoren podskup od $\mathbb{F}^X$, iz (4.24) i Propozicije 1.5.4 slijedi da je $K(V)$ također $\mathcal{T}_{pr}$-kompaktan. Napokon, jer se na X^* (pa posebno i na $K(V)$) relativna produktna topologija podudara sa slabom*-topologijom, zaključujemo da je $K(V)$ slabo*-kompaktan. □

Ako je X normiran prostor i $V = B_X$ zatvorena jedinična kugla u X, onda je polara od B_X upravo B_{X^*} (zatvorena jedinična kugla duala X^*). Time dobivamo klasičnu varijantu Teorema 4.9.6.

Korolar 4.9.8 (**Banach-Alaogluov teorem za normirane prostore**). *Neka je X normiran prostor. Onda je B_{X^*} slabo*-kompaktan podskup od X^*.*

Korolar 4.9.9. *Neka je X Banachov prostor. Za $A \subseteq X^*$ je ekvivalentno:*

(i) A je slabo-kompaktan.*

(ii) A je slabo-zatvoren i slabo*-ograničen.*

(iii) A je slabo-zatvoren i uniformno ograničen.*

Posebno, slaba-topologija na X^* zadovoljava Heine-Boroelovo svojstvo.*

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Neka je A slabo*-kompaktan. Onda je prema Napomeni 4.6.7 (b) i (c) A slabo*-ograničen. Slaba*-zatvorenost od A slijedi iz Napomene 4.1.5 (a), jer je slaba*-topologija na X^* Hausdorffova.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Jer je X Banachov prostor, Prema Teoremu 3.1.6 proizvoljan podskup od X^* je slabo*-ograničen ako i samo ako je uniformno ograničen.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Neka je A slabo*-zatvoren i uniformno ograničen. Onda postoji $r > 0$ takav da je $A \subseteq rB_{X^*}$. Prema Korolaru 4.9.8 B_{X^*} je slabo*-kompatan skup, pa isto vrijedi i za rB_{X^*}. Stoga je i A slabo*-kompaktan skup kao zatvoren podskup slabo*-kompaktnog skupa rB_{X^*} (Propozicija 1.5.4). □

Prema Propoziciji 4.9.3 znamo da slaba*-topologija na dualu beskonačnodimenzionalnog normiranog prostora X ne zadvoljava prvi aksiom prebrojivosti, pa stoga nije metrizabilna. Ipak, ako je X separabilan, imamo sljedeći rezultat.

Propozicija 4.9.10. *Neka je X separabilan normiran prostor. Ako je $A \subseteq X^*$ ograničen podskup, onda je relativna slaba*-topologija na A metrizabilna.*

U dokazu Propozicije 4.9.10 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju:

Lema 4.9.11. *Neka je K kompaktan topološki prostor. Ako postoji prebrojiva familija neprekidnih funkcija $\{f_k : K \to \mathbb{F}\}_{k \in \mathbb{N}}$ koja razdvaja točke od K, onda je K metrizabilan prostor.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $|f_k| \leq 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $d : K \times K \to \mathbb{R}$ s

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |f_k(x) - f_k(y)|.$$

Jer familija funkcija $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ razdvaja točke od K, lako se provjeri da je d metrika na X (DZ). Označimo s $\mathcal{T}$ originalnu topologiju na K i s $\mathcal{T}_d$ topologiju na K induciranu metrikom d. Jer su sve funkcije f_k

$\mathcal{T}$-neprekidne i jer gornji red konvergira uniformno na $K \times K$, d je $\mathcal{T}$-neprekidna funkcija na $K \times K$. Stoga su sve pripadne d-otvorene kugle $K_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ također $\mathcal{T}$-otvorene. Dakle, $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$. Jer je $\mathcal{T}_d$ inducirana iz metrike, onda je svakako Hausdorffova topologija. Kako je $\mathcal{T}$ kompaktna topologija, iz Napomene 4.1.5 slijedi da je nužno $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. □

Dokaz Propozicije 4.9.10. Neka je $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ prebrojiv gust podskup od X. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirajmo funkciju $f_k : X^* \to \mathbb{F}$ s $f_k(\varphi) := \varphi(x_k)$. Prema definiciji slabe*-topologije sve funkcije f_k su slabo*-neprekidne. Nadalje, ako su $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$ takvi da vrijedi $f_k(\varphi_1) = f_k(\varphi_2)$ za sve $k \in \mathbb{N}$, onda se φ_1 i φ_2 podudaraju na gustom skupu $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u X. Stoga je zbog neprekidnosti nužno $\varphi_1 = \varphi_2$. Dakle, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je prebrojiva familija neprekidnih funkcija s X^* u $\mathbb{F}$ koja razdvaja točke od X^*.

Neka je sada A proizvoljan ograničen podskup od X^*. Onda postoji $r > 0$ takav da je $A \subseteq rB_{X^*}$. Prema Banach-Alaogluovom teoremu za normirane prostore, B_{X^*} je slabo*-kompaktan skup. Onda isto vrijedi i za rB_{X^*}. Prema prethodnom paragrafu i Lemi 4.9.11 je relativna slaba*-topologija metrizabilna na rB_{X^*}. Jer je $A \subseteq rB_{X^*}$, isto vrijedi i za A. □

Kao direktnu posljedicu Korolara 4.9.8, Propozicije 4.9.10 i Teorema 1.5.12 dobivamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 4.9.12. *Neka je X separabilan normiran prostor. Svaki uniformno ograničen niz u X^* ima slabo*-konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uniformno ograničen niz u X^*. Stavimo $A := \{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$. Onda je i njegov slabi*-zatvarač $\overline{A}^{w^*}$ uniformno ograničen pa je prema dokazu implikacije (iii) $\implies$ (i) Korolara 4.9.9 (za koju nam ne treba pretpostavka potpunosti od X) i Propoziciji 4.9.10 $\overline{A}^{w^*}$ slabo*-kompaktan i metrizabilan. Stoga, prema Teoremu 1.5.12 svaki niz u $\overline{A}^{w^*}$ ima slabo*-konvergentan podniz s limesom u $\overline{A}^{w^*}$. To onda posebno vrijedi za početni niz $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Sljedeći primjer pokazuje da za w^*-topologiju općenito ne vrijedi odgovarajuća varijanta Mazurovog teorema (Teorem 4.8.10).

Primjer 4.9.13. Neka je X nerefleksivan normiran prostor. Fiksirajmo $x^{**} \in X^{**} \setminus \operatorname{ran} J_X$. Onda prema Napomeni 4.9.2 x^{**} nije slabo*-neprekidan, pa je prema Propoziciji 4.5.15 $\ker x^{**}$ potprostor (stoga konveksan podskup) od X^* koji je zatvoren, ali nije slabo*-zatvoren.

Napomena 4.9.14. Neka je X normiran prostor.

(a) Na dualu X^* također možemo gledati slabu topologiju $\sigma(X^*, X^{**})$. Jer je $\operatorname{ran} J_X \subseteq X^{**}$, očito je slaba*-topologija na X^* slabija od slabe topologije. Pritom se te topologije podudaraju ako i samo ako je prostor X refleksivan. Naime, pretpostavimo da je $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, \operatorname{ran} J_X)$. Jer je svaki $x^{**} \in X^{**}$ neprekidan s obzirom na slabu topologiju na X^*, onda je x^{**} neprekidan i s obzirom na slabu*-topologiju na X^*. Prema Teoremu 4.8.1 postoji $x \in X$ takav da je $x^{**} = J_X x$, odnosno X je refleksivan. Obrat je trivijalan.

(b) Jer je bidual X^{**} dual od X^*, na X^{**} možemo gledati slabu*-topologiju, tj. topologiju $\sigma(X^{**}, J_{X^*})$. Dakle, za mrežu $(x^{**}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X^{**} i $x^{**}_0 \in X^{**}$ vrijedi $x^{**}_\alpha \xrightarrow{w^*} x^{**}_0$ ako i samo ako $x^{**}_\alpha(x^*) \to x^{**}_0(x^*)$ za sve $x^* \in X^*$. Nadalje, za mrežu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u X i $x_0 \in X$ vrijedi

$$x_\alpha \xrightarrow{w} x_0 \qquad \iff \qquad x^*(x_\alpha) \to x^*(x_0) \quad \forall x^* \in X^* \qquad \iff \qquad J_X(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} J_X(x_0).$$

Dakle, preslikavanje $J_X : X \to X^{**}$ je (w, w^*)-homeomorfizam svoju sliku (tj. homeomorfizam s obzirom na w-topologiju na X i w^*-topologiju na X^*). Drugim riječima, ako identificiramo $\operatorname{ran} J_X$ s X, onda se relativna slaba*-topologija na $X \subseteq X^{**}$ podudara sa slabom topologijom na X.

Ako je X nerefleksivan Banachov prostor, onda je $\operatorname{ran} J_X$ pravi zatvoreni potprostor od X^{**}. Stoga je prema Mazurovom teoremu (Teorem 4.8.10) $\operatorname{ran} J_X$ slabo zatvoren, tako da $\operatorname{ran} J_X$ nije slabo gust podskup u X^{**}. S druge strane, ispada da je $\operatorname{ran} J_X$ uvijek slabo*-gust potprostor od X^{**}. Štoviše, imamo sljedeći važan rezultat:

Teorem 4.9.15 (Goldstineov[8] teorem). *Neka je X normiran prostor. Tada je $J_X(B_X)$ slabo*-gust podskup od $B_{X^{**}}$, odnosno vrijedi $\overline{J_X(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

Dokaz. Prema Banach-Alaogluovom teoremu $B_{X^{**}}$ je slabo*-kompaktan, pa stoga slabo*-zatvoren podskup od X^{**} (Propozicija 1.5.4). Jer je J_X izometrija, $J_X(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$, tako da je $\overline{J_X(B_X)}^{w^*} \subseteq B_{X^{**}}$.

Kako bismo dokazali obratnu inkluziju, pretpostavimo da je $x_0^{**} \in X^{**} \setminus \overline{J_X(B_X)}^{w^*}$. Dovoljno je ustanoviti da je $\|x_0^{**}\| > 1$. Kako je $\overline{J_X(B_X)}^{w^*}$ konveksan i w^*-zatvoren skup u X^{**} prema Hahn-Banachovom separacijskom teoremu postoji w^*-neprekidni linearni funkcional φ na X^{**} takav da vrijedi

$$\operatorname{Re}\varphi(x_0^{**}) > \sup\{\operatorname{Re}\varphi(u^{**}) : u^{**} \in \overline{J_X(B_X)}^{w^*}\}. \tag{4.25}$$

Jer je φ w^*-neprekidan, prema Napomeni 4.9.2 (d) postoji $x^* \in X^*$ takav da je $\varphi(x^{**}) = x^{**}(x^*)$ za sve $x^{**} \in X^{**}$. Stoga iz (4.25) slijedi

$$\begin{aligned} |x_0^{**}(x^*)| &\geq \operatorname{Re} x_0^{**}(x^*) > \sup\{\operatorname{Re} u^{**}(x^*) : u^{**} \in \overline{J_X(B_X)}^{w^*}\} \geq \sup\{\operatorname{Re} x^*(x) : x \in B_X\} \\ &= \|\operatorname{Re} x^*\| = \|x^*\|, \end{aligned}$$

jer je, u kompleksnom slučaju, $x^*(x) = \operatorname{Re} x^*(x) - i \operatorname{Re} x^*(ix)$ za sve $x \in X$, odakle slijedi $\|\operatorname{Re} x^*\| = \|x^*\|$ (provjerite za DZ). Stoga je $\|x_0^*\| > 1$, kao što smo i trebali dokazati. □

Korolar 4.9.16. *Neka je X normiran prostor. Tada je* $\operatorname{ran} J_X$ *slabo*-gust potprostor od X^{**}.*

Dokaz. Neka je x^{**} nenul element od X^{**}. Prema Goldstineovom teoremu postoji mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u B_X takva da vrijedi $J_X x_\alpha \xrightarrow{w^*} \frac{x^{**}}{\|x^{**}\|}$. Onda $J_X(\|x^{**}\| x_\alpha) \xrightarrow{w^*} x^{**}$. □

Koristeći Goldstineov teorem i Banach-Alaogluov teorem dobivamo novu karakterizaciju refleksivnosti Banachovog prostora.

Korolar 4.9.17. *Banachov prostor X je refleksivan ako i samo ako je zatvorena jedinična kugla B_X slabo kompaktna.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je X refleksivan. Prema Banach-Alaogluovom teoremu $B_{X^{**}}$ slabo*-kompaktan podskup od X^{**}. Jer je X refleksivan, restrikcija $J_X|_{B_X} : B_X \to B_{X^{**}}$ je $w - w^*$ homeomorfizam (Napomena 4.9.14 (b)). Stoga je B_X slabo kompaktan podskup od X.

Obratno, neka je B_X slabo kompaktan podskup od X. Prema Napomeni 4.9.14 (b), $J_X : X \to X^{**}$ je $w - w^*$ homeomorfizam na svoju sliku, tako da je $J_X(B_X)$ slabo*-kompaktan podskup od X^{**}. Posebno je $J_X(B_X)$ slabo*-zatvoren podskup od X^{**} pa iz Goldstineovog teorema slijedi da je $J_X(B_X) = B_{X^{**}}$. Onda je i $\operatorname{ran} J_X = X^{**}$, odnosno X je refleksivan. □

[8] Herman Heine Goldstine (1913.–2004.), američki matematičar i informatičar

Poglavlje 5

Elementarna spektralna teorija

5.1 Algebre i $*$-algebre

Definicija 5.1.1. Kompleksna asocijativna algebra (ili samo **algebra**) je vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{C}$ na kojem je zadana operacija **množenja**, tj. asocijativna bilinearna funkcija

$$A \times A \to A, \qquad (a, b) \mapsto ab.$$

Drugim riječima, vrijedi:

$$a(bc) = (ab)c, \qquad (\lambda a + \mu b)c = \lambda(ac) + \mu(bc) \qquad \text{i} \qquad a(\lambda b + \mu c) = \lambda(ab) + \mu(ac)$$

za sve $a, b, c \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- Ako u algebri A vrijedi $ab = ba$ za sve $a, b \in A$ tada kažemo da je A **komutativna**.
- **Unitalna algebra** je algebra u kojoj postoji **jedinica**, tj. element $1 \in A$ takav da vrijedi
$$1a = a1 = a \quad \forall a \in A.$$
- Ako je A unitalna algebra, tada za element $a \in A$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji element $a^{-1} \in A$ takav da je
$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$
Element a^{-1} zovemo **inverz** od a. Skup svih invertibilnih elemenata unitalne algebre A označavamo s $A^\times$.

Analogno bismo definirali pojam realne asocijativne algebre, odnosno asocijativne algebre nad proizvoljnim poljem.

Napomena 5.1.2. Neka je A unitalna algebra.

(a) Jedinica u A je jedinstvena. Analogno, inverz svakog invertibilnog elementa u A je jedinstven.

(b) $A^\times$ je grupa s obzirom na operaciju množenja.

Primjer 5.1.3. Neka je Ω neprazan skup. Onda skup $\mathbb{C}^\Omega$ svih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ima strukturu unitalne komutativne algebre s obzirom na operacije po točkama

$$(\lambda f)(t) := \lambda f(t), \quad (f + g)(t) := f(t) + g(t), \quad \text{i} \quad (fg)(t) := f(t)g(t).$$

gdje su $f, g \in \mathbb{C}^\Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$ i $t \in \Omega$. Jedinica u algebri $\mathbb{C}^\Omega$ je konstantna funkcija $t \mapsto 1_{\mathbb{C}}$.

Primjer 5.1.4. Skup $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ svih kompleksnih matrica reda n je unitalna algebra uz standardne operacije na matricama. Jedinica u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je jedinična matrica. Nadalje, $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je nekomutativna čim je $n > 1$.

Primjer 5.1.5. Općenitije, ako je X vektorski prostor onda je $\mathrm{L}(X)$ unitalna algebra s obzirom na standardnu linearnu strukturu i komponiranje operatora kao množenje. Jedinica u $\mathrm{L}(X)$ je jedinični operator. Slično kao u prethodonom primjeru, $\mathrm{L}(X)$ je nekomutativna čim je $\dim X > 1$.

Definicija 5.1.6. Neka je A algebra. Podskup B algebre A zove se **podalgebra** od A ako je B algebra s obzirom na operacije koje su definirane kao restrikcije operacija algebre A.

Nadalje, za podalgebru B unitalne algebre A koja sadrži jedinicu od A kažemo da je **unitalna podalgebra**.

Napomena 5.1.7. Primijetimo da je potprostor B algebre A podalgebra od A ako i samo ako je B zatvoren s obzirom na operaciju množenja, tj. vrijedi

$$a, b \in B \quad \Longrightarrow \quad ab \in B.$$

Nadalje, moguće da je B unitalna algebra, ali da B nije unitalna podalgebra algebre A (tj. B ima jedinicu, ali jedinica od B nije jednaka jedinici od A).

Primjer 5.1.8. Neka je Ω topološki prostor. Onda su $C(\Omega)$ i $C_b(\Omega)$ unitalne podalgebre od $\mathbb{C}^{\Omega}$.

Primjer 5.1.9. Neka je X normiran prostor. Onda je $\mathrm{B}(X)$ unitalna podalgebra od $\mathrm{L}(X)$.

Definicija 5.1.10. Neka su su A i B algebre. Za preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je **homomorfizam algebri** ako je ϕ linearno i multiplikativno, tj. vrijedi

$$\phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b) \quad \text{i} \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

za sve $a, b \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- Ako su A i B unitalne algebre s jedinicama 1_A i 1_B i ako vrijedi $\phi(1_A) = 1_B$ onda se ϕ zove **unitalni homomorfizam**.
- Injektivni homomorfizam zove se **monomorfizam**, surjektivni homomorfizam zove se **epimorfizam**, a bijektivni homomorfizam zove se **izomorfizam**.
- Za algebre A i B kažemo da su **izomorfne** ako postoji izomorfizam $\phi : A \to B$.

Napomena 5.1.11. Primijetimo da je izomorfnost algebri relacija ekvivalencije (na klasi svih algebri).

Primjer 5.1.12. Neka je $\mathbb{C}[z]$ skup svih polinoma u jednoj varijabli z nad poljem $\mathbb{C}$. Očito je $\mathbb{C}[z]$ unitalna komutativna algebra s obzirom na uobičajene operacije na polinomima.

Ako je A proizvoljna unitalna algebra i $p \in \mathbb{C}[z]$ polinom s rastavom

$$p = p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k,$$

tada za element $a \in A$ definiramo

$$p(a) := \alpha_0 1 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_n a^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k.$$

Preslikavanje

$$\phi_a : \mathbb{C}[z] \to A, \qquad \phi_a : p \mapsto p(a) \tag{5.1}$$

je unitalni homomorfizam algebri. Njegova je slika najmanja unitalna podalgebra od A koja sadrži element a, tj. potprostor od A razapet svim potencijama $\{1, a, a^2, \ldots\}$ elementa a.

Definicija 5.1.13. Neka je A unitalna algebra. **Spektar** elementa $a \in A$ je skup

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda 1 - a \notin A^\times\}.$$

Za komplement spektra elementa a u $\mathbb{C}$ kažemo da je **rezolventni skup** od a i označavamo ga s $\rho(a)$ (ili s $\rho_A(a)$ kada želimo istaknuti ambijentalnu algebru A).

Primjer 5.1.14. U algebri $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je za $a \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ očito $\sigma(a)$ skup svih svojstvenih vrijednosti matrice a (kao što se i definirao spektar matrice na linearnoj algebri).

Primjer 5.1.15. Neka je Ω topološki prostor. Onda je

$$C(\Omega)^\times = \{f \in C(\Omega) : 0 \notin f(\Omega)\} \qquad \text{i} \qquad C_b(\Omega)^\times = \{f \in C(\Omega) : 0 \notin \overline{f(\Omega)}\}.$$

Posebno je za $f \in C(\Omega)$, $\sigma_{C(\Omega)}(f) = f(\Omega)$, dok je $\sigma_{C(\Omega)}(f) = \overline{f(\Omega)}$ za sve za $f \in C_b(\Omega)$. Dakle, općenito je $\sigma_{C_b(\Omega)}(f) \subsetneqq \sigma_{C(\Omega)}(f)$ za sve $f \in C_b(\Omega)$, tako da spektar elementa može bitno ovisiti o ambijentalnoj algebri (vidjeti Propoziciju 5.2.25).

Napomena 5.1.16. Element $a \in A$ je invertibilan ako i samo ako $0 \notin \sigma(a)$. Nadalje, ako je algebra A trivijalna, tj. $A = \{0\}$, onda je 0 jedinica u toj algebri, pa je $A^\times = A = \{0\}$. Stoga je u tom slučaju $\sigma(0) = \emptyset$. Mi ćemo u daljnjem pretpostavljati da su sve unitalne algebre netrivijalne, tako da je $\sigma(\lambda 1) = \{\lambda\}$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.

Propozicija 5.1.17. *Neka je A unitalna algebra.*

(i) Za sve $a \in A$ i $p \in \mathbb{C}[z]$ vrijedi

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) \, : \, \lambda \in \sigma(a)\}.$$

(ii) Za sve $a \in A^\times$ vrijedi:

$$\sigma\left(a^{-1}\right) = \sigma(a)^{-1} = \{\lambda^{-1} \, : \, \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Dokaz. (i). Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Tada postoji polinom $q \in \mathbb{C}[z]$, takav da je

$$p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda) q(z).$$

Ako na tu jednakost djelujemo s homomorfizmom ϕ_a iz (5.1), dobivamo

$$p(a) - p(\lambda)1 = (a - \lambda 1) q(a).$$

Pretpostavimo da je $p(a) - p(\lambda)1 \in A^\times$ i stavimo $b := (p(a) - p(\lambda)1)^{-1}$. Jer $p(a) - p(\lambda)1$ komutira sa svim polinomima u varijabli a, isto vrijedi i za njegov inverz b, tako da je

$$1 = b\,(p(a) - p(\lambda)1) = (a - \lambda 1)(b \cdot q(a)) = (b \cdot q(a))(a - \lambda 1).$$

Odavde slijedi da je $a - \lambda 1 \in A^\times$, što je kontradikcija s pretpostavkom $\lambda \in \sigma(a)$. Dakle, $p(a) - p(\lambda)1 \notin A^\times$, odnosno $p(\lambda) \in \sigma(p(a))$. Time smo dokazali inkluziju $p(\sigma(a)) \subseteq \sigma(p(a))$.

Dokažimo sada obratnu inkluziju. Pretpostavimo da je stupanj polinoma p jednak n i neka je $\mu \in \sigma(p(a))$. Budući da je polje $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno, postoje skalari $\alpha \neq 0$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takvi da je

$$p(z) - \mu = \alpha \cdot (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n).$$

Primijenimo li na gornju jednakost homomorfizam ϕ_a iz (5.1), dobivamo

$$p(a) - \mu 1 = \alpha \cdot (a - \lambda_1 1) \cdots (a - \lambda_n 1).$$

Kako je $\mu \in \sigma(p(a))$, vrijedi $p(a) - \mu 1 \notin A^\times$, odakle slijedi da postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ takav da $a - \lambda_j 1 \notin A^\times$, odnosno $\lambda_j \in \sigma(a)$. No onda je $\mu = p(\lambda_j) \in p(\sigma(a))$.

(ii). Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Onda $\lambda 1 - a$ nije invertibilan i $\lambda \neq 0$ jer je $a \in A^\times$. Iz jednakosti

$$\lambda 1 - a = -\lambda(\lambda^{-1} 1 - a^{-1}) a,$$

slijedi da $\lambda^{-1} 1 - a^{-1}$ nije invertibilan, odnosno $\lambda^{-1} \in \sigma\left(a^{-1}\right)$. Time je dokazana inkluzija $\sigma(a)^{-1} \subseteq \sigma\left(a^{-1}\right)$. Zamjena uloga a i a^{-1} daje $\sigma\left(a^{-1}\right)^{-1} \subseteq \sigma(a)$, što je ekvivalentno s $\sigma\left(a^{-1}\right) \subseteq \sigma(a)^{-1}$. $\square$

Propozicija 5.1.18. *Neka je A unitalna algebra. Tada za sve $a, b \in A$ vrijedi*

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $1 - ab \in A^\times$ ako i samo ako je $1 - ba \in A^\times$. Ako je $1 - ab$ invertibilan s inverzom c, onda se lako provjeri da je $1 + bca$ inverz od $1 - ba$. □

Propozicija 5.1.19. *Neka je $\phi\colon\ A \to B$ unitalni homomorfizam unitalnih algebri A i B. Tada za svaki $a \in A$ vrijedi*

$$\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a).$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz činjenice $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$. □

Definicija 5.1.20. Neka je A unitalna algebra. **Rezolventa** elementa $a \in A$ je funkcija $R_a : \rho(a) \to A^\times$ definirana s

$$R_a(\lambda) := (\lambda 1 - a)^{-1}.$$

Propozicija 5.1.21. *Neka je A unitalna algebra. Tada za sve $a \in A$ i $\lambda, \mu \in \rho(a)$ vrijedi*

$$(\lambda - \mu) R_a(\lambda) R_a(\mu) = R_a(\mu) - R_a(\lambda).$$

Posebno, $R_a(\lambda)$ i $R_a(\mu)$ komutiraju.

Dokaz. Gornju jednakost redom pomnožimo s invertibilnim elementima $(\lambda 1 - a)$ s lijeva i $(\mu 1 - a)$ s desna. □

* * *

Definicija 5.1.22. Neka je A algebra. Za potprostor I od A kažemo da je **obostrani ideal** (ili samo **ideal**) u A ako za sve $a \in A$ i $b \in I$ vrijedi $ab \in I$ i $ba \in I$.

Definicija 5.1.23. Neka je A algebra. Očito su $\{0\}$ i A ideali u A koje zovemo **trivijalni ideali**. Ako A nema netrivijalnih ideala, onda kažemo da je A **prosta**.

Primjer 5.1.24. Neka je X vektorski prostor. Algebra $\mathrm{L}(X)$ je prosta ako i samo ako je X konačnodimenzionalan. Posebno je matrična algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{L}(\mathbb{C}^n)$ prosta. Ako je X beskonačnodimenzionalan, skup svih operatora s konačnodimenzionalnom slikom (operatori konačnog ranga) je netrivijalni ideal u $\mathrm{L}(X)$. Analogno vrijedi za algebru $\mathrm{B}(X)$ gdje je X normiran prostor. Sve ove tvrdnje provjerite za DZ.

Napomena 5.1.25. Ako je A unitalna algebra, tada svaki pravi ideal I u A ne sadrži niti jedan invertibilni element od A, tj. $I \cap A^\times = \emptyset$. Zaista, ako bi postojao $a \in I \cap A^\times$, onda bi za sve $x \in A$ bilo $x = (xa^{-1})a \in I$.

Definicija 5.1.26. Za ideal $M \neq A$ algebre A kažemo da je **maksimalan** ako nije sadržan niti u jednom drugom pravom idealu u A. Skup svih maksimalnih ideala u A označavamo s $\mathrm{Max}(A)$.

Propozicija 5.1.27. *Neka je A unitalna algebra. Svaki ideal $I \neq A$ u A je sadržan u nekom maksimalnom idealu.*

Dokaz. Promotrimo familiju ideala

$$\mathcal{F} := \{J \text{ ideal u } A : \quad I \subseteq J \subsetneq A\}.$$

Tada je $\mathcal{F}$ neprazna familija jer je $I \in \mathcal{F}$. Uredimo $\mathcal{F}$ s inkluzijom kao parcijalnim uređajem. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{F}$ i stavimo $L := \bigcup \mathcal{L}$. Tada L netrivijalni ideal u A koji sadrži I i $L \neq A$, jer bi u protivnom bilo $1 \in J$ za neki $J \in \mathcal{F}$. Dakle, L je gornja međa od $\mathcal{L}$. Stoga, prema Zornovoj lemi, $\mathcal{F}$ ima maksimalni element M. Dakle, M je maksimalni ideal u A koji sadrži I. □

Korolar 5.1.28. *Neka je A komutativna unitalna algebra. Tada je element $a \in A$ invertibilan ako i samo ako $a \notin M$ za sve $M \in \mathrm{Max}(A)$.*

Dokaz. Zaista, $a \notin A^\times$ ako i samo ako je $aA = \{ax : x \in A\}$ pravi ideal u A, što je prema Propoziciji 5.1.27 ekvivalentno s $aA \subseteq M$ za neki $M \in \mathrm{Max}(A)$. □

Neka je I (obostrani) ideal u algebri A. U kvocijentni vektorski prostor A/I uvodimo operaciju množenja na sljedeći način:

$$(a+I)(b+I) = ab + I \qquad (a, b \in A). \tag{5.2}$$

Iz činjenice da je I obostrani ideal slijedi da ta definicija ima smisla, tj. ne ovisi o izboru predstavnika a i b klasa kvocijentnog prostora. Zaista, ako je $a + I = a' + I$ i $b + I = b' + I$ (tj. $a - a' \in I$ i $b - b' \in I$) onda je

$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in I,$$

dakle, $ab + I = a'b' + I$. Lako se provjeri da je s (5.2) definirano množenje na A/I, tako da A/I dobiva strukturu algebre.

Definicija 5.1.29. Neka je A algebra i I ideal u A. Algebra A/I se zove **kvocijentna algebra** algebre A po idealu I.

Kvocijentno preslikavanje $Q_I : A \to A/I$, koje elementu algebre A pridružuje njegovu klasu modulo I (tj. $Q_I(a) = a + I$) je epimorfizam algebri. Ako je 1 jedinica u algebri A, njena klasa $Q_I(1) = 1 + I$ je očito jedinica u kvocijentnoj algebri A/I.

Propozicija 5.1.30. *Neka je A unitalna komutativna algebra i neka je $M \in \mathrm{Max}(A)$. Tada je A/M polje.*

Dokaz. Najprije primijetimo da je algebra A/M prosta. Zaista, neka je I ideal u A/M. Onda je $Q_M^{-1}(I)$ ideal u A koji sadrži M, dakle $Q_M^{-1}(I) = A$ ili $Q_M^{-1}(I) = M$, jer je M maksimalan. Slijedi $I = A/M$ ili $I = 0$. Budući da je A/M unitalna komutativna prosta algebra, prema Korolaru 5.1.28, svaka klasa $a + M$ $(a \in A \setminus M)$ je invertibilna u A/M. □

Dokaz sljedeće jednostavne činjenice izostavljamo (provedite dokaz za DZ).

Propozicija 5.1.31. *Neka je $\phi : A \to B$ homomorfizam algebri. Tada vrijedi:*

(i) Slika $\phi(A) = \{\phi(a) : a \in A\}$ homomorfizma ϕ je podalgebra od B.

(ii) Jezgra $\ker\phi = \{a \in A : \phi(a) = 0\}$ homomorfizma ϕ je obostrani ideal u algebri A.

(iii) Inducirano preslikavanje $\widetilde{\phi} : A/\ker\phi \to B$, definirano s

$$\widetilde{\phi}(a + \ker\phi) = \phi(a) \qquad (a \in A),$$

je izomorfizam algebre $A/\ker\phi$ na algebru $\phi(A)$.

∗ ∗ ∗

Definicija 5.1.32. Neka je A algebra. **Involucija** na A je antilinearno, antimultiplikativno i involutorno preslikavanje $* : A \to A$. Drugim riječima, vrijedi:

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$ za sve $a, b \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ za sve $a, b \in A$,
- $(a^*)^* = a$ za sve $a \in A$.

∗-algebra je algebra na kojoj je zadana involucija.

Primijetimo da iz involutornosti slijedi da je involucija bijekcija s A na A.

Propozicija 5.1.33. *Neka je A unitalna $*$-algebra. Tada vrijedi:*

(i) $1^* = 1$.

(ii) Element $a \in A$ je invertibilan ako i samo ako je a^* invertibilan, te je $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

(iii) Za sve $a \in A$ je

$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* = \{\overline{\lambda} : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Dokaz. (i). Iz antimultiplikativnosti i bijektivnosti involucije slijedi da je 1^* također jedinica u A. Kako je jedinica u algebri jedinstvena, slijedi $1^* = 1$.

(ii). Neka je $a \in A^\times$. Ako na jednakost $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ djelujemo s involucijom, onda iz (i) slijedi $(a^{-1})^* a^* = a^*(a^{-1})^* = 1$. Dakle, $a^* \in A^\times$ i $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Obratno, ako je $a^* \in A^\times$, tada je prema dokazanom $a = (a^*)^* \in A^\times$.

(iii). Za $\lambda \in \mathbb{C}$ prema (ii) i svojstvu (a) imamo

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma(a) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda 1 - a \in A^\times \Longleftrightarrow (\lambda 1 - a)^* \in A^\times \Longleftrightarrow \overline{\lambda} 1 - a^* \in A^\times \\ &\Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda} \notin \sigma(a^*). \end{aligned}$$

□

Primjer 5.1.34. Neka je Ω neprazan skup. Algebra $\mathbb{C}^\Omega$ dobiva strukturu $*$-algebre s obzirom na involuciju

$$f^*(t) := \overline{f(t)}, \quad t \in \Omega.$$

Primjer 5.1.35. $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je $*$-algebra s obzirom na involuciju definiranu kao adjungiranje matrica.

Definicija 5.1.36. Neka je A $*$-algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je:

- **hermitski**, ako je $a^* = a$;
- **normalan**, ako je $a^* a = aa^*$;
- **projektor**, ako je $a^* = a = a^2$.
- **parcijalna izometrija**, ako je $aa^*a = a$.

Nadalje, ako je A unitalna, tada za a kažemo da je

- **unitaran**, ako je $a^*a = aa^* = 1$;
- **izometrija**, ako je $a^*a = 1$;
- **koizometrija**, ako je $aa^* = 1$;

Napomena 5.1.37. U slučaju matrične algebre $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ gornji pojmovi imaju uobičajena značenja. Pritom je za $a \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ekvivalentno: a je unitaran $\Longleftrightarrow$ a je izometrija $\Longleftrightarrow$ a je koizometrija (to općenito nije istina u beskonačnodimenzionalnim $*$-algebrama).

Napomena 5.1.38. Očito su hermitski i unitarni elementi normalni. Skup svih hermitskih elemenata u A označavamo s A_h. Primijetimo da je A_h realan vektorski prostor i da vrijedi $A = A_h \oplus iA_h$. Zaista, jasno je da vrijedi $A_h \cap iA_h = \{0\}$. S druge strane, svaki element $a \in A$ možemo prikazati u obliku $a = a_1 + ia_2$, gdje su $a_1, a_2 \in A_h$ dani s

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*) \quad i \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*).$$

Jedinstvene elemente a_1 i a_2 redom označavamo s $\mathrm{Re}\, a$ i $\mathrm{Im}\, a$. Nadalje, iz

$$a^*a = (\mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2 - i(\mathrm{Im}\, a \cdot \mathrm{Re}\, a - \mathrm{Re}\, a \cdot \mathrm{Im}\, a)$$

i

$$aa^* = (\mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2 + i(\mathrm{Im}\, a \cdot \mathrm{Re}\, a - \mathrm{Re}\, a \cdot \mathrm{Im}\, a)$$

slijedi da je element a normalan ako i samo $\mathrm{Re}\, a$ i $\mathrm{Im}\, a$ komutiraju.

Propozicija 5.1.39. *Neka je A $*$-algebra. Tada vrijedi:*

(i) Svaka lijeva/desna jedinica u A je jedinica u A.

(ii) Ako je A unitalna, tada je hermitski element $a \in A_h$ lijevo/desno invertibilan u A ako i samo ako je on invertibilan u A.

Dokaz. (i). Dokaz ćemo provesti za slučaj kada A ima lijevu jedinicu e. Adjungiranjem jednakosti $ea = a$ za sve $a \in A$ dobivamo $a^*e^* = a^*$ za sve $a \in A$. Kako je involucija bijekcija s A na A, slijedi da je e^* desna jedinica u A. Dakle, $e^* = ee^* = e$, odnosno $e = e^*$ je jedinica u A.

(ii). Dokaz ćemo provesti za slučaj kada je $a \in A_h$ lijevo invertibilan. Tada postoji $b \in A_h$ takav da je $ba = 1$. Odatle slijedi $ab^* = (ba)^* = 1$. Dakle, $b = b^*$ je inverz od a u B. □

Definicija 5.1.40. Za podskup S $*$-algebre A kažemo da je **samoadjungiran** ako vrijedi $a^* \in S$ čim je $a \in S$. Za samoadjungiranu podalgebru B od A kažemo da je **$*$-podalgebra** od A.

Primjer 5.1.41. Neka je Ω topološki prostor. Tada su $C(\Omega)$ i $C_b(\Omega)$ unitalne $*$-podalgebre od $\mathbb{C}^\Omega$.

Primjer 5.1.42. Neka su redom $\mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ i $\mathrm{T}_n(\mathbb{C})$ sve dijagonalne i sve gornjetrokutaste matrice u $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Tada su $\mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ i $\mathrm{T}_n(\mathbb{C})$ podalgebre od $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Pritom je $\mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ samoadjungirana (stoga $*$-podalgebra od $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$), dok $\mathrm{T}_n(\mathbb{C})$ nije.

Napomena 5.1.43. Ako je I samoadjungirani ideal $*$-algebre A, onda je kvocijentna algebra A/I $*$-algebra uz involuciju

$$(a+I)^* := a^* + I \quad (a \in A).$$

Definicija 5.1.44. Za homomorfizam $\phi : A \to B$ $*$-algebri A i B kažemo da je **$*$-homomorfizam** ako je ϕ kompatibilan s obzirom na involucije na A i B, tj. ako vrijedi

$$\phi(a^*) = \phi(a)^* \quad \forall a \in A.$$

Pojmovi $*$-monomorfizma, $*$-epimorfizma i $*$-izomorfizma imaju očita značenja.

Napomena 5.1.45. Ako je $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam, onda je njegova jezgra $\ker\phi$ samoadjungirani ideal u A i njegova slika $\phi(A)$ je $*$-podalgebra od B.

Neka je A $*$-algebra. Ako je $\varphi : A \to \mathbb{C}$ linearni funkcional na A tada je s

$$\varphi^*(a) := \overline{\varphi(a^*)} \qquad (a \in A),$$

također zadan linearni funkcional na A. Očito vrijedi

$$\varphi^{**} = \varphi, \qquad (\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^* \quad \text{i} \quad (\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*.$$

Definicija 5.1.46. Za linearni funkcional φ na $*$-algebri A kažemo da je **hermitski funkcional** ako vrijedi $\varphi^* = \varphi$, odnosno $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ za sve $a \in A$.

Naravno, svaki linearni funkcional φ ima jedinstven prikaz u obliku $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, gdje su φ_1 i φ_2 hermitski funkcionali; oni su dani s

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) \quad i \quad \varphi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*).$$

Propozicija 5.1.47. *Neka je A $*$-algebra. Linearni funkcional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ je hermitski ako i samo ako vrijedi $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$. U tom slučaju je $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re}\varphi(a)$ za sve $a \in A$.*

Dokaz. Ako je φ hermitski tada za $a \in A_h$ imamo $\varphi(a) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$; dakle $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Obratno, ako je $\varphi(A_h) \subseteq \mathbb{R}$, tada je za $a \in A$ očito $\varphi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{Re}\varphi(a)$ i imamo

$$\begin{aligned} \varphi(a^*) &= \varphi(\operatorname{Re} a - i \operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \overline{\varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)} \\ &= \overline{\varphi(a)}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je φ hermitski. □

5.2 Normirane i Banachove algebre

Definicija 5.2.1. **Normirana algebra** je algebra A nad poljem $\mathbb{C}$ na kojoj je zadana submultiplikativna norma, tj. norma $\|\cdot\|$ takva da vrijedi

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in A.$$

Ako je A unitalna algebra s jedinicom 1 i ako je $\|1\| = 1$, tada kažemo da je A **unitalna normirana algebra**.

Propozicija 5.2.2. *Ako je A normirana algebra, onda je množenje $(a, b) \mapsto ab$ neprekidno, kao preslikavanje $A \times A \to A$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz nejednakosti

$$\begin{aligned}
\|ab - a'b'\| &= \|a(b - b') + (a - a')b'\| \leq \|a(b - b')\| + \|(a - a')b'\| \\
&\leq \|a\|\|b - b'\| + \|a - a'\|\|b'\|,
\end{aligned}$$

gdje su $a, a', b, b' \in A$. □

Definicija 5.2.3. Za normiranu algebru A kažemo da je **Banachova algebra** ako je A s obzirom na danu normu potpun prostor. Potpuna unitalna normirana algebra se zove **unitalna Banachova algebra**.

Podalgebra normirane algebre je očito i sama normirana algebra čija je norma dobivena restrikcijom početne norme. Također, zatvarač podalgebre je podalgebra. Specijalno, zatvorena podalgebra Banachove algebre je Banachova algebra.

Neka je A normirana algebra i neka je I zatvoren ideal u A. Tada znamo da je s

$$\|a + I\| := \inf\{\|a + x\| : \ x \in I\} \qquad (a \in A), \tag{5.3}$$

dana norma na kvocijentnom prostoru A/I. S tom normom kvocijentna algebra A/I postaje normirana algebra. Doista, ako su $a, a' \in A$, onda iz činjenice da je I ideal slijedi da je $ax' + xa' + xx' \in I$ za bilo koje $x, x' \in I$. Stoga imamo

$$\begin{aligned}
\|(a + I)(a' + I)\| &= \|aa' + I\| \\
&= \inf\{\|aa' + x\| : \ x \in I\} \\
&\leq \inf\{\|aa' + xa' + ax' + xx'\| : \ x, x' \in I\} \\
&= \inf\{\|(a + x)(a' + x')\| : \ x, x' \in I\} \\
&\leq \inf\{\|a + x\|\|a' + x'\| : \ x, x' \in I\} \\
&= \inf\{\|a + x\| : \ x \in I\} \cdot \inf\{\|a' + x'\| : \ x' \in I\} \\
&= \|a + I\| \cdot \|a' + I\|.
\end{aligned}$$

Propozicija 5.2.4. *Neka je A normirana algebra i neka je I zatvoreni ideal u A. Tada je A/I normirana algebra s obzirom na kvocijentnu normu (5.3). Nadalje, ako je A Banachova algebra, tada je i A/I Banachova algebra.*

Definicija 5.2.5. **Normirana $*$-algebra** je normirana algebra A na kojoj je zadana involucija za koju vrijedi

$$\|a^*\| = \|a\| \quad \forall a \in A.$$

Banachova $*$-algebra je potpuna (Banachova) nomirana $*$-algebra.

Neka je A normirana $*$-algebra i neka je I zatvoren (obostrani) $*$-ideal u A. Tada je kvocijentna algebra A/I normirana $*$-algebra. Zaista, po definiciji involucije na A/I za $a \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a + I\| &= \inf\{\|a + b\| \ : b \in I\} = \inf\{\|a^* + b^*\| \ : b \in I\} = \inf\{\|a^* + b\| \ : b \in I\} \\
&= \|a^* + I\|.
\end{aligned}$$

Definicija 5.2.6. Za Banachovu algebru A opskrbljenu s involucijom $*: A \to A$ kažemo da je C^***-algebra** ako njena norma zadovoljava tzv. C^***-svojstvo**:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A.$$

Napomena 5.2.7. Ako je A unitalna C^*-algebra, tada direktno iz C^*-svojstva slijedi $\|1\| = 1$. Zaista, koristeći Propoziciju 5.1.33 (i), imamo $\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1^2\| = \|1\|$, odnosno $\|1\| = 1$.

Propozicija 5.2.8. *Neka je A Banachova algebra opkrbljena s involucijom $*: A \to A$. Ako za sve $a \in A$ vrijedi $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$, tada je involucija na A izometrična i A je C^*-algebra. Posebno, svaka C^*-algebra je Banachova $*$-algebra.*

Dokaz. Zaista, za $a \in A$ iz

$$\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|, \tag{5.4}$$

slijedi $\|a\| \leq \|a^*\|$. Ukoliko a zamijenimo s a^*, dobivamo $\|a^*\| \leq \|a\|$. Dakle, $\|a^*\| = \|a\|$, što zajedno s (5.4) daje $\|a^*a\| = \|a\|^2$. □

Definicija 5.2.9. Neka je A C^*-algebra. Za zatvorenu $*$-podalgebru B od A kažemo da je C^***-podalgebra** od A. Ako još k tome algebra A unitalna i ako je njena jedinica sadržana u B kažemo da je B **unitalna** C^***-podalgebra**.

* * *

Sada promotrimo nekoliko osnovnih primjera.

Primjer 5.2.10. Neka je Ω topološki prostor.

(a) $C_b(\Omega)$ je unitalna C^*-algebra s obzirom na normu $\|\cdot\|_\infty$. Naime, za $f \in C_b(\Omega)$ je

$$\|f^*f\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |(f^*f)(t)| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|^2 = \left(\sup_{t\in\Omega} |f(t)|\right)^2 = \|f\|_\infty^2.$$

Posebno, ako je prostor Ω kompaktan, onda je $C(\Omega) = C_b(\Omega)$ unitalna C^*-algebra.

(b) Za Ω kažemo da je **lokalno kompaktan** ako svaka točka iz Ω ima kompaktnu okolinu. Pretpostavimo da je Ω lokalno kompaktan Hausdorffov prostor koji nije kompaktan. Za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$, kažemo da **ima limes u beskonačnosti** ako postoji kompleksan broj λ takav da je za svaki $\varepsilon > 0$ skup $\{t \in \Omega : \ |f(t) - \lambda| \geq \varepsilon\}$ kompaktan. U tom slučaju je takav λ jedinstven i pišemo $\lambda = \lim_{t\to\infty} f(t)$. Ako je $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, tada kažemo da f **trne u** ∞. Skup svih neprekidnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ koje trnu u ∞ označavamo s $C_0(\Omega)$. Dakle,

$$C_0(\Omega) = \left\{ f \in C(\Omega) : \ \lim_{t\to\infty} f(t) = 0 \right\}.$$

Nije teško vidjeti da je $C_0(\Omega)$ uniformno zatvorena $*$-podalgebra od $C_b(\Omega)$, tako da je $C_0(\Omega)$ neunitalna C^*-podalgebra od $C_b(\Omega)$. Ako je Ω kompaktan, onda identificiramo $C_0(\Omega) = C(\Omega)$.

Oznaku $\lim_{t\to\infty} f(t)$ možemo opravdati na sljedeći način. Neka je ∞ neka točka koja ne leži u Ω. Stavimo $\widetilde{\Omega} := \Omega \cup \{\infty\}$. Označimo s $\mathcal{T}$ topologiju na Ω i definirajmo topologiju $\widetilde{\mathcal{T}}$ na $\widetilde{\Omega}$ na sljedeći način:

(a) Svaki otvoren podskup od Ω je sadržan u $\widetilde{\mathcal{T}}$, tj. $\mathcal{T} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}$;

(b) $(\Omega \setminus K) \cup \{\infty\} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ za sve $\mathcal{T}$-kompaktne skupove $K \subseteq \Omega$.

Tada je $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}})$ kompaktan Hausdorffov prostor koji sadrži Ω kao gust otvoren podskup. Prostor $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\tau})$ se zove **Aleksandrovljeva**[1] **(jednotočkovna) kompaktifikacija** od Ω i ona je ujedno najmanja kompaktifikacija od Ω (općenito je **kompaktifikacija** od Ω bilo koji kompaktan Hausdorffov prostor koji sadrži Ω kao gust otvoren podskup).

Primijetimo da prelaskom na Aleksandrovljvu kompaktifikaciju možemo napraviti sljedeće identifikacije:

$$C(\widetilde{\Omega}) = \left\{ f \in C(\Omega) : \exists \lim_{t\to\infty} f(t) \right\} \qquad \text{i} \qquad C_0(\Omega) = \left\{ f \in C(\widetilde{\Omega}) : \ f(\infty) = 0 \right\}.$$

Primjer 5.2.11. Neka je $(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$ prostor mjere. Skup $L^\infty(\Omega, \mu)$ dobiva strukturu unitalne komutativne C^*-algebre uz standardne operacije po točkama, dok je norma dana esencijalnim supremumom:

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{C > 0 : \ |f(t)| \le C \text{ za gotovo sve } t \in \Omega\}.$$

Nije teško vidjeti da za $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ vrijedi $\sigma(f) = \mathcal{R}(f)$, gdje $\mathcal{R}(f)$ označava esencijalnu sliku funkcije f, tj. skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ za koje skup $\{t \in \Omega : \ |f(t) - \lambda| < \varepsilon\}$ ima pozitivnu mjeru za sve $\varepsilon > 0$.

Primjer 5.2.12. Matrična $*$-algebra $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je C^*-algebra uz operatorsku (spektralnu) normu

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Tx\|_2 = \max_{\lambda\in\sigma(T^*T)} \sqrt{\lambda}, \quad T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Primjer 5.2.13. Neka je $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 1\}$ jedinični disk u $\mathbb{C}$. Definirajmo skup $A(\mathbb{D})$ koji se sastoji od svih funkcija $f \in C(\mathbb{D})$ koje su holomorfne na interioru od $\mathbb{D}$. Tada je $A(\mathbb{D})$ unitalna zatvorena podalgebra od $C(\mathbb{D})$, budući da je uniformni limes niza holmorfnih funkcija holomorfna funkcija. Dakle, $A(\mathbb{D})$ je unitalna Banachova algebra. Primijetimo da kompleksno konjugiranje ne definira involuciju na $A(\mathbb{D})$ budući da funkcija $z \mapsto \overline{z}$ nije holomorfna. Ipak, $A(\mathbb{D})$ ima strukturu Banachove $*$-algebre s obzirom na involuciju

$$f^\dagger(z) := \overline{f(\overline{z})} \tag{5.5}$$

Takva algebra $A(\mathbb{D})$ zove se **algebra diska**. Lako se provjeri da s obzirom na involuciju (5.5) norma $\|\cdot\|_\infty$ ne zadovoljava C^*-svojstvo (provjerite za DZ).

Primjer 5.2.14. Neka je $\ell^1(\mathbb{Z})$ skup svih funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ takvih da je

$$\|f\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty.$$

Tada je $\ell^1(\mathbb{Z})$ Banachov prostor uz operacije s obzirom na operacije po točkama i normom $\|\cdot\|_1$. Množenje funkcija $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ definirano je kao njihova konvolucija, tj. kao funkcija $f * g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dana s

$$(f * g)(n) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n - m)g(m) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

[1] Pavel Sergejevič Aleksandrov (1896.–1982.), sovjetski matematičar

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(f*g)(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m) \right| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f(n-m)||g(m)| \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n-m)||g(m)| \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(|g(m)| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n-m)| \right) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |g(m)| \|f\|_1 \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $f*g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ i $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Nadalje, kako za sve $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ i $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
(f*g)(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)f(n-m) \\
&= (g*f)(n),
\end{aligned}$$

zaključujemo da je algebra $\ell^1(\mathbb{Z})$ komutativna.

Za svako $n \in \mathbb{Z}$ označimo s χ_n karakterističnu funkciju skupa $\{n\}$ (dakle $\chi_n(m) = \delta_{mn}$). Tada je χ_0 očito jedinica u $\ell^1(\mathbb{Z})$. Također, za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\|\chi_n\|_1 = 1 \quad \text{i} \quad \chi_m * \chi_n = \chi_{m+n} \ \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

Također, na $\ell^1(\mathbb{Z})$ definiramo involuciju

$$f^\star(n) := \overline{f(-n)},$$

s obzirom na koju $\ell^1(\mathbb{Z})$ dobiva strukturu unitalne Banachove $*$-algebre. Lako se provjeri da norma $\|\cdot\|_1$ na $\ell^1(\mathbb{Z})$ ne zadovoljava C^*-svojstvo. Npr. za $f = \chi_0 - \chi_1 - \chi_2$ imamo $\|f\|_1^2 = 9$. S druge strane, imamo

$$f^\star * f = -\chi_{-2} + 3\chi_0 - \chi_2 \quad \Longrightarrow \quad \|f^\star * f\|_1 = 5.$$

Banachova algebra $\ell^1(\mathbb{Z})$ se također zove **grupovna algebra** od $\mathbb{Z}$.

Napomena 5.2.15. Primjer 5.2.14 je samo specijalni slučaj algebre $L^1(G)$, gdje je G proizvoljna lokalno kompaktna (Hausdorffova) grupa. Naime, svaka takva grupa G dozvoljava pozitivnu regularnu Borelovu mjeru μ koja je lijevo translaciono invarijantna, tj. vrijedi $\mu(xE) = \mu(E)$ za sve Borelove skupove E i $x \in G$. Takva mjera se zove **lijeva Haarova mjera** i ona je jedinstvena do na pozitivnu konstantu. Za fiksiranu lijevu Haarovu mjeru μ na G definirajmo $L^1(G)$ kao skup svih (klasa ekvivalencije) Borelovih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ za koje je

$$\|f\|_1 := \int_G |f| \, d\mu < \infty$$

Konvolucija funkcija $f, g \in L^1(G)$ dana je s

$$(f*g)(x) := \int_G f(y)g(y^{-1}x) \, d\mu(y).$$

Tada $L^1(G)$ postaje Banachova algebra koja se zove **grupovna algebra** od G. Nije teško vidjeti da je algebra $L^1(G)$ komutativna ako i samo ako je grupa G Abelova, te je $L^1(G)$ unitalna ako i samo ako je G diskretna. Za detalje čitatelja upućujemo na [16].

* * *

Sada ćemo prezentirati neka osnovna svojstva Banachovih algebri.

Propozicija 5.2.16. *Neka je A unitalna Banachova algebra.*

(i) Ako je $a \in A$ i $\|a\| < 1$, tada je $1 - a \in A^\times$ i vrijedi

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \tag{5.7}$$

gdje je $a^0 := 1$. Specijalno, $\|(1-a)^{-1}\| \leq (1 - \|a\|)^{-1}$.

(ii) Grupa $A^\times$ invertibilnih elemenata u A je otvoren skup u A.

(iii) Invertiranje $a \mapsto a^{-1}$ je neprekidna bijekcija s $A^\times$ na $A^\times$.

Dokaz. (i). Najprije primijetimo da red u (5.7) konvergira u A, jer je on apsolutno konvergentan ($\|a^n\| \leq \|a\|^n < 1$), a prema Teoremu 1.3.16 svaki apsolutno konvergentni red u Banachovom prostoru je konvergentan. Označimo njegov limes s b. Tvrdimo da je b inverz od $1 - a$. Zaista, budući da je množenje na A neprekidno (Propozicija 5.2.2), imamo

$$(1-a)b = b - ab = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = 1$$

i

$$b(1-a) = b - ba = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = 1.$$

Dakle, $(1-a)^{-1} = b$ i

$$\|(1-a)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|}.$$

(ii). Fiksirajmo element $a \in A^\times$. Tvrdimo da su svi elementi b iz otvorene kugle s centrom u a radijusa $\|a^{-1}\|^{-1}$ invertibilni, tj.

$$\left\{ b \in A : \ \|b - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|} \right\} \subseteq A^\times.$$

Naravno, odatle će direktno slijediti da je $A^\times$ otvoren skup. Neka je stoga $b \in A$ takav da je $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Tada je

$$\|1 - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\|a - b\| < 1.$$

Iz (i) slijedi da je $a^{-1}b$ invertibilan, pa je i b invertibilan.

(iii). Pretpostavimo da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $A^\times$ koji konvergira prema elementu $a \in A^\times$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|a_n - a\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|},$$

tako da je

$$\|1 - a^{-1}a_n\| \leq \|a^{-1}\|\|a - a_n\| < \frac{1}{2}.$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - a^{-1}a_n)^k = a_n^{-1}a,$$

imamo

$$\|a_n^{-1}a\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Slijedi

$$\|a_n^{-1}\| \leq \|a_n^{-1}a\|\|a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|,$$

tako da je

$$\|a_n^{-1} - a^{-1}\| = \|a_n^{-1}(a_n - a)a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^2\|a_n - a\| \to 0,$$

kada $n \to \infty$. $\square$

Ako unitalna normirana algebra A nije potpuna, tada $A^\times$ ne mora biti otvoren podskup od A:

Primjer 5.2.17. Algebru $\mathbb{C}[z]$ možemo normirati na sljedeći način:

$$\|p\| = \sup_{|\lambda|\leq 1} |p(\lambda)| \qquad (p \in \mathbb{C}[z]). \tag{5.8}$$

Budući da je $\mathbb{C}[z]^\times = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, polinomi $p_n(z) := 1 + z/n$, $n \in \mathbb{N}$, nisu invertibilni $\mathbb{C}[z]$. S druge strane, kako $\|p_n - 1\| \to 0$, zaključujemo da $\mathbb{C}[z]^\times$ nije otvoren skup u $\mathbb{C}[z]$. Posebno, $\mathbb{C}[z]$ uz normu (5.8) nije Banachov prostor.

Ukoliko drugačije nije rečeno, od sada pa nadalje ćemo podrazumijevati da su sve Banachove algebre netrivijalne (tj. različite od $\{0\}$). Sljedeći rezultat smatra se **fundamentalnim teoremom teorije Banachovih algebri**:

Teorem 5.2.18. *Neka je A unitalna Banachova algebra. Tada je spektar svakog elementa $a \in A$ neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$ koji je sadržan u zatvorenom disku $\overline{K}_{\mathbb{C}}(0, \|a\|)$.*

Dokaz. Najprije dokažimo da je $\sigma(a)$ zatvoren podskup od $\mathbb{C}$. Zaista, budući da je prema Propoziciji 5.2.16 (ii) $A^\times$ otvoren podskup od A, $\rho(a)$ je otvoren skup kao praslika od $A^\times$ po neprekidnom preslikavanju $\lambda \mapsto \lambda 1 - a$. Nadalje, prema Propoziciji 5.2.16 (i) za $|\lambda| > \|a\|$ je element $\lambda 1 - a = \lambda(1 - \lambda^{-1}a)$ invertibilan, odakle slijedi da je $\sigma(a)$ sadržan u zatvorenom disku $\overline{K}_{\mathbb{C}}(0, \|a\|)$. Kako je $\sigma(a)$ zatvoren i omeđen podskup od $\mathbb{C}$, on je kompaktan.

Ostaje dokazati da je $\sigma(a)$ neprazan za sve $a \in A$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji element $a \in A$ takav da je $\sigma(a) = \emptyset$. Tada je njegova rezolventa R_a definirana na čitavoj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$. Fiksirajmo ograničen linearni funkcional $\varphi \in A^*$ i definirajmo funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s $f := \varphi \circ R_a$. Tvrdimo da je f cijela funkcija. Zaista, ako je $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ proizvoljan, tada zbog neprekidnosti funkcionala φ, Propozicije 5.1.21 i neprekidnosti invertiranja imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \varphi\left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{R_a(\lambda) - R_a(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) = \varphi\left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda)R_a(\lambda)R_a(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= -\varphi\left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} (\lambda 1 - a)^{-1}(\lambda_0 1 - a)^{-1}\right) = -\varphi\left((\lambda_0 1 - a)^{-2}\right) \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Nadalje, ako je $|\lambda| > \|a\|$, iz Propozicije 5.2.16 (i) slijedi

$$|f(\lambda)| \leq \|\varphi\|\|R_a(\lambda)\| = \frac{\|\varphi\|}{|\lambda|}\left\|\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{\|\varphi\|}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|\lambda|}} = \frac{\|\varphi\|}{|\lambda| - \|a\|}.$$

Dakle, f je ograničena cijela funkcija s $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda) = 0$. Prema Liouvilleovom teoremu je $f = 0$. Kako je $\varphi \in A^*$ bio proizvoljan, prema Korolaru 2.2.1 zaključujemo da je $(\lambda 1 - a)^{-1} = R_a(\lambda) = 0$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$. To je naravno kontradikcija, jer $A \neq \{0\}$. $\square$

Korolar 5.2.19 (Geljfand-Mazurov teorem). *Ako je A unitalna Banachova algebra u kojoj je svaki element različit od 0 invertibilan, tada je A izometrički izomorfna algebri kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Neka je $a \in A$ proizvoljan element. Prema Teoremu 5.2.18, $\sigma(a) \neq 0$. Za $\lambda \in \sigma(a)$ imamo $\lambda 1 - a \in A \setminus A^\times = \{0\}$, tj. $a = \lambda 1$. Dakle $A = \mathbb{C}1$. Definirajmo preslikavanje $\phi : \mathbb{C} \to A$ s $\phi(\lambda) := \lambda 1$. Tada je ϕ očito (unitalni) izometrički izomorfizam Banachovih algebri. $\square$

Napomena 5.2.20. Alternativni dokaz Geljfand-Mazurovog teorema, bez oslanjanja na Teorem 5.2.18 i tehnike kompleksne analize, možete npr. naći u [21].

Definicija 5.2.21. Neka je A unitalna Banachova algebra. **Spektralni radijus** elementa $a \in A$ definiramo kao broj

$$r(a) := \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Prema Teoremu 5.2.18, $r(a)$ je dobro definiran broj i vrijedi

$$0 \leq r(a) \leq \|a\|. \tag{5.9}$$

Sljedeći primjer pokazuje da su ocjene u (5.9) najbolje moguće.

Primjer 5.2.22. (i) Neka je Ω topološki prostor i neka je $f \in C_b(\Omega)$. Tada je prema Primjeru 5.1.15 $\sigma(f) = \overline{f(\Omega)}$, pa je $r(f) = \|f\|_\infty$.

(ii) U matričnoj algebri $A = \mathbb{M}_2$ promotrimo matricu

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Budući da je $a^2 = 0$, imamo $\{0\} = \sigma(a^2) = \sigma(a)^2$ (Propozicija 5.1.17), pa je $r(a) = \{0\}$. S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\left\{ \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \right\|_2 : \ \left\| \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \right\|_2 = 1 \right\} = \sup\{|\mu| : \ |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Istaknimo neka jednostavna svojstva spektralnog radijusa.

Propozicija 5.2.23. *Neka je A unitalna Banachova algebra. Tada vrijedi:*

(i) $r(\lambda a) = |\lambda| r(a)$ za sve $a \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) $r(a^n) = r(a)^n$ za sve $a \in A$ i $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $r(ab) = r(ba)$ za sve $a, b \in A$.

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) slijede direktno iz Propozicije 5.1.17, a tvrdnja (iii) slijedi direktno iz Propozicije 5.1.18. $\square$

Sljedeći teorem nam daje relativno efikasan način za računanje spektralnog radijusa.

Teorem 5.2.24. *Neka je A unitalna Banachova algebra. Za svaki element $a \in A$ vrijedi*

$$r(a) = \inf\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} : \ n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dokaz. Kao i inače, pretpostavljamo da je A unitalna algebra. Neka je $a \in A$. Iz Propozicije 5.2.23 (ii) i ocjene (5.9) slijedi $r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$r(a) \leq \inf\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}} : \ n \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{5.10}$$

Neka je Δ otvoren disk u $\mathbb{C}$ s centrom u 0 radijusa $1/r(a)$ (pri tome uzimamo u obzir konvenciju $1/0 = +\infty$). Tada je $1 - \lambda a \in A^\times$ za sve $\lambda \in \Delta$. Fiksirajmo ograničeni funkcional $\varphi \in A^*$ i definirajmo funkciju

$$f : \Delta \to \mathbb{C} \quad \text{s} \quad f(\lambda) := \varphi((1 - \lambda a)^{-1}).$$

Kao u dokazu Teorema 5.2.18, zaključujemo da je f holomorfna funkcija na Δ. Dakle, postoji jedinstven niz kompleksnih brojeva $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ takav da vrijedi

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n \qquad (\lambda \in \Delta). \tag{5.11}$$

S druge strane, ako je $|\lambda| < 1/\|a\| (\leq 1/r(a))$, tada je $\|\lambda a\| < 1$, pa je prema Propoziciji 5.2.16 (i)

$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n.$$

Ako na tu jednakost djelujemo s (neprekidnim) funkcionalom φ, dobivamo

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n)\lambda^n \qquad (|\lambda| < 1/\|a\|). \tag{5.12}$$

Budući da je Talyorov red analitičke funkcije jedinstven, iz (5.11) i (5.12) zaključujemo da je $\lambda_n = \varphi(a^n)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$. Specijalno niz $(\varphi(a^n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ konvergira prema 0 za sve $\lambda \in \Delta$, pa je on naravno i omeđen. Budući da je $\varphi \in A^*$ bio proizvoljan, prema principu uniformne ograničenosti zaključujemo da je $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ograničen niz u A. Dakle, postoji $C(\lambda) > 0$ takav da vrijedi $\|\lambda^n a^n\| \leq C(\lambda)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, odnosno $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C(\lambda)^{\frac{1}{n}}/|\lambda|$ (za $\lambda \neq 0$). Odavde slijedi $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1/|\lambda|$. Dakle, pokazali smo da iz $r(a) < 1/|\lambda|$ slijedi $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1/|\lambda|$, pa je

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a). \tag{5.13}$$

Tvrdnja sada slijedi direktno iz (5.10) i (5.13). □

Prisjetimo se, ako je K neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$, njegov komplement $\mathbb{C} \setminus K$ ima točno jednu neomeđenu komponentu povezanosti. Za omeđene komponente povezanosti od $\mathbb{C} \setminus K$ kažemo da su **rupe** od K.

Propozicija 5.2.25. *Neka je B unitalna Banachova podalgebra unitalne Banachove algebre A.*

(i) Skup $B^\times$ je otvoren i zatvoren podskup od $B \cap A^\times$.

(ii) Za sve $b \in B$ vrijedi

$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b) \quad \text{i} \quad \partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b).$$

(iii) Ako je $b \in B$ takav da $\sigma_A(b)$ nema rupa, tada je $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

Dokaz. (i). Prema Propoziciji 5.2.16 (ii), $B^\times$ je otvoren podskup od $B \cap A^\times$. Kako bismo pokazali njegovu zatvorenost, neka je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $B^\times$ koji konvergira prema elementu $b \in B \cap A^\times$. Budući da je invertiranje neprekidno (Propozicija 5.2.16 (iii)), niz $(b_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema elementu b^{-1} u A, a kako je B zatvorena podalgebra, slijedi $b^{-1} \in B$. Dakle, $b \in B^\times$.

(ii). Kako je $B^\times \subseteq A^\times$, za $b \in B$ imamo $\rho_B(b) \subseteq \rho_A(b)$, odnosno $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$. Nadalje, ako je $\lambda \in \partial\sigma_B(b) \subseteq \sigma_B(b)$, tada postoji niz (λ_n) u $\rho_B(b)$ koji konvergira prema λ. Tada je $\lambda_n 1 - b \in B^\times$ i $\lambda 1 - b \notin B^\times$, pa iz (i) slijedi da $\lambda 1 - b \notin A^\times$, tj. $\lambda \in \sigma_A(b)$. Nadalje, za sve $n \in \mathbb{N}$ je $\lambda_n 1 - b \in A^\times$, odnosno $\lambda_n \in \rho_A(b)$. Dakle, $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$, odakle slijedi inkluzija $\partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b)$.

(iii). Ako je $b \in B$ takav da $\sigma_A(b)$ nema rupa, onda je $\rho_A(b)$ povezan podskup od $\mathbb{C}$. Kako je prema (i) i (ii), $\rho_B(b)$ otvoren i zatvoren podskup od $\rho_A(b)$, zbog povezanosti od $\rho_A(b)$ imamo $\rho_B(b) = \rho_A(b)$, odnosno $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. □

Sljedeći primjer pokazuje da je općenito $\sigma_A(b)$ pravi podskup od $\sigma_B(b)$ kada $\sigma_A(b)$ ima rupa.

Primjer 5.2.26. Neka je $A(\mathbb{D})$ algebra diska iz Primjera 5.2.13. Ako je $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ jedinična kružnica u $\mathbb{C}$ tada restrikcija

$$\phi : A(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{S}^1) \qquad \phi(f) := f|_{\mathbb{S}^1}$$

definira unitalni izometrički monomorfizam algebre $A(\mathbb{D})$ u algebru $C(\mathbb{S}^1)$. Naime, izometričnost slijedi iz principa maksimuma modula:

$$\|f\|_{A(\mathbb{D})} = \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{D}\} = \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{S}^1\} = \|\phi(f)\|_{C(\mathbb{S}^1)}.$$

Stavimo $A := C(\mathbb{S}^1)$ i $B := \phi(A(\mathbb{D}))$, tako da je B unitalna Banachova podalgebra od A. Ako s a označimo identitetu na $\mathbb{D}$, tj. $a(z) = z$ za sve $z \in \mathbb{D}$, tada je $a \in A(\mathbb{D})$ i $\sigma_{A(\mathbb{D})}(a) = a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, pa je i $\sigma_B(\phi(a)) = \mathbb{D}$. S druge strane je $\sigma_A(\phi(a)) = a(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

5.3 Geljfandova teorija za komutativne Banachove algebre

U ovom odjeljku ćemo razviti osnovne elemente Geljfandove teorije iz koje slijedi da se svaka unitalna komutativna poluprosta Banachova algebra može uložiti u algebru neprekidnih funkcija na kompaktnim Hausdorffovim prostorima.

Definicija 5.3.1. Neka je A algebra. **Karakter algebre** A je svaki homomorfizam algebri $\varphi : A \to \mathbb{C}$ različit od nule. U daljnjem ćemo s $\Omega(A)$ označavati skup svih karaktera algebre A.

Napomena 5.3.2. Ako je A unitalna algebra, tada je svaki $\varphi \in \Omega(A)$ unitalan. Zaista, iz $\varphi(1) = \varphi(1^2) = \varphi(1)^2$ slijedi da je ili $\varphi(1) = 0$ ili $\varphi(1) = 1$. Kad bi bilo $\varphi(1) = 0$, onda bi za svaki $a \in A$ vrijedilo

$$\varphi(a) = \varphi(a1) = \varphi(a)\varphi(1) = 0,$$

odnosno $\varphi = 0$. Dakle, $\varphi(1) = 1$.

Lema 5.3.3. *Neka je A unitalna algebra i neka je φ linearni funkcional na A. Tada je $\varphi \in \Omega(A)$ ako i samo ako vrijedi*

$$\varphi(1) = 1 \quad i \quad \varphi(a^2) = \varphi(a)^2 \tag{5.14}$$

za sve $a \in A$.

Dokaz. Ako je φ karakter na A, tada radi Napomene 5.3.2, φ očito φ zadovoljava (5.14). Obratno, pretpostavimo da je φ linearni funkcional na A koji zadovoljava (5.14). Tada za proizvoljne elemente $a, b \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(a^2) + \varphi(ab + ba) + \varphi(b^2) &= \varphi(a^2 + ab + ba + b^2) \\
&= \varphi((a + b)^2) = (\varphi(a) + \varphi(b))^2 \\
&= \varphi(a^2) + 2\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b^2),
\end{aligned}$$

odnosno

$$\varphi(ab + ba) = 2\varphi(a)\varphi(b).$$

Stoga je dovoljno dokazati da vrijedi $\varphi(ba) = \varphi(ab)$. Kako bismo to pokazali, najprije primijetimo da za proizvoljne elemente $x, y \in A$ vrijedi jednakost

$$(xy - yx)^2 + (xy + yx)^2 = 2[x(yxy) + (yxy)x],$$

tako da je

$$\begin{aligned}
\varphi(xy - yx)^2 + 4\varphi(x)^2\varphi(y)^2 &= \varphi((xy - yx)^2) + \varphi(xy + yx)^2 \\
&= \varphi((xy - yx)^2 + (xy + yx)^2) \\
&= 2\varphi(x(yxy) + (yxy)x) \\
&= 4\varphi(x)\varphi(yxy).
\end{aligned}$$

Ukoliko stavimo $x := a - \varphi(a)1$, tako da je $\varphi(x) = 0$, i $y := b$, dobivamo $\varphi(xb) = \varphi(bx)$, odnosno $\varphi(ab) = \varphi(ba)$. $\square$

Teorem 5.3.4 (Gleason[2]-Kahane[3]-Żelazko[4]). *Neka je A unitalna Banachova algebra. Za linearni funkcional φ na A, su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $\varphi \in \Omega(A)$.

(ii) $\varphi(1) = 1$ *i* $\varphi(a) \neq 0$ *za svaki* $a \in A^\times$.

(iii) $\varphi(a) \in \sigma(a)$ *za sve* $a \in A$.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Kako je φ karakter na A imamo $\varphi(1) = 1$ (Napomena 5.3.2), pa je $1 = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a)$ za sve $a \in A^\times$. Specijalno, $0 \notin \varphi(A^\times)$.

(ii) $\implies$ (iii). Ako je $\lambda \in \rho(a)$, tada je $a - \lambda 1 \in A^\times$, pa je $0 \neq \varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda$.

(iii) $\implies$ (i). Najprije primijetimo da je $\varphi(1) = 1$ (jer je $\sigma(1) = \{1\}$). Prema Lemi 5.3.3, dovoljno je dokazati da vrijedi $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ za sve $a \in A$. Kako bismo to pokazali, fiksirajmo prirodan broj $n \geq 2$ i definirajmo polinom

$$p(\lambda) := \varphi((\lambda 1 - a)^n)$$

stupnja n. Ako s $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ označimo njegove korijene (brojeći njihove kratnosti), tada za sve $1 \leq i \leq n$ imamo

$$0 = p(\lambda_i) = \varphi((\lambda_i 1 - a)^n) \in \sigma((\lambda_i 1 - a)^n).$$

Iz Propozicije 5.1.17 slijedi $\lambda_i \in \sigma(a)$, pa je $|\lambda_i| \leq r(a)$. Kako je

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = p(\lambda) = \lambda^n - n\varphi(a)\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\varphi(a^2)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n \varphi(a^n),$$

uspoređujući koeficijente vidimo da je

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n\varphi(a) \quad \text{i} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \binom{n}{2}\varphi(a^2). \tag{5.15}$$

S druge strane, iz druge jednakosti u (5.15) dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n(n-1)\varphi(a^2). \tag{5.16}$$

Kombinirajući formule (5.15) i (5.16) dobivamo

$$n^2 |\varphi(a)^2 - \varphi(a^2)| = \left| -n\varphi(a^2) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right| \leq n|\varphi(a^2)| + nr(a)^2. \tag{5.17}$$

Kako nejednakost (5.17) vrijedi za sve $n \geq 2$, zaključujemo da je $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$, kao što je i trebalo pokazati. □

Korolar 5.3.5. *Neka je A unitalna Banachova algebra. Tada je svaki $\varphi \in \Omega(A)$ ograničen linearni funkcional na A i vrijedi $\|\varphi\| = 1$.*

Dokaz. Iz teorema 5.3.4 i (5.9) slijedi $|\varphi(a)| \leq r(a) \leq \|a\|$ za sve $a \in A$, pa je $\|\varphi\| \leq 1$. Nadalje, iz $\varphi(1) = 1$ slijedi $\|\varphi\| = 1$. □

Ako je A unitalna komutativna Banachova algebra, tada je uvijek $\Omega(A) \neq \emptyset$. Štoviše, vrijedi sljedeći bitan rezultat:

---

[2] Andrew Mattei Gleason (1921.–2008.), američki matematičar)

[3] Jean-Pierre Kahane (1926.–2017.), francuski matematičar

[4] Wieslaw Żelazko (1933.–), poljski matematičar

Teorem 5.3.6. *Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. Tada je preslikavanje*

$$\Theta : \Omega(A) \to \mathrm{Max}(A), \qquad \Theta(\varphi) := \ker \varphi = \{a \in A : \ \varphi(a) = 0\}$$

bijekcija sa skupa $\Omega(A)$ svih karaktera na A na skup $\mathrm{Max}(A)$ svih maksimalnih ideala u A.

U dokazu Teorema 5.3.6 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju:

Lema 5.3.7. *Neka je A unitalna Banachova algebra i neka je $I \neq A$ ideal u A. Tada je $I \cap K_A(1_A, 1) = \emptyset$. Posebno:*

(i) $\overline{I}$ je ideal u A različit od A.

(ii) Svaki maksimalni ideal M u A je zatvoren.

Dokaz. Ako je $a \in A$ takav da je $\|a - 1_A\| < 1$, tada je prema Propoziciji 5.2.16 (i) a invertibilan u A. Dakle, $a \notin I$. □

Dokaz Teorema 5.3.6. Ako je $\varphi \in \Omega(A)$, tada je $\ker \varphi$ zatvoreni ideal u A kodimenzije 1, stoga maksimalni ideal u A.

Pokažimo injektivnost preslikavanja Θ. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$ takvi da je $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$; označimo taj ideal s M. Budući da je M kodimenzije 1, svaki element $a \in A$ možemo na jedinstven način prikazati u obliku

$$a = \lambda 1 + b, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \ b \in M.$$

Kako je $\varphi(1) = 1$ za svaki homomorfizam φ s $\ker \varphi = M$, imamo

$$\varphi_1(a) = \lambda\varphi_1(1) + \varphi_1(b) = \lambda = \lambda\varphi_2(1) + \varphi_2(b) = \varphi_2(a),$$

a kako je $a \in A$ bio proizvoljan, zaključujemo $\varphi_1 = \varphi_2$.

Ostaje dokazati surjektivnost preslikavanja Θ. Neka je $M \in \mathrm{Max}(A)$. Prema Lemi 5.3.7, M je zatvoren ideal u A. Nadalje, prema Propoziciji 5.1.30, svaki element Banachove algebre A/M je invertibilan, pa je prema Geljfand-Mazurovom teoremu (Teorem 5.2.19) A/M izometrički izomorfna algebri $\mathbb{C}$. Ukoliko s ϕ označimo izomorfizam $A/M \cong \mathbb{C}$ i s $Q_M : A \to A/M$ pripadno kvocijentno preslikavanje, tada je $\varphi := \phi \circ Q_M \in \Omega(A)$ i $\Theta(\varphi) = \ker \varphi = M$. □

Korolar 5.3.8. *Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. Tada je $\Omega(A) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 5.1.27 ideal $\{0\}$ je sadržan u nekom maksimalnom idealu koji je prema Teoremu 5.3.6 jezgra nekog karaktera na Ω. Posebno, $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

Definicija 5.3.9. Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. **Radikal** od A je definiran kao presjek svih maksimalnih ideala u A. Označavamo ga s $\mathrm{rad}(A)$.

Napomena 5.3.10. Očito je $\mathrm{rad}(A)$ zatvoren ideal u A. Nadalje, iz Teorema 5.3.6 slijedi

$$\mathrm{rad}(A) = \bigcap\{M : \ M \in \mathrm{Max}(A)\} = \bigcap\{\ker \varphi : \ \varphi \in \Omega(A)\}.$$

Definicija 5.3.11. Za unitalnu komutativnu Banachovu algebru A kažemo da je **poluprosta** ako je $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$.

Istaknimo sljedeće dvije interesantne posljedice Korolara 5.3.5.

Korolar 5.3.12. *Neka je $\phi : A \to B$ homomorfizam unitalih komutativnih Banachovih algebri A i B. Ako je B poluprosta, tada je ϕ automatski neprekidan.*

Dokaz. Prema teoremu o zatvorenom grafu, dovoljno je dokazati sljedeće: Ako je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u A koji konvergira prema 0 i ako niz $(\phi(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema elementu $b \in B$, tada je $b = 0$. Kako bismo to pokazali, fiksirajmo karakter $\varphi \in \Omega(B)$. Tada je $\varphi \circ \phi \in \Omega(A) \cup \{0\}$, pa su prema Korolaru 5.3.5 oba preslikavanja φ i $\varphi \circ \phi$ neprekidna. Slijedi

$$\varphi(b) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\phi(a_n)) = \lim_{n\to\infty} (\varphi \circ \phi)(a_n) = 0.$$

Iz proizvoljnosti $\varphi \in \Omega(B)$ i pretpostavke da je poluprosta, slijedi $b = 0$. □

Korolar 5.3.13. *Neka je A unitalna komutativna poluprosta Banachova algebra. Svake dvije norme na A uz koje je A Banachova algebra su međusobno ekvivalentne.*

Dokaz. Neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dvije norme uz koje je A Banachova algebra. Prema Korolaru 5.3.12, identiteta id_A je neprekidna kao funkcija $(A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_2)$ i kao funkcija $(A, \|\cdot\|_2) \to (A, \|\cdot\|_1)$. Dakle, postoje konstante $0 \le m \le M$ takve da je

$$m\|a\|_1 \le \|a\|_2 \le M\|a\|_1 \quad \forall a \in A.$$

□

Na kraju ovog odjeljka istaknimo i jednu zgodnu primjenu Korolara 5.3.12. Najprije napomenimo da bismo slično kao u Primjeru 1.6.16 pokazali da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ prostor $C^n([0,1])$ svih n-puta neprekidno derivabilnih kompleksnih funkcija na segmentu $[0,1]$ komutativna Banachova algebra uz operacije po točkama i normu

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

Označimo s $C^\infty([0,1])$ algebru svih beskonačno puta derivabilnih kompleksnih funkcija na $[0,1]$. Prirodno je pitati se postoji li norma na algebri $C^\infty([0,1])$ uz koju ona postaje Banachova algebra. Odgovor na to pitanje je negativan:

Korolar 5.3.14. *Na algebri $C^\infty([0,1])$ ne postoji norma uz koju ona postaje Banachova algebra.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno i neka je $\|\cdot\|$ norma na $C^\infty([0,1])$ takva da je $(C^\infty([0,1]), \|\cdot\|)$ Banachova algebra. Prema Korolaru 5.3.12, identiteta $\mathrm{id} : (C^\infty([0,1]), \|\cdot\|) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ je neprekidna funkcija, pa postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$\|f\|_\infty \le C\|f\| \quad \forall f \in C^\infty([0,1]). \tag{5.18}$$

Koristeći tu nejednakost, pokazat ćemo da je operator deriviranja $D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$, $D : f \mapsto f'$ neprekidan i time dobiti kontradikciju s Primjerom 4.5.13 (b). Zaista, neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $C^\infty([0,1])$ takav da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\| = 0$$

za neku funkciju $g \in C^\infty([0,1])$. Tada je prema (5.18)

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0.$$

Fiksirajmo točke $x, y \in [0,1]$ takve da je $x < y$. Iz

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y g(t)\,dt \right| &\le |f_n(y) - f_n(x)| + \left| \int_x^y (f_n'(t) - g(t))\,dt \right| \\ &\le 2\|f_n\|_\infty + |y - x|\|f_n' - g\|_\infty, \end{aligned}$$

slijedi $\int_x^y g(t) = 0$. Kako su točke x i y bile proizvoljne, zaključujemo da je $g = 0$. Neprekidnost od D sada slijedi iz teorema o zatvorenom grafu. □

Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. Prema Korolaru 5.3.5 skup karaktera $\Omega(A)$ na A je sadržan u zatvorenoj jediničnoj kugli B_{A^*} duala A^*.

Definicija 5.3.15. Relativna w^*-topologija na $\Omega(A)$ se zove **Geljfandova**[5] **topologija**, a skup $\Omega(A)$ opskrbljen s Geljfandovom topologijom zove se **Geljfandov spektar** od A.

Eksplicitno, bazu okolina karaktera $\varphi_0 \in \Omega(A)$ čine svi skupovi oblika

$$U_{\Omega(A)}(\varphi_0, a_1, \ldots, a_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \Omega(A) : \ |\varphi(a_1) - \varphi_0(a_1)| < \varepsilon, \ldots, |\varphi(a_n) - \varphi_0(a_n)| < \varepsilon\},$$

gdje su $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ i $\varepsilon > 0$.

Propozicija 5.3.16. *Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. Onda je $\Omega(A)$ kompaktan Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Prema Banach-Alaogluovom teoremu za normirane prostore (Korolar 4.9.8) B_{A^*} je w^*-kompaktna. Budući da je $\Omega(A) \subseteq B_{A^*}$, dovoljno je pokazati da je $\Omega(A)$ w^*-zatvoren podskup. Neka je $\varphi_0 \in \overline{\Omega(A)}^{w^*}$. Trebamo pokazati da je $\varphi_0 \in \Omega(A)$. Neka je stoga $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u $\Omega(A)$ koja w^*-konvergira prema φ_0. Onda je $\varphi_\alpha(1) = 1$ za sve $\alpha \in \Lambda$ pa je i $\varphi_0(1) = 1$. Analogno iz $\varphi_\alpha(ab) = \varphi_\alpha(a)\varphi_\alpha(b)$ za sve $\alpha \in \Lambda$ i $a, b \in A$ slijedi $\varphi_0(ab) = \varphi_0(a)\varphi_0(b)$. Dakle, $\varphi_0 \in \Omega(A)$ kao što smo i trebali dokazati. $\square$

Neka je A komutativna Banachova algebra. Za element $a \in A$ definiramo funkciju

$$\hat{a} : \Omega(A) \to \mathbb{C} \quad \text{s} \quad \hat{a}(\varphi) := \varphi(a).$$

Prema definiciji Geljfandove topologije na $\Omega(A)$, funkcija $\hat{a}$ je očigledno neprekidna.

Definicija 5.3.17. Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra. Preslikavanje $\Gamma_A : A \to C(\Omega(A))$ definirano s $\Gamma_A : a \mapsto \hat{a}$ zove se **Geljfandova transformacija** od A.

Osnovna svojstva Geljfandove transformacije dana su sljedećim teoremom:

Teorem 5.3.18. *Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra.*

(i) Za sve $a \in A$ vrijedi $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A))$. Posebno je $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$, te je $a \in A^\times$ ako i samo ako je $\hat{a} \in C(\Omega(A))^\times$.

(ii) Geljfandova transformacija Γ_A je unitalni kontraktivni homomorfizam algebri.

(iii) $\ker \Gamma_A = \operatorname{rad}(A)$. *Posebno, Γ_A je injektivna ako i samo ako je A poluprosta.*

(iv) Γ_A je izometrija ako i samo ako vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$ za sve $a \in A$.

Dokaz. (i). Neka je $a \in A$. Iz Teorema 5.3.4 slijedi $\varphi(a) \in \sigma(a)$ za sve $\varphi \in \Omega(A)$, odnosno $\hat{a}(\Omega(A)) \subseteq \sigma(a)$. Obratno, za $\lambda \in \sigma(a)$ element $\lambda 1 - a$ nije invertibilan, pa prema Korolaru 5.1.28 postoji $M \in \operatorname{Max}(A)$ takav da je $\lambda 1 - a \in M$. Nadalje, prema Teoremu 5.3.6 postoji (jedinstven) $\varphi \in \Omega(A)$ takav da je $M = \ker \varphi$, odakle slijedi $\lambda - \varphi(a) = \varphi(\lambda 1 - a) = 0$, odnosno $\lambda = \varphi(a)$. Dakle, $\hat{a}(\Omega(A)) = \sigma(a)$. Posebno:

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\varphi\in\Omega(A)} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\varphi\in\Omega(A)} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| = r(a),$$

$$\hat{a} \in C(\Omega(A))^\times \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{a}(\varphi) \neq 0 \ \forall \varphi \in \Omega(A) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \sigma(a).$$

(ii). Neka su $a, b \in A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tada za svaki $\varphi \in \Omega(A)$ imamo

$$\begin{aligned} (\widehat{\alpha a + \beta b})(\varphi) &= \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\hat{a}(\varphi) + \beta\hat{b}(\varphi) \\ &= (\alpha\hat{a} + \beta\hat{b})(\varphi), \end{aligned}$$

[5] Izrail Mojsejevič Geljfand (1913.–2009.), sovjetski matematičar i jedan od najutjecajnijih matematičara 20. stoljeća

$$\widehat{ab}(\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \hat{a}(\varphi)\hat{b}(\varphi),$$

odakle slijedi da je Γ_A homomorfizam algebri. Nadalje, iz Napomene 5.3.2 slijedi $\hat{1}(\varphi) = \varphi(1) = 1$, dok iz (i) dobivamo

$$\|\Gamma_A(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) \leq \|a\|.$$

(iii). Tvrdnja slijedi direktno iz definicije Geljfandove transformacije i radikala.

(iv). Pretpostavimo da vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$ za sve $a \in A$. Indukcijom dobivamo da je tada i $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa iz (iv) i Teorema 5.2.24 slijedi

$$\|\Gamma_A(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|.$$

Obratno, ako je Γ izometrija, tada je

$$\|a^2\| = \|\widehat{a^2}\|_\infty = \|\hat{a}^2\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2 = \|a\|^2.$$

$\square$

Napomena 5.3.19. Mnoge Banachove algebre koje se javljaju u praksi nisu unitalne. Kako bismo neke od navedenih rezultata ovog i prethodnog odjeljka proširili i na neunitalni ambijent, možemo ovako postupiti. Za neunitalnu algebru A definiramo njenu **(minimalnu) unitizaciju**, tako da uzmemo neki element $1 \notin A$ i definiramo

$$\widetilde{A} := \{a + \lambda 1 : \, a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Uz prirodne operacije $\widetilde{A}$ postaje unitalna algebra s jedinicom 1 u kojoj je A maksimalni ideal (štoviše, A je kodimenzije 1 u $\widetilde{A}$). Ako je A $*$-algebra onda i $\widetilde{A}$ postaje $*$-algebra uz involuciju $(a + \lambda 1)^* = a^* + \overline{\lambda} 1$.

Spektar proizvoljnog elementa a neunitalne algebre A definiramo kao njegov spektar računat u $\tilde{A}$, tj.

$$\sigma(a) := \sigma_{\widetilde{A}}(a).$$

Ako je A normirana (Banachova) algebra, onda i $\widetilde{A}$ postaje normirana (Banachova) algebra uz normu $\|a + \lambda 1\| := \|a\|_A + |\lambda|$. Ako je pak A C^*-algebra, onda $\widetilde{A}$ postaje C^*-algebra s obzirom na normu $\|a + \lambda 1\| := \sup\{\|ax + \lambda x\|_A : \, x \in S_A\}$

Nadalje, ako je A neunitalna komutativna Banachova algebra, svaki karatker $\varphi \in \Omega(A)$ možemo na jedinstven način proširiti do karaktera $\widetilde{\varphi} \in \Omega(\widetilde{A})$ koji je definiran s

$$\widetilde{\varphi}(a + \lambda 1) := \varphi(a) + \lambda, \qquad a \in A, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Onda je (uz prirodnu identifikaciju)

$$\Omega(A) = \Omega(\widetilde{A}) \setminus \{\varphi_\infty\},$$

gdje je $\varphi_\infty \in \Omega(\widetilde{A})$ definiran s $\varphi_\infty(a + \lambda 1) := \lambda$. Pritom je $\Omega(A) \subset B_{A^*}$, te je $\Omega(A)$ uz w^*-topologiju lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Za razliku od unitalnog slučaja, za neunitalne komutativne Banachove algebre se može desiti da je $\Omega(A) = \emptyset$ (tzv. radikalne algebre). Na analogan način definiramo Geljfandovu transformaciju Γ_A i nije teško vidjeti da je njena slika sadržana u C^*-algebri $C_0(\Omega(A))$.

Primjer 5.3.20. Ako je Ω nekompaktan lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, lako se provjeri da je (uz prirodnu identifikaciju) $\widetilde{C_0(\Omega)} = C(\widetilde{\Omega})$, gdje je $\widetilde{\Omega}$ Aleksandrovljeva kompaktifikacija od Ω (vidjeti Primjer 5.2.10 (b)). Zbog toga (minimalnu) unitizaciju smatramo algebarskim analogonom Aleksandrovljeve (minimalne) kompaktifikacije.

5.4 Primjeri i primjene

U ovom odjeljku ćemo opisati Geljfandovu transformaciju na nekim konkretnim primjerima, te ćemo ilustrirati i neke njene primjene. Za početak krećemo s jednom jednostavnom posljedicom Teorema 5.3.18, čiji direktni dokaz (tj. bez pozivanja na Geljfandovu transformaciju) ispada relativno "neuredan":

Propozicija 5.4.1. *Neka je A unitalna Banachova algebra i neka su a i b dva komutirajuća elementa iz A. Tada vrijedi*

$$r(a+b) \le r(a) + r(b) \quad \text{i} \quad r(ab) \le r(a)r(b).$$

Specijalno, komutativna Banachova algebra A je poluprosta ako i samo ako je $(A, r(\cdot))$ normirana algebra.

Napomena 5.4.2. Neka je A unitalna normirana algebra. Ako je $\{B_i : i \in I\}$ familija zatvorenih unitalnih podalgebri od A, tada je $\bigcap_{i\in I} B_i$ također zatvorena unitalna podalgebra od A. Dakle, za svaki podskup S od A postoji najmanja zatvorena unitalna podalgebra B od A koja sadrži S; to je presjek svih zatvorenih podalgebri koje sadrže skup $S \cup \{1\}$. Za tu algebru B kažemo da je **generirana skupom** S. Primijetimo da je B zatvarač skupa koji se sastoji od svih (konačnih) linearnih kombinacija (konačnih) produkata elemenata iz $S \cup \{1\}$. Kažemo da je A **konačno generirana** ako postoji konačni podskup od A koji generira A.

Dokaz Propozicije 5.4.1. Budući da spektralni radijus ne ovisi o ambijentalnoj algebri (Teorem 5.2.24), prelaskom na unitalnu Banachovu podalgebru generiranu sa skupom $\{a, b\}$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A komutativna. Tada je prema Teoremu 5.3.18,

$$r(a+b) = \|\hat{a} + \hat{b}\|_\infty \le \|\hat{a}\|_\infty + \|\hat{b}\|_\infty = r(a) + r(b)$$

i

$$r(ab) = \|\hat{a}\hat{b}\|_\infty \le \|\hat{a}\|_\infty \|\hat{b}\|_\infty = r(a)r(b).$$

Dakle, spektralni radijus $r(\cdot)$ definira submultiplikativnu polunormu na A. Nadalje, prema Teoremu 5.3.18, $r(\cdot)$ je norma na A ako i samo ako je A poluprosta. $\square$

Definicija 5.4.3. Neka je A unitalna komutativna Banachova algebra i neka su $a_1, \ldots, a_n \in A$. **Zajednički spektar** od $a_1, \ldots, a_n$ je podskup od $\mathbb{C}^n$ definiran s

$$\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \sigma_A(a_1, \ldots, a_n) := \{(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \ : \ \varphi \in \Omega(A)\}.$$

Budući da je $\Omega(A)$ kompaktan te kako je preslikavanje

$$T : \Omega(A) \to \mathbb{C}^n, \qquad T : \varphi \mapsto (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \tag{5.19}$$

neprekidno, $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ je kompaktan podskup od $\mathbb{C}^n$. Primijetimo da iz Teorema 5.3.18 (i) slijedi da se zajednički spektar jednog elementa a podudara s njegovim (običnim) spektrom $\sigma(a)$.

Propozicija 5.4.4. *Neka je A konačno generirana unitalna komutativna Banachova algebra. Ako su $a_1, \ldots, a_n$ njeni generatori, tada je preslikavanje T iz (5.19) homeomorfizam s $\Omega(A)$ na $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$.*

Dokaz. Prema definiciji zajedničkog spektra, T je očito surjekcija. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(A)$ takvi da je $\varphi_1(a_i) = \varphi_2(a_i)$ za sve $1 \le i \le n$. Tada se φ_1 i φ_2 podudaraju i na skupu svih linearnih kombinacija produkata elemenata skupa $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{1\}$. Budući da je taj skup gust u A i budući da su karakteri neprekidni (Korolar 5.3.5), zaključujemo da je $\varphi_1 = \varphi_2$. Time smo pokazali injektivnost od T. Sve zajedno, T je neprekidna bijekcija s kompaktnog Hausdorffovog prostora $\Omega(A)$ na kompaktan Hausdorffov prostor $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$, dakle T homeomorfizam (vidjeti Napomenu 4.1.5). $\square$

Primjer 5.4.5. Neka je $A(\mathbb{D})$ algebra diska (Primjer 5.2.13). Za svako $z \in \mathbb{D}$ definirajmo funkciju $\varphi_z : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ s $\varphi_z(f) := f(z)$. Tada je $\varphi_z \in \Omega(A(\mathbb{D}))$ i preslikavanje $F : z \mapsto \varphi_z$ definira homeomorfizam s $\mathbb{D}$ na $\Omega(A(\mathbb{D}))$.

Zaista, primijetimo da je $A(\mathbb{D})$ generirana jednočlanim skupom $\{a\}$, gdje je $a(z) = z$ $(z \in \mathbb{D})$. Kako je $\sigma(a) = \mathbb{D}$, prema Propoziciji 5.4.4, preslikavanje $T : \Omega(A(\mathbb{D})) \to \mathbb{D}$ dano s $T : \varphi \mapsto \varphi(a)$ je homeomorfizam. Njegov inverz je očito preslikavanje F.

Stoga, ukoliko identificiramo $\Omega(A(\mathbb{D}))$ s $\mathbb{D}$ preko homeomorfizma $T = F^{-1}$, Geljfandova transformacija od $A(\mathbb{D})$ postaje inkluzija $A(\mathbb{D}) \subseteq C(\mathbb{D})$.

Primjer 5.4.6. Neka je K kompaktan Hausdorffov prostor. Za svaki podskup $E \subseteq K$ stavimo

$$I(E) := \{f \in C(K) : \ f(t) = 0 \text{ za sve } t \in E\}.$$

Tada je preslikavanje $E \mapsto I(E)$ bijekcija sa skupa svih nepraznih zatvorenih podskupova od K na skup svih pravih zatvorenih ideala u $C(K)$. Pritom vrijedi:

$$I(E) \in \operatorname{Max}(C(K)) \quad \iff \quad E \text{ je jednočlan.}$$

Nadalje, ako za $t \in K$ s φ_t označimo karakter na $C(K)$ s jezgrom $I(\{t\}) = \{f \in C(K) : \ f(t) = 0\}$, tj.

$$\varphi_t(f) := f(t), \qquad f \in C(K),$$

tada je preslikavanje $F : t \mapsto \varphi_t$ homeomorfizam s K na $\Omega(C(K))$.

Dokažimo sve navedene tvrdnje. Jasno je da je $I(E)$ zatvoren ideal u $C(K)$ i da je $I(E) = I(\overline{E})$, radi čega smo se i ograničili na zatvorene podskupove od K. Jer je algebra $C(K)$ unitalna, $I(E)$ je pravi ideal u $C(K)$ čim je $E \neq \emptyset$. Nadalje, jer su kompaktni Hausdorffovi prostori normalni (Propozicija 4.1.4), ako je E zatvoren podskup od K i $t \in K \setminus E$, onda prema Urisonovoj lemi (Teorem 4.1.6) postoji funkcija $f \in C(K)$ takva da je $f|_E = 0$ i $f(t) \neq 0$. Odavde slijedi da je preslikavanje $E \mapsto I(E)$ injektivno.

Kako bismo pokazali surjektivnost preslikavanja $E \mapsto I(E)$, za proizvoljan pravi zatvoren ideal J u $C(K)$ definirajmo skup

$$Z_J := \{t \in K : \ f(t) = 0 \ \text{ za sve } \ f \in J\}.$$

Tada je Z_J zatvoren podskup od K i $J \subseteq I(Z_J)$. Tvrdimo da je u stvari $I = I(Z_J)$. Zaista, fiskirajmo $f \in I(Z_J)$. Za $\varepsilon > 0$ neka je

$$U := \left\{t \in K : |f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Tada je U otvoren skup u K koji sadrži Z_J, tako da je njegov komplement $K \setminus U$ zatvoren, stoga kompaktan skup, disjunktan sa Z_J. Slijedi da za svaku točku $t \in K \setminus U$ postoji funkcija $g_t \in J$ takva da je $g_t(t) \neq 0$. Tada je $|g_t|^2 = g_t^* g_t \in J$ i $|g_t|^2(t) > 0$. Zbog kompaktnosti od $K \setminus U$ postoji konačan podskup F od $K \setminus U$ takav da je funkcija $g \in C(K)$ definirana s

$$g(s) := \left(\sum_{t \in F} g_t^* g_t\right)(s) = \sum_{t \in F} |g_t(s)|^2, \qquad s \in K$$

striktno pozitivna na $K \setminus U$. Jer se sve funkcije g_t nalaze u J, slijedi $g \in J$.

Definirajmo nizove funkcija $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s

$$g_n := \frac{ng}{1+ng} \qquad \text{i} \qquad f_n := f \cdot g_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jer je $g \in J$ imamo $g_n, f_n \in J$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da niz $(f_n)_n$ uniformno konvergira prema f. Zaista, za proizvoljan $t \in U$ imamo $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, pa iz $|g_n| < 1$ slijedi $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$. S druge strane, niz $(g_n)_n$ uniformno konvergira prema 1 na $K \setminus U$, tako da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|g_n(t) - 1| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}$ za sve $t \in K \setminus U$ (ako je $f = 0$ trivijalno je $f \in J$). Odavde slijedi da je $|f(t) - f_n(t)| = |f(t)||g_n(t) - 1| < \varepsilon$ za sve $t \in K \setminus U$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. Je je $f_n \in J$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zbog zatvorenosti od J je $f \in J$.

Ostaje još dokazati da je preslikavanje $F : t \mapsto \varphi_t$ homeomorfizam s K na $\Omega(C(K))$. Bijektivnost tog preslikavanja slijedi iz dokazane bijektivnosti preslikavanja $K \ni t \mapsto I(\{t\}) \in \mathrm{Max}(C(K))$ i Teorema 5.3.6. Nadalje, za mrežu $(t_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u Ω i točku $t_0 \in K$ imamo

$$\begin{aligned} t_\alpha \to t_0 \ \ (\text{u } K) \quad &\iff \quad f(t_\alpha) \to f(t_0) \quad \text{za sve } f \in C(K) \quad (\Longleftarrow \ \text{slijedi iz Urisonove leme}) \\ &\iff \quad \varphi_{t_\alpha}(f) \to \varphi_{t_0}(f) \quad \text{za sve } f \in C(K) \\ &\iff \quad \varphi_{t_\alpha} \to \varphi_{t_0} \ \ (\text{u } \Omega(C(K))), \end{aligned}$$

što pokazuje da je preslikavanje F homeomorfizam.

Stoga, ako identificiramo $\Omega(C(K))$ s K preko homeomorfizma F^{-1}, Geljfandova transformacija od $C(\Omega)$ postaje identiteta na $C(\Omega)$.

Neka je $\phi : A \to B$ algebarski izomorfizam unitalnih komutativnih Banachovih algebri A i B. Definiramo **transponat** od ϕ kao preslikavanje $\phi^t : \Omega(B) \to \Omega(A)$ dano s

$$\phi^t(\psi) := \psi \circ \phi, \quad \psi \in \Omega(B).$$

Primijetimo da je ϕ^t bijekcija (s inverzom $(\phi^t)^{-1}(\varphi) = \varphi \circ \phi^{-1}$, $\varphi \in \Omega(A)$). Štoviše, ϕ^t je homeomorfizam s $\Omega(B)$ na $\Omega(A)$. Zaista, za mrežu $(\psi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u $\Omega(B)$ i karakter $\psi_0 \in \Omega(B)$ imamo

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \to \psi_0 \ \ (\text{u } \Omega(B)) \quad &\iff \quad \psi_\alpha(b) \to \psi_0(b) \quad \text{za sve } b \in B \\ &\iff \quad \psi_\alpha(\phi(a)) \to \psi_0(\phi(a)) \quad \text{za sve } a \in A \\ &\iff \quad \phi^t(\psi_\alpha) \to \phi^t(\psi_0) \ \ (\text{u } \Omega(A)). \end{aligned}$$

Time smo dokazali sljedeću tvrdnju:

Propozicija 5.4.7. *Neka su A i B unitalne komutativne Banachove algebre. Ako su A i B algebarski izomorfne, tada su njihovi Geljfandovi spektri $\Omega(A)$ i $\Omega(B)$ homeomorfni.*

Neka je sada $F : K_1 \to K_2$ homeomorfizam između dva kompaktna Hausdorffova prostora K_1 i K_2. Definiramo **transponat** od F kao preslikavanje $F^t : C(K_2) \to C(K_1)$ koje je dano s

$$F^t(g) := g \circ F, \qquad g \in C(K_2).$$

Primijetimo da je F^t izometrički izomorfizam Banachovih algebri $C(K_2)$ i $C(K_1)$. Zaista, F^t je očito algebarski izomorfizam (s inverzom $(F^t)^{-1}(f) := f \circ F^{-1}$, $f \in C(K_1)$) i

$$\begin{aligned} \|F^t(g)\|_\infty &= \sup\{|g(F(t))| : t \in K_1\} = \sup\{|g(s)| : s \in K_2\} \\ &= \|g\|_\infty \end{aligned}$$

za sve $g \in C(K_2)$.

Korolar 5.4.8. *Za kompaktne Hausdorffove prostore K_1 i K_2 su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) Banachove algebre $C(K_1)$ i $C(K_2)$ su izometrički izomorfne.

(ii) Banachove algebre $C(K_1)$ i $C(K_2)$ su algebarski izomorfne.

(iii) Prostori K_1 i K_2 su homeomorfni.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) je trivijalno, (ii) $\Longrightarrow$ (iii) slijedi iz Propozicije 5.4.7 i Primjera 5.4.6. Nadalje, ako je $F : K_1 \to K_2$ homeomorfizam, tada prema prethodnom razmatranju F^t definira izometrički izomorfizam Banachovih algebri $C(K_2)$ i $C(K_1)$. Time smo pokazali i (iii) $\Longrightarrow$ (i). $\square$

U vezi s Korolarom 5.4.8 i Primjerom 1.6.14 istaknimo i sljedeći bitni rezultat kojeg navodimo bez dokaza (za dokaz npr. vidjeti [7]):

Teorem 5.4.9 (Banach-Stoneov[6] teorem). *Neka su K_1 i K_2 kompaktni Hausdorffovi prostori. Tada su Banachovi prostori $C(K_1)$ i $C(K_2)$ izometrički izomorfni ako i samo ako su prostori K_1 i K_2 homeomorfni. Štoviše, svaka linearna izometrija $\phi : C(K_1) \to C(K_2)$ je oblika*

$$\phi(f) = u \cdot (f \circ F), \qquad f \in C(K_1),$$

gdje je $F : K_2 \to K_1$ homeomorfizam i $u : K_2 \to \mathbb{S}^1$ neprekidna funkcija.

Primjer 5.4.10. Neka je $\ell^1(\mathbb{Z})$ grupovna algebra od $\mathbb{Z}$ (Primjer 5.2.14). Za $z \in \mathbb{S}^1$ definirajmo preslikavanje $\varphi_z : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ s

$$\varphi_z(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n.$$

Tada je φ_z karakter na $\ell^1(\mathbb{Z})$ i preslikavanje $F : z \mapsto \varphi_z$ je homeomorfizam sa $\mathbb{S}^1$ na $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$.

Zaista, za svaku točku $z \in \mathbb{S}^1$ funkcional φ_z je očito linearan i različit od 0. Nadalje, prema Fubinijevom teoremu, za $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ imamo

$$\begin{aligned}
\varphi_z(f * g) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f * g)(n)z^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(n-m)g(m) \right) z^n \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} g(m) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n-m)z^n \right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} g(m) \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^{m+n} \right) \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n \right) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(m)z^m \right) \\
&= \varphi_z(f)\varphi_z(g).
\end{aligned}$$

Dakle, $\varphi_z \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Pokažimo da je preslikavanje $F : z \mapsto \varphi_z$ homeomorfizam sa $\mathbb{S}^1$ na $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ označimo s χ_n karakterističnu funkciju skupa $\{n\}$. Tada je χ_0 očito jedinica u $\ell^1(\mathbb{Z})$. Također, za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\|\chi_n\|_1 = 1 \quad \text{i} \quad \chi_n * \chi_m = \chi_{m+n}.$$

Budući da vrijedi $F(z)(\chi_1) = \varphi_z(\chi_1) = z$ za sve $z \in \mathbb{S}^1$, slijedi da je F injektivno preslikavanje.

Dokažimo i surjektivnost od F. Fiksirajmo proizvoljni karakter $\varphi \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Kako je $\chi_1 * \chi_{-1} = 1$, slijedi $\varphi(\chi_1)\varphi(\chi_{-1}) = 1$. Nadalje, kako je $\|\varphi\| \le 1$ (Korolar 5.3.5), $\varphi(\chi_1)$ i $\varphi(\chi_{-1})$ leže u $\mathbb{D}$. Dakle, $z := \varphi(\chi_1) \in \mathbb{S}^1$. Tvrdimo da je $\varphi = \varphi_z$. Zaista, kako je φ multiplikativan, za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\varphi(\chi_n) = \varphi(\chi_1 * \chi_1 * \cdots * \chi_1) = \varphi(\chi_1)^n = z^n.$$

Nadalje, iz jednakosti $\chi_n * \chi_{-n} = 1$ slijedi $\varphi(\chi_n) = z^n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Budući da svaku funkciju $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ možemo reprezentirati u obliku

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\chi_n,$$

iz linearnosti i neprekidnosti of φ slijedi

$$\varphi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\varphi(\chi_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n = \varphi_z(f).$$

[6] Marshall H. Stone (1903.–1989.) američki matematičar

Time smo pokazali surjektivnost od F.

Dokažimo da je preslikavanje F neprekidno. Neka je $(z_k)_k$ niz u $\mathbb{S}^1$ koji konvergira prema točki $z_0 \in \mathbb{S}^1$. Neka je $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $f \neq 0$. Tada za sve $N \in \mathbb{Z}_+$ imamo

$$\begin{aligned} |\varphi_{z_k}(f) - \varphi_{z_0}(f)| &\leq \sum_{|n|\leq N} |f(n)||z_k^n - z_0^n| + \sum_{|n|>N} |f(n)||z_k^n - z_0^n| \\ &\leq \|f\|_1 \sup_{|n|\leq N} |z_k^n - z_0^n| + 2\sum_{|n|>N} |f(n)|. \end{aligned}$$

Za dani $\varepsilon > 0$ izaberemo $N \in \mathbb{Z}_+$ i $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$\sum_{|n|>N} |f(n)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{i} \quad \sup_{|n|\leq N} |z_k^n - z_0^n| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}$$

za sve $k \geq k_0$. Tada dobivamo $|\varphi_{z_k}(f) - \varphi_{z_0}(f)| < \varepsilon$ za sve $k \geq k_0$. Dakle, $\varphi_{z_k} \to \varphi_{z_0}$ u $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$. Stoga je prema Propoziciji 4.2.16 (iii) F neprekidna bijekcija između kompaktnih Hausdorffovih prostora $\mathbb{S}^1$ i $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$, stoga homeomorfizam prema Napomeni 4.1.5 (c).

Sve zajedno, ukoliko $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ identificiramo s $\mathbb{S}^1$ preko homeomorfizma F^{-1}, Geljfandova transformacija $\Gamma = \Gamma_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ postaje homomorfizam algebri $\Gamma : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{S}^1)$, koji je dan s

$$\Gamma(f)(z) = \hat{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n, \quad f \in \ell^1(\mathbb{Z}),\, z \in \mathbb{S}^1.$$

Primijetimo da je $\ell^1(\mathbb{Z})$ poluprosta (odnosno, Γ je injektivna) budući da vrijednosti funkcije $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ možemo rekonstruirati iz Fourierovih koeficijenata od $\hat{f}$. Zaista, ako za funkciju $g \in C(\mathbb{T})$ s $c_n(g)$ označimo njen n-ti Fourierov koeficijent, tj.

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-int}\,dt \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

tada za $g = \hat{f}$ dobivamo

$$\begin{aligned} c_n(\hat{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(e^{it})e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)e^{i(m-n)t}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\,dt = f(n), \end{aligned}$$

pri čemu suma i integral komutiraju zbog apsolutne konvergencije reda $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)e^{i(m-n)t}$.

Slika od Γ jednaka je skupu $AC(\mathbb{S}^1)$ koji se sastoji od svih funkcija $g \in C(\mathbb{S}^1)$ čiji Fourierov red apsolutno konvergira (tzv. **Wienerova**[7] **algebra**). Budući da postoje funkcije $g \in C(\mathbb{S}^1)$ čiji Fourierov red ne konvergira apsolutno (vidjeti Korolar 3.1.11), Γ nije surjekcija. Također primijetimo da iz Teorema 5.3.18 (iv) slijedi da Γ nije izometrija jer za funkciju $f := \chi_1 - \chi_2 - \chi_3$ imamo $\|f\|_1^2 = 9$, ali $\|f^2\|_1 = 7$.

Kao direktnu posljedicu prethodnog razmatranja dobivamo sljedeći netrivijalni rezultat iz klasične Fourierove analize:

Korolar 5.4.11 (**Wiener**)**.** *Ako je Fourierov red funkcije $g \in C(\mathbb{S}^1)$ apsolutno konvergentan i ako je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{S}^1$, tada je i Fourierov red funkcije $1/g$ apsolutno konvergentan.*

Dokaz. Pretpostavku možemo kratko zapisati u obliku $g \in AC(\mathbb{S}^1)^\times = \Gamma(\ell^1(\mathbb{Z}))^\times$. Neka je $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ takva da je $g = \hat{f} = \Gamma(f)$. Tada iz Teorema 5.3.18 (i) slijedi $f \in \ell^1(\mathbb{Z})^\times$. Ako je f^{-1} inverz od f u $\ell^1(\mathbb{Z})$, tada dobivamo $1/g = \Gamma(f^{-1})$. Dakle, $1/g \in \Gamma(\ell^1(\mathbb{Z})) = AC(\mathbb{S}^1)$. □

[7]Norbert Wiener (1894.–1964.), američki matematičar i filozof

Općenitije, neka je G proizvoljna lokalno kompaktna (Hausdorffova) Abelova grupa (vidjeti Napomenu 5.2.15). Fiksirajmo neku Haarovu mjeru μ na G (koja je jedinstvena do na pozitivnu konstantu).

- **Karakter** na G je svaki neprekidni homomorfizam χ s G u multiplikativnu grupu kružnice $\mathbb{S}^1$. Skup svih karaktera na G označavamo s $\hat{G}$. Na $\hat{G}$ uvodimo operaciju množenja po točkama i s obzirom na nju $\hat{G}$ postaje Abelova grupa, koja se zove **Pontrjaginov**[8] **dual** od G.

- $\hat{G}$ opskrbljujemo s relativnom kompaktno-otvorenom topologijom, naslijeđenom od $C(G)$, koja je generirana sa skupovima oblika
$$L(U,K) := \{f \in C(G) :\ f(K) \subseteq U\},$$
gdje K prolazi po svim kompaktnim podskupovima od G, a U po svim otvorenim podskupovima od $\mathbb{C}$. S obzirom na tu topologiju $\hat{G}$ postaje lokalno kompaktna grupa.

- Za funkciju $f \in L^1(G)$ definiramo njenu **Fourierovu transformaciju** kao funkciju $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ definiranu s
$$\hat{f}(\chi) := \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu(x).$$
Također $\hat{f}$ označavamo s $\mathcal{F}(f)$.

Tada vrijedi sljedeći bitan rezultat:

Teorem 5.4.12. *Neka je G lokalno kompaktna Abelova grupa. Za $\chi \in \hat{G}$ i $f \in L^1(G)$ definirajmo $d_\chi(f) := \hat{f}(\chi)$.*

(i) d_χ je karakter od $L^1(G)$, te je preslikavanje $F : \hat{G} \to \Omega(L^1(G))$ dano s $F : \chi \mapsto d_\chi$ homeomorfizam.

*(ii) (**Riemann-Lebesgueova lema**) $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$ za sve $f \in L^1(G)$.*

Dakle, ako identificiramo $\Omega(L^1(G))$ s $\hat{G}$ preko preslikavanja F^{-1}, Geljfandova transformacija prevodi funkciju $f \in L^1(G)$ u njen Fourierov transformat $\hat{f}$. Može se pokazati da je Γ injektivna (dakle, $L^1(G)$ je poluprosta) i da je Γ surjektivna ako i samo ako je G konačna grupa.

Istaknimo i sljedeća dva bitna rezultata iz ove tematike.

Teorem 5.4.13 (**Fourierova inverzija**). *Ako je G lokalno kompaktna Abelova grupa i μ Haarova mjera na G, tada postoji jedinstvena Haarova mjera $\hat{\mu}$ na $\hat{G}$ takva da za sve funkcije $f \in L^1(G)$ za koje je $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ vrijedi*
$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)\, d\hat{\mu}(\chi)$$
za $\hat{\mu}$-gotovo sve $x \in G$.

Teorem 5.4.14 (**Pontrjaginova dualnost**). *Za svaku lokalno kompaktnu grupu G su grupe G i $\hat{\hat{G}}$ kanonski izomorfne, preko izomorfizma $x \mapsto \hat{x}$, gdje je $\hat{x}(\chi) := \chi(x)$, $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$.*

Primjer 5.4.15. Ako je $G = \mathbb{R}^n$ (uz Lebesgueovu mjeru kao Haarovu mjeru), može se pokazati da je svaki karakter od $\mathbb{R}^n$ oblika $\chi_y(x) = e^{2\pi i \langle y,x\rangle}$ za neki $y \in \mathbb{R}^n$. Nadalje, preslikavanje $\mathbb{R}^n \to \widehat{\mathbb{R}^n}$, dano s $y \mapsto \chi_y$, je homeomorfizam i izomorfizam grupa. Stoga je Fourierova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dana s
$$\mathcal{F}(f)(y) = \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle} dx.$$

[8] Lev Semjonovič Pontrjagin (1908.–1988.), sovjetski matematičar

5.5 C^*-algebre i neprekidni funkcionalni račun

Propozicija 5.5.1. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Tada za svaki normalni element $a \in A$ vrijedi $\|a\| = r(a)$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je a hermitski. Tada je $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Indukcijom dobivamo da vrijedi $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Koristeći formulu za spektralni radijus (Teorem 5.2.24), dobivamo

$$r(a) = \lim_n \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|.$$

Sada pretpostavimo da je a samo normalan. Budući da je a^*a hermitski, iz dokazanog, Propozicije 5.4.1 i Propozicije 5.1.33 dobivamo

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) \leq r(a^*)r(a) = r(a)^2 \leq \|a\|^2.$$

Dakle, $r(a) = \|a\|$. □

Definicija 5.5.2. Neka je A unitalna $*$-algebra. **C^*-norma** na A je norma na A s obzirom na koju je A C^*-algebra.

Kao jednostavnu posljedicu prethodnog teorema dobivamo sljedeću bitnu činjenicu:

Korolar 5.5.3. *Na unitalnoj $*$-algebri A postoji najviše jedna C^*-norma.*

Dokaz. Ako je $\|\cdot\|$ C^*-norma na A, tada iz Propozicije 5.5.1 slijedi

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(a^*a)\}$$

za sve $a \in A$. Dakle, norma $\|\cdot\|$ je u potpunosti određena $*$-algebarskom strukturom od A. □

Propozicija 5.5.4. *Neka su A i B unitalne C^*-algebre i $\phi : A \to B$ $*$-homomorfizam. Tada je ϕ kontraktivan, tj. ϕ je ograničen i $\|\phi\| \leq 1$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je ϕ unitalan. Tada prema Propoziciji 5.1.19 vrijedi $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ za sve $a \in A$, pa iz Propozicije 5.5.1 slijedi

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a^*a)\| = r(\phi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 \tag{5.20}$$

za sve $a \in A$. Dakle, ϕ je je uz navedene pretpostavke kontrakcija.

Ako ϕ nije unitalan, onda je $\phi(1_A)$ jedinica u $*$-algebri $\phi(A)$. Označimo s C zatvarač slike $\phi(A)$ u B i primijetimo da je C C^*-algebra. Budući da je množenje neprekidno i budući da je $\phi(A)$ gusta u C, zaključujemo da je $\phi(1_A)$ jedinica i u C. Kako spektralni radijus elementa ne ovisi o ambijentalnoj C^*-algebri koja ga sadrži, isti račun kao u (5.20) pokazuje da je ϕ kontrakcija i u tom slučaju. □

Korolar 5.5.5. *Ako je $\phi : A \to B$ $*$-izomorfizam unitalnih C^*-algebri A i B, tada je ϕ izometričan.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz Propozicije 5.5.4 i činjenice da je ϕ^{-1} također $*$-homomorfizam. □

Napomena 5.5.6. Može se dokazati i da je svaki injektvni $*$-homomorfizam između C^*-algebri izometričan.

Propozicija 5.5.7. *Neka je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$.*

(i) Ako je a hermitski, tada je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Ako je a unitaran, tada je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$.

Dokaz. (i). Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Stavimo $\alpha := \operatorname{Re} \lambda$ i $\beta := \operatorname{Im} \lambda$. Promotrimo niz elemenata (a_n) u A čiji je opći član oblika

$$a_n := a - \alpha 1 + in\beta 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je očito $i(n+1)\beta \in \sigma(a_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odakle slijedi

$$\begin{aligned} (n^2+2n+1)\beta^2 &= |i(n+1)\beta|^2 \leq r(a_n)^2 \leq \|a_n\|^2 \\ &= \|a_n^* a_n\| = \|(a-\alpha 1)^2 + n^2\beta^2 1\| \\ &\leq \|a - \alpha 1\|^2 + n^2\beta^2. \end{aligned}$$

Dakle,

$$(2n+1)\beta^2 \leq \|a-\alpha 1\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

To je jedino moguće za $\beta = 0$, pa zaključujemo da je $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$.

(ii). Budući da je a unitaran, imamo $\|a\| = 1$, pa je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{D}$. Također, budući da je i $a^{-1} = a^*$ unitaran, dobivamo $\sigma(a)^{-1} = \sigma(a^{-1}) \subseteq \mathbb{D}$ (prva jednakost slijedi iz Propozicije 5.1.17 (ii)). Dakle, da za $\lambda \in \sigma(a)$ vrijedi i $|\lambda| \leq 1$ i $1/|\lambda| \leq 1$, odnosno $|\lambda| = 1$. □

* * *

Kao što smo vidjeli, Geljfandova transformacija unitalne komutativne Banachove algebre A općenito ne mora davati dovoljno informacija o samoj algebri. S druge strane, ako je A unitalna komutativna C^*-algebra, tada njena Geljfandova transformacija ima najbolja svojstva koja ona općenito može imati:

Teorem 5.5.8 (**Komutativni Geljfand-Naimarkov**[9] **teorem**). *Ako je A unitalna komutativna C^*-algebra, tada je njena Geljfandova transformacija*

$$\Gamma : A \to C(\Omega(A)), \qquad \Gamma : a \mapsto \hat{a}$$

unitalni (izometrički) $*$-izomorfizam.

U dokazu Teorema 5.5.8 koristit ćemo sljedeći fundamentalni teorem realne analize koji je direktna generalizacija klasičnog Weierstrassovog teorema da su polinomi u $C([a, b])$ uniformno gusti:

Teorem 5.5.9 (**Stone-Weierstrassov teorem**). *Neka je K kompaktan Hausdorffov prostor. Ako je A unitalna zatvorena $*$-podalgebra od $C(K)$ koja razdvaja točke od K, onda je $A = C(K)$.*

Za dokaz Teorema 5.5.9 npr. vidjeti [15]. Također ćemo koristiti i sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Lema 5.5.10. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Svaki karatker φ na A je hermitski funkcional.*

Dokaz. Prema Teoremu 5.3.18 (iii) i Propoziciji 5.5.7 za svaki hermitski element $a \in A$ imamo $\varphi(a) \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, pa tvrdnja slijedi iz Propozicije 5.1.47. □

Dokaz Teorema 5.5.8. Kao što znamo, $\Gamma : A \to C(\Omega(A))$ je unitalan kontraktivni homomorfizam i $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a)$ za sve $a \in A$. Također, prema Lemi 5.5.10, za $\varphi \in \Omega(A)$ i $a \in A$ imamo

$$\Gamma(a^*)(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\Gamma(a)(\varphi)} = \Gamma(a)^*(\varphi),$$

odakle slijedi da je Γ $*$-homomorfizam. Nadalje, koristeći Teorem 5.3.18 dobivamo

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\Gamma(a^*a)\|_\infty = \|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\|_\infty \\ &= \|\Gamma(a)\|_\infty^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je Γ izometrija, pa specijalno i injekcija. Kako bismo dokazali surjektivnost od Γ, dovoljno je primijetiti da $\Gamma(A) \subseteq C(\Omega(A))$ zadovoljava uvjete Stone-Weierstrassovog teorema. Zaista, prema dokazanom je $\Gamma(A)$ je unitalna zatvorena samoadjungirana podalgebra od $C(\Omega(A))$ koja trivijalno razdvaja točke od $\Omega(A)$.

□

[9] Mark Aronovič Naimark (1909.–1978.), sovjetski matematičar

Korolar 5.5.11. *Svaka unitalna komutativna C^*-algebra je poluprosta.*

Neka je $F : K_1 \to K_2$ homeomorfizam između kompaktnih Hausdorffovih prostora K_1 i K_2. Kao što znamo, njegov transponat $F^t : g \mapsto g \circ F$, $g \in C(K_2)$, definira izometrički izomorfizam s $C(K_2)$ na $C(K_1)$. Štoviše, primijetimo da je F^t zapravo $*$-izomorfizam, jer za $g \in C(K_2)$ i $t \in K_1$ imamo

$$\begin{aligned} F^t(g^*)(t) &= (g^* \circ F)(t) = g^*(F(t)) = \overline{g(F(t))} = (g \circ F)^*(t) \\ &= (F^t(g))^*(t). \end{aligned}$$

Koristeći tu činjenicu, zajedno s Teoremom 5.5.8 i Korolarom 5.4.8, dobivamo sljedeći rezultat:

Korolar 5.5.12. *Za unitalne komutativne C^*-algebre A i B su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) A *i* B *su* $*$*-izomorfne.*

(ii) A *i* B *su algebarski izomorfne.*

(iii) $\Omega(A)$ *i* $\Omega(B)$ *su homeomorfni.*

Ako je B unitalna Banachova podalgebra unitalne Banachove algebre A, tada znamo da za svaki element $b \in B$ vrijedi inkluzija spektara $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$ (Propozicija 5.2.25 (ii)) i da općenito ta inkluzija može biti striktna (Primjer 5.2.26). Ipak, ako su A i B C^*-algebre, to se ne može desiti:

Teorem 5.5.13. *Neka je B unitalna C^*-podalgebra unitalne C^*-algebre A. Tada je $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ za sve elemente $b \in B$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da vrijedi $B^\times = B \cap A^\times$. Najprije pretpostavimo da je b hermitski element u B koji je invertibilan u A. U tom slučaju je prema Propoziciji 5.5.7, $\sigma_A(b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Specijalno, $\sigma_A(b)$ nema rupa (kao podskup od $\mathbb{C}$), pa iz Propozicije 5.2.25 (iii) zaključujemo da je $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$. Posebno $0 \notin \sigma_B(b)$, odnosno $b \in B^\times$.

Sada pretpostavimo da je $b \in B \cap A^\times$ proizvoljni element i neka je $a \in A$ njegov inverz (u A). Adjungiranjem jednakosti $ab = ba = 1$ dobivamo $a^*b^* = b^*a^* = 1$, odakle slijedi $bb^*a^*a = 1$. Dakle, hermitski element bb^* je invertibilan u A, pa je prema dokazanom on invertibilan i u B. Neka je $c \in B$ njegov inverz (u B). Iz $bb^*c = 1$ i $ba = 1$ zaključujemo da je $a = b^*c \in B$. □

Napomena 5.5.14. Ako je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$, tada Teorem 5.5.13 ujedno opravdava i kratku oznaku $\sigma(a)$, budući da spektar od a ne ovisi o ambijentalnoj unitalnoj C^*-podalgebri u kojoj ga računamo.

Neka je A unitalna C^*-algebra. Očito je presjek bilo koje familije unitalnih C^*-podalgebri od A ponovno unitalna C^*-podalgebra od A. Odatle slijedi da za bilo koji podskup $S \subseteq A$ postoji najmanja unitalna C^*-podalgebra od A koja sadrži skup S. Tu C^*-algebru označavamo s $C^*(S)$ i za nju kažemo da je **generirana skupom** S. Očito se $C^*(S)$ podudara s unitalnom Banachovom algebrom generiranom sa skupom $S \cup S^*$; dakle $C^*(S)$ je zatvarač skupa svih linearnih kombinacija produkata elemenata iz skupa $S \cup S^* \cup \{1\}$. Ako je $S = \{a\}$ jednočlan, tada pišemo $C^*(a)$ umjesto $C^*(\{a\})$. Primijetimo da je element $a \in A$ normalan ako i samo ako je $C^*(a)$ komutativna C^*-algebra koja je jednaka zatvaraču skupa

$$\{p(a, a^*) : \ p \in \mathbb{C}[z, w]\},$$

gdje $\mathbb{C}[z, w]$ označava algebru kompleksnih polinoma u dvije varijable z i w.

Propozicija 5.5.15. *Neka je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$ normalan element. Geljfandova transformacija $\hat{a}$ je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na $\sigma(a)$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 5.4.4, preslikavanje $T : \varphi \mapsto (\varphi(a), \overline{\varphi(a^*)})$ je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na zajednički spektar $\sigma(a, a^*)$ elemenata a i a^*. Kako je $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ (Lema 5.5.10), projekcija π_1 na prvu koordinatu uspostavlja homeomorfizam s $\sigma(a, a^*)$ na $\sigma(a)$. Odavde slijedi da je $\hat{a} = \pi_1 \circ T$ homeomorfizam. □

Teorem 5.5.16. *Neka je a normalan element unitalne C^*-algebre A. Postoji jedinstven unitalni $*$-izomorfizam $\phi_a : C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ takav da vrijedi $\phi_a(\mathrm{id}) = a$, gdje je $\mathrm{id}(\lambda) = \lambda$ za sve $\lambda \in \sigma(a)$.*

Dokaz. Prema Teoremu 5.5.8, Geljfandova transformacija $\Gamma = \Gamma_{C^*(a)}$ uspostavlja unitalni $*$-izomorfizam s $C^*(a)$ na $C(\Omega(C^*(a)))$. S druge strane, budući da je $\hat{a}$ je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na $\sigma(a)$ (Propozicija 5.5.15), njegov transponat $\hat{a}^t$ je unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C(\Omega(C^*(a)))$. Tada je i $\phi_a := \Gamma^{-1} \circ \hat{a}^t$ unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$ te vrijedi

$$\phi_a(\mathrm{id}) = \Gamma^{-1}(\hat{a}^t(\mathrm{id})) = \Gamma^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Nadalje, prema Stone-Weierstrassovom teoremu (Teorem 5.5.9) imamo $C(\sigma(a)) = C^*(\mathrm{id})$, odakle slijedi da je ϕ_a jedinstven unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$ sa svojstvom $\phi_a(\mathrm{id}) = a$. □

Koristeći notaciju iz Teorema 5.5.16, za svaku funkciju $f \in C(\sigma(a))$ postoji jedinstven element $f(a) \in C^*(a) \subseteq A$ takav da je $f(a) = \phi_a(f)$. Oznaka $f(a)$ opravdana je činjenicom da za polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ i funkciju $f \in C(\sigma(a))$ definiranu s $f(\lambda) := p(\lambda, \overline{\lambda})$ imamo $f(a) = p(a, a^*)$.

Definicija 5.5.17. Neka je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$ normalni element. Pridruživanje

$$C(\sigma(a)) \ni f \mapsto f(a) \in C^*(a) \subseteq A$$

zove se **neprekidni funkcionalni račun** normalnog elementa a.

Osnovna svojstva neprekidnog funkcionalnog računa opisana su sljedećim korolarom.

Korolar 5.5.18. *Neka je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$ normalan element. Neprekidni funkcionalni račun od a ima sljedeća svojstva:*

(i) *Ako je $f(\lambda) = p(\lambda, \overline{\lambda})$, gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$, onda je $f(a) = p(a, a^*)$.*

(ii) *Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $C(\sigma(a))$ i $f \in C(\sigma(a))$ tako da $f_n \to f$ uniformno na $\sigma(a)$, onda $f_n(a) \to f(a)$ u A.*

(iii) *(***Teorem o preslikavanju spektra***) $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ za sve $f \in C(\sigma(a))$.*

(iv) *Ako je $f \in C(\sigma(a))$ i $g \in C(f(\sigma(a)) = C(\sigma(f(a)))$, tako da je $g \circ f \in C(\sigma(a))$, onda je $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.*

(v) *Neka je $(a_n)_n$ niz normalnih elemenata u A takav da $a_n \to a$, K kompaktan skup takav da je $\sigma(a) \subseteq \operatorname{Int} K$ i $f \in C(K)$. Onda je $\sigma(a_n) \subseteq K$ za gotovo sve n i $f(a_n) \to f(a)$.*

(vi) *Ako je ϕ unitalni $*$-homomorfizam s A u unitalnu C^*-algebru B, tada je $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$ za sve $f \in C(\sigma(a))$.*

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) su direktne posljedice Teorema 5.5.16 (i Korolara 5.5.5).

(iii). Budući da je $\phi_a : a \mapsto f(a)$ unitalni $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$ imamo

$$\sigma_A(f(a)) = \sigma_{C^*(a)}(f(a)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a)).$$

(iv). Prema (i), jednakost $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ vrijedi za sve funkcije g oblika $g(\lambda) = p(\lambda, \overline{\lambda})$, gdje je $p \in \mathbb{C}[z, w]$. Jer su prema Stone-Weierstrassovom teoremu takve funkcije uniformno guste u $C(\sigma(f(a))$ i jer je $\phi_{f(a)}$ neprekidan, zaključujemo da vrijedi $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za sve $g \in C(\sigma(f(a)))$.

(v). Najprije dokažimo da za svaki otvoreni podskup $O \subseteq \mathbb{C}$ koji sadrži $\sigma(a)$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\sigma(b) \subseteq O$ za sve $b \in A$ za koje je $\|a - b\| < \delta$. Zaista, neka je D zatvoreni disk u $\mathbb{C}$ s centrom u 0 radijusa $1 + \|a\|$. Prema Propoziciji 5.2.16 za svaki $\lambda \in \rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ postoji $r_\lambda > 0$ takav da je otvorena kugla U_λ u A s centrom u $\lambda 1 - a$ radijusa $2r_\lambda$ sadržana u $A^\times$. Neka je O_λ otvoreni disk u $\mathbb{C}$ s centrom u λ radijusa r_λ. Kako je $\sigma(a) \subseteq D$, slijedi da je $\{O_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)\}$ otvoreni pokrivač od $D \setminus O$. Budući da je $D \setminus O$ kompaktan, postoji konačno mnogo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ tako da $\{O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_n}\}$ pokriva $D \setminus O$. Stavimo $\delta := \min\{r_{\lambda_1}, \ldots, r_{\lambda_n}, 1\}$. Ako je $\|a-b\| < \delta$ i $\lambda \in D \setminus O$, tada je $\lambda \in O_{\lambda_j}$ za neko j i

$$\|(\lambda_j 1 - a) - (\lambda 1 - b)\| \leq |\lambda_j - \lambda| + \|a - b\| < \delta + r_{\lambda_j} < 2r_{\lambda_j}.$$

Dakle, $\lambda 1 - b \in U_{\lambda_j}$, pa je $\lambda 1 - b \in A^\times$. Slijedi da je $D \setminus O \subseteq D \setminus \sigma(b)$. Također, $\sigma(b) \subseteq D$, jer je $\|a - b\| < 1$, odakle slijedi $\|b\| < 1 + \|a\|$. Ako je $\lambda' \in \sigma(b)$, tada $\lambda' \notin D \setminus \sigma(b)$, tako da $\lambda' \notin D \setminus O$. No $\lambda' \in D$, tako da $\lambda' \in O$, odakle zaključujemo $\sigma(b) \subseteq O$.

Neka je sada K kompaktan skup takav da je $\sigma(a) \subseteq \operatorname{Int} K$. Prema dokazanom zaključujemo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\sigma(a_n) \subseteq \operatorname{Int} K$ za sve $n \geq n_0$. Stavimo $C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $\sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| < \varepsilon$. Tada imamo

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} \|f(a_n) - f(a)\| &\leq 2 \sup_{\lambda \in K} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| + \limsup_{n \to \infty} \|p(a_n, a_n^*) - p(a, a^*)\| \\ &< 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Budući da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da $f(a_n) \to f(a)$.

(vi). Kako je $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ (Propozicija 5.1.19), element $f(\phi(a))$ je dobro definiran za svaku funkciju $f \in C(\sigma_A(a))$. Fiksirajmo $f \in C(\sigma_A(a))$ i neka je $\varepsilon > 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji polinom $p \in \mathbb{C}[z, w]$ takav da je $\sup_{\lambda \in \sigma(a)} \|f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})\| < \varepsilon/2$ na $\sigma_A(a)$. Tada iz (i) slijedi $\|f(\phi(a)) - p(\phi(a), \phi(a)^*)\| < \varepsilon/2$. Kako je ϕ kontraktivan (Propozicija 5.5.4), imamo

$$\begin{aligned} \|\phi(f(a)) - f(\phi(a))\| &\leq \|\phi(f(a)) - \phi(p(a, a^*))\| + \|\phi(p(a, a^*)) - f(\phi(a))\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |f(\lambda) - p(\lambda, \overline{\lambda})| + \|p(\phi(a), \phi(a)^*) - f(\phi(a)))\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ zaključujemo $\phi(f(a)) = f(\phi(a))$. □

Kao ilustraciju neprekidnog funkcionalnog računa navodimo sljedeće dvije činjenice.

Propozicija 5.5.19. *Neka je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$ normalan element.*

(i) a je hermitski ako i samo ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) a je projektor ako i samo ako je $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$.

(iii) a unitaran ako i samo ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$.

Dokaz. (i). Ako je a hermitski, tada je prema Propoziciji 5.1.47 (i) $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Obratno, ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, tada je $\overline{\lambda} = \lambda$ na $\sigma(a)$, pa je $a^* = a$.

(ii). Pretpostavimo da je a projektor i stavimo $p(\lambda) := \lambda^2 - \lambda$. Tada je $p(a) = 0$ i za $\lambda \in \sigma(a)$ imamo $\lambda^2 - \lambda = p(\lambda) \in \sigma(p(a)) = \{0\}$; dakle $\lambda \in \{0, 1\}$. Obratno, ako je $a \in A$ normalan i $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$, onda je $\lambda^2 = \lambda$ na $\sigma(a)$, pa je $a^2 = a$.

(iii). Ako je a unitaran, tada je prema Propoziciji 5.5.7 (ii) $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$. Obratno, ako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1$, tada je $\overline{\lambda}\lambda = \lambda\overline{\lambda} = 1$ na $\sigma(a)$, pa je $a^*a = aa^* = 1$. □

Propozicija 5.5.20. *Svaki element unitalne C^*-algebre A se može prikazati kao linearna kombinacija četiri unitarna elementa.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je $a \in A$ hermitski element s $\|a\| \leq 1$. Tada je $\sigma(a) \subseteq [-1, 1]$, pa funkcija

$$f(\lambda) := \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}$$

pripada C^*-algebri $C(\sigma(a))$. Stavimo $u := f(a)$. Budući da za sve $\lambda \in [-1,1]$ vrijedi

$$f^*(\lambda)f(\lambda) = 1 \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{f(\lambda)+f^*(\lambda)}{2},$$

iz neprekidnog funkcionalnog računa slijedi da je u unitaran i da je $a = (u+u^*)/2$.

U općem slučaju za svaki $a \in A$, $a \neq 0$ imamo rastav

$$a = \|a\| \left(\frac{1}{\|a\|} \operatorname{Re} a \right) + i\|a\| \left(\frac{1}{\|a\|} \operatorname{Im} a \right).$$

Prema dokazanom, elementi $\|a\|^{-1} \operatorname{Re} a$ i $\|a\|^{-1} \operatorname{Im} a$ se mogu prikazati kao linearne kombinacije dva unitarna elementa. Dakle, a se može prikazati kao linearna kombinacija četiri unitarna elementa. $\square$

Napomena 5.5.21. Neka je sada A općenita (ne nužno unitalna) C^*-algebra. Definirajmo C^*-algebru $\dot{A}$ na sljedeći način: $\dot{A} = A$ ako je A unitalna, odnosno $\dot{A} = \widetilde{A}$ (minimalna unitizacija, vidjeti Napomenu 5.3.19) ako A nije unitalna. Ako je $a \in A$ normalan element, tada neprekidni funkcionalni račun od a možemo naravno provesti u algebri $\dot{A}$. Preciznije, ako je $C^*(a)$ unitalna C^*-podalgebra od $\dot{A}$ generirana elementom a, tada je preslikavanje $\phi_a : f \mapsto f(a)$ $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C^*(a)$. Stavimo

$$C(\sigma(a))_0 := \{f \in C(\sigma(a)) : \ f(0) = 0\}$$

i neka je $C^*_0(a)$ najmanja C^*-podalgebra od A koja sadrži element a. Primijetimo da je $C^*_0(a)$ jednaka zatvaraču podalgebre

$$\{p(a, a^*) : \ p \in \mathbb{C}[z,w], \ p(0,0) = 0\}. \tag{5.21}$$

Pretpostavimo da je $0 \in \sigma(a)$ (što je uvijek slučaj kada A nije unitalna). Koristeći Stone-Weierstrassov teorem i Primjer 5.2.10 (b) nije teško vidjeti da je svaka funkcija $f \in C(\sigma(a))_0$ uniformni limes polinoma oblika $\lambda \mapsto p(\lambda, \overline{\lambda})$ ($\lambda \in \sigma(a)$), gdje je $p \in \mathbb{C}[z,w]$ takav da je $p(0,0) = 0$. Odavde slijedi da je $f(a)$ limes niza elemenata iz skupa (5.21). Odavde slijedi da je $f(a) \in C^*_0(a) \subseteq A$. Dakle, ukoliko se ograničimo na funkcije iz $C(\sigma(a))_0$, neprekidni funkcionalni račun u tom slučaju možemo u potpunosti provesti unutar algebre A, bez ikakvog pozivanja na jedinicu 1 od $\dot{A}$. To se zove **neunitalni neprekidni funkcionalni račun** od a. S druge strane, ako je A unitalna i $0 \notin \sigma(a)$, tada je $C(\sigma(a))_0 = C(\sigma(a))$ i $C^*_0(a) = C^*(a)$, odakle slijedi da se u tom slučaju neunitalni neprekidni funkcionalni račun podudara sa standardim neprekidnim funkcionalnim računom.

Dakle, sve zajedno, neunitalni neprekidni funkcionalni račun $\phi_a : f \mapsto f(a)$ normalnog elementa $a \in A$ je $*$-izomorfizam s $C(\sigma(a))_0$ na $C^*_0(a)$.

5.6 Uređaj u C^*-algebrama

U ovom odjeljku ćemo uvesti uređaj na hermitskom dijelu A_h C^*-algebre A i promatrati njegova osnovna svojstva. Kao motivaciju, promotrimo sljedeći (komutativni) primjer.

Primjer 5.6.1. Neka je $A = C(K)$, gdje je K kompaktan Hausdorffov prostor. Tada je A_h skup svih realnih funkcija iz A. Na A_h imamo prirodan parcijalni uređaj koji je dan s

$$f \leq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(s) \leq g(s) \quad \text{za sve } s \in K.$$

Funkcija $f \in A$ je pozitivna, tj. $f \geq 0$ ako i samo ako je oblika $f = g^*g$ za neku funkciju $g \in A$. U tom slučaju f ima jedinstven pozitivni drugi korijen u A koji je dan s $s \mapsto \sqrt{f(s)}$. Primijetimo da pozitivnost realnih funkcija možemo iskazati u terminu norme: Ako je $f \in A_h$, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) $f \geq 0$.

(ii) Za neki $t \geq \|f\|_\infty$ vrijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$.

(iii) Za svaki $t \geq \|f\|_\infty$ vrijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$

Definicija 5.6.2. Neka je A unitalna C^*-algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je **pozitivan** i pišemo $a \geq 0$ ako je a hermitski i ako vrijedi $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Skup svih pozitivnih elemenata u A označavamo s A_+.

Napomena 5.6.3. Primijetimo da je $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$. Zaista, ako je $a \in A_+ \cap (-A_+)$, tada je $\sigma(a) = \{0\}$, pa iz Propozicije 5.5.1 slijedi $\|a\| = r(a) = 0$, odnosno $a = 0$. Također primijetimo da iz Teorema 5.5.13 slijedi da za svaku unitalnu C^*-podalgebru B od A imamo $B_+ = B \cap A_+$.

Propozicija 5.6.4. *Neka je A unitalna C^*-algebra i neka je $n \in \mathbb{N}$. Za svaki pozitivni element $a \in A_+$ postoji jedinstven pozitivni element $b \in A_+$ takav da je $b^n = a$.*

Dokaz. Definirajmo neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ s $f(t) := \sqrt[n]{t}$. Kako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$, imamo $b := f(a) \in C^*(a) \subseteq A$. Nadalje, iz Teorema o preslikavanju spektra (Korolar 5.5.18 (iii)) zaključujemo da je $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_+$; dakle $b \in A_+$. Nadalje, kako je $f(t)^n = t$ za sve $t \in \mathbb{R}_+$, slijedi $b^n = a$. Ostaje dokazati jedinstvenost takvog elementa b. Pretpostavimo da je $c \in A_+$ neki drugi element takav da je $c^n = a$. Tada je $ca = cc^n = c^n c = ac$, tj. c i a komutiraju. Nadalje, kako je $b \in C^*(a)$, elementi b i c također komutiraju. Neka je B unitalna C^*-podalgebra od A generirana s b i c. Tada je B komutativna i $a \in B$. Budući da Geljfandovi transformati od a, b i c zadovoljavaju $\hat{c}^n = \hat{a} = \hat{b}^n$, mora biti $\hat{b} = \hat{c}$, jer su $\hat{b}$ i $\hat{c}$ pozitivne funkcije. Iz Teorema 5.5.8 zaključujemo da je $b = c$. $\square$

Definicija 5.6.5. Element b iz Propozicije 5.6.4 označavamo s $a^{\frac{1}{n}}$ i zovemo ga **pozitivni n-ti korijen** od a.

Propozicija 5.6.6. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Za svaki hermitski element $a \in A_h$ postoje jedinstveni pozitivni elementi $a_+, a_- \in A_+$ takvi da vrijedi*

$$a = a_+ - a_- \qquad \text{i} \qquad a_+ a_- = a_- a_+ = 0.$$

Pritom vrijedi $\|a\| = \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}$.

Dokaz. Definirajmo funkcije $f_+, f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f_+(t) := \begin{cases} t & : t \geq 0 \\ 0 & : t \leq 0, \end{cases} \qquad f_-(t) := \begin{cases} 0 & : t \geq 0 \\ -t & : t \leq 0. \end{cases}$$

Stavimo $a_+ := f_+(a)$ i $a_- := f_-(a)$. Tada su a_+ i a_- elementi u $C^*(a) \subseteq A$. Također, elementi a_+ i a_- su hermitski, jer su f_+ i f_- realne funkcije. Nadalje, iz Teorema o preslikavanju spektra (Korolar 5.5.18 (iii)) zaključujemo da su elementi a_+ i a_- pozitivni, jer je $f_+(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+$ i $f_-(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+$. Kako je

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = f_+ - f_- \quad \text{i} \quad f_+ f_- = f_- f_+ = 0,$$

iz neprekidnog funkcionalnog računa dobivamo

$$a = a_+ - a_- \quad \text{i} \quad a_+ a_- = a_- a_+ = 0.$$

Također,

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\{|t| : \ t \in \sigma(a)\} = \max\left\{\sup\{f_+(t) : \ t \in \sigma(a)\}, \sup\{f_-(t) : \ t \in \sigma(a)\}\right\} \\ &= \max\{\|a_+\|, \|a_-\|\}. \end{aligned}$$

Kako bismo dokazali jedinstvenost elemenata a_+ i a_-, pretpostavimo da su a_1 i a_2 neki drugi elementi u A_+ takvi da je $a = a_1 - a_2$ i $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$. Tada je $a^n = a_1^n + (-a_2)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odakle slijedi jednakost

$$p(a) = p(a_1) + p(-a_2)$$

za sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu postoji niz polinoma $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ koji uniformno konvergira prema f_+ na $\sigma(a) \cup \sigma(a_1) \cup \sigma(-a_2)$. Tada je

$$f_+(a) = \lim_{n \to \infty} p_n(a) = \lim_{n \to \infty} [p_n(a_1) + p_n(-a_2)] = f_+(a_1) + f_+(-a_2). \tag{5.22}$$

Kako je $f_+(t) = t$ za sve $t \in \sigma(a_1)$ i $f_+(t) = 0$ za sve $t \in \sigma(-a_2)$, imamo $f_+(a_1) = a_1$ i $f_+(-a_2) = 0$. Iz (5.22) zaključujemo da je $a_1 = f_+(a) = a_+$, pa je onda i $a_2 = a_1 - a = a_-$. $\square$

Korolar 5.6.7. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Svaki element $a \in A$ se može prikazati kao linearna kombinacija četiri pozitivna elementa*

Dokaz. Koristeći Propoziciju 5.6.6, za $a \in A$ imamo

$$a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a = (\operatorname{Re} a)_+ - (\operatorname{Re} a)_- + i[(\operatorname{Im} a)_+ - (\operatorname{Im} a)_-],$$

pri čemu su $(\operatorname{Re} a)_+, (\operatorname{Re} a)_-, (\operatorname{Im} a)_+, (\operatorname{Im} a)_- \in A_+$. □

Lema 5.6.8. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Za hermitski element $a \in A_h$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $a \in A_+$.

(ii) *Za neki* $t \geq \|a\|$ *vrijedi* $\|t1 - a\| \leq t$.

(iii) *Za svaki* $t \geq \|a\|$ *vrijedi* $\|t1 - a\| \leq t$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $A = C^*(a)$. Tada je prema Teoremu 5.5.16 A (izometrički) $*$-izomorfna C^*-algebri $C(\sigma(a))$. Tvrdnja sada slijedi iz Primjera 5.6.1. □

Propozicija 5.6.9. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Skup svih pozitivnih elemenata A_+ je zatvoren konus u A, tj. A_+ je zatvoren podskup od A i vrijedi:*

(i) *Ako su $a \in A_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$, tada je i $ta \in A_+$.*

(ii) *Ako su $a, b \in A_+$ tada je i $a + b \in A_+$.*

Dokaz. Najprije dokažimo da je A_+ zatvoren podskup od A. Prema Lemi 5.6.8 imamo

$$A_+ = A_h \cap \{a \in A : \ \|\|a\|1 - a\| \leq \|a\|\}.$$

Budući da je involucija na A izometrija, skup A_h je zatvoren u A. Drugi skup u gornjem presjeku je također zatvoren zbog neprekidnosti norme. Dakle, A_+ je zatvoren podskup kao presjek dva zatvorena podskupa.

(i). Ako su $a \in A_+$ i $t \in \mathbb{R}_+$, tada je očito $ta \in A_h$. Nadalje, kako je $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$, imamo $\sigma(ta) = \{t\lambda : \lambda \in \sigma(a)\} \subseteq \mathbb{R}_+$. Dakle, $ta \in A_+$.

(ii). Neka su $a, b \in A_+$. Prema Lemi 5.6.8 imamo $\|\|a\|1 - a\| \leq \|a\|$ i $\|\|b\|1 - b\| \leq \|b\|$, pa je

$$\begin{aligned} \|(\|a\| + \|b\|)1 - (a + b)\| &= \|(\|a\|1 - a) + (\|b\|1 - b)\| \leq \|\|a\|1 - a\| + \|\|b\|1 - b\| \\ &\leq \|a\| + \|b\|. \end{aligned}$$

Pozivajući se ponovno na Lemu 5.6.8, zaključujemo $a + b \in A_+$. □

Propozicija 5.6.10. *Neka je A unitalna C^*-algebra. Svaki element oblika a^*a, $a \in A$, je pozitivan.*

Dokaz. Najprije dokažimo da iz $-a^*a \in A_+$ $(a \in A)$ slijedi $a = 0$. Zaista, prema Propoziciji 5.1.18 imamo $\sigma(-aa^*) \setminus \{0\} = \sigma(-a^*a) \setminus \{0\}$. Odatle slijedi da je i $-aa^* \in A_+$. Kako je $a^*a + aa^* = 2(\operatorname{Re} a)^2 + 2(\operatorname{Im} a)^2$, zaključujemo

$$a^*a = 2(\operatorname{Re} a)^2 + 2(\operatorname{Im} a)^2 - aa^* \in A_+.$$

Dakle, $\sigma(a^*a) = \mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \{0\}$, pa je $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = 0$, odnosno $a = 0$.

Sada pretpostavimo da je $a \in A$ proizvoljan element i stavimo $b := a^*a$. Tada je $b \in A_h$, pa imamo rastav $b = b_+ - b_-$, gdje su $b_+, b_- \in A_+$ kao u Propoziciji 5.6.6. Ako je $c := ab_-$, tada je

$$-c^*c = -b_-a^*ab_- = -b_-(b_+ - b_-)b_- = b_-^3 \in A_+.$$

Iz prvog dijela dokaza slijedi $c = 0$. Dakle, $b_- = 0$, odakle slijedi da je $a^*a = b_+ \in A$. □

Koristeći pojam pozitivnosti u na hermitskom dijelu unitalne C^*-algebre A mžemo definirati uređaj.

Definicija 5.6.11. Neka je A unitalna C^*-algebra. Za $a, b \in A_h$ stavljamo $a \leq b$ ako je $b - a \in A_+$. Tada pišemo i $b \geq a$.

Primijetimo da je $\leq$ relacija parcijalnog uređaja na A_h. Zaista:

- *Refleksivnost:* očito je $a \leq a$ za sve $a \in A_h$.
- *Antisimetričnost:* ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \leq b$ i $b \leq a$, tada je $b - a \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ (Napomena 5.6.3), odnosno $b = a$.
- *Tranzitivnost:* ako su $a, b, c \in A_h$ takvi da je $a \leq b$ i $b \leq c$, tada su $b - a \in A_+$ i $c - b \in A_+$. Iz Propozicije 5.6.9 slijedi $c - a = (c - b) + (b - a) \in A_+$, odnosno $a \leq c$.

Nadalje, taj uređaj poštuje strukturu realnog vektorskog prostora na A_h :

- Ako su $a, b, c \in A_h$ i ako je $a \leq b$, onda je $(b + c) - (a + c) = b - a \in A_+$, odnosno $a + c \leq b + c$.
- Ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \leq b$ i ako je $t \in \mathbb{R}_+$, tada je $b - a \in A_+$, pa iz Propozicije 5.6.9 dobivamo $tb - ta = t(b - a) \in A_+$, odnosno $ta \leq tb$. Također, $a \leq b$ ako i samo ako je $-b \leq -a$.

Definicija 5.6.12. Neka je A unitalna C^*-algebra. Za proizvoljan element $a \in A$ definiramo njegovu **apsolutnu vrijednost** kao element $|a| := (a^*a)^{\frac{1}{2}}$.

Primijetimo da je prema Propozicijama 5.6.10 i 5.6.4 $|a|$ dobro definiran element u A_+. Iz C^*-svojstva dobivamo $\||a|\| = \|a\|$. Također primijetimo da za svaki $a \in A_h$ imamo

$$a_+ = \frac{1}{2}(|a| + a) \qquad \text{i} \qquad a_- = \frac{1}{2}(|a| - a)$$

i da je a pozitivan ako i samo ako je $a = |a|$.

U sljedećem rezultatu istaknuta su osnovna svojstva od A_+:

Propozicija 5.6.13. *Neka je A unitalna C^*-algebra.*

(i) $A_+ = \{a^2 : a \in A_h\} = \{a^*a : a \in A\}$.

(ii) Ako su $a, b \in A_h$ takvi da je $a \leq b$, tada vrijedi $c^*ac \leq c^*bc$ za sve $c \in A$.

(iii) Ako su $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$, tada je $\|a\| \leq \|b\|$.

(iv) Ako je algebra A unitalna i ako su a i b pozitivni invertibilni elementi u A, tada iz $a \leq b$ slijedi $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Dokaz. (i). Tvrdnja slijedi diretkno iz Propozicija 5.6.10 i 5.6.4.

(ii). Budući da je $b - a \geq 0$, koristeći Propozicije 5.6.10 i 5.6.4 imamo:

$$\begin{aligned} c^*bc - c^*ac &= c^*(b-a)c = c^*(b-a)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}c \\ &= ((b-a)^{\frac{1}{2}}c)^*((b-a)^{\frac{1}{2}}c) \geq 0, \end{aligned}$$

odakle slijedi $c^*ac \leq c^*bc$.

(iii). Iz $b \leq \|b\|1$, slijedi $a \leq \|b\|1$. Kako je $a \in A_+$, imamo $\|a\| \in \sigma(a)$, odakle slijedi

$$\|b\| - \|a\| \in \sigma(\|b\|1 - a) \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Dakle, $\|b\| \geq \|a\|$.

(iv). Najprije primijetimo da iz $c \geq 1$ ($c \in A_h$) slijedi $c^{-1} \leq 1$. Zaista, to je očito točno u funkcijskim C^*-algebrama $C(K)$ (K je kompaktan Hausdorffov prostor), dok općenita tvrdnja slijedi iz Teorema

5.5.16 primijenjenog na C^*-algebru $C^*(c)$. Sada, ako su $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$, tada prema (ii) imamo

$$1 = a^{-\frac{1}{2}} a a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}},$$

pa je $a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}} = (a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}})^{-1} \leq 1$. Ponovno koristeći (ii) dobivamo

$$b^{-1} = a^{-\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}}) a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} = a^{-1}.$$

□

Propozicija 5.6.14. *Neka je A unitalna C^*-algebra i neka su $a, b \in A_+$ takvi da je $a \leq b$. Tada je i $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$.*

Dokaz. Dokazat ćemo da za $a, b \in A_+$ iz $a^2 \leq b^2$ slijedi $a \leq b$, što je naravno ekvivalentno s originalnom tvrdnjom. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i označimo redom s c i d realni i imaginarni dio elementa $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a)$. Tada je

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}[(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) + (\varepsilon 1 + b - a)(\varepsilon 1 + b + a)] \\ &= \varepsilon^2 1 + 2\varepsilon b + b^2 - a^2 \\ &\geq \varepsilon^2 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je $c \in A_+ \cap A^\times$. Kako je

$$c^{-\frac{1}{2}}(c + id)c^{-\frac{1}{2}} = 1 + ic^{-\frac{1}{2}} d c^{-\frac{1}{2}} \in A^\times,$$

zaključujemo da je $(\varepsilon 1 + b + a)(\varepsilon 1 + b - a) = c + id \in A^\times$. Posebno, element $\varepsilon 1 + b - a$ je invertibilan slijeva. Kako je $\varepsilon 1 + b - a \in A_h$, iz Propozicije 5.1.39 (ii) slijedi $\varepsilon 1 + b - a \in A^\times$. Posljedično, $-\varepsilon \notin \sigma(b - a)$ za sve $\varepsilon > 0$. To je jedino moguće ako je $\sigma(b - a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Dakle, $b - a \in A_+$, odnosno $a \leq b$. □

Sljedeći primjer pokazuje da iz $0 \leq a \leq b$ općenito ne slijedi $a^2 \leq b^2$:

Primjer 5.6.15. Neka je $A = M_2(\mathbb{C})$. Stavimo

$$p := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad q := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada su p i q projektori u A i $p \leq p + q$. S druge strane imamo $p^2 = p \not\leq (p + q)^2 = p + q + pq + qp$, budući da matrica

$$q + pq + qp = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ima negativnu svojstvenu vrijednost.

Štoviše, može se dokazati da u svakoj unitalnoj nekomutativnoj C^*-algebri A postoje pozitivni elementi $a, b \in A$ takvi da je $a \leq b$, ali $a^2 \not\leq b^2$.

Napomena 5.6.16. Koristeći neprekidni funkcionalni račun, može se dokazati da svaki (obostran) zatvoren ideal I u C^*-algebri A dopušta tzv. **aproksimativnu jedinicu**, što je rastuća mreža $(e_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ pozitivnih elemenata u I norme manje ili jednake 1 takva da za sve $a \in I$ vrijedi

$$\lim_{\alpha \in \Lambda} \|a e_\alpha - a\| = \lim_{\alpha \in \Lambda} \|a e_\alpha - a\| = 0.$$

Koristeći aproksimatvinu jedinicu možemo dokazati da je svaki zatvoren ideal I u A automatski samoadjungiran (dakle $*$-ideal) i da kvocijentna norma na A/I zadovoljava C^*-svojstvo, tako da je A/I C^*-algebra.

Zaista, neka je $(e_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ aproksimativna jedinica za I. Budući da je involucija izometrična, tada je i $a^* = \lim_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha a^*$. Jer je I ideal u A imamo $e_\alpha a^* \in I$ za sve $\alpha \in \Lambda$, pa iz zatvorenosti od I zatvoren slijedi $a^* \in I$.

Nadalje, po definiciji kvocijentne norme na A/I, za $a \in A$ i $\varepsilon > 0$ možemo naći element $b \in I$ takav da je $\|a+b\| < \|a+I\| + \varepsilon/2$. Kako je $b = \lim_{\alpha\in\Lambda} e_\alpha b$, postoji $\alpha_0 \in \Lambda$ takav da je $\|b - e_\alpha b\| < \varepsilon/2$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$. U daljnjem računu radi jednostavnosti pretpostavljamo da je A unitalna. Onda imamo

$$\|a - e_i a\| \leq \|(1-e_\alpha)(a+b)\| + \|b - e_\alpha b\| \leq \|a+b\| + \|b - e_\alpha b\| \leq \|a+I\| + \varepsilon$$

za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Time smo dokazali jednakost

$$\|a+I\| = \lim_{\alpha\in\Lambda} \|a - e_\alpha a\|.$$

Odavde također slijedi i

$$\|a+I\| = \|a^*+I\| = \lim_{\alpha\in\Lambda} \|a^* - e_\alpha a^*\| = \lim_{\alpha\in\Lambda} \|a - a e_\alpha\|.$$

Stoga za $a \in A$ $b \in I$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a+I\|^2 &= \lim_{\alpha\in\Lambda} \|a - a e_\alpha\|^2 = \lim_{\alpha\in\Lambda} \|(1-e_\alpha)a^*a(1-e_\alpha)\| \\
&\leq \sup_{\alpha\in\Lambda} \|(1-e_\alpha)(a^*a+b)(1-e_\alpha)\| + \lim_{\alpha\in\Lambda} \|(1-e_\alpha)b(1-e_\alpha)\| \\
&\leq \|a^*a+b\| + \lim_{\alpha\in\Lambda} \|b - b e_\alpha\| \\
&= \|a^*a+b\|.
\end{aligned}$$

Dakle, $\|a+I\|^2 \leq \|a^*a+I\|$ za sve $a \in A$ pa iz Propozicija 5.2.8 i 5.2.4 slijedi da je A/I C^*-algebra.

Poglavlje 6

Ograničeni linearni operatori na Hilbertovim prostorima

6.1 Unitarni i Hilbertovi prostori

Definicija 6.1.1. Neka je X kompleksan vektorski prostor. **Skalarni produkt** na X je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ koje zadovoljava sljedeća svojstva:

- $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ za sve $x, y, z \in X$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (linearnost u prvoj varijabli).
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ za sve $x, y \in X$ (hermitska simetričnost).
- $\langle x, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in X$ i $\langle x, x\rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ (pozitivna definitnost).

Za par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (ili samo za X ako se skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ podrazumijeva) kažemo da je **unitaran prostor**.

Na potpuno analogan način definiramo skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru, odnosno pojam realnog unitarnog prostora (ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, onda je konjugiranje na $\mathbb{R}$ identiteta, tako da hermitska simetričnost postaje obična simetričnost, tj. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ za sve $x, y \in X$).

Napomena 6.1.2. Neka je X unitaran prostor.

(a) Iz hermitske simetričnosti i linearnosti u prvoj varijabli skalarnog produkta na X slijedi da je on antilinearan u drugoj varijabli, tj. vrijedi $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \overline{\mu}\langle x, z\rangle$ za sve $x, y, z \in X$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Općenito, funkcije $X \times X \to \mathbb{C}$ koje su linearne u prvoj i antilinearne u drugoj varijabli zovu se **seskvilinearne forme**.

(b) Kao što znamo, skalarni produkt na X zadovoljava **nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky** (**CSB-nejednakost**):

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad \forall x, y, \in X, \tag{6.1}$$

pri čemu u (6.1) vrijedi jednakost ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

(c) Direktno iz svojstava skalarnog produkta i CSB-nejednakosti slijedi da je s

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in X$$

definirana norma na X za koju kažemo da je **inducirana iz skalarnog produkta**.

(d) Skalarni produkt, kao funkcija $X \times X \to \mathbb{C}$ je neprekidan s obizom na produktnu topologiju na $X \times X$ (koja se podudara s topologijom induciranom iz svake p-norme na $X \times X$ za $1 \leq p \leq \infty$). Zaista, ako su redom $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nizovi u X koji konvergiraju prema $x \in X$ i $y \in X$, iz CSB-nejednakosti slijedi

$$|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_k - x, y_k\rangle| + |\langle x, y_k - y\rangle| \leq \|x_k - x\|\|y_k\| + \|x\|\|y - y_k\| \to 0.$$

Definicija 6.1.3. Potpuni unitarni prostori zovu se **Hilbertovi prostori**.

Primjer 6.1.4. (a) Osnovni primjer beskonačnodimenzionalnog Hilbertovog prostora je prostor ℓ^2, s obzirom na skalarni produkt

$$\langle(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}},(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}\rangle:=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k}.$$

(b) Općenitije, ako je $(X,\mathcal{F},\mu)$ prostor mjere, onda je $L^2(X)=L^2(X,\mathcal{F},\mu)$ Hilbertov prostor s obzirom na skalarni produkt

$$\langle f,g\rangle:=\int_X f\overline{g}\,d\mu.$$

(c) Ako su $X_1,\ldots,X_n$ unitarni (Hilbertovi) prostori, onda je i $\bigoplus^2_{1\le k\le n}X_k$ unitaran (Hilbertov) prostor, jer je norma $\|\cdot\|_2$ na $\bigoplus^2_{1\le k\le n}X_k$ inducirana iz skalarnog produkta

$$\langle(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle:=\sum_{k=1}^{n}\langle x_i,y_i\rangle_{X_i}$$

(vidjeti Primjer 1.2.2 (b)).

Ako je X unitaran prostor, lako se provjeri da norma $\|\cdot\|$ inducirana iz skalarnog produkta zadovoljava **relaciju paralelograma**, tj.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\quad\forall x,y\in X.$$

Obratno, ako je X normiran prostor čija norma zadovoljava relaciju paralelograma, tada je ona inducirana iz skalarnog produkta. Preciznije, vrijedi:

Teorem 6.1.5 (Jordan[1]-von Neumannov[2] teorem). *Neka je $(X,\|\cdot\|)$ kompleksan normiran prostor. Norma $\|\cdot\|$ je inducirana iz skalarnog produkta $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ako i samo ako ona zadovoljava relaciju paralelograma. U tom slučaju je taj skalarni produkt dan s*

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k\|x+i^ky\|^2,\quad x,y\in X.\tag{6.2}$$

Napomena 6.1.6. (a) Formula (6.2) se zove **polarizacijski identitet**.

(b) Lako se provjeri za za sve $1<p\le\infty$, $p\ne 2$, p-norma na ℓ^p ne zadovoljava relaciju paralelograma, tako da ona nije inducirana iz skalarnog produkta (provjerite za DZ).

U Hilbertovim prostorima vrijedi sljedeći važan rezultat najbolje aproksimacije.

Teorem 6.1.7. *Neka je H Hilbertov prostor i C neprazan zatvoren konveksan podskup od H. Za svaki vektor $x\in H$ postoji jedinstven vektor $x_0\in C$ takav da vrijedi*

$$\|x-x_0\|=d(x,C)=\inf_{y\in C}\|x-y\|.$$

Dokaz. Neka je $x\in H$. Ako je $x\in C$ tvrdnja je trivijalna jer je onda $x_0=x$ traženi jedinstveni vektor.

Stoga pretpostavimo da $x\notin C$ i stavimo $\delta:=d(x,C)$. Onda je $\delta>0$ jer je C zatvoren (Propozicija 1.2.36). Prema definiciji infimuma, za svaki $n\in\mathbb{N}$ postoji $x_n\in C$ takav da vrijedi

$$\delta\le\|x-x_n\|\le\delta+\frac{1}{n}\tag{6.3}$$

[1]Ernst Pascual Jordan (1902.–1980.), njemački matematičar i fizičar, napoznatiji po svojim radovima u kvantnoj mehanici i kvantnoj teoriji polja

[2]John von Neumann (1903.–1957.), mađarsko-američki matematičar, fizičar, informatičar i inženjer, jedan od najistaknutijih znanstvenika 20. stoljeća

Tvrdimo da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u C. Zaista, za $m, n \in \mathbb{N}$ iz realcije paralelograma slijedi

$$\|(x-x_m)+(x-x_n)\|^2+\|(x-x_m)-(x-x_n)\|^2=2(\|x-x_m\|^2+\|x-x_n\|^2),$$

što je, nakon dijeljenja s 4, ekvivalentno s

$$\left\|x-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2+\frac{\|x_n-x_m\|^2}{4}=\frac{\|x-x_m\|^2+\|x-x_n\|^2}{2}.$$

Jer su $x_m, x_n \in C$, iz konveksnosti od C slijedi $\frac{x_m+x_n}{2} \in C$, tako da je $\|x-\frac{x_n+x_m}{2}\| \geq \delta$. Slijedi

$$\delta^2+\frac{\|x_n-x_m\|^2}{4}\leq\frac{(\delta+\frac{1}{m})^2+(\delta+\frac{1}{n})^2}{2},$$

što je ekvivalentno s

$$\|x_n-x_m\|^2\leq 4\delta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Odavde vidimo da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, pa iz potpunosti od H i zatvorenosti od C slijedi da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nekom $x_0 \in C$. Prelaskom na limes u (6.3) dobivamo $\|x-x_0\| = \delta$. Time smo dokazali egzistenciju takvog vektora x_0.

Preostaje dokazati jedinstvenost od x_0. Neka je $y \in C$ neki drugi vektor takav da vrijedi $\|x-x_0\| = \|x-y\| = \delta$. Koristeći ponovo relaciju paralelograma dobivamo

$$\|(x-x_0)+(x-y)\|^2+\|(x-x_0)-(x-y)\|^2=2(\|x-x_0\|^2+\|x-y\|^2)=4\delta^2.$$

Zbog konveksnosti od C je $\frac{x_0+y}{2} \in C$, pa iz definicije od δ slijedi

$$4\delta^2=4\left\|x-\frac{x_0+y}{2}\right\|^2+\|x_0-y\|^2\geq 4\delta^2+\|x_0-y\|^2,$$

što je jedino moguće ako je $y = x_0$. □

Napomena 6.1.8. Može se dokazati da analogna tvrdnja Teorema 6.1.7 vrijedi i u svim refleksivnim Banachovim prostorima, jedino što općenito najbolja aproksimacija $x_0 \in C$ više ne mora biti jedinstvena.

Definicija 6.1.9. Neka je X unitaran prostor.

- Za dva vektora $x, y \in X$ kažemo da su **ortogonalni** i pišemo $x \perp y$ ako vrijedi $\langle x, y\rangle = 0$.
- Ako je S podskup od X, za $x \in X$ kažemo da je **ortogonalan na** S ako vrijedi $x \perp y$ za sve $y \in S$. Skup svih vektora $x \in H$ ortogonalnih na S zovemo **ortogonal** od S i označavamo ga sa $S^\perp$; dakle

$$S^\perp=\{x\in X : \langle x,y\rangle=0\,\forall y\in S\}.$$

- Za podskup E od X kažemo da je **ortogonalan skup** ako su svaka dva različita vektora iz E ortogonalna. Ako je E ortogonalan i svi vektori iz E su norme 1, onda za E kažemo da je **ortonormiran skup**.
- Za ortonormiran podskup E od X kažemo da je **ortonormirana baza** (kratko **ONB**) za X ako vrijedi $\overline{[E]} = X$, tj. potprostor razapet svim vektorima iz E je gust u X.

Napomena 6.1.10. Neka je X unitaran prostor.

(a) Ako su $x_1, \ldots, x_n \in X$ međusobno ortogonalni vektori, vrijedi **Pitagorin poučak**, tj.

$$\|x_1+\ldots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\ldots+\|x_n\|^2$$

(b) Svaki ortogonalan skup je linearno nezavisan.

(c) Ako je $S \subseteq X$, iz neprekidnosti skalarnog produkta slijedi da je $S^\perp$ zatvoren potprostor od X. Nadalje, vrijedi $S^\perp = \overline{[S]}^\perp$, $S^\perp \cap \overline{[S]} = \{0\}$ i $\overline{[S]} \subseteq (S^\perp)^\perp$. Ako je X potpun (tj. Hilbertov), onda je $\overline{[S]} = (S^\perp)^\perp$ (vidjeti Napomenu 6.1.15)

(d) Analogno kao u konačnom slučaju, koristeći **Gram[3]-Schmidtov[4] postupak** možemo dokazati da svaki prebrojiv linearano nezavisan skup $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ u (nužno beskonačnodimenzionalnom) unitarnom prostoru X možemo ortonormirati, tj. postoji ortonormiran skup $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ u X takav da vrijedi $[\{x_1, \dots, x_n\}] = [\{e_1, \dots, e_n\}]$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Konkretno:

$$e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}, \qquad e_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle x_{k+1}, e_j\rangle e_j}{\|x_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle x_{k+1}, e_j\rangle e_j\|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(e) Ako je X beskonačnodimenzionalan, onda ONB E u X (ako postoji) općenito nije algebarska baza za X, odnosno $[E] \neq X$. Naime, kao što ćemo uskoro vidjeti, svaki separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor H ima prebrojivu ONB. S druge strane, prema Teoremu 2.2.8, algebarska dimenzija od H je $\operatorname{card}(H) = \mathfrak{c}$.

Prisjetimo se da smo u Odjeljku 3.3 promatrali problem komplementabilnosti zatvorenih potprostora Banachovog (ili samo normiranog) prostora. Dakle, za zatvoren potprostor Y Banachovog prostora X smo rekli da je (topološki) komplementabilan u X ako Y ima zatvoren direktni komplement, tj. ako postoji zatvoren potprostor $Z \le X$ takav da vrijedi $Y \dotplus Z = X$. U tom slučaju se svaki vektor $x \in X$ može na jedinstven način prikazati u obliku $x = y + z$, gdje je $y \in Y$ i $z \in Z$, te je s $P_Y : X \to X$, $P_Y x := y$ definiran ograničen projektor sa slikom Y i jezgrom Z. Također smo vidjeli da u općenitim Banachovim prostorima mogu postojati nekomplementabilni potprostori kao što je to slučaj s c_0 u ℓ^∞ (vidjeti Teorem 3.3.11). Sljedeći važan rezultat kaže svaki zatvoren potprostor Hilbertovog prostora je komplementabilan. Štoviše:

Teorem 6.1.11 (**Rieszov teorem o projekciji**). *Neka je H Hilbertov prostor i Y zatvoren potprostor od H. Onda je $Y^\perp$ direktni komplement od Y, tj. $Y \dotplus Y^\perp = X$. Nadalje, ako je $Y \neq \{0\}$, za projektor P_Y sa slikom Y i jezgrom $Y^\perp$ vrijedi $\|P_Y\| = 1$.*

U dokazu Teorema 6.1.11 koristit ćemo sljedeći pomoćni rezultat.

Lema 6.1.12. *Neka je X unitaran prostor. Vektori $x, y \in X$ su ortogonalni ako i samo ako vrijedi $\|x\| \le \|x + \lambda y\|$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Dokaz. Ako je $x \perp y$ onda je prema Pitagorinom poučku

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2 \ge \|x\|^2$$

za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.

Obratno, neka vrijedi $\|x\| \le \|x + \lambda y\|$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$. Onda je

$$\|x\|^2 \le \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle y, x\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 \tag{6.4}$$

za sve $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako je $y = 0$ tvrdnja je trivijalna. Ako je $y \neq 0$, u (6.4) uvrstimo $\lambda := \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, odakle dobivamo

$$\|x\|^2 \le \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

To je jedino moguće ako je $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Napomena 6.1.13. Preko Leme 6.1.12 možemo generalizirati pojam ortogonalnosti u proizvoljnim normiranim prostorima (tzv. Birkhoff[5]-Jamesova[6] ortogonalnost).

[3]Jorgen Pedersen Gram (1850.–1916.) danski aktuar i matematičar
[4]Erhard Schmidt (1876.–1959.), baltičko-njemački matematičar
[5]Garrett Birkhoff (1911.–1996.), američki matematičar
[6]Robert Clarke James (1918.–2003.), američki matematičar

Dokaz Teorema 6.1.11. Ako je $Y = \{0\}$ tvrdnja je trivijalna, pa pretpostavimo da $Y \neq \{0\}$. Neka je $x \in H$. Prema Teoremu 6.1.7 postoji jedinstven $y \in Y$ takav da vrijedi $\|x-y\| = \inf_{v\in Y}\|x-v\|$. Jer je $Y \cap Y^\perp = \{0\}$, dovoljno je dokazati da je $z := x - y \in Y^\perp$. No to slijedi direktno iz Leme 6.1.12 jer je za $\lambda \in \mathbb{C}$ i $v \in Y$, $y - \lambda v \in Y$, pa je prema izboru vektora y

$$\|z\| = \|x-y\| \leq \|x-(y-\lambda v)\| = \|z+\lambda v\|.$$

Nadalje, za $x \in X$ i $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Y^\perp$ imamo $P_Y x = y$ pa je prema Pitagorinom poučku

$$\|P_Y x\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2,$$

odnosno $\|P_Y\| \leq 1$. Nadalje, $P_Y y = y$ za sve $y \in Y$, pa ako $Y \neq \{0\}$ slijedi $\|P_Y\| = 1$. □

Teorem 6.1.11 nam opravdava sljedeću definiciju.

Definicija 6.1.14. Neka je H Hilbertov prostor i Y zatvoren potprostor od H. Za $Y^\perp$ kažemo da je **ortogonalni komplement** od Y i pišemo $H = Y \oplus Y^\perp$. Projektor P_Y sa slikom Y i jezgrom $Y^\perp$ zove se **ortogonalni projektor** na Y.

Napomena 6.1.15. Neka je H Hilbertov prostor i Y potprostor od H. Ako je Y zatvoren, onda iz $H = Y \oplus Y^\perp$ i jedinstvenosti ortogonalnog komplementa slijedi da je Y ortogonalni komplement od $Y^\perp$, tj. vrijedi $(Y^\perp)^\perp = Y$. Ako Y nije zatvoren, onda iz $Y^\perp = \overline{Y}^\perp$ i $H = \overline{Y} \oplus (Y^\perp)$ slijedi $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$. Općenitije, prema Napomeni 6.1.10 (c) za svaki podskup S od H vrijedi $S^\perp = \overline{[S]}^\perp$, odakle slijedi $(S^\perp)^\perp = \overline{[S]}$.

* * *

Sada nam je cilj dokazati da svaki Hilbertov prostor H dopušta ortonormiranu bazu. Ako je H konačnodimenzionalan, to jednostavno slijedi iz Gram-Schmidtovog postupka primijenjenog na proizvoljnu bazu prostora. Ako je H beskonačnodimenzionalan, onda je prema Teoremu 2.2.8 algebarska dimenzija od H jednaka $\mathrm{card}(H) \geq \mathfrak{c}$, tako da ćemo morati naći alternativni pristup kako bismo dokazali tu činjenicu. U tu svrhu krećemo sa sljedećim pomoćnim rezultatom.

Lema 6.1.16. *Neka je X unitaran prostor i $F = \{e_1, \ldots, e_n\}$ konačan ortonormiran skup u X.*

(i) Za $x \in X$ stavimo

$$z := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \in [F].$$

Tada je z jedinstvena najbolja aproksimacija vektora x vektorima iz potprostora $[F]$, tj. vrijedi

$$\|x - z\| < \|x - y\| \quad \forall y \in [F] \setminus \{z\}.$$

(ii) Za sve $x \in X$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je $x \in [F]$.

Dokaz. (i). Neka je $y \in [F]$. Jer je S ortonormirana baza konačnodimenzionalnog unitarnog prostora $[F]$, imamo $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, gdje je $\lambda_k = \langle y, e_k\rangle$ za sve $1 \leq k \leq n$. Koristeći svojstva skalarnog produkta dobivamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle e_k, x\rangle - \sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda_k}\langle x, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k - \langle x, e_k\rangle|^2. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je je vrijednost od $\|x-y\|$ najmanja moguća ako i samo ako je posljednji sumand jednak 0, što je ekvivalentno s $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$ za sve $1 \le k \le n$. To se točno desi kada je $y = z$. U tom slučaju je

$$0 \le \|x-z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2. \tag{6.5}$$

(ii). Tvrdnja slijedi direktno iz (6.5), jer je $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$ ako i samo ako je $x = z$, odnosno ako i samo ako je $x \in [F]$. □

Propozicija 6.1.17. *Neka je X unitaran prostor i E ortonormiran podskup od X.*

(i) Za svaki $x \in X$ je skup $\{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\}$ najviše prebrojiv.

(ii) Za svaki $x \in X$ vrijedi tzv. ***Besselova***[7] ***nejednakost***

$$\sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

(iii) Vektor $x \in X$ se nalazi u $\overline{[E]}$ ako i samo ako vrijedi ***Parsevalova***[8] ***jednakost***

$$\sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

(iv) Vektor $x \in X$ se nalazi u $\overline{[E]}$ ako i samo ako vrijedi vrijedi

$$x = \sum_{e\in E} \langle x, e\rangle e$$

(v) Za sve $x, y \in \overline{[E]}$ vrijedi

$$\langle x, y\rangle = \sum_{e\in E} \langle x, e\rangle\langle e, y\rangle,$$

pri čemu red s desne strane konvergira apsolutno (ta jednakost se također zove ***Parsevalova jednakost****).*

Oznake sumacija iz Propozicije 6.1.17 možemo formalizirati na sljedeći način.

Definicija 6.1.18. Neka je X topološki vektorski prostor i $\mathcal{F} = \{x_i : i \in I\}$ familija elemenata u X. Promatramo usmjeren skup $\mathrm{Fin}(I)$ svih konačnih podskupova od I, usmjeren s obzirom na skupovnu inkluziju, kao u Primjeru 4.3.3 (b). Definiramo mrežu $S : \mathrm{Fin}(I) \to X$ sa $S(F) := \sum_{i\in F} x_i$. Kažemo da je familija $\mathcal{F}$ **sumabilna** ako je mreža $(S_F)_{F\in\mathrm{Fin}(I)}$ konvergentna. U tom slučaju njen (nužno jedinstven) limes x_0 zovemo **sumom familije** $\mathcal{F}$ i označavamo s $x_0 = \sum_{i\in I} x_i$.

Napomena 6.1.19. Ako je X normiran prostor, može se dokazati da vrijedi:

(a) Ako je familija $\mathcal{F} = \{x_i : i \in I\}$ sumabilna, onda je mreža $(S_F)_{F\in\mathrm{Fin}(I)}$ Cauchyjeva što konkretno znači da vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists F_\varepsilon \in \mathrm{Fin}(I))\,(\forall F \in \mathrm{Fin}(I))\,\left(F \cap F_\varepsilon = \emptyset \implies \left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| < \varepsilon\right).$$

Ako je X Banachov vrijedi i obrat.

[7]Friedrich Wilhelm Bessel (1784.–1846.), njemački astronom, matematičar, fizičar i geodet

[8]Marc-Antoine Parseval (1755.–1836.), francuski matematičar

(b) Ako je $\mathcal{F} = \{x_i : i \in I\}$ sumabilna familija elemenata u X, onda je skup $J = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ najviše prebrojiv i $\sum_{j\in J} x_j = \sum_{i\in I} x_i$.

(c) Prebrojiva familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ u X je sumabilna ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno, tj. za svaku permutaciju $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ red $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ konvergira. Pritom vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{F\in\mathrm{Fin}(\mathbb{N})} \sum_{n\in F} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

za svaku permutaciju $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(d) Ako su svi x_i nenegativni realni brojevi, tada je familija $\{x_i\}_{i\in I}$ sumabilna ako i samo ako je $\sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_{i\in F} x_i < \infty$ i u tom slučaju je

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i : \ F \in \mathcal{F}\right\}.$$

Koristeći desnu stranu gornjeg izraza možemo definirati sumu $\sum_{i\in I} x_i$ za proizvoljnu familiju $\{x_i\}_{i\in I}$ elemenata u $\mathbb{R}_+$.

Dokaz Propozicije 6.1.17. (i). Fiksirajmo $x \in X$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$S_n := \left\{e \in E : |\langle x, e\rangle| \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Ako je F proizvoljan konačan podskup od S_n, iz Leme 6.1.16 slijedi

$$\|x\|^2 \geq \sum_{e\in F} |\langle x, e\rangle|^2 \geq \frac{\mathrm{card}(F)}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{card}(F) \leq \lfloor n^2\|x\|^2\rfloor.$$

Odavde zaključujemo da je S_n konačan skup. Stoga je skup

$$\{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

najviše prebrojiv, kao prebrojiva unija konačnih skupova.

(ii). Besselova nejednakost slijedi direktno iz (i) i Leme 6.1.16 (ii), jer je za svaki $x \in X$ i konačan podskup F od E, $\sum_{e\in F} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(iii). Neka je $x \in \overline{[E]}$. Onda za dani $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup F od E i $y \in [F] \subseteq [E]$ takav da je $\|x - y\| < \varepsilon$. Prema Lemi 6.1.16 (i) (i pripadnom dokazu), za $z := \sum_{e\in F}\langle x, e\rangle e \in [F]$ imamo

$$\|x\|^2 - \sum_{e\in F} |\langle x, e\rangle|^2 = \left\|x - \sum_{e\in F}\langle x, e\rangle e\right\|^2 \leq \|x - y\|^2 < \varepsilon^2.$$

Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup F od E takav da je $\|x\|^2 - \sum_{e\in F} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \varepsilon^2$. Onda je svakako i

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Jer je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, time smo dokazali Parsevalovu jednakost za $x \in \overline{[E]}$.

Obratno, pretpostavimo da za neki $x \in X$ vrijedi Parsevalova jednakost. Prema (i) je skup $\{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\}$ najviše prebrojiv. Zbog Leme 6.1.16 (ii) dovoljno je pretpostaviti da je taj skup prebrojiv, tako da (nakon izbora bijekcije s $\mathbb{N}$) možemo pisati

$$\{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}. \tag{6.6}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k. \tag{6.7}$$

Onda je $(x_n)_n$ niz u $[E]$ i prema dokazu Leme 6.1.16 (ii) imamo

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{6.8}$$

Pretpostavka nam je da vrijedi $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e \rangle|^2$. Stoga desna strana u (6.8) teži prema 0 kada $n \to \infty$. Dakle, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, tako da je $x \in \overline{[E]}$.

(iv). Ako je $x \in X$ takav da je $x = \sum_{e\in E} \langle x, e \rangle e$, jasno je $x \in \overline{[E]}$.

Neka je sada $x \in \overline{[E]}$. Onda prema (iii) (uz iste oznake kao u (6.6)) za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u E definiran s (6.7) vrijedi $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, odnosno

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{e\in E} \langle x, e \rangle e.$$

(v). Neka su $x, y \in \overline{[E]}$. Apsolutna konvergencija reda $\sum_{e\in E} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$ slijedi direktno iz AG-nejednakosti

$$2|\langle x, e \rangle \langle e, y \rangle| \leq |\langle x, e \rangle|^2 + |\langle y, e \rangle|^2$$

i Besselovih nejednakosti $\sum_{e\in E} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ i $\sum_{e\in E} |\langle y, e \rangle|^2 \leq \|y\|^2$. Neka je

$$S := \{e \in E : |\langle x, e \rangle|^2 + |\langle y, e \rangle|^2 > 0\},$$

što je prema (i) najviše prebrojiv skup. Ako je S konačan, tvrdnja je jasna, a ako je $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv onda je zbog (iv), neprekidnosti i seskvilinearnosti skalarnog produkta

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle = \sum_{e\in E} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle.$$

□

Direktno iz Propozicije 6.1.17 i definicije ONB dobivamo:

Korolar 6.1.20. *Neka je X unitaran prostor i E ortonormiran podskup od X. Tada je ekvivalentno:*

(i) E je ONB za X.

(ii) Za svaki $x \in X$ vrijedi $\|x\|^2 = \sum_{e\in E} |\langle x, e \rangle|^2$.

(iii) Za svaki $x \in X$ vrijedi $x = \sum_{e\in E} \langle x, e \rangle e$.

Definicija 6.1.21. Neka je X unitaran prostor, E ONB za X i $x \in X$.

- Izraz $x = \sum_{e\in E} \langle x, e \rangle e$ se zove **Fourierov red** od x s obzirom na ONB E.
- Skalari $\langle x, e \rangle$, $e \in E$, se zovu **Fourierovi koeficijenti** od x s obzirom na ONB E.

Napomena 6.1.22. Neka je X nepotpun unitaran prostor. Ako je (H, ϕ) upotpunjenje od X onda je H Hilbertov prostor (jer norma od H zadovoljava relaciju paralelograma na gustom potprostoru $\phi(X)$ od H, pa zbog neprekidnosti norme onda i na čitavom H. Stoga, ako je E ONB za X, onda je prema Propoziciji 6.1.17 nakon identifikacije X s $\phi(X)$, zatvarač od $[E]$ u H jednak H, tako da je E također ONB za H.

Propozicija 6.1.23. *Neka je X separabilan unitaran prostor.*

(i) Svaki ortonormiran skup u X je najviše prebrojiv.

(ii) X ima ONB. Pritom je ona konačna ako je X konačnodimenzionalan, odnosno prebrojiva ako je X beskonačnodimenzionalan.

Dokaz. Neka je $S = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv gust skup u X.

(i). Ako je $E = \{e_i : i \in I\}$ proizvoljan ortonormiran skup onda je $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ za sve $i, j \in I$, $i \neq j$. Dakle, familija kugala $\{K(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2}) : i \in I\}$ je međusobno disjunktna pa je s $i \mapsto \min\{k \in \mathbb{N} : x_k \in K(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$ dobro definirana injekcija s I u $\mathbb{N}$. Dakle, $\operatorname{card}(I) \leq \aleph_0$.

(ii). Tvrdnja je jasna ako je X konačnodimenzionalan. Pretpostavimo da je X beskonačnodimenzionalan. Definiramo novi skup S' dobiven iz S na sljedeći način: Izaberemo najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \neq 0$, definiramo $x_1' := x_k$ stavimo ga u S'. Induktivno, ako je $n \in \mathbb{N}$ i $x_1', \ldots, x_n' \in S'$ izaberimo najmanji $l \in \mathbb{N}$ takav da $x_l \notin [\{x_1', \ldots, x_n'\}]$, stavimo $x_{n+1}' := x_l$ i dodamo ga u S'. Onda je očito $S' = \{x_n' : n \in \mathbb{N}\}$ linearno nezavisan skup i $[S'] = [S]$. Primjenom Gram-Schmidtovog postupka na S' dobivamo ortonormiran skup $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ takav da vrijedi $[E] = [S'] = [S]$. Stoga je $\overline{[E]} = \overline{[S]} = X$. □

Teorem 6.1.24. *Neka je H Hilbertov prostor.*

(i) Ortonormiran podskup E od H je ONB za H ako i samo ako je E maksimalan s (s obzirom na skupovnu inkluziju).

(ii) Svaki Hilbertov prostor ima ONB.

(iii) Svake dvije ONB za H su ekvipotentne. Štoviše, ako je H beskonačnodimenzionalan, onda se kardinalni broj proizvoljne ONB za H podudara s najmanjim kardinalnim brojem gustog podskupa u H.

Dokaz. (i). Neka je najprije E ONB za H. Pretpostavimo da je $x \in H$ vektor koji je ortogonalan na E. Prema Propoziciji 6.1.17 imamo $x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e$. Jer je $x \perp E$, odnosno $\langle x, e \rangle = 0$ za sve $e \in E$, slijedi $x = 0$. Dakle, ne postoji jedinični vektor iz H koji je ortogonalan na E, tako da je E maksimalan ortonormiran skup.

Neka je sada E maksimalan ortonormiran skup u H. Pretpostavimo da E nije ONB za H. Onda $\overline{[E]} \neq H$ pa je prema Teoremu 6.1.11 i Napomeni 6.1.10 $E^\perp = \overline{[E]}^\perp \neq \{0\}$. Stoga postoji jedinični vektor $e \in E^\perp$. Onda je $E \cup \{e\}$ ortonormiran skup koji sadrži E kao pravi podskup. Time smo dobili kontradikciju s maksimalnosti od E. Dakle, E je ONB za H.

(ii). Tvrdnju dokazujemo primjenom Zornove leme. Neka je stoga $\mathcal{E}$ familija svih ortonormiranih skupova u H parcijalno uređena sa skupovnom inkluzijom. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljan lanac u $\mathcal{E}$. Onda je $L := \bigcup_{S \in \mathcal{L}} S$ gornja međa za $\mathcal{L}$. Zaista, dovoljno je argumentirati da je L ortonormiran skup. Očito su svi vektori uz L jedinični. Neka su $x, y \in L$, $x \neq y$. Jer je $\mathcal{L}$ lanac u $\mathcal{E}$, postoji $S \in \mathcal{L}$ takav da je $x, y \in S$. Onda je $x \perp y$ jer je S ortonormiran. Prema Zornovoj lemi $\mathcal{E}$ ima barem jedan maksimalan element. Iz (i) slijedi da je $\mathcal{E}$ ONB za H.

(iii). Ako je H konačnodimenzionalan, onda znamo da su svake dvije (algebarske) baze za H ekvipotentne, pa su posebno i svake dvije ONB za H ekvipotentne.

Stoga pretpostavimo da je H beskonačnodimenzionalan. Neka je $E = \{e_i : i \in I\}$ proizvoljna ONB za H. Prema pretpostavci je $\operatorname{card}(I) \geq \aleph_0$. Stavimo

$$\kappa := \min\{\operatorname{card}(S) : S \subseteq H \text{ gust u } H\}.$$

Označimo s D skup svih (konačnih) linearnih kombinacija elemenata iz E s racionalnim koeficijentima (tj. iz $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$). Onda je D gust u X i $\operatorname{card}(D) = \operatorname{card}(I)$. Naime, slično kao u dokazu Teorema 2.2.8, za proizvoljan neprazan skup S označimo sa $[S]^{<\omega}$ familiju svih nepraznih konačnih podskupova od S. Budući da je preslikavanje s $[(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times I]^{<\omega}$ u S koje svakom podskupu $\{(q_1, i_1), \ldots, (q_n, i_n)\} \in [(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times I]^{<\omega}$ pridružuje linearnu kombinaciju $\sum_{k=1}^n q_k e_{i_k} \in S$ surjektivno, imamo

$$\operatorname{card}(I) \leq \operatorname{card}(D) \leq \operatorname{card}([(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times I]^{<\omega}) = \operatorname{card}((\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times I) = \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(I) = \operatorname{card}(I).$$

Dakle,

$$\kappa \leq \operatorname{card}(I). \tag{6.9}$$

Obratno, neka je S gust skup u H (najmanjeg) kardinaliteta κ. Slično kao u dokazu Propozicije 6.1.23 za svaki $i \in I$ postoji $x_i \in S \cap K(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Jer je familija kugala $\{K(e_i, \frac{\sqrt{2}}{2}) : i \in I\}$ međusobno disjunktna, preslikavanje $I \to S$ definirano s $i \mapsto x_i$ je injektivno, odakle slijedi

$$\operatorname{card}(I) \leq \kappa. \tag{6.10}$$

Iz (6.9) i (6.10) slijedi $\operatorname{card}(I) = \kappa$. Posebno, jer je $\{e_i : i \in I\}$ bila proizvoljna ONB za H i jer definicija od κ ne ovisi o izboru ONB, zaključujemo da su sve ONB za H kardinalnosti κ, dakle ekvipotentne.

□

Prethodni teorem nam opravdava sljedeću definiciju.

Definicija 6.1.25. Neka je H Hilbertov prostor. **Hilbertova** (ili **ortogonalna**) **dimenzija** od H je kardinalni broj neke (pa onda i svake) ONB za H.

Napomena 6.1.26. Ako je X topološki prostor, onda se najmanji kardinalni broj gustog podskupa od X, tj.

$$\min\{\operatorname{card}(S) : S \subseteq X \text{ gust u } X\}$$

zove **gustoća** od X.

(a) Jer se gusti skupovi po homeomorfizmima slikaju u guste skupove, gustoća je topološka invarijanta, tj. homeomorfni topološki prostori imaju istu gustoću.

(b) Prema Teoremu 6.1.24 je za Hilbertov prostor H Hilbertova dimenzija od H jednaka gustoći od H.

Primjer 6.1.27. (a) U ℓ^2 je kanonski niz vektora $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ maksimalan ortonormiran skup, stoga ONB za ℓ^2.

(b) Općenitije, za proizvoljan skup J definiramo $\ell^2(J)$ kao skup svih funkcija $f : J \to \mathbb{C}$ za koje je $\sum_{j \in J} |f(j)|^2 < \infty$ (u smislu Definicije 6.1.18). Nije teško vidjeti da $\ell^2(J)$ postaje Hilbertov prostor uz standardnu vektorsku strukturu i skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{j \in J} f(j)\overline{g(j)}.$$

Nadalje, ako za $j \in J$ s $e_j : J \to \mathbb{C}$ označimo karakterističnu funkciju jednočlanog skupa $\{j\}$, onda je $\{e_j : j \in J\}$ maksimalan ortonormiran skup u $\ell^2(J)$, dakle ONB za $\ell^2(J)$. Na taj način svakom kardinalnom broju κ možemo pridružiti Hilbertov prostor $\ell^2(\kappa)$ Hilbertove dimenzije κ.

Nadalje, ako je H proizvoljan Hilbertov prostor i $\{f_j : j \in J\}$ ONB za H, onda je preslikavanje $U : H \to \ell^2(J)$ definirano s

$$(Ux)(j) := \langle x, f_j \rangle, \quad j \in J$$

izometrički izomorfizam s H na $\ell^2(J)$ (sve ove tvrdnje provjerite za DZ).

(c) Promotrimo Hilbertov prostor $L^2(\mathbb{S}^1)$ (s normaliziranom Lebesgueovom mjerom), tako da je za $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\, d\theta,$$

pri čemu (kao u Primjeru 3.1.10) pišemo $f(\theta)$ za $f(e^{i\theta})$. Za $n \in \mathbb{Z}$ neka je $e_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ funkcija definirana s

$$e_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

Tvrdimo da je $E := \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ONB za $L^2(\mathbb{S}^1)$. Zaista, jer je

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

E je ortonormiran skup u $L^2(\mathbb{S}^1)$. Maksimalnost od E slijedi iz uniformne gustoće trigonometrijskih polinoma u $C(\mathbb{S}^1)$ (prema Stone-Weierstrassovom teoremu) i Luzinovog teorema koji u ovom slučaju kaže da je $C(\mathbb{S}^1)$ gust u $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Stoga, ako je $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, njeni pripadni Fourierovi koeficijenti su dani s

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dok je pripadni Fourierov red oblika

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n.$$

Stoga je prema Parsevalovoj jednakosti, **Fourierova transformacija** $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{S}^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\mathcal{F}(f) := (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}, \quad f \in L^2(\mathbb{S}^1)$$

izometrički izomorfizam. Zbog toga se prostori $L^2(\mathbb{S}^1)$ i $\ell^2(\mathbb{Z})$ mogu identificirati i ta identifikacija je poznata kao **Riesz-Fischerov teorem**.

Korolar 6.1.28. *Neka su H i K beskonačnodmimenzionalni Hilbertovi prostori. Tada je ekvivalentno:*

(i) H i K su izometrički izomorfni.

(ii) H i K su homeomorfni (kao topološki prostori).

(iii) H i K su jednake Hilbertove dimenzije.

Posebno, svaki separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor je izometrički izomorfan s ℓ^2.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Tvrdnja je trivijalna.

(ii) $\implies$ (iii). Pretpostavimo da su H i K homeomorfni. Jer su H i K beskonačodimenzionalni, prema Napomeni 6.1.26 H i K imaju istu gustoću, pa su prema Teoremu 6.1.24 (iii) H i K jednake Hilbertove dimenzije.

(iii) $\implies$ (i). Ako su H i K iste Hilbertove dimenzije, onda svake dvije ONB za H i K možemo indeksirati istim indeksinim skupom J. Prema Primjeru 6.1.27 (b) H i K su izometrički izomorfni s $\ell^2(J)$, pa su posljedično H i K izometrički izomorfni. $\square$

Napomena 6.1.29. Ekvivalencije u Korolaru 6.1.28 vrijede neovisno o tome jesu li H i K konačne ili beskonačne dimenzije. Naime, očito je da uvijek vrijede implikacije (i) $\implies$ (ii) i (iii) $\implies$ (i). Za implikaciju (ii) $\implies$ (iii) argument je kompliciraniji. Naime, ako je jedan od H ili K konačnodimenzionalan onda možemo upotrijebiti *Teorem o invarijanciji domene* koji kaže da ako ako je U otvoren podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ i $f : U \to \mathbb{R}^n$ injektivna neprekidna funkcija, onda je $f(U)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i f je homeomorfizam s U na $f(U)$ (npr. vidjeti [23]). Posebno, za $m \neq n$ prostori $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ nisu homeomorfni.

6.2 Svojstva ograničenih operatora na Hilbertovim prostorima

Neka je X unitaran prostor. Za svaki $y \in X$ je s

$$\varphi_y(x) := \langle x, y\rangle, \quad x \in X$$

definiran ograničen linearni funkcional na X i $\|\varphi_y\| = \|y\|$. Zaista, prema CSB-nejednakosti je $|\varphi_y(x)| \leq \|y\|\|x\|$ za sve $x \in X$ što pokazuje $\|\varphi_y\| \leq \|y\|$. Ako je $y = 0$ očito je $\|\varphi_y\| = 0$. Ako je $y \neq 0$ onda je $e := \frac{y}{\|y\|}$ jedinični vektor u X i $\varphi_y(e) = \|y\|$.

S druge strane, na Hilbertovim prostorima na taj način dobivamo sve ograničene linearne funkcionale:

Teorem 6.2.1 (**Rieszov teorem o reprezentaciji ograničenih linearnih funkcionala**). *Neka je H Hilbertov prostor. Za svaki $\varphi \in H^*$ postoji jedinstven $y \in H$ takav da vrijedi $\varphi = \varphi_y$, odnosno $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$ za sve $x \in H$. Nadalje, preslikavanje $\phi : H \to H^*$ definirano s $\phi(y) = \varphi_y$ je antilinearni izometrički izomorfizam.*

Dokaz. Ako je $\varphi = 0$ očito je $y = 0$ jedinstven vektor iz H takav da je $\varphi = \varphi_y$. Stoga pretpostavimo da $\varphi \neq 0$. Onda je $\ker\varphi$ zatvoren potprostor kodimenzije 1. Prema Teoremu 6.1.11 je $H = \ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^\perp$ i $(\ker\varphi)^\perp$ je dimenzije 1. Izaberimo jedinični vektor $e \in (\ker\varphi)^\perp$ i stavimo

$$y := \overline{\varphi(e)}e.$$

Tvrdimo da je $\varphi = \varphi_y$. Zaista, za proizvoljan vektor $x \in H$ je $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e \in \ker\varphi$, tako da je $(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e) \perp e$. Dakle, $\langle x, e\rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}$ iz čega slijedi

$$\varphi(x) = \varphi(e)\langle x, e\rangle = \langle x, \overline{\varphi(e)}e\rangle = \langle x, y\rangle = \varphi_y(x).$$

Pretpostavimo da je $z \in H$ neki drugi vektor takav da je $\varphi = \varphi_y = \varphi_z$. Onda je $\langle x, y - z\rangle = 0$ za sve $x \in H$. Posebno za $x = y - z$ dobivamo $x - z = 0$.

Preostaje dokazati da je preslikavanje $\phi : y \mapsto \varphi_y$ antilinearni izometrički izomorfizam s H na H^*. Izometričnost i surjektivnost od ϕ smo već dokazali pa preostaje dokazati njegovu antilinearnost. No to slijedi direktno iz antilinearnosti skalarnog produkta u drugoj varijabli: za $y, z \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ i proizvoljan $x \in H$ je

$$\begin{aligned}[\phi(\lambda y + \mu z)](x) &= \varphi_{\lambda y + \mu z}(x) = \langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \overline{\mu}\langle x, z\rangle = (\overline{\lambda}\varphi_y + \overline{\mu}\varphi_z)(x) \\ &= (\overline{\lambda}\phi(y) + \overline{\mu}\phi(z))(x).\end{aligned}$$

□

Korolar 6.2.2. *Svaki Hilbertov prostor je refleksivan.*

Dokaz. Neka je H Hilbertov prostor. Prema Teoremu 6.2.1 preslikavanje $\phi : y \mapsto \varphi_y$ je antilinearni izometrički izomorfizam s H na H^*. Posebno, H^* je Hilbertov prostor s obzirom na skalarni produkt

$$\langle \varphi_y, \varphi_z\rangle_* = \langle z, y\rangle, \quad y, z \in H.$$

Neka je $x^{**} \in H^{**}$. Prema Teoremu 6.2.1 postoji jedinstven $y \in H$ takav da je

$$x^{**}(\phi(x)) = \langle \phi(x), \varphi_y\rangle_* = \langle y, x\rangle = [\phi(x)](y)$$

za sve $x \in H$. Jer je ϕ surjekcija, zaključujemo da je x^{**} u slici kanonskog preslikavanja $J_H : H \to H^{**}$. Dakle, J_H je surjekcija, odnosno H je refeksivan. □

Napomena 6.2.3. Jedna od posljedica Teorema 6.2.1 je da nam za Hilbertove prostore zapravo ne treba Hahn-Banachov teorem. Štoviše, ako je H Hilbertov prostor, Y njegov potprostor i $\varphi \in Y^*$, onda postoji jedinstven $\hat{\varphi} \in H^*$ koji proširuje φ i $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Zaista, jer je $\overline{Y}$ zatvoren (pa stoga Hilbertov prostor) i $Y^* = \overline{Y}^*$, prema Teoremu 6.2.1 postoji jedinstven $y \in \overline{Y}$ takav da je $\varphi = \varphi_y$. Onda je jedinstveno proširenje $\hat{\varphi} \in H^*$ s $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$ dano istom formulom $\hat{\varphi} = \varphi_y$. Zaista, pretpostavimo da je $\tilde{\varphi} \in H^*$ neko drugo proširenje od φ takvo da je $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Prema Teoremu 6.2.1 postoji jedinstven $z \in H$ takav da je $\tilde{\varphi} = \varphi_z$. Onda je $\|z\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = \|y\|$ i $0 = \varphi_z(x) - \varphi_y(x) = \langle x, z - y\rangle = 0$ za sve $x \in Y$. Dakle $z - y \in Y^\perp = \overline{Y}^\perp$ pa iz Pitagorinog poučka dobivamo

$$\|z\|^2 = \|(z - y) + y\|^2 = \|z - y\|^2 + \|y\|^2 = \|z - y\|^2 + \|z\|^2,$$

što je ekvivalentno s $y = z$.

Neka su H i K Hilbertovi prostori. Kao u Odjeljku 2.3 svakom operatoru $T \in \mathrm{B}(H,K)$ možemo pridružili njegov dualni operator $T^* \in \mathrm{B}(K^*,H^*)$ definiran s $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$. Koristeći antilinearne izomorfizme $\phi_H : H \to H^*$ i $\phi_K : K \to K^*$ iz Teorema 6.2.1 možemo promatrati operator $\phi_H^{-1}T^*\phi_K \in \mathrm{B}(K,H)$. Onda za sve $x \in H$ i $y \in K$ vrijedi

$$\langle x, \phi_H^{-1}T^*\phi_K y\rangle = [T^*\phi_K(y)](x) = [\phi_K(y)](Tx) = \langle Tx, y\rangle$$

Operator $\phi_H^{-1}T^*\phi_K$ također označamo s T^* i njegova svojstva su opisana sljedećim teoremom:

Teorem 6.2.4. *Neka su H i K Hilbertovi prostori. Za svaki operator $T \in \mathrm{B}(H,K)$ postoji jedinstven operator $T^* \in \mathrm{B}(K,H)$ takav da vrijedi*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall x \in H, y \in K.$$

Pritom vrijedi:

(i) $(T^*)^* = T$ *za sve* $T \in \mathrm{B}(H,K)$.

(ii) Preslikavanje $T \mapsto T^*$ *definira antilinearnu izometriju s* $\mathrm{B}(H,K)$ *na* $\mathrm{B}(K,H)$.

(iii) $(ST)^* = T^*S^*$, *za sve* $T \in \mathrm{B}(H,K)$ *i* $S \in \mathrm{B}(K,L)$ *(gdje je L Hilbertov prostor).*

(iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ *za sve* $T \in \mathrm{B}(H,K)$.

Definicija 6.2.5. Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathrm{B}(H,K)$. Za operator $T^* \in \mathrm{B}(K,H)$ iz Teorema 6.2.4 kažemo da je **adjungiran operatoru** T ili da je T^* **adjungat** od T.

Napomena 6.2.6. Ako drugačije nije rečeno, u kontesktu Hilbertovih prostora pod T^* *isključivo* mislimo na adjungirani operator (umjesto na dualni operator).

U dokazu Teorema 6.2.4 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju:

Propozicija 6.2.7. *Neka su X i Y unitarni prostori. Linearni operator $T : X \to Y$ je ograničen ako i samo ako vrijedi*

$$M := \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : x \in S_X, y \in S_Y\} < \infty.$$

U tom slučaju je $M = \|T\|$.

Dokaz. Pretpostavimo da je T ograničen. Iz CSB-nejednakosti je $|\langle Tx, y\rangle| \le \|T\|$ za sve $x \in S_X$ i $y \in S_Y$ tako da je $M \le \|T\| < \infty$.

Sada pretpostavimo da je $M < \infty$. Ako je $T = 0$ tvrdnja je trivijalna pa pretpostavimo da $T \neq 0$. Fiksirajmo $x \in S_X$ takav da $Tx \neq 0$. Onda za $y_0 := \frac{Tx}{\|Tx\|} \in S_Y$ imamo $|\langle Tx, y_0\rangle| = \|Tx\|$. Odavde slijedi da je

$$\|Tx\| \le \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : y \in S_Y\} \le M,$$

odakle slijedi da je T ograničen i $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| \le M$. □

Dokaz Teorema 6.2.4. Neka je $T \in \mathrm{B}(H,K)$. Za fiksirani $y \in K$ je preslikavanje $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ ograničen linearni funkcional na H pa prema Teoremu 6.2.1 postoji jedinstven vektor $T^*y \in H$ takav da vrijedi $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ za sve $x \in H$. Na taj način dolazimo do preslikavanja $T^* : K \to H$ definiranog s $y \mapsto T^*y$.

Svojstva (i) i (iii), kao i antilinearnost preslikavanja $T \mapsto T^*$ se lako provjere (DZ). Nadalje, prema Propoziciji 6.2.7 je

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup\{|\langle T^*y, x\rangle| : y \in S_Y, x \in S_X\} = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : x \in S_X, y \in S_Y\} \\ &= \|T\|,\end{aligned}$$

odakle slijedi svojstvo (ii). Nadalje, zbog submultiplikativnosti operatorske norme je $\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Obratno, ponovom uporabom Propozicije 6.2.7 dobivamo

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup\{|\langle T^*Tx, y\rangle| : x, y \in S_X\} \ge \sup\{|\langle T^*Tx, x\rangle| : x \in S_X\} = \sup\{\|Tx\|^2 : x \in S_X\} \\ &= \|T\|^2.\end{aligned}$$

Time smo dokazali i svojstvo (iv). □

Korolar 6.2.8. *Ako je H Hilbertov prostor, onda je $\mathrm{B}(H)$ uz uobičajene operacije, adjungiranje i operatorsku normu C^*-algebra.*

Posebno, za operatore iz $\mathrm{B}(H)$ možemo koristiti pojmove uvedene u Definiciji 5.1.36.

Propozicija 6.2.9. *Neka je H Hilbertov prostor. Operator $T \in B(H)$ je hermitski ($T^* = T$) ako i samo ako vrijedi $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ za sve $x \in H$. U tom slučaju vrijedi*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in S_H\}. \tag{6.11}$$

Dokaz. Ako je $T = T^*$, tada je $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, odakle slijedi $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Obratno, pretpostavimo da je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ za sve $x \in H$. Budući da za $\lambda \in \mathbb{C}$ i $x, y \in H$ imamo

$$\langle Tx, x\rangle + \overline{\lambda}\langle Tx, y\rangle + \lambda\langle Ty, x\rangle + |\lambda|^2\langle Ty, y\rangle = \langle T(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle \in \mathbb{R},$$

taj izraz je jednak svom kompleksnom konjugatu. Kako je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ i $\langle Ty, y\rangle \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\begin{aligned} \lambda\langle Ty, x\rangle + \overline{\lambda}\langle Tx, y\rangle &= \overline{\lambda}\langle x, Ty\rangle + \lambda\langle y, Tx\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle T^*x, y\rangle + \lambda\langle T^*y, x\rangle. \end{aligned}$$

Ako u gornji izraz stavimo $\lambda = 1$ i $\lambda = i$ redom dobivamo

$$\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle + \langle T^*y, x\rangle,$$

$$i\langle Ty, x\rangle - i\langle Tx, y\rangle = -i\langle T^*x, y\rangle + i\langle T^*y, x\rangle.$$

Uz malo aritmetike dobivamo $\langle Ty, x\rangle = \langle T^*y, x\rangle$; dakle $T = T^*$.

Sada dokažimo jednakost (6.11). Stavimo

$$N := \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in S_H\}.$$

Prema Propoziciji 6.2.7 je očito $N \le \|T\|$. Dokažimo obratnu nejednakost. Jer je $T^* = T$ za sve $x, y \in H$ imamo

$$\langle T(x + y), x + y\rangle - \langle T(x - y), x - y\rangle = 4\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle.$$

Koristeći tu činjenicu zajedno s relacijom paralelograma, za $x, y \in S_H$ imamo

$$\begin{aligned} 4|\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| &\le |\langle T(x + y), x + y\rangle| + |\langle T(x - y), x - y\rangle| \\ &\le N\|x + y\|^2 + N\|x - y\|^2 = 2N(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &= 4N, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $|\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| \le N$. Izaberimo skalar $\lambda \in \mathbb{S}^1$ takav da vrijedi $\langle Tx, y\rangle = \lambda|\langle Tx, y\rangle|$. Tada je

$$|\langle Tx, y\rangle| = \langle T(\overline{\lambda}x), y\rangle = |\,\mathrm{Re}\langle T(\overline{\lambda}x), y\rangle| \le N.$$

Iz Propozicije 6.2.7 dobivamo $\|T\| \le N$. $\square$

Napomena 6.2.10. Iz Propozicije 6.2.9 direktno slijedi da za hermitski operator $T \in \mathrm{B}(H)$ iz $\langle Tx, x\rangle = 0$ za sve $x \in S_H$ slijedi $T = 0$. Ista tvrdnja vrijedi i za sve (ne nužno hermitske operatore) $T \in \mathrm{B}(H)$. Naime, to slijedi direktno iz sljedeće varijante polarizacijskog identiteta

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\langle T(x + i^k y), x + i^k y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Propozicija 6.2.11. *Neka je H Hilbertov prostor. Operator $T \in \mathrm{B}(H)$ je normalan ako i samo ako vrijedi $\|Tx\| = \|T^*x\|$ za sve $x \in H$. Posebno je* $\ker T^* = \ker T$.

Dokaz. Za $x \in H$ imamo

$$\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle.$$

Budući da je operator $T^*T - TT^*$ hermitski, tvrdnja slijedi direktno iz Napomene 6.2.10. □

Propozicija 6.2.12. *Neka su H i K Hilbertovi prostor. Za svaki operator $T \in \mathrm{B}(H, K)$ vrijedi*

$$\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp \qquad \text{i} \qquad \overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T^*)^\perp.$$

Dokaz. Najprije primijetimo da su gornje dvije jednakosti ekvivalentne jer je $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$ za svaki potprostor Y od H. Neka su $x \in \ker T$ i $y \in K$. Tada je $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$, odakle slijedi inkluzija $\ker T \subseteq (\operatorname{ran} T^*)^\perp$. Obratno, ako je $x \in (\operatorname{ran} T^*)^\perp$ i $y \in K$, tada je $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$, odakle slijedi i $(\operatorname{ran} T^*)^\perp \subseteq \ker T$. □

Napomena 6.2.13. Iz Propozicije 6.2.12 slijedi da za svaki $T \in \mathrm{B}(H, K)$ imamo dekompozicije

$$H = \ker T \oplus \overline{\operatorname{ran} T^*} \qquad \text{i} \qquad K = \ker T^* \oplus \overline{\operatorname{ran} T}.$$

Posebno, ako je $K = H$ i $T \in \mathrm{B}(H)$ normalan, imamo $\ker T^* = \ker T$ (Propozicija 6.2.11), pa je $H = \ker T \oplus \overline{\operatorname{ran} T}$.

Definicija 6.2.14. Neka je X normiran prostor. Za operator $T \in \mathrm{B}(X)$ kažemo da je **ograničen odozdo** ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi $\|Tx\| \geq \varepsilon\|x\|$ za sve $x \in X$.

Propozicija 6.2.15. *Neka je H Hilbertov prostor. Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) T je invertibilan u $\mathrm{B}(H)$.

(ii) T ograničen odozdo i ima gustu sliku.

(iii) T i T^* su ograničeni odozdo.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) i (i) $\Longrightarrow$ (iii). Ako je T invertibilan u $\mathrm{B}(H)$, tada je $\operatorname{ran} T = H$ trivijalno gust u H i za proizvoljan $x \in H$ je $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$, odnosno $\|Tx\| \geq \varepsilon\|x\|$ za $\varepsilon := \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Nadalje, kao i u svakoj unitalnoj C^*-algebri T je invertibilan u $\mathrm{B}(H)$ ako i samo ako je T^* invertibilan u $\mathrm{B}(H)$ i vrijedi $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Stoga je prema dokazanom T^* ograničen odozdo.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Neka je $\varepsilon > 0$ takav da je $\|Tx\| \geq \varepsilon\|x\|$ za sve $x \in H$, tada je T očito injektivan. Prema Banachovom teoremu o izomorfizmu (Korolar 3.2.4) dovoljno je dokazati da je T surjektivan. Nadalje, jer je prema pretpostavci $\operatorname{ran} T$ gust potprostor od H, trebamo samo dokazati da je $\operatorname{ran} T$ zatvorena u H. Argument za to je isti kao u Napomeni 1.6.12 (a) za izometrije. Zaista, neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u H i y_0 takav da $Tx_n \to y_0$. Iz nejednakosti

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|Tx_n - Tx_m\|$$

za sve $m, n \in \mathbb{N}$ slijedi da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u H. Kako je H potpun, postoji $x_0 \in H$ takav da $x_n \to x_0$. Budući da je T neprekidan, imamo $y_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$. Dakle, $y_0 \in \operatorname{ran} T$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Jer je T^* ograničen odozdo, on je injektivan, pa je prema Propoziciji 6.2.12 $\{0\} = \ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$. Odavde dobivamo $\overline{\operatorname{ran} T} = (\operatorname{ran} T)^{\perp\perp} = H$. □

Propozicija 6.2.16. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathrm{B}(H)$.*

(i) T je izometrija u algebarskom smislu (tj. $T^*T = I$) ako i samo ako je T izometrija u metričkom smislu (tj. $\|Tx\| = \|x\|$ za sve $x \in H$).

(ii) T je unitaran ako i samo ako je T surjektivna izometrija.

Dokaz. (i). Prema Napomeni 6.2.10 $T^*T = I$ je ekvivalentno s $\langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$ za sve $x \in H$, što je pak ekvivalentno s $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$ za sve $x \in H$.

(ii). Ako je T unitaran, tj. $T^*T = TT^* = I$, jasno je T surjektivna izometrija. Obratno, ako je T surjekcija i $T^*T = I$, onda svakako postoji T^{-1}, te je $T^{-1} = T^*$. □

Ako je H konačnodimenzionalan, tada iz $T^*T = I$ slijedi da je operator T invertibilan (jer je $\det T \neq 0$) i $T^{-1} = T^*$. Dakle svaka izometrija na konačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru je unitaran operator. Sljedeći primjer pokazuje da na beskonačnodimenzionalnim prostorima to općenito ne vrijedi.

Primjer 6.2.17. Pretpostavimo da je H separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor i neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za H. **Unilateralni šift** ili **jednostrani pomak** (s obzirom na tu ONB) je operator $S : H \to H$ definiran s

$$Sx := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_{n+1}, \quad x \in H.$$

Prema Parsevalovoj jednakosti za $x \in H$ imamo

$$\|Sx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2,$$

odakle slijedi da je S izometrija. Nadalje, njegov adjungat S^* je dan s

$$\begin{aligned} S^*x &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^*x, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Se_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{n+1}\rangle e_n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_{n-1} \end{aligned}$$

Specijalno, $S^*e_1 = 0$, odakle slijedi da S nije unitaran operator.

Kao što smo vidjeli, operator $T \in \mathrm{B}(H)$ je hermitski ako i samo ako je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ za sve $x \in H$. Ako je T pozitivan (kao element C^*-algebre $\mathrm{B}(H)$), tada je prema Propoziciji 5.6.13 (i), $T = R^*R$ za neki $R \in \mathrm{B}(H)$. Odatle slijedi $\langle Tx, x\rangle = \|Rx\|^2 \geq 0$ za sve $x \in H$. Vrijedi i obrat:

Propozicija 6.2.18. *Neka je H Hilbertov prostor. Operator $T \in \mathrm{B}(H)$ je pozitivan ako i samo ako je $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in H$.*

Dokaz. Već smo argumentirali da iz $T \in \mathrm{B}(H)_+$ slijedi $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in \mathcal{H}$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in H$. Budući da je T hermitski, prema Propoziciji 5.5.7 (i) je $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Nadalje, za svaki $\lambda < 0$ i $x \in H$ imamo

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = \|Tx\|^2 - 2\lambda\langle Tx, x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2.$$

Kako je i $\lambda I - T$ hermitski, iz Propozicije 6.2.15 slijedi da je $\lambda I - T$ invertibilan u $\mathrm{B}(H)$. Dakle, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$, pa je T pozitivan. □

6.3 Spektar ograničenog operatora

Neka je X kompleksan Banachov prostor. Onda je $\mathrm{B}(X)$ unitalna Banachova algebra, pa prema Teoremu 5.2.18 svaki operator $T \in \mathrm{B}(X)$ ima neprazan spektar. Nadalje, prema prema Banachovom teoremu o izomorfizmu je

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ nije bijekcija}\}.$$

Definicija 6.3.1. Neka je X kompleksan Banachov prostor i $T \in \mathrm{B}(X)$.

- **Točkovni spektar** od T je skup svih svih svojstvenih vrijednosti od T, tj.
$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}.$$
Ako je $\lambda \in \sigma_p(T)$ tada za $\ker(\lambda I - T)$ kažemo da je **svojstveni potprostor** od λ. Također, za svaki nenul vektor $x \in \ker(\lambda I - T)$ kažemo da je **svojstveni vektor** od λ.

- **Rezidualni spektar** od T je skup
$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) = \{0\} \text{ i } \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} \neq X\}.$$

- **Kontinuirani spektar** od T je skup
$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) = \{0\}, \operatorname{ran}(\lambda I - T) \neq X \text{ i } \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} = X\}.$$

Napomena 6.3.2. Neka je X Banachov prostor i $T \in \mathrm{B}(X)$.

(a) Skupovi $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$ i $\sigma_c(T)$ su međusobno diskjunktni i vrijedi
$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$
Kao što ćemo uskoro vidjeti u konkretnim primjerima, neki od tih skupova mogu biti prazni.

(b) Jer su tvrdnje (i) i (ii) Propozicije 6.2.15 ekvivalentne i za operatore na Banachovim prostorima, kontinuirani spektar od T možemo ekvivalentno zapisati s
$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) = \{0\}, \overline{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} = X \text{ i } \lambda I - T \text{ nije ograničen odozdo}\}.$$

Primjer 6.3.3. Neka je H separabilan Hilbertov prostor s ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Odredimo i klasificirajmo spektar unilateralnog šifta $S : H \to H$ (Primjer 6.2.17) s obzirom na tu ONB. Dakle,
$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1}, \quad x \in H.$$
Jer je S izometrija, isto vrijedi i za sve operatore S^n, $n \in \mathbb{N}$. Posebno je $\|S^n\| = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je prema Teoremu 5.2.24 $r(S) = \lim_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$. Dakle, $\sigma(S) \subseteq \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Dokažimo da je $\sigma_p(S) = \emptyset$. Zaista, pretpostavimo da postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ i $x \in S_X$ takav da je $Sx = \lambda x$. Jer je S izometrija (posebno injekcija), $\lambda \neq 0$. Onda je $x = \frac{1}{\lambda} Sx$, odakle slijedi $x \perp e_1$ (jer je $e_1 \perp \operatorname{ran} S$). Induktivno, ako je $x \perp e_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, onda je
$$\langle x, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle Sx, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle x, S^* e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle x, e_n \rangle = 0.$$
Dakle, $x \perp e_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odnosno $x = 0$, što je kontradikcija.

Sada dokažimo da je $\sigma_r(S) = \operatorname{Int} \mathbb{D}$ i $\sigma_c(S) = \mathbb{S}^1$. Najprije dokažimo da je $\sigma_r(S) \subseteq \operatorname{Int} \mathbb{D}$, tj. da $\operatorname{ran}(\lambda I - S)$ nije gust potprostor od H za sve $|\lambda| < 1$. Tvrdnja je jasna za $\lambda = 0$ jer je $e_1 \perp \operatorname{ran} S$. Pretpostavimo da je $0 < |\lambda| < 1$. Onda je $(\overline{\lambda}^n)_n$ niz u $\ell^1 \subseteq \ell^2$ pa je s
$$x_\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}^n e_n$$
dobro definiran nenul vektor iz H za kojeg vrijedi
$$\langle (\lambda I - S) e_n, x_\lambda \rangle = \langle \lambda e_n - e_{n+1}, x_\lambda \rangle = \lambda^{n+1} - \lambda^{n+1} = 0.$$
Onda i za proizvoljan $x \in H$, iz $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, neprekidnosti od S i neprekidnosti skalarnog produkta slijedi $\langle (\lambda I - S)x, x_\lambda \rangle = 0$. Dakle, $x_\lambda \perp \operatorname{ran}(\lambda I - S)$, pa posebno $\overline{\operatorname{ran}(\lambda I - S)} \neq H$.

Preostaje dokazati $\sigma_c(T) = \mathbb{S}^1$, odnosno da je slika od $\lambda I - S$ gusta u H za sve $|\lambda| = 1$. Neka je stoga $|\lambda| = 1$ i $x \in H$ takav da je $x \perp \operatorname{ran}(\lambda I - S)$. Onda je

$$0 = \langle (\lambda I - S)e_n, x\rangle = \langle e_{n+1}, x\rangle - \lambda\langle e_n, x\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tako da je posebno $|\langle x, e_n\rangle| = |\langle x, e_1\rangle|$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Jer $\langle x, e_n\rangle \to 0$ kada $n \to \infty$ (Besselova nejednakost), mora biti $\langle x, e_1\rangle = 0$, a onda i $\langle x, e_n\rangle = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $x = 0$.

Sve zajedno:

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_r(S) = \operatorname{Int}\mathbb{D}, \quad \sigma_c(T) = \mathbb{S}^1 \quad\Longrightarrow\quad \sigma(S) = \sigma_p(S) \cup \sigma_r(S) \cup \sigma_c(S) = \mathbb{D}.$$

Također često promatramo i sljedeći tip spektra ogrančenog operatora.

Definicija 6.3.4. Neka je X kompleksan Banachov prostor. **Aproksimativni točkovni spektar** operatora $T \in \mathrm{B}(X)$ je skup

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ nije ograničen odozdo}\}.$$

Primijetimo $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$ i:

$$\lambda \in \sigma_{ap}(T) \quad\Longleftrightarrow\quad \text{postoji niz } (x_n)_n \text{ u } S_X \text{ takav da } \|(\lambda I - T)x_n\| \to 0.$$

Propozicija 6.3.5. *Neka je X kompleksan Banachov prostor i $T \in \mathrm{B}(X)$. Onda je $\sigma_{ap}(T)$ zatvoren podskup od $\mathbb{C}$ i vrijedi $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Posebno, $\sigma_{ap}(T) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Dokažimo najprije zatvorenost od $\sigma_{ap}(T)$. Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$. Onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi $\|(\lambda I - T)x\| \geq \varepsilon\|x\|$ za sve $x \in X$. Za proizvoljan $\mu \in K_{\mathbb{C}}(\lambda, \varepsilon)$ i $x \in X$ imamo.

$$\|(\mu I - T)x\| = \|(\lambda I - T)x - (\lambda - \mu)x\| \geq \|(\lambda I - T)x\| - |\lambda - \mu|\|x\| \geq (\varepsilon - |\lambda - \mu|)\|x\|.$$

Dakle, $K_{\mathbb{C}}(\lambda, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$, iz čega slijedi otvorenost od $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$.

Dokažimo sada inkluziju $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Neka je $\lambda \in \partial\sigma(T)$ i neka je $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ takav da $\lambda_n \to \lambda$. Prema 7. zadatku iz 2. DZ je $\|(\lambda_n I - T)^{-1}\| \to \infty$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $x_n \in S_X$ takav da je

$$t_n := \|(\lambda_n I - T)^{-1}x_n\| > \|(\lambda_n I - T)^{-1}\| - \frac{1}{n}.$$

Očito $t_n \to \infty$. Možemo pretpostaviti da $t_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$y_n := \frac{1}{t_n}(\lambda_n I - T)^{-1}x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Onda je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S_X i

$$\|(\lambda I - T)y_n\| \leq \|(\lambda - \lambda_n)y_n\| + \|(\lambda_n I - T)y_n\| = |\lambda - \lambda_n| + \frac{1}{t_n}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $\|(\lambda I - T)y_n\| \to 0$, odakle slijedi $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. $\square$

Primjer 6.3.6. Koristeći Propoziciju 6.3.5 lako možemo dokazati da za svaku neinvertibilnu izometriju T na Banachovom prostoru X vrijedi $\sigma(T) = \mathbb{D}$ (kao što znamo da to vrijedi za unilateralni šift prema Primjeru 6.3.3). Zaista, prema Teoremu 5.2.24 je $r(T) = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$, tako da je $\sigma(T) \subseteq \mathbb{D}$. Pretpostavimo da je $\sigma(T) \subsetneq \mathbb{D}$. Jer je $0 \in \sigma(T)$ postoji $\lambda \in \partial\sigma(T) \cap \operatorname{Int}\mathbb{D}$. Prema Propoziciji 6.3.5 je $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ pa postoji niz $(x_n)_n$ u S_X takav da $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0$. S druge strane, jer je T izometrija, $\|x_n\| = 1$ i $|\lambda| < 1$, imamo

$$\|(\lambda I - T)x_n\| \geq \|Tx_n\| - |\lambda|\|x_n\| = (1 - |\lambda|)\|x_n\| = 1 - |\lambda|,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ što je u kontradikciji s $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0$.

Napokon, jer je prema Teoremu 5.2.18 $\sigma(T)$ kompaktan i neprazan, svakako je $\partial\sigma(T) \neq \emptyset$, tako da je i $\sigma_{ap}(T) \neq \emptyset$.

Propozicija 6.3.7. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathrm{B}(H)$ normalan operator. Tada vrijedi:*

(i) $r(T) = \|T\|$.

(ii) $\lambda \in \sigma_p(T)$ *ako i samo ako je* $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, *te se pripadni svojstveni potprostori podudaraju.*

(iii) Svojstveni potprostori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima operatora T su međusobno ortogonalni.

(iv) $\sigma_r(T) = \emptyset$. *Posebno,* $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Dokaz. (i). Ovo je specijalni slučaj Propozicije 5.5.1.

(ii). Jer je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ operator $\lambda I - T$ normalan, prema Propoziciji 6.2.11 je $\ker(\lambda I - T) = \ker((\lambda I - T)^*) = \ker(\overline{\lambda} I - T^*)$.

(iii). Neka su $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$ i neka su redom x i y pripadni svojstveni vektori za λ i μ. Tada je prema (i):

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Kako je $\lambda \neq \mu$, slijedi $\langle x, y\rangle = 0$.

(iv). Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $\lambda I - T$ injektivan. Budući da je operator $\lambda I - T$ normalan, prema Napomeni 6.2.13 imamo $\overline{\mathrm{ran}(\lambda I - T)} = \ker(\lambda I - T)^{\perp} = H$, tako da $\lambda \notin \sigma_r(T)$. □

Primjer 6.3.8. Neka je H separabilan Hilbertov prostor i $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ONB za H (dakle ONB je indeksirana cijelim brojevima kao kod prostora $\ell^2(\mathbb{Z})$). **Bilateralni šift** ili **obostrani pomak** je operator $U \in \mathrm{B}(H)$ definiran s

$$Ux := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x, e_n\rangle e_{n+1}, \quad x \in H.$$

Jasno je U izometrija, tako da je U posebno ograničen. Lako se provjeri da je njegov adjungat dan s

$$U^*x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x, e_n\rangle e_{n-1}, \quad x \in H,$$

te da je U unitaran operator. Tvrdimo da je

$$\sigma(U) = \sigma_c(U) = \mathbb{S}^1.$$

Zaista, jer je operator U unitaran, prema Propoziciji 5.5.7 je $\sigma(U) \subseteq \mathbb{S}^1$. Fiksirajmo proizvoljan $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Jer su unitarni operatori normalni, iz Propozicije 6.3.7 slijedi $\lambda \notin \sigma_r(U)$.

Dokažimo da $\lambda \notin \sigma_p(U)$, odnosno da je $\lambda I - U$ injektivan. Zaista, neka je $x \in H$ takav da je $Ux = \lambda x$. Onda je

$$\lambda\langle x, e_n\rangle = \langle x, e_{n-1}\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{6.12}$$

Posebno je $\langle x, e_n\rangle = \overline{\lambda}^n\langle x, e_0\rangle$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Jer $\langle x, e_n\rangle \to 0$ (Besselova nejednakost), slijedi $\langle x, e_0\rangle = 0$, a onda i $\langle x, e_n\rangle = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Iz (6.12) i $\langle x, e_0\rangle = 0$ dobivamo i $\langle x, e_n\rangle = 0$ za sve $n < 0$, tako da je $x = 0$.

Preostaje dokazati $\lambda \in \sigma_c(U)$. Jer $\lambda \notin \sigma_p(U) \cup \sigma_r(U)$, dovoljno je dokazati da $\lambda I - U$ nije surjektivan. Tvrdimo da $e_0 \notin \mathrm{ran}(\lambda I - U)$. Zaista, u suprotnom postoji $x \in H$ takav da je $(\lambda I - U)x = e_0$. Onda je

$$0 = \langle e_0, e_n\rangle = \langle(\lambda I - U)x, e_n\rangle = \lambda\langle x, e_n\rangle - \langle x, e_{n-1}\rangle \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Analogno kao u prethodnom paragrafu dobivamo $\langle x, e_n\rangle = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$, odnosno $x = 0$. Onda je i $e_0 = 0$, što je kontradikcija.

Primjer 6.3.9. Neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB separabilnog Hilbertovog prostora H i neka je $(\lambda_n)_n$ ograničen niz kompleksnih brojeva. Stavimo $M := \sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Tada je s

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H$$

definiran ograničen operator $T \in \mathrm{B}(H)$ takav da je $Te_n = \lambda_n e_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, operator T je normalan, $\|T\| = M$ te vrijedi

$$\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} \qquad \text{i} \qquad \sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zaista, najprije primijetimo da je Tx dobro definiran vektor u H za svaki $x \in H$, budući da je niz $(\lambda_n \langle x, e_n \rangle)_n$ u ℓ^2, a H je potpun. Lako se vidi da je preslikavanje $T : x \mapsto Tx$ linearno i očito vrijedi $Te_n = \lambda_n e_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za $x \in H$ imamo

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = M^2 \|x\|^2,$$

odakle slijedi da je T ograničen i $\|T\| \leq M$. Štoviše, iz $Te_n = \lambda_n e_n$ slijedi $|\lambda_n| \leq \|T\|$, pa je $\|T\| = M$.

Odredimo T^*. Za $x \in H$ imamo

$$\begin{aligned} T^*x &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Te_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \lambda_n e_n \rangle e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n. \end{aligned}$$

Posebno je $T^*e_n = \overline{\lambda_n} e_n$, pa je $(T^*T - TT^*)e_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, operator T je normalan.

Odredimo $\sigma_p(T)$. Očito je $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma_p(T)$. Pretpostavimo da je ta inkluzija striktna i neka je $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ s pripadnim svojstvenim vektorom x. Tada je

$$(\lambda - \lambda_n)\langle x, e_n \rangle = \langle \lambda x, e_n \rangle - \langle x, \overline{\lambda_n} e_n \rangle = \langle Tx, e_n \rangle - \langle x, T^*e_n \rangle = 0,$$

odakle slijedi da je x ortogonalan na sve vektore e_n. To je naravno nemoguće jer je $x \neq 0$ i $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ONB H. Dakle, $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Dokažimo da je $\sigma(T) = \sigma$, gdje je $\sigma := \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Budući da je $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$ i kako je $\sigma(T)$ zatvoren, imamo $\sigma \subseteq \sigma(T)$. Dokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ i izaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $|\lambda - \lambda_n| > \varepsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $\lambda I - T$ ograničen odozdo. Zaista, za $x \in H$ imamo

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \varepsilon^2 \|x\|^2.$$

Budući da je operator T normalan, iz Propozicije 6.3.7 (iv) slijedi da $\lambda \notin \sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Propozicija 6.3.10. *Neka je H separabilan Hilbertov prostor. Za svaki kompaktan podskup K od $\mathbb{C}$ postoji normalan operator $T \in \mathrm{B}(H)$ takav da je $\sigma(T) = K$.*

Dokaz. Jer je $\mathbb{C}$ separabilan, prema Propoziciji 1.8.3 isto vrijedi i za K. Uzmimo proizvoljan prebrojiv gust podskup $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ od K. Fiksirajmo neku ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H i definirajmo $T \in \mathrm{B}(H)$ kao u primjeru 6.3.9. Onda je $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} = K$. □

Definicija 6.3.11. Neka je H Hilbertov prostor. Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ kažemo da je **dijagonalizabilan** ako postoji ortonormirana baza $\{e_i : i \in I\}$ za H koja se sastoji od svojstvenih vektora za T.

Napomena 6.3.12. Neka je $T \in \mathrm{B}(H)$ dijagonalizabilan operator. Slično kao u Primjeru 6.3.9, ako za svaki $i \in I$ s λ_i označimo svojstvenu vrijednost pridruženu svojstvenom vektoru e_i, tada je skup $\{\lambda_i : i \in I\}$ ograničen i vrijedi

$$Tx = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in H.$$

Nadalje, imamo

$$T^* x = \sum_{i \in I} \overline{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in H,$$

odakle slijedi da je T normalan.

Kao što znamo, spektar svakog hermitskog elementa a unitalne C^*-algebre A je realan i $r(a) = \|a\|$ (Propozicije 5.5.7 i 5.5.1). Stoga se barem jedna od vrijednosti $\pm\|a\|$ nalazi u $\partial\sigma(a)$. U slučaju C^*-algebre $A = \mathrm{B}(H)$ možemo reći i nešto više:

Propozicija 6.3.13. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathrm{B}(H)$ hermitski operator. Stavimo*

$$m := \inf\{\langle Tx, x \rangle : x \in S_H\} \qquad i \qquad M := \sup\{\langle Tx, x \rangle : x \in S_H\}.$$

Onda je $m = \min \sigma(T)$ i $M = \max \sigma(T)$, tako da je $m, M \in \sigma(T)$ i $\sigma(T) \subseteq [m, M]$.

Dokaz. Najprije dokažimo da je $\sigma(T) \subseteq [m, M]$. Neka je $t > M$. Koristeći Propoziciju 6.2.9 i CSB-nejednakost imamo

$$(t - M)\|x\|^2 \leq \langle (tI - T)x, x \rangle \leq \|(tI - T)x\| \|x\|$$

za sve $x \in H$, tako da je $tI - T$ ograničen odozdo pa $t \notin \sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$ (Propozicija 6.3.7). Slično, za $t < m$ imamo

$$(m - t)\|x\|^2 \leq \langle (T - tI)x, x \rangle \leq \|(T - tI)x\| \|x\|$$

za sve $x \in H$, tako da $t \notin \sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$.

Sada dokažimo da je $m, M \in \sigma(T)$. Ako je $m \geq 0$ (što je prema Propoziciji 6.2.18 ekvivalentno s pozitivnosti od T), onda je prema Propoziciji 6.3.7 i 6.2.9 $r(T) = \|T\| = M$, pa je zbog nenegativnosti spektra od T nužno $M \in \sigma(T)$.

Ako je $m < 0$, onda je $T' := T - mI$ također hermitski operator s $m' = 0$ i $M' = M - m$ pa je prema dokazanom i Propoziciji 5.1.17, $M' \in \sigma(T') = \sigma(T) - m$. Dakle, $M = M' + m \in \sigma(T)$.

Time smo dokazali da je $M \in \sigma(T)$ za proizvoljan hermitski operator T. Prelaskom na operator $-T$ dobivamo $-m \in \sigma(-T)$, odnosno $m \in \sigma(T)$. $\square$

6.4 Ortogonalni projektori, parcijalne izometrije i polarna forma

Prisjetimo se da za element p C^*-algebre A kažemo da je projektor ako je $p^2 = p^* = p$. Ako je H Hilbertov prostor i K zatvoren potprostor od H, onda je ortogonalni projektor P_K sa slikom K i jezgrom $K^\perp$ (Definicija 6.1.14) očito projektor u C^*-algebri $\mathrm{B}(H)$. Naime, očito je $P_K^2 = P_K$. Nadalje, za $x, y \in H$ neka je $x = x_1 + x_2$ i $y = y_1 + y_2$ gdje su $x_1, y_1 \in K$ i $x_2, y_2 \in K^\perp$. Onda je

$$\langle P_K x, y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x, P_K y \rangle,$$

tako da je $P_K^* = P_K$. Štoviše, na taj način dobivamo sve projektore u $\mathrm{B}(H)$.

Propozicija 6.4.1. *Neka je H Hilbertov prostor. Preslikavanje $K \mapsto P_K$ je bijekcija sa skupa svih zatvorenih potprostora K od H na skup svih projektora u $\mathrm{B}(H)$.*

Dokaz. Jedino što ćemo dokazati je surjektivnost tog preslikavanja, jer je ostalo trivijalno. Neka je $P \in \mathrm{B}(H)$ takav da je $P^2 = P^* = P$. Stavimo $K := \operatorname{ran} P$. Budući da je $P^* = P$, iz Propozicije 6.2.12 dobivamo $\ker P \oplus \overline{\operatorname{ran} P} = H$. Nadalje, primijetimo da vrijedi $\operatorname{ran} P = \ker(I - P)$ odakle specijalno slijedi da je $\operatorname{ran} P$ zatvorena. Zaista, za $x \in H$ je $(I - P)x = 0$ ako i samo ako je $Px = x$, odakle slijedi $\ker(I - P) \subseteq \operatorname{ran} P$. Obratno, neka je je $x \in \operatorname{ran} P$ i neka je $y \in H$ takav da je $x = Py$. Tada je $Px = P^2y = Py = x$, pa je i $\operatorname{ran} P \subseteq \ker(I - P)$. Neka je sada $x \in H$. Prema dokazanom postoje jedinstveni vektori $x_1 \in \ker P$ i $x_2 \in \operatorname{ran} P$ takvi da je $x = x_1 + x_2$. Tada je

$$Px = Px_2 = x_2 = P_K x_2 = P_K x,$$

dakle $P = P_K$. □

Propozicija 6.4.2. *Neka je H Hilbertov prostor. Za projektore $P, Q \in \mathrm{B}(H)$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $P \leq Q$.

(ii) $PQ = P$

(iii) $QP = P$.

(iv) $\operatorname{ran} P \subseteq \operatorname{ran} Q$

(v) $\|Px\| \leq \|Qx\|$ *za sve* $x \in H$.

(vi) $Q - P$ *je projektor.*

Dokaz. Ekvivalencija uvjeta (ii), (iii) i (iv) je jasna, kao što su i implikacije (ii) $\implies$ (vi) $\implies$ (i). Stoga je dovoljno dokazati implikacije (i) $\implies$ (v) $\implies$ (ii), odakle će onda slijediti da su sve tvrdnje (i)–(vi) međusobno ekvivalentne.

(i) $\implies$ (v). Kako je $P \leq Q$, prema Propoziciji 6.2.18 imamo $\|Qx\|^2 - \|Px\|^2 = \langle (Q - P)x, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in H$.

(v) $\implies$ (ii). Ako je $\|Px\| \leq \|Qx\|$ za sve $x \in H$, tada je $\|P(1 - Q)x\| \leq \|Q(1 - Q)x\| = 0$ za sve $x \in H$, odnosno $P = PQ$. □

Definicija 6.4.3. Neka je H Hilbertov prostor, K zatvoren potprostor od H i $T \in \mathrm{B}(H)$.

- Za K kažemo da je **invarijantan** za T (odnosno T**-invarijantan**) ako je $TK \subseteq K$.
- Kažemo da K **reducira** T ako su K i $K^\perp$ T-invarijantni.
- Kažemo da je T **ireducibilan** ako su $\{0\}$ i H jedini zatvoreni potprostori od H koji reduciraju T.

Propozicija 6.4.4. *Neka je H Hilbertov prostor, K zatvoren potprostor od H. Za $T \in \mathrm{B}(H)$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) K *je invarijantan za* T.

(ii) $K^\perp$ *je invarijantan za* T^*.

(iii) $P_K T P_K = T P_K$.

Također su i sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(iv) K *reducira* T.

(v) K *je invarijantan za* T *i za* T^*.

(vi) $P_K T = T P_K$.

Dokaz. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

$$\begin{aligned} TK \subseteq K \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0 \quad \forall x \in K^\perp,\ y \in K \\ &\Longleftrightarrow \quad T^*K^\perp \subseteq K^\perp. \end{aligned}$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii). Za $x \in H$ imamo $P_K x \in K$, pa je $TP_K x \in K$, tako da je $P_K(TP_K x) = TP_K x$. Dakle, $P_K TP_K = TP_K$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Za $x \in K$ imamo $Tx = TP_K x = P_K TP_K x \in K$, pa je $TK \subseteq K$.

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v). Prema definiciji K reducira T ako i samo ako je $TK \subseteq K$ i $TK^\perp \subseteq K^\perp$. Prema (ii), $TK^\perp \subseteq K^\perp$ je ekvivalentno s $T^*K \subseteq K$ (zbog zatvorenosti od K imamo $K^{\perp\perp} = K$).

(v) $\Longrightarrow$ (vi). Ako je $TK \subseteq K$ i $T^*K \subseteq K$, tada prema dokazanom vrijedi $P_K TP_K = TP_K$ i $P_K T^* P_K = T^* P_K$. Adjungiranjem druge jednakosti dobivamo $P_K TP_K = P_K T$, pa je $P_K T = TP_K$.

(vi) $\Longrightarrow$ (v). Ako je $P_K T = TP_K$, tada je i $T^*P_K = P_K T^*$, što implicira $P_K T = P_K^2 T = P_K TP_K$ i $P_K T^* = P_K^2 T^* = P_K T^* P_K$. Prema dokazanom, imamo $TK \subseteq K$ i $T^*K \subseteq K$. $\square$

Napomena 6.4.5. Neka je H Hilbertov prostor i K njegov netrivijalni zatvoren potprostor. Označimo s P ortogonalni projektor na K, tako da je $I - P$ ortogonalni projektor na $K^\perp$. Ako je $T \in \mathrm{B}(H)$, onda je

$$T = PTP + PT(I-P) + (I-P)TP + (I-P)T(I-P).$$

Označimo:

$$T_{11} := PTP|_K \in \mathrm{B}(K), \quad T_{12} := PT(I-P)|_{K^\perp} \in \mathrm{B}(K^\perp, K),$$
$$T_{21} := (I-P)TP|_K \in \mathrm{B}(K, K^\perp), \quad T_{22} := (I-P)T(I-P)|_K \in \mathrm{B}(K^\perp).$$

To možemo matrično zapisati kao

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Ako je $x \in H$ s jedinstvenim rastavom $x = x_1 + x_2$, gdje su $x_1 \in K$ i $x_2 \in K^\perp$, to možemo matrično zapisati kao

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Koristeći uobičajene operacije na matricama, uz tu notaciju je onda

$$Tx = \underbrace{(T_{11}x_1 + T_{12}x_2)}_{\in K} + \underbrace{(T_{21}x_1 + T_{22}x_2)}_{\in K^\perp} = \begin{bmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Obratno, ako su $T_{12} \in \mathrm{B}(K)$, $T_{12} \in \mathrm{B}(K^\perp, K)$, $T_{21} \in \mathrm{B}(K, K^\perp)$ i $T_{22} \in \mathrm{B}(K^\perp)$, onda je s (6.13) definiran ograničen operator $T \in \mathrm{B}(H)$.

Nadalje, lako se provjeri da zbrajanje, množenje skalarom i množenje operatora odgovara istim operacijama na pripadnim matričnim prikazima, dok je adjungirani operator od T matrično dan s

$$T^* = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{bmatrix}.$$

(a) Primijetimo da je uz matričnu notaciju potprostor K T-invarijantan ako i samo ako je $T_{21} = 0$, odnosno ako i samo ako T ima gornjetrokutasti prikaz

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

dok K reducira T ako i samo ako je $T_{12} = T_{21} = 0$, odnosno ako i samo ako T ima dijagonalni prikaz

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

što također zapisujemo s $T = T_{11} \oplus T_{22}$.

(b) Pretpostavimo da je H separabilan i beskonačnodimenzionalan s ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ako je K zatvoren potprostor od H s ONB $\{e_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ onda je $\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za $K^\perp$. Dakle, oba potprostora K i $K^\perp$ su izometrički izomorfna s H, što (nakon odgovarajuće identifikacije) možemo zapisati kao $H \oplus H = H$. U tom slučaju svaki operator $T \in \mathrm{B}(H)$ možemo shvatiti kao 2×2-matricu (6.13), gdje su svi $T_{ij} \in \mathrm{B}(H)$, kao i obratno.

Na analogan način možemo definirati pojmove invarijatnosti i (i)reducibilnosti za proizvoljan skup operatora u $\mathrm{B}(H)$:

Definicija 6.4.6. Neka je H Hilbertov prostor i $E \subseteq \mathrm{B}(H)$. Za zatvoren potprostor K od H kažemo da je E**-invarijantan** ako je K T-invarijantan za sve $T \in E$. Slično, K **reducira** E ako K reducira sve $T \in E$. Ako su pak $\{0\}$ i H jedini zatvoreni potprostori od H koji reduciraju sve operatore iz E, tada kažemo da je E **ireducibilan**.

Napomena 6.4.7. Iz Propozicije 6.4.4 slijedi da je E ireducibilan ako i samo ako su 0 i I jedini projektori u $\mathrm{B}(H)$ koji komutiraju sa svim operatorima iz E. Nadalje, ako je E samoadjungiran, tada iz Propozicije 6.4.4 također slijedi da je E ireducibilan ako i samo ako su $\{0\}$ i K jedini E-invarijantni potprostori.

Kao što svaki kompleksni broj možemo napisati kao produkt kompleksnog broja modula 1 (unitarnog elementa iz $\mathbb{C}$) i nenegativnog realnog broja (pozitivnog elementa iz $\mathbb{C}$), sada nam je cilj dokazati da svaki operator iz $\mathrm{B}(H)$ možemo prikazati kao produkt parcijalne izometrije i pozitivnog operatora (Teorem 6.4.11).

Najprije se prisjetimo da ako je A C^*-algebra (ili samo $*$-algebra), onda za element $a \in A$ kažemo da je parcijalna izometrija ako vrijedi $aa^*a = a$. Očito je a parcijalna izometrija ako i samo ako je a^* parcijalna izometrija. Nadalje, sve izometrije, koizometrije i svi projektori u A su parcijalne izometrije. U C^*-algebri $\mathrm{B}(H)$ imamo sljedeću karakterizaciju parcijalnih izometrija:

Propozicija 6.4.8. *Neka je H Hilbertov prostor. Za operator $V \in \mathrm{B}(H)$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) V je parcijalna izometrija.

(ii) V^* je parcijalna izometrija

(iii) V^*V je projektor.

(iv) VV^* je projektor.

(v) V je izometrija na $(\ker V)^\perp$, tj. $\|Vx\| = \|x\|$ za sve $x \in (\ker V)^\perp$.

U dokazu Propozicije 6.4.8 koristit ćemo sljedeću pomoćnu tvrdnju.

Lema 6.4.9. *Neka je A C^*-algebra i neka je $a \in A$. Tada je a^*a projektor ako i samo ako je aa^* projektor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a^*a projektor. Tada je $(aa^*)^3 = (aa^*)^2$, pa iz neprekidnog funkcionalnog računa elementa aa^* zaključujemo da vrijedi $\lambda^3 = \lambda^2$ za sve $\lambda \in \sigma(aa^*)$. Dakle, $\sigma(aa^*) \subseteq \{0, 1\}$, pa iz Propozicije 5.5.19 slijedi da je aa^* je projektor. Obratnu implikaciju dobivamo simetrijom. $\square$

Dokaz Propozicije 6.4.8. Implikacija (i) $\implies$ (iii) je trivijalna, dok ekvivalencije (i) $\iff$ (ii) i (iii) $\iff$ (iv) vrijede u svim C^*-algebrama (Lema 6.4.9).

(iii) $\implies$ (i). Pretpostavimo da je V^*V projektor. Tada je

$$\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle V^*Vx, V^*Vx\rangle = \|V^*Vx\|^2 \tag{6.14}$$

za sve $x \in H$. Posebno je $\|V(I - V^*V)x\| = \|V^*V(1 - V^*V)x\| = 0$ za sve $x \in H$, odakle slijedi $V(1 - V^*V) = 0$, odnosno $V = VV^*V$.

(i) $\Longrightarrow$ (v). Pretpostavimo da je $VV^*V = V$. Tada je V^*V projektor, pa iz (6.14) slijedi $\ker(V^*V) = \ker V$, odnosno $\operatorname{ran}(V^*V) = (\ker V)^\perp$. Ako je $x \in (\ker V)^\perp$ tada imamo

$$\|Vx\|^2 = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Dakle, V je izometrija na $(\ker V)^\perp$.

(v) $\Longrightarrow$ (iii). Pretpostavimo da je V izometrija na $(\ker V)^\perp$. Ako je P ortogonalni projektor na $(\ker V)^\perp$, tada za $x \in (\ker V)^\perp$ imamo

$$\langle V^*Vx, x\rangle = \|Vx\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle Px, x\rangle.$$

Ako je pak $x \in \ker V$, tada trivijalno imamo

$$\langle V^*Vx, x\rangle = 0 = \langle Px, x\rangle.$$

Dakle, $\langle (V^*V - P)x, x\rangle = 0$ za sve $x \in H$, pa iz Napomene 6.2.10 slijedi $V^*V = P$. $\square$

Napomena 6.4.10. Ako je $V \in \mathrm{B}(H)$ parcijalna izometrija, tada iz (dokaza) Propozicije 6.4.8 slijedi da je $\operatorname{ran} V$ zatvoren potprostor od H, te da su V^*V i VV^* ortogonalni projektori redom na potprostore $(\ker V)^\perp$ i $\operatorname{ran} V = (\ker V^*)^\perp$. Za $(\ker V)^\perp$ kažemo da je **inicijalni prostor** od V, a za $\operatorname{ran} V$ kažemo da je **finalni prostor** od V.

Ako je A unitalna C^*-algebra i $a \in A$, prisjetimo se da smo s $|a|$ označavali jedinstven pozitivni drugi korijen od a^*a, tj. $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$.

Teorem 6.4.11 (Teorem o polarnoj formi). *Neka je H Hilbertov prostor. Za svaki operator $T \in \mathrm{B}(H)$ postoji parcijalna izometrija $V \in \mathrm{B}(H)$ s inicijalnim prostorom $(\ker T)^\perp$ i finalnim prostorom $\overline{\operatorname{ran} T}$ takva da vrijedi*

$$T = V|T|.$$

Pritom vrijedi

$$V^*V|T| = |T|, \quad V^*T = |T| \quad i \quad VV^*T = T.$$

Nadalje, ako je $T = WR$, gdje su $R, W \in \mathrm{B}(H)$ takvi da je R pozitivan, a W parcijalna izometrija s $\ker W = \ker R$, onda je $R = |T|$ i $W = V$.

Dokaz. Za svaki vektor $x \in H$ imamo

$$\begin{aligned} \||T|x\|^2 &= \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \\ &= \|Tx\|^2. \end{aligned}$$

Posebno je $\ker |T| = \ker T$, tako da je $H = \ker T \oplus \overline{\operatorname{ran} |T|}$ (Napomena 6.2.13) i preslikavanje

$$V_0 : \operatorname{ran} |T| \to H, \qquad V_0 : |T|x \mapsto Tx$$

je dobro definirana izometrija. Također je jasno da je V_0 linearno preslikavanje i da je $\operatorname{ran} V_0 = \operatorname{ran} T$. Stoga, V_0 možemo na jedinstven način proširiti do linearne izometrije (koju također označavamo s V_0) s $\overline{\operatorname{ran} |T|}$ na $\overline{\operatorname{ran} T}$. Definirajmo operator $V \in \mathrm{B}(H)$ na sljedeći način:

$$Vx := \begin{cases} V_0x & : x \in \overline{\operatorname{ran} |T|}, \\ 0 & : x \in \ker T. \end{cases}$$

Tada je V parcijalna izometrija s inicijalnim prostorom $\overline{\operatorname{ran} |T|} = (\ker T)^\perp$ i finalnim prostorom $\overline{\operatorname{ran} T}$. Također, prema kontstrukciji je $V|T| = T$. Nadalje, prema Napomeni 6.4.10, V^*V je projektor na $\overline{\operatorname{ran} |T|}$, odakle dobivamo jednakosti $V^*V|T| = |T|$, $V^*T = V^*V|T| = |T|$ i $VV^*T = VV^*V|T| = V|T| = T$.

Ostaje dokazati jedinstvenost takve dekompozicije. Pretpostavimo da je $T = WR$, gdje su $R, W \in \mathrm{B}(H)$ takvi da je R pozitivan, a W parcijalna izometrija s $\ker W = \ker R$. Prema Napomeni 6.4.10, W^*W je projektor na inicijalni prostor $(\ker W)^\perp$ od W. Kako je $(\ker W)^\perp = (\ker R)^\perp = \overline{\operatorname{ran} R}$, zaključujemo da je $W^*WR = R$, tako da je $T^*T = RW^*WR = R^2$. Iz Propozicije 5.6.4 slijedi da je $R = |T|$. Napokon, za $x \in H$ imamo $W|T|x = Tx = V|T|x$, odakle slijedi da se W i V podudaraju na gustom potprostoru zajedničkog inicijalnog prostora. Dakle, $W = V$. $\square$

Napomena 6.4.12. Neka je $T = V|T|$, gdje je V kao u Teoremu 6.4.11. Tada iz $V^*V|T| = |T|$ dobivamo

$$TT^* = V|T||T|V^* = V|T|(V^*V|T|)V^* = (V|T|V^*)^2,$$

pa je zbog jedinstvenosti pozitivnog drugog korijena (Propozicija 5.6.4)

$$|T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}} = V|T|V^*.$$

Odavde vidimo da je polarna forma od T^* dana s

$$T^* = |T|V^* = V^*(V|T|V^*) = V^*|T^*|.$$

Korolar 6.4.13. *Neka je H Hilbertov prostor. Ako je operator $T \in \mathrm{B}(H)$ invertibilan, onda je parcijalna izometrija V iz polarne forme od T unitaran operator.*

Dokaz. Prema Teoremu 6.4.11 imamo rastav $T = V|T|$, gdje je V parcijalna izometrija s inicijalnim prostorom $(\ker T)^\perp = H$ i finalnim prostorom $\overline{\operatorname{ran} T} = H$. Dakle, V je surjektivna izometrija, odnosno V je unitaran operator (Propozicija 6.2.16). $\square$

Napomena 6.4.14. Nije teško vidjeti da tvrdnja Korolara 6.4.13 vrijedi u svim unitalnim C^*-algebrama (DZ).

Korolar 6.4.15. *Neka je H Hilbertov prostor. Ako je operator $T \in \mathrm{B}(H)$ normalan, tada postoji unitaran operator $U \in \mathrm{B}(H)$ koji komutira s operatorima T i T^* takav da je $T = U|T|$.*

Dokaz. Neka je $T = V|T|$, gdje je V kao u Teoremu 6.4.11. Budući da je operator T normalan, koristeći Napomenu 6.4.12 imamo

$$V|T|V^* = |T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}} = (T^*T)^{\frac{1}{2}} = |T|,$$

pa je

$$V|T| = V|T|^* = V(V^*V|T|)^* = V|T|V^*V = |T|V. \tag{6.15}$$

Nadalje, prema Napomeni 6.2.13 je $\overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T)^\perp = (\ker |T|)^\perp = \overline{\operatorname{ran} |T|}$. Stoga je s

$$Ux := \begin{cases} Vx & : x \in \overline{\operatorname{ran} |T|}, \\ x & : x \in \ker T. \end{cases}$$

defininiran unitaran operator na H. Također, $U|T| = V|T| = T$. Napokon, iz (6.15) slijedi da U komutira s $|T|$, pa posljedično U komutira i s T i T^*. $\square$

6.5 Operatori konačnog ranga

Definicija 6.5.1. Neka je X i Y normirani prostori. Za ograničen linearni operator $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ kažemo da ima **konačan rang** ako je $\operatorname{ran} T$ konačnodimenzionalan potprostor od Y. Skup svih ograničenih operatora konačnog ranga označavamo s $\mathrm{F}(X,Y)$, odnosno $\mathrm{F}(X)$ ako je $Y = X$.

Ako je $T \in \mathrm{F}(X,Y)$, onda je prema Propoziciji 1.3.12 $\operatorname{ran} T$ zatvoren potprostor od X. Broj

$$\mathrm{r}(T) := \dim(\operatorname{ran} T)$$

zovemo **rang** od T. Očito je $\mathrm{F}(X,Y)$ potprostor od $\mathrm{B}(X,Y)$. Nadalje, $\mathrm{F}(X)$ je (obostrani) ideal u $\mathrm{B}(X)$.

U daljnjem se bavimo analizom operatora konačnog ranga na Hilbertovim prostorima. Neka je stoga H Hilbertov prostor. Za svaki par vektora $(x,y) \in H \times H$ definiramo operator $x \otimes y \in \mathrm{F}(H)$ s

$$(x \otimes y)(z) := \langle z, y \rangle x, \qquad z \in H. \tag{6.16}$$

Očito je $\operatorname{ran}(x \otimes y) = \mathbb{C}x$ ako $y \neq 0$ i $\ker(x \otimes y) = \{y\}^\perp$ ako $x \neq 0$. Specijalno, $\mathrm{r}(x \otimes y) \leq 1$ i $\mathrm{r}(x \otimes y) = 1$ ako i samo ako su x i y različiti od 0. Dokaz sljedeće jednostavne tvrdnje ostavljamo za DZ.

Propozicija 6.5.2. *Neka je H Hilbertov prostor i $x, y \in H$. Tada vrijedi:*

(i) $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$.

(ii) *Preslikavanje $H \times H \to \mathrm{F}(H)$ definirano s $(x, y) \mapsto x \otimes y$ je seskvilinearno.*

(iii) $(x \otimes y)(x' \otimes y') = \langle y, x'\rangle(x \otimes y')$ *za sve* $x', y' \in H$.

(iv) $T(x \otimes y) = (Tx) \otimes y$ *i* $(x \otimes y)T = x \otimes (T^*y)$ *za sve* $T \in \mathrm{B}(H)$.

(v) $(x \otimes y)^* = y \otimes x$.

(vi) *Operator $x \otimes y$ je projektor (ranga 1) ako je $x = y$ i $\|x\| = 1$. Štoviše, svaki projektor ranga 1 je tog oblika.*

Propozicija 6.5.3. *Operator $T \in \mathrm{F}(H)$ je ranga n ako i samo postoje linearno nezavisni skupovi vektora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_1, \ldots, y_n\}$ u H takvi da je*

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i. \tag{6.17}$$

Pri tome je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza za $\operatorname{ran} T$ i $\{y_1, \ldots, y_n\}$ baza za $\operatorname{ran} T^*$. Posebno, $T \in \mathrm{F}(H)$ ako i samo ako je $T^* \in \mathrm{F}(H)$ i $\mathrm{r}(T) = \mathrm{r}(T^*)$.

Dokaz. Pretpostavimo da T možemo prikazati u obliku (6.17). Tada je očito $\operatorname{ran} T \subseteq [\{x_1, \ldots, x_n\}]$, odakle slijedi $\mathrm{r}(T) \leq n$. Najprije dokažimo da je $\mathrm{r}(T) = n$ ako i samo su $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linearno nezavisni skupovi vektora. Zaista, pretpostavimo da je skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linearno zavisan. Tada neki vektor x_i možemo prikazati kao linearnu kombinaciju preostala $n-1$ vektora. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to vektor x_n i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ takvi da je $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$. Tada iz (6.17) dobivamo

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right) \otimes y_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes (\overline{\lambda_i} y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes (y_i + \overline{\lambda_i} y_n). \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\operatorname{ran} T \subseteq [\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}]$, pa je $r(T) < n$. Analnogno bismo dokazali i da je $r(T) < n$ ako je skup $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linearno zavisan.

Obratno, ako su su skupovi $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_1, \ldots, y_n\}$ linearno nezavisni, izaberimo vektore $z_1, \ldots, z_n \in H$ takve da je $\langle z_j, y_i\rangle = \delta_{i,j}$ za sve $1 \leq i, j \leq n$. Tada je

$$Tz_j = \sum_{i=1}^{n} \langle z_j, y_i\rangle x_i = x_j,$$

odakle slijedi da je $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \operatorname{ran} T$. Dakle $\mathrm{r}(T) = n$ i $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je baza za $\operatorname{ran} T$. Nadalje, kako je $T^* = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i$ (Propozicija 6.5.2), isti argument pokazuje da je $\mathrm{r}(T^*) = n$ i da je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ baza za $\operatorname{ran} T^*$.

Ostaje još dokazati da se svaki operator $T \in \mathrm{F}(H)$ ranga n može prikazati u obliku (6.17). Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortonormirana baza za $\operatorname{ran} T$. Stavimo $y_i := T^* x_i$. Tada za svaki $z \in H$ imamo

$$\begin{aligned} Tz &= \sum_{i=1}^{n} \langle Tz, x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \langle z, T^* x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \langle z, y_i\rangle x_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right)(z). \end{aligned}$$

dakle, $T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. $\square$

Kao direktnu posljedicu Propozicija 6.5.2 i 6.5.3 dobivamo:

Korolar 6.5.4. *Ako je H Hilbertov prostor onda je* $\mathrm{F}(H)$ *(obostran) samoadjungiran ideal u* $\mathrm{B}(H)$.

Korolar 6.5.5. *Neka je H Hilbertov prostor. Svaki netrivijalni ideal J u* $\mathrm{B}(H)$ *sadrži* $\mathrm{F}(H)$.

Dokaz. Neka je $0 \neq T \in J$ i izaberimo vektor $x_0 \in H$ takav da je $\|Tx_0\| = 1$. Stavimo $y_0 := Tx_0$. Tada za sve $x, y \in H$ imamo

$$x \otimes y = \langle y_0, y_0 \rangle x \otimes y = (x \otimes y_0)((Tx_0) \otimes y) = (x \otimes y_0)T(x_0 \otimes y),$$

odakle slijedi da je $x \otimes y \in J$. Dakle, J sadrži sve operatore ranga 1, pa iz Propozicije 6.5.3 slijedi da J sadrži čitav $\mathrm{F}(H)$. $\square$

Napomena 6.5.6. Neka je K konačnodimenzionalan potprostor Hilbertovog prostora H. Ako je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ONB za K, onda je $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i$ ortogonalni projektor na potprostor K. Nadalje, budući da je preslikavanje $(x, y) \mapsto x \otimes y$ seskvilinearno, vrijedi polarizacijski identitet:

$$x \otimes y = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{3} i^k (x + i^k y) \otimes (x + i^k y).$$

Odavde i iz Propozicije 6.5.3 slijedi da je $\mathrm{F}(H)$ razapet s operatorima oblika $x \otimes x$, $x \in H$. Posebno, $\mathrm{F}(H)$ je razapet s projektorima ranga 1.

Propozicija 6.5.7. *Neka je H Hilbertov prostor. Postoji mreža projektora $(P_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ u* $\mathrm{F}(H)$ *takva da vrijedi $\|P_\alpha x - x\| \to 0$ za sve $x \in H$.*

Dokaz. Neka je $\{e_i \ : i \in I\}$ ONB za H. Neka je $\Lambda := \mathrm{Fin}(I)$ usmjeren s obzirom na skupovnu inkluziju (Primjer 4.3.3 (b)). Za $\alpha \in \Lambda$ stavimo

$$P_\alpha := \sum_{i \in \alpha} e_i \otimes e_i.$$

Tada je $(P_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža projektora u $\mathrm{F}(H)$. Neka je $x \in H$. Zbog Besselove nejednakosti postoji $\alpha_0 \in \Lambda$ takav da je $\sum_{i \notin \alpha_0} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \varepsilon$. Onda je za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$

$$\|P_\alpha x - x\|^2 = \left\| \sum_{i \notin \alpha} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i \notin \alpha} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \sum_{i \notin \alpha_0} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \varepsilon.$$

Dakle, $\|P_\alpha x - x\| \to 0$. $\square$

Prisjetimo se da smo u Propoziciji 4.8.9 dokazali da je za linearni operator $T : H \to H$ ekvivalentno:

$$T \text{ je ograničen} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ je } (w, w) - \text{neprekidan} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ je } (\|\cdot\|, w) - \text{neprekidan}.$$

S druge strane, uvjet $(w, \|\cdot\|)$-neprekidnosti na T ispada vrlo restriktivan:

Propozicija 6.5.8. *Neka je H Hilbertov prostor. Operator $T \in \mathrm{B}(H)$ je $(w, \|\cdot\|)$-neprekidan ako i samo ako je $T \in \mathrm{F}(H)$.*

Dokaz. Fiksirajmo $x \in H$. Izaberimo proizvoljnu mrežu $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ koja slabo konvergira prema nekom $x_0 \in H$. Prema Teoremu 6.2.1 to je ekvivalentno s $\langle x_\alpha - x_0, x \rangle \to 0$ za sve $x \in H$. Stoga je

$$\lim_{\alpha \in \Lambda} \|(x \otimes x)(x_\alpha) - (x \otimes x)(x_0)\| = \lim_{\alpha \in \Lambda} |\langle x_\alpha - x_0, x \rangle| \|x\| = 0.$$

Dakle, svaki operator oblika $x \otimes x$ je $(w, \|\cdot\|)$-neprekidan. Iz Napomene 6.5.6 zaključujemo i da je svaki $T \in \mathrm{F}(H)$ $(w, \|\cdot\|)$-neprekidan.

Obratno, pretpostavimo da je $T \in \mathrm{B}(H)$ $(w, \|\cdot\|)$-neprekidan. Tada je skup $T^{-1}(K_H)$ slabo otvoren, pa specijalno sadrži neku baznu slabo otvorenu okolinu nulvektora. Stoga, prema Napomeni 4.8.4 i Teoremu 6.2.1 postoje $\varepsilon > 0$ i vektori $x_1, \ldots, x_n \in H$ takvi da vrijedi $T(U(0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)) \subseteq K_H$, gdje je

$$U(0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x \in H : |\langle x, x_1\rangle| < \varepsilon, \ldots, |\langle x, x_n\rangle| < \varepsilon\}.$$

Drugim riječima, za proizvoljan $x \in H$ iz $\max_{1\le i\le n} |\langle x, x_i\rangle| < \varepsilon$ slijedi $\|Tx\| < 1$. Stavimo $K := [\{x_1, \ldots, x_n\}]$. Tada za svaki $x \in K^\perp$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $nx \in K^\perp$, tako da je $n\|Tx\| = \|T(nx)\| < 1$. Dakle $Tx = 0$ za sve $x \in K^\perp$. Slijedi $\operatorname{ran} T = T(H) = T(K \oplus K^\perp) = TK$, tako da je $T \in \mathrm{F}(H)$. □

6.6 Kompaktni operatori

Važnu klasu operatora na Hilbertovim (ili općenitije normiranim) prostorima čine tzv. kompaktni operatori. Prije nego li damo formalnu definiciju, prisjetimo se da za podskup A topološkog prostora X kažemo da je relativno kompaktan ako je njegov zatvarač $\overline{A}$ kompaktan. Ako je X metrički prostor tada su prema Korolaru 1.5.20 sljedeća svojstva ekvivalentna:

(i) A je relativno kompaktan.

(ii) Svaki niz u A ima podniz koji konvergira u X.

Nadalje, ta svojstva uvijek povlače sljedeća dva ekvivalentna svojstva:

(iii) Svaki niz elemenata u A ima Cauchyjev podniz.

(iv) A je totalno ograničen.

Štoviše, ako je X potpun, onda su sva ta svojstva međusobno ekvivalentna.

Definicija 6.6.1. Neka su X i Y normirani prostori. Za linearni operator $T : X \to Y$ kažemo da je **kompaktan** ako je $T(B_X)$ relativno kompaktan podskup od Y. Skup svih kompaktnih operatora s X u Y označavamo s $\mathrm{K}(X, Y)$, odnosno s $\mathrm{K}(X)$ ako je $X = Y$.

Napomena 6.6.2. Neka su X i Y normirani prostori.

(a) Iz karakterizacije relativne kompaktnosti preko nizova slijedi da je linearan operator $T : X \to Y$ kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X niz $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz.

(b) $\mathrm{K}(X, Y) \subseteq \mathrm{B}(X, Y)$, tj. svaki kompaktan operator je ograničen. To je očito, jer je $T(B_X)$ ograničen kao relativno kompaktan podskup od Y.

(c) Iz (a) slijedi da je $\mathrm{K}(X, Y)$ (vektorski) potprostor od $\mathrm{B}(X, Y)$ i da je $\mathrm{K}(X)$ (obostrani) ideal u $\mathrm{B}(X)$.

(d) Budući da je svaki ograničen podskup konačnodimenzionalnog normiranog prostora relativno kompaktan, imamo $\mathrm{F}(X, Y) \subseteq \mathrm{K}(X, Y)$.

(e) $\mathrm{K}(X) = \mathrm{B}(X)$ ako i samo ako je X konačnodimezionalan. Naime, ako je X beskonačnodimenzionalan, onda očito $I \notin \mathrm{K}(X)$.

(f) Ako su X i Y Banachovi prostori i $T \in \mathrm{K}(X, Y)$, onda je svaki zatvoren potprostor Z od Y koji je sadržan u slici od T nužno konačnodimenzionalan. Naime, u tom slučaju je $W := T^{-1}(Z)$ zatvoren potprostor od X i restrikcija $S := T|_W : W \to Z$ je kompaktna (stoga ograničena) linearna surjekcija. Stoga je prema Teoremu o otvorenom preslikavanju $T(B_W)$ relativno kompaktan skup u Z koji ima neprazan interior. Prema Teoremu 1.5.13 je nužno $\dim Z < \aleph_0$. Posebno, $T \in \mathrm{K}(X, Y)$ ima zatvorenu sliku ako i samo ako je $T \in \mathrm{F}(X, Y)$.

Propozicija 6.6.3. *Neka je X normiran prostor i Y Banachov prostor. Onda je $\mathrm{K}(X,Y)$ zatvoren potprostor od $\mathrm{B}(X,Y)$*

Dokaz. Neka je $S \in \mathrm{B}(X,Y)$ operator iz zatvarača od $\mathrm{K}(X,Y)$. Tada za dani $\varepsilon > 0$ postoji $T \in \mathrm{K}(X,Y)$ takav da je $\|S - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Budući da je T kompaktan, $T(B_X)$ je relativno kompaktan, stoga totalno ograničen podskup od Y. Prema Napomeni 1.5.11 postoji konačno mnogo $x_1, \ldots, x_n \in B_X$ tako da vrijedi $T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n K(Tx_i, \frac{\varepsilon}{3})$. Tvrdimo da je tada $S(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n K(Sx_i, \varepsilon)$. Zaista, za proizvoljan $x \in B_X$ postoji $1 \le i \le n$ takav da je $\|Tx_i - Tx\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Tada je

$$\begin{aligned}\|Sx_i - Sx\| &\le \|Sx_i - Tx_i\| + \|Tx_i - Tx\| + \|Tx - Sx\| < 2\|T - S\| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je $S(B_X)$ totalno ograničen podskup od Y. Jer je Y potpun, to je ekvivalentno s time da je $S(B_X)$ relativno kompaktan. □

Lema 6.6.4. *Neka je X refleksivan Banachov prostor i Y normiran prostor. Linearni operator $T : X \to Y$ je kompaktan ako i samo ako je $T(B_X)$ kompaktan podskup od Y.*

Dokaz. Neka je $T : X \to Y$ kompaktan. Trebamo dokazati da je skup $T(B_X)$ zatvoren u normi. Prema Napomeni 6.6.2 T je ograničen, što je prema Propoziciji 6.6.2 ekvivalentno s time da je T (w, w)-neprekidan. Nadalje, refleksivnost od X je prema Korolaru 4.9.17 ekvivalentna s time da je kugla B_X w-kompaktna. Stoga je $T(B_X)$ w-kompaktan, pa stoga w-zatvoren podskup od Y. Onda je svakako $T(B_X)$ zatvoren u normi. Obrat je trivijalan. □

Primjer 2.3.29 pokazuje da tvrdnja Leme 6.6.4 ne mora vrijediti ako domena nije refleksivna.

U daljnjem se bavimo proučavanjem kompaktnih operatora na Hilbertovim prostorima. Krećemo sa sljedećom karakterizacijom:

Teorem 6.6.5. *Neka je H Hilbertov prostor. Za linearan operator $T : H \to H$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) T je kompaktan.

(ii) $|T|$ je kompaktan.

(iii) $T(B_H)$ je kompaktan podskup od H.

(iv) T se nalazi u zatvaraču operatora konačnog ranga.

(v) Restrikcija $T|_{B_H} : B_H \to H$ je $(w, \|\cdot\|)$-neprekidna.

Dokaz. (i) $\iff$ (ii). Prema Teoremu o polarnoj formi (Teorem 6.4.11) postoji parcijalna izometrija $V \in \mathrm{B}(H)$ takva da vrijedi $T = V|T|$ i $V^*T = |T|$. Ekvivalencija sada slijedi direktno iz činjenice da je $\mathrm{K}(H)$ ideal u $\mathrm{B}(H)$.

(i) $\iff$ (iii). Prema Propoziciji 6.2.2 svaki Hilbertov prostor je refleksivan pa ta ekvivalencija slijedi direktno iz Leme 6.6.4.

(i) $\implies$ (iv). Pretpostavimo da je $T : H \to H$ kompatkan. Onda je $T(B_H)$ relativno kompaktan, stoga totalno ograničen podskup od H. Za $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo $x_1, \ldots, x_n \in B_H$ tako da vrijedi $T(B_H) \subseteq \bigcup_{i=1}^n K(Tx_i, \varepsilon)$. Stavimo $K := [\{Tx_1, \ldots, Tx_n\}]$ i neka je $P_K \in \mathrm{B}(H)$ ortogonalni projektor na K. Jer je K konačnodimenzionalan, $P_K \in \mathrm{F}(H)$, pa je stoga i $S := P_K T \in \mathrm{F}(H)$ (jer je $\mathrm{F}(H)$ ideal u $\mathrm{B}(H)$). Za $x \in B_H$ izaberimo $1 \le i \le n$ takav da je $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon$. Kako je prema Lemi 6.1.16 Sx najbolja aproksimacija vektora Tx vektorima iz K, slijedi $\|Tx - Sx\| \le \|Tx - Tx_i\| < \varepsilon$. Dakle, $\|T - S\| = \sup_{x \in B_H} \|Tx - Sx\| \le \varepsilon$.

(iv) $\implies$ (v). Neka je $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ mreža u B_H koja slabo konvergira prema $x \in B_H$. Prema pretpostavci, za dani $\varepsilon > 0$ postoji $S \in \mathrm{F}(H)$ takav da je $\|T - S\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Tada za svaki $\alpha \in \Lambda$ imamo

$$\begin{aligned} \|Tx_\alpha - Tx\| &\leq \|Tx_\alpha - Sx_\alpha\| + \|Sx_\alpha - Sx\| + \|Sx - Tx\| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|Sx_\alpha - Sx\|. \end{aligned}$$

Budući da je $S \in \mathrm{F}(H)$, prema Propoziciji 6.5.8 S je (globalno) $(w, \|\cdot\|)$-neprekidan, pa postoji $\alpha_0 \in \Lambda$ takav da je $\|Sx_\alpha - Sx\| < \varepsilon/3$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$. Dakle, $\|Tx_\alpha - Tx\| < \varepsilon$ za sve $\alpha \gtrsim \alpha_0$, odnosno $\|Tx_\alpha - Tx\| \to 0$.

(v) $\implies$ (iii). Budući da je B_H slabo kompaktna (Korolari 6.2.2 i 4.9.17), zbog $(w, \|\cdot\|)$-neprekidnosti restrikcije $T|_{B_H} : B_H \to H$ je $T(B_H)$ u normi kompaktan podskup od H. □

Korolar 6.6.6. *Neka je H separabilan Hilbertov prostor. Linearni operator $T : H \to H$ je kompaktan ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u B_H iz $x_n \xrightarrow{w} x$ slijedi $\|Tx_n - Tx\| \to 0$.*

Dokaz. Jer je H separabilan i refleksivan, prema Propoziciji 4.9.10 i Napomeni 4.9.14 je relativna slaba topologija na B_H metrizabilna, pa stoga zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti. Preostaje primijeniti ekvivalenciju (i) $\iff$ (iv) Teorema 6.6.5 i Propoziciju 4.2.16. □

Korolar 6.6.7. *Neka je H Hilbertov prostor. Onda je* $\mathrm{K}(H)$ *je zatvoreni samoadjungirani ideal* $\mathrm{B}(H)$ *i vrijedi* $\mathrm{K}(H) = \overline{\mathrm{F}(H)}$.

Dokaz. Prema Propoziciji 6.6.3 i Napomeni 6.6.2 dovoljno je dokazati da je $\mathrm{K}(H)$ samoadjungiran. Neka je stoga $T \in \mathrm{K}(H)$ i $\varepsilon > 0$. Prema Teoremu 6.6.5 postoji $S \in \mathrm{F}(H)$ takav da je $\|S - T\| < \varepsilon$. Prema Korolaru 6.5.4 je $S^* \in \mathrm{F}(H)$. Zbog izometričnosti adjungiranja je $\|S^* - T^*\| < \varepsilon$. Dakle, S^* se nalazi u zatvaraču od $\mathrm{F}(H)$, pa je $S^* \in \mathrm{K}(H)$ prema Teoremu 6.6.5. □

Napomena 6.6.8. Ako je H separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor, tada se može pokazati da je $\mathrm{K}(H)$ jedinstven netrivijalni zatvoreni ideal u $\mathrm{B}(H)$. S druge strane, uskoro ćemo vidjeti da $\mathrm{B}(H)$ ima beskonačno mnogo nezatvorenih ideala ideala (koji svi sadrže $\mathrm{F}(H)$ prema Korolaru 6.5.5).

Napomena 6.6.9. Kao što smo primijetili u Napomeni 6.6.2, ako je H beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor, onda C^*-algebra $\mathrm{K}(H)$ nije unitalna. Lako se provjeri da u tom slučaju mreža projektora $(P_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ iz Propozicije 6.5.7 zadovoljava

$$\lim_{\alpha\in\Lambda} \|P_\alpha T - T\| = \lim_{\alpha\in\Lambda} \|TP_\alpha - T\| = 0,$$

tj. $(P_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ je aproksimativna jedinica u $\mathrm{K}(H)$ (vidjeti Napomenu 5.6.16). Nadalje, ako je $T \in \mathrm{K}(H)$ tada je $T(B_H)$ kompaktan, specijalno separabilan podskup od H (Propozicija 1.8.4). Onda je $\overline{\operatorname{ran} T} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(B_H)}$ separabilan potprostor od H. Ako je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ neka ONB za $\overline{\operatorname{ran} T}$, stavimo $P_n := \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$ (Napomena 6.5.6). Onda analogan argument kao u dokazu implikacije (i) $\implies$ (iii) Teorema 6.6.5 pokazuje da je $\lim_{n\to\infty} \|P_n T - T\| = 0$.

Primjer 6.6.10. Neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB separabilnog Hilbertovog prostora H. Promotrimo dijagonalni operator $T \in \mathrm{B}(H)$ kao u Primjeru 6.3.9. Dakle,

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

za neki niz $(\lambda_n)_n \in \ell^\infty$. Tada je T kompaktan ako i samo ako je $(\lambda_n)_n \in c_0$. Zaista, za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$P_n := \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i \quad \text{i} \quad T_n := T - P_n T.$$

Jer je za proizvoljan $x \in H$

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \cdot \|x\|^2,$$

slijedi $\|T_n\| \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|$. Nadalje, kako je $T_n e_k = \lambda_k e_k$ za sve $k > n$, zaključujemo $\|T_n\| = \sup_{k>n} |\lambda_k|$. Stoga, ako je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, onda je $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$, pa je T kompaktan kao limes operatora konačnog ranga TP_n. Obratno, ako je T kompaktan, onda prema Korolaru 6.6.6 iz $e_n \xrightarrow{w} 0$ slijedi $|\lambda_n| = \|Te_n\| \to 0$.

Osim s teorijskog aspekta, kompaktni operatori igraju važnu ulogu u primjenama. Štoviše, sam začetak teorije kompaktnih operatora došao je iz teorije integralnih jednadžbi. Eksplicitne primjere možemo dobiti na sljedeći način.

Primjer 6.6.11. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ σ-konačan prostor mjere i neka je $k \in L^2(\Omega\times\Omega, \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mu)$. Tvrdimo da je s

$$(Tf)(x) := \int_\Omega k(x,y) f(y)\, d\mu(y), \quad f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

definiran kompaktan operator na $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ i $\|T\| \leq \|k\|_2$. Za funkciju k kažemo da je **jezgra** integralnog operatora T.

Zaista, za $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prema Fubinijevom teoremu i CSB-nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2^2 &= \int_\Omega \left| \int_\Omega k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \\ &\leq \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)|^2\, d\mu(y) \cdot \int_\Omega |f(y)|^2\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \|k\|_2^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $Tf \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ za sve $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $T \in \mathrm{B}(L^2(\Omega, \mathcal{F}\mu))$ i $\|T\| \leq \|k\|_2$.

Neka je $\{e_i : i \in I\}$ ONB za $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Za $i, j \in I$ i $x, y \in \Omega$ definirajmo

$$\phi_{ij}(x,y) := e_j(x)\overline{e_i(y)}$$

Tada se lako provjeri (DZ) da je $\{\phi_{ij} : i, j \in I\}$ ortonormiran skup u $L^2(\Omega\times\Omega, \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mu)$ i da vrijedi

$$\langle k, \phi_{ij}\rangle = \langle Te_j, e_i\rangle \quad \forall i, j \in I. \tag{6.18}$$

Koristeći tu činjenicu imamo

$$\|k\|_2^2 \geq \sum_{i,j\in I} |\langle k, \phi_{ij}\rangle|^2 = \sum_{i,j\in I} |\langle Te_j, e_i\rangle|^2.$$

Kako je $k \in L^2(\Omega\times\Omega, \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}, \mu\otimes\mu)$, prema Propoziciji 6.1.17 postoji najviše prebrojivo mnogo indeksa i i j takvih da je $\langle k, \phi_{ij}\rangle \neq 0$. Označimo pripadni skup takvih funkcija ϕ_{ij} s $\{\psi_{pq} : 1 \leq p, q < \infty\}$. Tada prema (6.18) imamo $\langle Te_j, e_i\rangle = 0$ ako $\phi_{ij} \notin \{\psi_{pq} : 1 \leq p, q < \infty\}$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$P_n := \sum_{p=1}^{n} e_p \otimes e_p$$

(ortogonalni projektor na potprostor $[\{e_1, \ldots, e_n\}]$) i stavimo

$$T_n := TP_n + P_nT - P_nTP_n,$$

tako da je $T_n \in \mathrm{F}(L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu))$. Tvrdimo da vrijedi $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$, odakle će slijediti da je T kompaktan operator (kao limes operatora konačnog ranga).

Zaista, neka je $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\|f\|_2 \leq 1$. Tada je $f = \sum_{j\in I}\langle f, e_j\rangle e_j$. Redom imamo:

$$\begin{aligned}
\|Tf - T_n f\|_2^2 &= \sum_{i\in I} |\langle Tf - T_n f, e_i\rangle|^2 \\
&= \sum_{i\in I} \left| \sum_{j\in I} \langle f, e_j\rangle \cdot \langle (T - T_n)e_j, e_i\rangle \right|^2 \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{\infty} \langle f, e_q\rangle \cdot \langle (T - T_n)e_q, e_p\rangle \right|^2 \\
&\leq \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} |\langle f, e_q\rangle|^2 \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} |\langle (T - T_n)e_q, e_p\rangle|^2 \right) \\
&\leq \|f\|_2^2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} |\langle Te_q, e_p\rangle - \langle TP_n e_q, e_p\rangle - \langle P_n T e_q, e_p\rangle + \langle P_n T P_n e_q, e_p\rangle|^2 \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty} \sum_{q=n+1}^{\infty} |\langle Te_q, e_p\rangle|^2 \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty} \sum_{q=n+1}^{\infty} |\langle k, \psi_{pq}\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Budući da je $\sum_{p,q=1}^{\infty} |\langle k, \psi_{pq}\rangle|^2 < \infty$, za svaki $\varepsilon > 0$ možemo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ zadnja gornja suma bude manja od ε. Dakle, $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$.

Lema 6.6.12. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathrm{K}(H)$. Ako je $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, onda je λ svojstvena vrijednost za T.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\lambda \neq 0$ nije svojstvena vrijednost za T. Dokazat ćemo da je tada operator $\lambda I - T$ invertibilan u $\mathrm{B}(H)$ odakle će naravno slijediti da $\lambda \notin \sigma(T)$. Dokaz provodimo u koracima.

Najprije pokažimo da je operator $\lambda I - T$ ograničen odozdo. Zaista, u suprotnom bi postojao niz vektora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S_H takav da vrijedi

$$\|(\lambda I - T)x_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.19}$$

Jer je T kompaktan, postoji podniz $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ od $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da niz $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira u normi prema nekom vektoru $y \in H$. Kako je

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}((\lambda I - T)x_{n_k} + Tx_{n_k}),$$

za sve $k \in \mathbb{N}$, odavde i iz (6.19) slijedi da $\|x_{n_k} - \frac{y}{\lambda}\| \to 0$. Budući da je $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niz jediničnih vektora u H, imamo $y \neq 0$. Napokon, iz

$$(\lambda I - T)y = \lim_{k\to\infty}(\lambda I - T)(\lambda x_{n_k}) = \lambda \cdot \lim_{k\to\infty}(\lambda I - T)x_{n_k} = 0$$

zaključujemo da je $\lambda \in \sigma_p(T)$, što je kontradikcija.

Tvrdimo da je $\mathrm{ran}(\lambda I - T) = H$. Kako bismo to dokazali, stavimo

$$H_0 := H \qquad \text{i} \qquad H_n := \mathrm{ran}((\lambda I - T)^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budući da je prema prvom dijelu dokaza operator $\lambda I - T$ ograničen odozdo, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz zatvorenih potprostora u H. Također imamo

$$(\lambda I - T)H_n = H_{n+1} \qquad i \qquad H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \cdots.$$

Nadalje, ako je $y \in H_n$ tada je $Ty = ((T - \lambda I)y + \lambda y) \in H_n$, odakle slijedi $T(H_n) \subseteq H_n$. Tvrdimo da se niz $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stabilizira počevši od nekog $n \in \mathbb{N}$, tj. da vrijedi $H_m = H_n$ za sve $m \geq n$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq H_3 \supsetneq \cdots .$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izaberimo jedinični vektor $x_n \in H_n$ takav da je $x_n \perp H_{n+1}$. Tada za sve $m > n$ imamo

$$\begin{aligned} Tx_n - Tx_m &= (T - \lambda I)x_n + \lambda x_n - Tx_m = \lambda x_n + [(T - \lambda I)x_n - Tx_m] \\ &= \lambda x_n + z, \end{aligned}$$

gdje je $z := [(T - \lambda I)x_n - Tx_m]$. Kako je $Tx_m \in H_m \subseteq H_{n+1}$ (jer je $m > n$), slijedi $z \in H_{n+1}$. Stoga je

$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = |\lambda|^2 + \|z\|^2 \geq |\lambda|^2 > 0.$$

Odavde zaključijemo da niz $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nema Cauchyjev podniz, što je kontradikcija jer je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, a operator T kompaktan. Dakle, niz potprostora $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se eventualno stabilizira i neka je k najmanji nenegativan cijeli broj takav da je $H_k = H_{k+1}$. Možemo pretpostaviti da je $k \neq 0$ i izaberimo vektor $x \in H_{k-1} \setminus H_k$. Tada je $(\lambda I - T)x \in H_k = H_{k+1}$, pa postoji vektor $y \in H$ takav da je

$$(\lambda I - T)x = (\lambda I - T)^{k+1}y = (\lambda I - T)z,$$

gdje je $z := (\lambda I - T)^k y \in H_k$. Budući da $x \notin H_k$, imamo $x - z \neq 0$, pa iz

$$(\lambda I - T)(x - z) = 0$$

slijedi $\lambda \in \sigma_p(T)$. Ova kontradikcija pokazuje da je $k = 0$, odnosno $\operatorname{ran}(\lambda I - T) = H_1 = H_0 = H$.

Sve zajedno, $\lambda I - T$ je surjektivan operator koji je ograničen odozdo, pa je prema Propoziciji 6.2.15 $\lambda I - T$ je invertibilan u $\mathrm{B}(H)$. □

Teorem 6.6.13. *Neka je H beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor i neka je $T \in \mathrm{K}(H)$. Tada vrijedi:*

(i) $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

(ii) Za sve $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ *je pripadni svojstveni potprostor* $\ker(\lambda I - T)$ *konačnodimenzionalan.*

(iii) $\sigma_p(T)$ *(pa onda i* $\sigma(T)$*) je konačan ili prebrojiv skup, a 0 mu je jedino moguće gomilište.*

Dokaz. (i). Budući da je H beskonačnodimenzionalan, $\mathrm{K}(H)$ je netrivijalni ideal u $\mathrm{B}(H)$, tako da je T neinvertibilan, odnosno $0 \in \sigma(T)$. Stoga tvrdnja slijedi direktno iz Leme 6.6.12.

(ii). Neka je $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Ako bi $\ker(\lambda I - T)$ bio beskonačnodimenzionalan, tada bismo mogli naći (beskonačan) ortonormiran niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\ker(\lambda I - T)$. Onda bi za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedilo

$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = \|\lambda x_n - \lambda x_m\|^2 = 2|\lambda|^2,$$

što je kontradikcija, jer je T kompaktan.

(iii). Tvrdimo da je skup $\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ konačan za sve $\varepsilon > 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i niz međusobno različitih svojstvenih vrijednosti $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ od T takav da je $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka x_n pripadni svojstveni vektor od λ_n i stavimo

$$H_n := [\{x_1, \ldots, x_n\}].$$

Tada je očito $\dim H_n = n$, pa je

$$H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq H_3 \subsetneq H_4 \subsetneq \cdots .$$

Nadalje, imamo $TH_n \subseteq H_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $(\lambda_n I - T)H_n \subseteq H_{n-1}$ za sve $n \geq 2$. Naime, za $x \in H_n$ i $n \geq 2$ imamo $x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$ (za neke $\mu_i \in \mathbb{C}$), odakle slijedi da je

$$(\lambda_n I - T)x = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(\lambda_i - \lambda_n)x_n \in H_{n-1}.$$

Neka je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S_H takav da je $y_n \in H_n$ i $y_n \perp H_{n-1}$. Tada za sve $n > m$ imamo

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - [(\lambda_n I - T)y_n + Ty_m].$$

Kako je $(\lambda_n I - T)y_n \in H_{n-1}$ i $Ty_m \in H_m \subseteq H_{n-1}$, slijedi $(\lambda_n I - T)y_n + Ty_m \in H_{n-1}$. Napokon, budući da je $y_n \perp H_{n-1}$, slijedi

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda_n| > \varepsilon,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je T kompaktan. $\square$

U literaturi se često susreće sljedeća varijanta tvrdnji (i) i (ii) Teorema 6.6.13:

Korolar 6.6.14 (Fredholmova[9] alternativa). *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathrm{K}(H)$. Tada za svaki skalar $\mu \in \mathbb{C}$ ili jednadžba $(I - \mu T)x = y$ ima jedinstveno rješenje za svaki $y \in H$ ili pripadna homogena jednadžba $(I - \mu T)x = 0$ ima konačno mnogo linearno nezavisnih rješenja.*

Napomena 6.6.15. E. I. Fredholm je formulirao prethodni rezultat za specifičan integralni operator

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

na $L^2([a,b])$ (vidjeti Primjer 6.6.11). Štoviše, rekao je: *Ili integralna jednadžba*

$$f(x) - \mu \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy = g(x)$$

ima jedinstveno rješenje ili pripadna homogena jednadžba

$$f(x) - \mu \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy = 0$$

ima konačno mnogo linearno nezavisnih rješenja.

U nastavku ćemo opisati normalne kompaktne operatore. Prisjetimo se da smo u Primjeru 6.6.10 već opisali kompaktne dijagonalne operatore. Pokazat ćemo da je takav oblik zapravo tipičan, tj. da se svaki normalan kompaktan operator može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Ako je bazni prostor H konačnodimenzinalan, tada nam je taj rezultat poznat iz elementarne linearne algebre (dijagonalizacija normalnog operatora/normalne matrice).

Teorem 6.6.16 (Spektralni teorem za normalan kompaktan operator). *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathrm{K}(H)$ normalan kompaktan operator. Ako je $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo s $K_n := \ker(\lambda_n I - T)$ svojstveni potprostor od λ_n i s P_n ortogonalni projektor na K_n. Tada vrijedi*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \qquad \textit{(konvergencija u operatorskoj normi).}$$

Napomena 6.6.17. Prisjetimo da za proizvoljan normalan operator $T \in \mathrm{B}(H)$ vrijedi $\ker T^* = \ker T$ tako da je

$$K := \overline{\operatorname{ran} T} = \overline{\operatorname{ran} T^*} \quad \text{i} \quad H = \ker T \oplus K$$

(vidjeti Napomenu 6.2.13). Nadalje, prema Napomeni 6.6.9 prostor K je separabilan i reducira T. Stoga, prelaskom na restrikciju $T|_K : K \to K$ (što je injektivan normalan kompaktan operator na separabilnom Hilbertovom prostoru K), Teorem 6.6.16 je dovoljno dokazati uz pretpostavku da je H separabilan i T injektivan.

[9] Erik Ivar Fredholm (1866.–1927.), švedski matematičar

Također, u dokazu Teorema 6.6.16, ćemo koristiti sljedeću notaciju. Ako je $\{K_i : i \in I\}$ familija međusobno ortgonalnih zatvorenih potprostora od H, onda ćemo s $\bigoplus_{i\in I} K_i$ označavati najmanji zatvoren potprostor od H koji sadrži uniju $\bigcup_{i\in I} K_i$.

Dokaz Teorema 6.6.16. Prema Napomeni 6.6.17 dovoljno je dokazati tvrdnju uz pretpostavku da je H separabilan i T injektivan. Onda $0 \notin \sigma_p(T)$, tako da je $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Prema Propoziciji 6.3.7 svojstveni potprostori K_n od T su međusobno ortogonalni. Tvrdimo da vrijedi

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_n = H. \tag{6.20}$$

Pretpostavimo suprotno. Onda za $K := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_n$ vrijedi $K^\perp \neq \{0\}$. Jer je operator T normalan, prema Propoziciji 6.3.7 je $K_n = \ker(\lambda_n I - T) = \ker(\overline{\lambda}_n I - T^*)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tako da je K invarijantan za T i T^*. Dakle, prema Propoziciji 6.4.4, K reducira T. Jer je T injektivan i $K^\perp \neq \{0\}$, očito je restrikcija $T|_{K^\perp} : K^\perp \to K^\perp$ također injektivan normalan i kompaktan operator. Posebno $T_{K^\perp} \neq 0$, pa je prema Propoziciji 6.3.7 $r(T|_{K^\perp}) = \|T|_{K^\perp}\| \neq 0$. Dakle, postoji $\lambda_0 \in \sigma(T|_{K^\perp}) \setminus \{0\}$. Jer je $T|_{K^\perp} \in \mathrm{K}(K^\perp)$, iz Leme 6.6.12 slijedi da je $\lambda_0 \in \sigma_p(T|_{K^\perp})$, pa onda i $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. No to je nemoguće, jer bi to značilo da je pripadni svojstveni potprostor sadržan u $K \cap K^\perp = \{0\}$.

Nadalje, možemo pretpostaviti da vrijedi

$$|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.21}$$

Prema Teoremu 6.6.13 svi potprostori K_n su konačnodimenzionalni, a zbog dekompozicije (6.20) je unija njihovih ONB je ONB za H. Stavimo $m_0 := 0$ i $m_n := \sum_{k=1}^n \dim K_k$ za $n \in \mathbb{N}$ (tako da je $m_n - m_{n-1} = \dim K_n$). Ako je $\{e_{m_{n-1}+1}, \ldots, e_{m_n}\}$ ONB za K_n, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za H. Za svaki $x \in H$ imamo $x = \sum_{j=1}^\infty \langle x, e_j\rangle e_j$ i $P_k x = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \langle x, e_j\rangle e_j$, tako da je $\lim_{n\to\infty} \left\|x - \sum_{j=1}^n P_j x\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=m_n+1}^\infty |\langle x, e_j\rangle|^2 = 0$, odnosno

$$\sum_{j=1}^\infty P_j x = x \quad \forall x \in H.$$

Fiskirajmo $x \in H$ i $n \in \mathbb{N}$. Zbog neprekidnosti operatora T imamo $Tx = \sum_{j=1}^\infty TP_j x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j P_j x$, pa je zbog (6.21) i Besselove nejednakosti

$$\begin{aligned} \left\|\left(T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j\right) x\right\|^2 &= \left\|\sum_{j=n+1}^\infty \lambda_j P_j x\right\|^2 = \sum_{j=n+1}^\infty |\lambda_j|^2 \|P_j x\|^2 \leq |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j=n+1}^\infty \|P_j x\|^2 \\ &\leq |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Dakle, $\|T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j\| \leq |\lambda_{n+1}|$. Napokon, jer je T kompaktan i $e_n \xrightarrow{w} 0$, slijedi $|\lambda_n| = \|Te_{m_n}\| \to 0$. □

Ako je H separabilan Hilbertov prostor, onda je i $\ker T$ separabilan prostor, pa kao direktnu posljedicu Teorema 6.6.16 te Primjera 6.3.9 i 6.6.10 dobivamo:

Korolar 6.6.18. *Neka je H separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. Kompaktan operator $T \in \mathrm{K}(H)$ je normalan ako i samo ako je dijagonalizabilan i u tom slučaju postoji ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H i niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ tako da vijedi*

$$T = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n e_n \otimes e_n \qquad \textit{(konvergencija u operatorskoj normi).}$$

6.7 Fredholmovi operatori

Tokom čitavog ovog odjeljka H će biti *separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor*.

U tom slučaju je, prema Napomeni 6.6.8, $\mathrm{K}(H)$ jedini pravi zatvoreni ideal u $\mathrm{B}(H)$, pa je prema Napomeni 5.6.16 kvocijent $\mathrm{B}(H)/\mathrm{K}(H)$ (prosta) C^*-algebra uz kvocijentnu normu.

Definicija 6.7.1. C^*-algebra $\mathrm{B}(H)/\mathrm{K}(H)$ zove se **Calkinova**[10] **algebra** i označavamo ju s $\mathrm{C}(H)$.

Napomena 6.7.2. Ako su $S, T \in \mathrm{B}(H)$ dva ograničena operatora takvi da je $S - T$ kompaktan operator, onda kažemo da je S **kompaktna perturbacija** od T (kao i obratno). To znači da S i T imaju jednake slike u Calkinovoj algebri. Takva "lokalna" perturbacija javlja se često u primjenama i svojstva koja su invarijantna na kompaktne perturbacije obično su vrlo cijenjena.

Jedno od takvih svojstava je indeks Fredholmovog operatora o kojemu će biti riječ u ovom odjeljku.

Propozicija 6.7.3. *Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ su sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

(i) T ima zatvorenu sliku.

(ii) Postoji operator $S \in \mathrm{B}(H)$ takav da su ST i TS projektori redom na $(\ker T)^\perp$ i $\operatorname{ran} T$.

(iii) Postoji operator $S \in \mathrm{B}(H)$ takav da je $TST = T$.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii). Pretpostavimo da je slika $\operatorname{ran} T$ zatvorena. Tada restrikcija $T|_{(\ker T)^\perp}$ definira bijektivni ograničen operator s $(\ker T)^\perp$ na $\operatorname{ran} T$, pa je prema Banachovom teoremu o izomorfizmu inverz $S_0 := (T|_{(\ker T)^\perp})^{-1} : \operatorname{ran} T \to (\ker T)^\perp$ ograničen. Proširimo S_0 do operatora S na čitav H tako da stavimo $S|_{(\operatorname{ran} T)^\perp} := 0$. Onda je $S \in \mathrm{B}(H)$, ST je projektor na $(\ker T)^\perp$ i TS je projektor na $\operatorname{ran} T$.

(ii) $\implies$ (iii). Ovo je trivijalno, jer ako je $S \in \mathrm{B}(H)$ operator takav da je TS projektor na $\operatorname{ran} T$, tada je $TST = T$.

(iii) $\implies$ (i). Neka je $S \in \mathrm{B}(H)$ takav da je $TST = T$. Stavimo $Q := TS$. Tada je $Q^2 = TSTS = TS = Q$. Dakle, Q je idempotent u $\mathrm{B}(H)$ i očito je $\operatorname{ran} Q = \operatorname{ran}(TS) \subseteq \operatorname{ran} T$. Dokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $y \in \operatorname{ran} T$ i izaberimo vektor $x \in H$ takav da je $y = Tx$. Tada je $y = Tx = TSTx = QTx \in \operatorname{ran} Q$. Dakle, $\operatorname{ran} Q = \operatorname{ran} T$, a kako je $\operatorname{ran} Q = \ker(I - Q)$, slika od Q (pa onda i od T) je zatvorena. $\square$

Napomena 6.7.4. Za element x prstena $\mathcal{R}$ kažemo da je **von Neumann regularan** ako postoji element $y \in \mathcal{R}$ takav da vrijedi $x = xyx$. U tom slučaju za y kažemo da je **pseudoinverz** od x. Element y općenito nije jedinstveno određen s x. Ako je svaki element $x \in \mathcal{R}$ von Neumann regularan, tada kažemo da je $\mathcal{R}$ **von Neumann regularan prsten**. U slučaju $\mathcal{R} = \mathrm{B}(H)$, Propozicija 6.7.3 kaže da je operator $T \in \mathrm{B}(H)$ von Neumann regularan ako i samo ako T ima zatvorenu sliku. Posebno $\mathrm{B}(H)$ je von Neumann regularan ako i samo ako je $\dim H < \aleph_0$.

Teorem 6.7.5 (Atkinsonov[11] **teorem).** *Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ su sljedeći uvjeti međusobno ekvivalentni:*

(i) Postoji $S \in \mathrm{B}(H)$ takav da su oba operatora $I - ST$ i $I - TS$ konačnog ranga.

(ii) Postoji $S \in \mathrm{B}(H)$ takav da su oba operatora $I - ST$ i $I - TS$ kompaktna.

(iii) Slika od T po kvocijentnom preslikavanju $\mathrm{B}(H) \to \mathrm{C}(H)$ je invertibilan element u Calkinovoj algebri.

(iv) Slika od T je zatvorena i oba potprostora $\ker T$ i $\ker T^*$ su konačnodimenzionalna.

[10] John Williams Calkin (1909.–1964.), američki matematičar
[11] Frederick Valentine Atkinson (1916.–2002.), britanski matematičar

Dokaz. Implikacija (i) $\Longrightarrow$ (ii) kao i ekvivalencija (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) je očita.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) Pretpostavimo da je jezgra $\ker T$ beskonačnodimenzionalna i neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u $\ker T$. Tada za $K := ST - I \in \mathrm{K}(H)$ imamo $Ke_n = -e_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Budući da $e_n \xrightarrow{w} 0$ (Besselova nejednakost), iz Teorema 6.6.5 (iii) slijedi $1 = \|-e_n\| = \|Ke_n\| \to 0$, što je kontradikcija. Dakle, $\dim\ker T < \infty$. Također, iz $TS - I \in \mathrm{K}(H)$ dobivamo i $S^*T^* - I \in \mathrm{K}(H)$ (Korolar 6.6.7), pa isti dokaz pokazuje da je i $\dim\ker T^* < \infty$.

Ostaje dokazati da je slika od T zatvorena. Neka je $K = ST - I$ kao prije i izaberimo $F \in \mathrm{F}(H)$ takav da je $\|K - F\| < 1/2$ (Teorem 6.6.5). Tada za svaki vektor $x \in \ker F$ imamo

$$\begin{aligned}\|S\|\|Tx\| &\geq \|STx\| = \|(I+K)x\| \geq \|x\| - \|Kx\| \\ &\geq \frac{1}{2}\|x\|.\end{aligned}$$

Dakle, restrikcija $T|_{\ker F}$ je ograničena odozdo, pa je njena slika $H_1 := T(\ker F)$ zatvorena. S druge strane, jer je $F^* \in \mathrm{F}(H)$ i $(\ker F)^\perp = \overline{\operatorname{ran} F^*} = \operatorname{ran} F^*$ (Napomena 6.2.12), prostor $H_2 := T((\ker F)^\perp)$ je konačnodimenzionalan. Stoga je prema Propoziciji 1.7.9 $\operatorname{ran} T = H_1 + H_2 =$ zatvoren potprostor od H.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Jer je $\operatorname{ran} T$ zatvorena, prema Propoziciji 6.7.3 postoji operator $S \in \mathrm{B}(H)$ takav da su ST i TS projektori redom na $(\ker T)^\perp$ i $\operatorname{ran} T$. Tada su $I - ST$ i $I - TS$ redom projektori na $\ker T$ i $\ker T^*$. Oba ta potprostora su konačnodimenzionalna prema pretpostavci, pa imamo $I - ST, I - TS \in \mathrm{F}(H)$. □

Definicija 6.7.6. Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ koji zadovoljava uvjete Atkinsonovog teorema kažemo da je **Fredholmov operator**. Skup svih Fredholmovih operatora na H označavamo s $\mathrm{Fr}(H)$.

Nadalje, za svaki $T \in \mathrm{Fr}(H)$ definiramo **indeks** od T s

$$\operatorname{index} T := \dim\ker T - \dim\ker T^*.$$

Napomena 6.7.7. Neka je $T \in \mathrm{Fr}(H)$ i izaberimo operator $S \in \mathrm{B}(H)$ takav da su ST i TS projektori redom na $(\ker T)^\perp$ i $\operatorname{ran} T$. Stavimo $P := I - ST$ i $Q := I - TS$. Tada su P i Q projektori redom na $\ker T$ i $(\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T^*$, pa je

$$\operatorname{index} T = \mathrm{r}(P) - \mathrm{r}(Q). \tag{6.22}$$

Primijetimo da iz uvjeta (iii) Atkinsonovog teorema slijedi da je skup $\mathrm{Fr}(H)$ zatvoren s obzirom na operaciju množenja operatora. Posebno, za svaki Fredholmov operator $T \in \mathrm{Fr}(H)$ i invertibilni operator $R \in \mathrm{B}(H)$ imamo $RT, TR \in \mathrm{Fr}(H)$. U tom slučaju je

$$\operatorname{index}(RT) = \operatorname{index}(TR) = \operatorname{index}(T)$$

jer je T bijekcija. Također je jasno da je $\mathrm{Fr}(H)$ samoadjungiran podskup od $\mathrm{B}(H)$ te da vrijedi

$$\operatorname{index} T^* = -\operatorname{index} T \qquad \forall T \in \mathrm{Fr}(H).$$

Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$\mathrm{Fr}_n(H) := \{T \in \mathrm{Fr}(H) : \operatorname{index} T = n\}.$$

Očito skup $\mathrm{Fr}_0(H)$ sadrži sve invertibilne operatore. Sljedeći primjer pokazuje da su svi skupovi $\mathrm{Fr}_n(H)$ neprazni.

Primjer 6.7.8. Neka je $S \in \mathrm{B}(H)$ unilateralni šift s obzirom na neku ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H. Onda je $\ker S = \{0\}$ i $\ker S^* = \mathbb{C}e_1$ tako da je $S \in \mathrm{Fr}(H)$ i $\operatorname{index} S = -1$. Nadalje, za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo $\ker S^n = \{0\}$ i $\ker(S^*)^n = [\{e_1, \ldots, e_n\}]$, tako da je $\operatorname{index} S^n = -n$. Stoga je $\operatorname{index}(S^*)^n = n$.

Lema 6.7.9. *Ako je $F \in \mathrm{F}(H)$, tada je $I + F \in \mathrm{Fr}_0(H)$.*

Dokaz. Očito je $T := I + F \in \mathrm{Fr}(H)$. Neka je S pseudoinverz od T kao u Napomeni 6.7.7 i neka su $P = I - ST$, $Q = I - TS$ pripadni projektori konačnog ranga. Tada je $P - Q = ST - TS = FS - SF$. Označimo s R ortogonalni projektor na konačnodimenzionalni potprostor $K := \operatorname{ran} P + \operatorname{ran} Q + \operatorname{ran} F + \operatorname{ran} F^*$. Tada je R jedinica za operatore P, Q i F, pa i operator $S_1 := RSR$ zadovoljava

$$P - Q = FS_1 - S_1F.$$

Primijetimo da je to zapravo jednakost operatora u $\mathrm{B}(K)$. Ako je tr trag na $\mathrm{B}(K)$ (koji postoji jer je $\dim K < \aleph_0$), imamo

$$\mathrm{r}(P) - \mathrm{r}(Q) = \operatorname{tr}(P - Q) = \operatorname{tr}(FS_1 - S_1F) = 0.$$

Iz 6.22 zaključujemo da je $\operatorname{index} T = 0$, odnosno $T \in \mathrm{Fr}_0(H)$. □

Propozicija 6.7.10. *Za svaki $T \in \mathrm{Fr}_0(H)$ postoji parcijalna izometrija $V \in \mathrm{F}(H)$ takva da je operator $T + V$ invertibilan. Nadalje, ako je $K \in \mathrm{K}(H)$, tada je $T + K \in \mathrm{Fr}_0(H)$.*

Dokaz. Kako je $\operatorname{index} T = 0$ ako i samo ako je $\dim \ker T = \dim \ker T^*$, možemo naći parcijalnu izometriju $V \in \mathrm{F}(H)$ s inicijalnim prostorom $\ker T$ i finalnim prostorom $\ker T^*$ (vidjeti Propoziciju 6.4.8). Primijetimo da je operator $T + V$ injektivan. Zaista, ako je $x \in \ker(T + V)$, tada je

$$Tx = -Vx \in \operatorname{ran} T \cap \ker T^* = \{0\}.$$

Dakle, $Tx = 0$, pa je $x \in \ker T \cap \ker V = \ker T \cap (\ker T)^\perp = \{0\}$, odnosno $x = 0$. Nadalje, iz

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}(T + V) &= (T + V)(H) = (T + V)((\ker T)^\perp \oplus \ker T) = \operatorname{ran} T \oplus \ker T^* \\ &= H,\end{aligned}$$

zaključujemo da je $T + V$ surjekcija. Prema Banachovom teoremu o izomorfizmu, operator $T + V$ je invertibilan u $\mathrm{B}(H)$.

Neka je sada $K \in \mathrm{K}(H)$ i izaberimo operator $F \in \mathrm{F}(H)$ takav da je $\|K - F\| < \|(T + V)^{-1}\|^{-1}$ (Teorem 6.6.5). Stavimo

$$S := T + V + K - F = (T + V)(I + (T + V)^{-1}(K - F)).$$

Budući da je $\|(T+V)^{-1}(K-F)\| < 1$, operator $I+(T+V)^{-1}(K-F)$ je invertibilan u $\mathrm{B}(H)$ (Propozicija 5.2.16). Tada je i operator S invertibilan u $\mathrm{B}(H)$, pa imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{index}(T + K) &= \operatorname{index}(S + F - V) = \operatorname{index}(S(I + S^{-1}(F - V))) \\ &= \operatorname{index}(I + S^{-1}(F - V)) = 0,\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz Leme 6.7.9, jer je $S^{-1}(F - V) \in \mathrm{F}(H)$. □

Korolar 6.7.11. *Fredholmov operator $T \in \mathrm{Fr}(H)$ je indeksa 0 ako i samo ako je T kompaktna perturbacija invertibilnog operatora.*

Teorem 6.7.12. *Indeks Fredholmovog operatora je invarijantan s obzirom na kompaktnu perturbaciju. Drugim riječima, za svaki Fredholmov operator $T \in \mathrm{Fr}(H)$ i svaki kompaktan operator $K \in \mathrm{K}(H)$ vrijedi*

$$\operatorname{index}(T + K) = \operatorname{index} T.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n := \operatorname{index} T > 0$. Naime, slučaj kada je $n = 0$ je riješen u Propoziciji 6.7.10, dok slučaj kada je $n < 0$ možemo izvesti iz pozitivnog slučaja promatrajući operator T^*.

Promotrimo Hilbertov prostor $H \oplus_2 \ell^2$ (Primjer 6.1.4). Ako je $S \in \mathrm{B}(\ell^2)$ označimo s $T \oplus S \in \mathrm{B}(H \oplus_2 \ell^2)$ operator definiran s

$$(S \oplus T)(x, y) := (Sx, Ty), \quad x \in H,\ y \in \ell^2.$$

Ako je $S \in \mathrm{Fr}(\ell^2)$, tada je evidentno $T \oplus S \in \mathrm{Fr}(H \oplus_2 \ell^2)$ i vrijedi

$$\operatorname{index}(T \oplus S) = \operatorname{index} T + \operatorname{index} S, \tag{6.23}$$

gdje su indeksi računati redom u $\mathrm{B}(H \oplus_2 \ell^2)$, $\mathrm{B}(H)$ i $\mathrm{B}(\ell^2)$. Sada uzmimo da je S unilateralni šift. Tada iz Primjera 6.7.8 i jednakosti (6.23) zaključujemo $T \oplus S^n \in \mathrm{Fr}_0(H \oplus_2 \ell^2)$. Nadalje, za svaki $K \in \mathrm{K}(H)$ je $K \oplus 0 \in \mathrm{K}(H \oplus_2 \ell^2)$ pa je prema Propoziciji 6.7.10

$$(T + K) \oplus S^n = T \oplus S^n + K \oplus 0 \in \mathrm{Fr}_0(H \oplus_2 \ell^2).$$

Dakle, $T + K \in \mathrm{Fr}_n(H)$, kao što je i trebalo pokazati. □

Teorem 6.7.13. *Svaka Fredholmova klasa* $\mathrm{Fr}_n(H)$, $n \in \mathbb{Z}$, *je otvorena u operatorskoj normi. Posebno, preslikavanje* $\mathrm{index} : \mathrm{Fr}(H) \to \mathbb{Z}$ *je neprekidno. Nadalje, vrijedi*

$$\mathrm{index}(T_1T_2) = \mathrm{index}\, T_1 + \mathrm{index}\, T_2 \tag{6.24}$$

za sve $T_1, T_2 \in \mathrm{Fr}(H)$.

Dokaz. Najprije dokažimo da je klasa $\mathrm{Fr}_0(H)$ otvorena u $\mathrm{B}(H)$. Pretpostavimo stoga da je $T \in \mathrm{Fr}_0(H)$ i neka je $(T_n)_n$ niz u $\mathrm{B}(H)$ takav da vrijedi $\|T_n - T\| \to 0$. Prema Propoziciji 6.7.10 postoji parcijalna izometrija $V \in \mathrm{F}(H)$ takva da je operator $T + V$ invertibilan u $\mathrm{B}(H)$. Jer je prema Propoziciji 5.2.16 skup invertibilnih elemenata u $\mathrm{B}(H)$ otvoren, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da su operatori $T_n + V$ invertibilni za sve $n \geq n_0$. Dakle,

$$\mathrm{index}\, T_n = \mathrm{index}(T_n + V) = 0,$$

za sve $n \geq n_0$. Time smo dokazali otvorenost skupa $\mathrm{Fr}_0(H)$.

Pretpostavimo sada da je $n > 0$ i neka je $T \in \mathrm{Fr}_n(H)$. Tada je prema dokazu Teorema 6.7.12 $T \oplus S^n \in F_0(H \oplus_2 \ell^2)$, gdje je S unilateralni šift na ℓ^2. Iz prvog dijela dokaza znamo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $W \in \mathrm{Fr}_0(H \oplus_2 \ell^2)$, čim je $W \in \mathrm{B}(H \oplus_2 \ell^2)$ takav da je $\|T \oplus S^n - W\| < \varepsilon$. Posebno, ako je $R \in \mathrm{B}(H)$ takav da je $\|T - R\| < \varepsilon$, tada je i $\|T \oplus S^n - R \oplus S^n\| < \varepsilon$, pa zaključujemo da je $R \oplus S^n \in \mathrm{Fr}_0(H \oplus_2 \ell^2)$. Odavde slijedi da je $R \in \mathrm{Fr}_n(H)$. Time je dokazana i otvorenost klase $\mathrm{Fr}_n(H)$ za pozitivne n. Negativni slučaj dobivamo iz pozitivnog primjenom involucije koja je izometrija s $\mathrm{Fr}_{-n}(H)$ na $\mathrm{Fr}_n(H)$.

Preostalo nam je dokazati jednakost (6.24). Neka su $T_1 \in \mathrm{Fr}_n(H)$ i $T_2 \in \mathrm{Fr}_m(H)$. Uzmimo najprije da je $m = 0$. Tada prema Propoziciji 6.7.10 postoji parcijalna izometrija $V \in \mathrm{F}(H)$ takva da je operator $T_2 + V$ invertibilan u $\mathrm{B}(H)$. Budući da je $T_1V \in \mathrm{F}(H)$, prema Teoremu 6.7.12 imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{index}\, T_1 &= \mathrm{index}(T_1(T_2 + V)) = \mathrm{index}(T_1T_2 + T_1V) \\ &= \mathrm{index}(T_1T_2). \end{aligned}$$

Sada pretpostavimo da je $m > 0$. Tada je $T_2 \oplus S^m \in \mathrm{Fr}_0(H \oplus_2 \ell^2)$ (gdje je, kao i prije, S unilateralni šift na ℓ^2), pa prema prethodnom rezultatu i (6.23) imamo

$$\begin{aligned} n &= \mathrm{index}((T_1 \oplus I_{\ell^2})(T_2 \oplus S^m)) = \mathrm{index}(T_1T_2 \oplus S^m) = \mathrm{index}(T_1T_2) + \mathrm{index}(S^m) \\ &= \mathrm{index}(T_1T_2) - m. \end{aligned}$$

Dakle $\mathrm{index}(T_1T_2) = n+m = \mathrm{index}(T_1)+\mathrm{index}(T_2)$, kada je $m > 0$. Negativni slučaj dobivamo analogno, promatrajući operator $T_2 \oplus (S^*)^m$. □

Korolar 6.7.14. *Ako je* T *Fredholmov operator na* H*, tada je i svaki pseudoinverz* S *od* T *Fredholmov operator te vrijedi*

$$\mathrm{index}\, S = -\,\mathrm{index}\, T.$$

Dokaz. Neka je $Q : \mathrm{B}(H) \to \mathrm{C}(H)$ kvocijentni operator. Iz $TST = T$ slijedi $Q(T)Q(S)Q(T) = Q(T)$. Kako je element $Q(T)$ ivertibilan u $\mathrm{C}(H)$ (Teorem 6.7.5), slijedi $Q(T)Q(S) = Q(S)Q(T) = 1_{\mathrm{C}(H)}$. Dakle, $Q(S)$ je također invertibilan u $\mathrm{C}(H)$, pa je $S \in \mathrm{Fr}(H)$. Nadalje, iz jednakosti $TST = T$ i formule (6.24) dobivamo

$$\mathrm{index}(T) = \mathrm{index}(TST) = \mathrm{index}(T) + \mathrm{index}(S) + \mathrm{index}(T),$$

odnosno $\mathrm{index}(S) = -\,\mathrm{index}(T)$. □

6.8 Hilbert-Schmidtovi i nuklearni operatori

Posebno istaknute klase kompaktnih operatora na Hilbertovim prostorima čine tzv. Hilbert-Schmidtovi i nuklearni operatori o kojima će biti riječ u ovom odjeljku.

Radi jednostavnosti notacije, tokom čitavog ovog odjeljka H će biti *separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor.*

Propozicija 6.8.1. *Neka su $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ dvije ONB za H. Tada za svaki operator $T \in \mathrm{B}(H)$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* f_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_m\rangle|^2.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz Parsevalove jednakosti, budući da imamo $\|Te_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_m\rangle|^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$, kao i $\|T^* f_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^* f_m, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_m\rangle|^2$ za sve $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Za proizvoljan operator $T \in \mathrm{B}(H)$ i ONB $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H definiramo

$$\|T\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in [0, +\infty].$$

Prema Propoziciji 6.8.1 broj $\|T\|_2$ ne ovisi o izboru ONB E za H.

Definicija 6.8.2. Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ kažemo da je T **Hilbert-Schmidtov operator** ako je $\|T\|_2 < \infty$. Skup svih Hilbert-Schmidtovih operatora na H označavamo s $\mathrm{B}_2(H)$.

Primjer 6.8.3. (a) Fiksirajmo ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H i niz $(\lambda_n)_n \in \ell^\infty$. Promotrimo dijagonalni operator $T \in \mathrm{B}(H)$ iz Primjera 6.3.9, tj.

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H.$$

Jer je $\|Te_n\|^2 = |\lambda_n|^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je T Hilbert-Schmidtov operator ako i samo ako je $(\lambda_n)_n \in \ell^2$.

(b) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere, pri čemu μ σ-konačna mjera i σ-algebra $\mathcal{F}$ je prebrojivo generirana, što znači da postoji prebrojiva podfamilija C od $\mathcal{F}$ takva da je $\mathcal{F} = \sigma(C)$ (takva je npr. Borelova σ-algebra $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$, gdje je Ω topološki prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti). U tom slučaju se može dokazati da je prostor $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ separabilan za sve $1 \le p < \infty$ (vidjeti npr. [8]). Nadalje, ako je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, onda nije teško vidjeti (DZ) da je familija

$$\{\phi_{mn} := \overline{e_m} e_n : m, n \in \mathbb{N}\}$$

iz Primjera 6.6.11 ONB za $L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \mu)$ (bez tih dodatnih pretpostavki na $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je ta familija općenito samo ortnormirana).

Nadalje, kao što smo vidjeli u Primjeru 6.6.11, za $k \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \mu)$ integralni operator

$$(Tf)(y) := \int_\Omega k(x, y) f(y)\, d\mu(y), \quad f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

definira kompaktan operator na $L^2(\Omega, \mathcal{F}\mu)$ i vrijedi $\|T\| \le \|k\|_2$. Štoviše, T je Hilbert-Schmidtov operator na $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ i vrijedi $\|T\|_2 = \|k\|_2$. Zaista, koristeći identitet (6.18) (tj. $\langle k, \phi_{mn}\rangle = \langle Te_n, e_m\rangle$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$) imamo

$$\begin{aligned} \|T\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle k, \phi_{mn}\rangle|^2 \\ &= \|k\|_2^2. \end{aligned}$$

Osnovna svojstva Hilbert-Schmidtovih operatora dana su sljedećim teoremom:

Teorem 6.8.4. *(i) Ako je $T \in \mathrm{B}_2(H)$ tada je i $T^* \in \mathrm{B}_2(H)$ te vrijedi $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$.*

(ii) $\|T\| \leq \|T\|_2$ za sve $T \in \mathrm{B}_2(H)$.

(iii) Ako je $S \in \mathrm{B}(H)$ i $T \in \mathrm{B}_2(H)$, tada su $TS, ST \in \mathrm{B}_2(H)$ i vrijedi $\max\{\|TS\|_2, \|ST\|_2\} \leq \|S\|\|T\|_2$.

(iv) $\mathrm{B}_2(H)$ je (obostrani) samoadjungirani ideal u $\mathrm{B}(H)$ i $\|\cdot\|_2$ definira normu na $\mathrm{B}_2(H)$ s obzirom na koju je $\mathrm{B}_2(H)$ Banachova $*$-algebra.

(v) $\mathrm{F}(H)$ je u normi $\|\cdot\|_2$ gust podskup od $\mathrm{B}_2(H)$. Posebno, svaki Hilbert-Schmidtov operator je kompaktan, tj. $\mathrm{B}_2(H) \subseteq \mathrm{K}(H)$.

(vi) Norma $\|\cdot\|_2$ na $\mathrm{B}_2(H)$ pridružena je skalarnom produktu

$$\langle T_1, T_2\rangle_{HS} := \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_1 e_n, T_2 e_n\rangle, \quad T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H),$$

gdje je $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ neka ONB za H. Pritom gornji red konvergira apsolutno i suma mu ne ovisi o izboru ONB E. Posebno, $(\mathrm{B}_2(H), \langle\cdot,\cdot\rangle_{HS})$ je Hilbertov prostor.

Dokaz. (i). Neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za H. Prema Propoziciji 6.8.1 imamo

$$\|T^*\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T e_n\|^2 = \|T\|_2^2,$$

odakle slijedi da je $T^* \in \mathrm{B}_2(H)$ i $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$.

(ii). Fiksirajmo jedinični vektor $x \in H$ i izaberimo ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H koja sadrži vektor x. Tada je $\|T\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \geq \|Tx\|^2$. Kako je jedinični vektor $x \in H$ bio proizvoljan, slijedi $\|T\|_2 \geq \|T\|$.

(iii). Ako je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ proizvoljna ONB za H, tada imamo $\|STe_n\|^2 \leq \|S\|^2\|Te_n\|^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Odavde slijedi da je $ST \in \mathrm{B}_2(H)$ te da je $\|ST\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$. Nadalje, iz (i) slijedi da je $S^*T^* \in \mathrm{B}_2(H)$, pa je onda i $TS = (S^*T^*)^* \in \mathrm{B}_2(H)$ i $\|TS\|_2 = \|S^*T^*\|_2 \leq \|S^*\|\|T^*\|_2 = \|S\|\|T\|_2$.

(iv). Fiksirajmo neku ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H.

Ako je $T \in \mathrm{B}_2(H)$, tada je $\|T\|_2 = 0$ ako i samo ako je $\|Te_n\| = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odnosno ako i samo ako je $T = 0$.

Nadalje, za $\lambda \in \mathbb{C}$ očito vrijedi $\lambda T \in \mathrm{B}_2(H)$ i $\|\lambda T\|_2 = |\lambda|\|T\|_2$.

Neka je sada $S \in \mathrm{B}_2(H)$ neki drugi Hilbert-Schmidtov operator. Tada su $(\|Se_n\|)_n$ i $(\|Te_n\|)_n$ dva niza u ℓ^2, pa koristeći nejednakost trokuta u ℓ^2 imamo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|Se_n\| + \|Te_n\|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Se_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|S\|_2 + \|T\|_2.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned}\|S+T\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\|Se_n + Te_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\|Se_n\| + \|Te_n\|)^2 \\ &\leq (\|S\|_2 + \|T\|_2)^2 < \infty.\end{aligned}$$

Dakle, $S + T \in \mathrm{B}_2(H)$ i $\|S + T\|_2 \leq \|S\|_2 + \|T\|_2$. Odavde te iz (i) i (iii) zaključujemo da je $\mathrm{B}_2(H)$ samoadjungirani ideal u $\mathrm{B}(H)$ te da $\|\cdot\|_2$ definira normu na $\mathrm{B}_2(H)$. Nadalje, koristeći (ii) i (iii) imamo $\|ST\|_2 \leq \|S\|_2\|T\| \leq \|S\|_2\|T\|_2$, pa je $\mathrm{B}_2(H)$ normirana $*$-algebra s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$.

Dokažimo da je algebra $\mathrm{B}_2(H)$ potpuna s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$. Neka je $(T_n)_n$ Cauchyjev niz u $\mathrm{B}_2(H)$ s obizrom na normu $\|\cdot\|_2$. Prema (ii) je taj niz Cauchyjev i s obzirom na operatorsku normu, pa postoji $T \in \mathrm{B}(H)$ takav da je $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. Budući da je niz $(T_n)_n$ $\|\cdot\|_2$-Cauchyjev, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\|T_m - T_n\|_2 < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0. \tag{6.25}$$

Budući da je svaki Cauchyjev niz u metričkom prostoru ograničen, postoji $M > 0$ takav da vrijedi

$$\|T_n\|_2 \leq M \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \tag{6.26}$$

Fiksirajmo neku ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H. Prema (6.26), za sve $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} \|T_n e_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T_n e_j\|^2 = \|T_n\|_2^2 \leq M^2.$$

Kako $\|T - T_n\| \to 0$, dobivamo

$$\sum_{j=1}^{k} \|T e_j\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \|T_n e_j\|^2 \leq M^2 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

tako da je

$$\|T\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|T e_j\|^2 \leq M^2 < \infty,$$

odnosno $T \in \mathrm{B}_2(H)$. Napokon, iz (6.25) slijedi da za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} \|(T_n - T_m) e_j\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Prelaskom na limes $n \to \infty$ dobivamo

$$\sum_{j=1}^{k} \|(T - T_m) e_j\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m \geq n_0.$$

Kako je $k \in \mathbb{N}$ bio proizvoljan, zaključujemo

$$\|T - T_m\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|(T - T_m) e_j\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m \geq n_0.$$

Time je dokazana potpunost od $\mathrm{B}_2(H)$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$.

(v). Najprije primijetimo da za $x, y \in H$ imamo $\|x \otimes y\|_2 = \|x\|\|y\|$ (koristimo notaciju (6.16)), pa je $x \otimes y \in \mathrm{B}_2(H)$. Odavde i iz (iv) slijedi da je $\mathrm{F}(H) \subseteq \mathrm{B}_2(H)$. Neka je sad $T \in \mathrm{B}_2(H)$ i $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ proizvoljna ONB za H. Za dani $\varepsilon > 0$ izaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \varepsilon^2$, stavimo $P := \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k$ (ortogonalni projektor na $[\{e_1, \ldots, e_n\}]$) i $S := TP$. Kako je $\mathrm{F}(H)$ ideal u $\mathrm{B}(H)$ slijedi $S \in \mathrm{F}(H)$ i $\|T - S\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \varepsilon^2$. Time smo dokazali da je $\mathrm{F}(H)$ $\|\cdot\|_2$-gust podskup od $\mathrm{B}_2(H)$. Nadalje, prema (ii) imamo $\|T - S\| \leq \|T - S\|_2 < \varepsilon$, pa iz Teorema 6.6.5 slijedi da je $T \in \mathrm{K}(H)$.

(vi). Dokaz ove tvrdnje je jednostavan i ostavljamo ga za DZ. $\square$

Za proizvoljan operator $T \in \mathrm{B}(H)$ i ONB $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H definiramo

$$\|T\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T| e_n, e_n \rangle \in [0, +\infty],$$

gdje je kao i občno $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ apsolutna vrijednost od T. Prema Propoziciji 6.8.1, vrijednost $\|T\|_1 = \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2^2$ ne ovisi o izboru ONB E za H.

Definicija 6.8.5. Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ kažemo da je **nuklearan operator** (ili **operator s konačnim tragom**) ako vrijedi $\|T\|_1 < \infty$. Skup svih nuklearnih operatora na H označavamo s $\mathrm{B}_1(H)$.

Primjer 6.8.6. Neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za H i $(\lambda_n)_n \in \ell^\infty$. Kao što smo vidjeli u Primjeru 6.3.9 za dijagonalni operator $Tx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ vrijedi $T^*x = \sum_{n=1}^\infty \overline{\lambda_n}\langle x, e_n\rangle e_n$, tako da je $T^*Tx = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 \langle x, e_n\rangle e_n$ i posljedično $|T|x = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|\langle x, e_n\rangle e_n$ (očito za $R := \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|\langle x, e_n\rangle e_n \in \mathrm{B}(H)$ vrijedi $R \geq 0$ i $R^2 = T^*T$, a pozitivni drugi korijen svakog pozitivnog elementa C^*-algebre je jedinstven prema Propoziciji 5.6.4). Jer je $\langle |T|e_n, e_n\rangle = |\lambda_n|$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je T nuklearan operator ako i samo ako je $(\lambda_n)_n \in \ell^1$.

Osnovna veza između Hilbert-Schmidtovih i nuklearnih operatora dana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 6.8.7. *Za operator $T \in \mathrm{B}(H)$ su sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

(i) T je nuklearan operator.

(ii) $|T|^{\frac{1}{2}}$ je Hilbert-Schmidtov operator.

(iii) T je produkt dva Hilbert-Schmidtova operatora.

(iv) $|T|$ je produkt dva Hilbert-Schmidtova operatora.

Dokaz. Neka je $T = V|T|$ polarna dekompozicija od T (Teorem 6.4.11).

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Ovo slijedi iz činjenice da je $\|T\|_1 = \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2^2$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Imamo $T = (V|T|^{\frac{1}{2}})|T|^{\frac{1}{2}}$, a prema pretpostavci i Teoremu 6.8.4, oba faktora su Hilbert-Schmidtovi operatori.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Pretpostavimo da je $T = T_1T_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H)$. Tada je $|T| = V^*T = (V^*T_1)T_2$, a iz Teorema 6.8.4 slijedi $V^*T_1 \in \mathrm{B}_2(H)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Pretpostavimo da je $|T| = T_1T_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H)$. Fiksirajmo ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H. Budući da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\langle |T|e_n, e_n\rangle = |\langle T_2e_n, T_1^*e_n\rangle| \leq \|T_2e_n\|\|T_1^*e_n\|$, prema CSB-nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \langle |T|e_n, e_n\rangle &\leq \sum_{n=1}^\infty \|T_2e_n\|\|T_1^*e_n\| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty \|T_2e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^\infty \|T_1^*e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|T_2\|_2\|T_1\|_2.\end{aligned}$$

□

Korolar 6.8.8. *Vrijedi* $\mathrm{B}_1(H) \subsetneq \mathrm{B}_2(H) \subsetneq \mathrm{K}(H)$.

Dokaz. Inkluzije $\mathrm{B}_1(H) \subseteq \mathrm{B}_2(H) \subseteq \mathrm{K}(H)$ slijede direktno iz Propozicije 6.8.7 i Teorema 6.8.4. Striktnost tih inkluzija pokazuju dijagonalni operatori $Tx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n$ (gdje je kao i obično $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za H i $(\lambda_n)_n \in \ell^\infty$). Naime, prema Primjerima 6.6.10, 6.8.3 i 6.8.6 imamo

$$T \in \mathrm{K}(H) \iff (\lambda_n)_n \in c_0, \qquad T \in \mathrm{B}_2(H) \iff (\lambda_n)_n \in \ell^2, \qquad T \in \mathrm{B}_1(H) \iff (\lambda_n)_n \in \ell^1.$$

□

Propozicija 6.8.9. *Neka je $T \in \mathrm{B}_1(H)$. Ako je $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za H, tada je $\sum_{n=1}^\infty |\langle Te_n, e_n\rangle| < \infty$ i suma $\sum_{n=1}^\infty \langle Te_n, e_n\rangle$ ne ovisi o izboru ONB E.*

Dokaz. Prema Propoziciji 6.8.7 imamo $T = T_2^*T_1$ za neke $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H)$. Kako je $\|(T_1 - \lambda T_2)e_n\|^2 \geq 0$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$2\,\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}\langle T_1e_n, T_2e_n\rangle \leq \|T_1e_n\|^2 + |\lambda|^2\|T_2e_n\|^2.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izaberimo $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tako da vrijedi $|\lambda_n| = 1$ i $\overline{\lambda}_n \langle T_1 e_n, T_2 e_n \rangle = |\langle T_1 e_n, T_2 e_n \rangle|$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$|\langle T e_n, e_n \rangle| = |\langle T_1 e_n, T_2 e_n \rangle| \leq \frac{1}{2}(\|T_1 e_n\|^2 + \|T_2 e_n\|^2),$$

odakle slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle T e_n, e_n \rangle| \leq \frac{1}{2}(\|T_1\|_2^2 + \|T_2\|_2^2) < \infty.$$

Ostaje dokazati da suma $\sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n, e_n \rangle$ ne ovisi o odabiru ONB E za H. Zaista, koristeći polarizacijski identitet (6.2) za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\mathrm{Re}\langle T e_n, e_n \rangle = \mathrm{Re}\langle T_1 e_n, T_2 e_n \rangle = \frac{1}{4}(\|(T_1 + T_2)e_n\|^2 - \|(T_1 - T_2)e_n\|^2).$$

Odavde slijedi

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n, e_n \rangle\right) = \frac{1}{4}(\|T_1 + T_2\|_2^2 - \|T_1 - T_2\|^2). \tag{6.27}$$

Ukoliko T zamijenimo s iT dobivamo i

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n, e_n \rangle\right) = \frac{1}{4}(\|iT_1 + T_2\|_2^2 - \|iT_1 - T_2\|^2). \tag{6.28}$$

Iz (6.27) i (6.28) je sada jasno da suma $\sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n, e_n \rangle$ ne ovisi o izboru ONB za H. □

Propozicija 6.8.9 nam opravdava sljedeću definiciju:

Definicija 6.8.10. **Trag** nuklearnog operatora $T \in \mathrm{B}_1(H)$ je vrijednost

$$\mathrm{tr}\, T := \sum_{n=1}^{\infty} \langle T e_n, e_n \rangle \in \mathbb{C},$$

gdje je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ proizvoljna ONB za H.

Idući teorem opisuje osnovna svojstva nuklearnih operatora.

Teorem 6.8.11. *(i)* $\mathrm{B}_1(H)$ *je (obostrani) ideal u* $\mathrm{B}(H)$ *i* $\|\cdot\|_1$ *definira normu na* $\mathrm{B}_1(H)$.

(ii) Ako je $T \in \mathrm{K}(H)$ *i ako su* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *sve svojstvene vrijednosti od* $|T|$ *(brojeći njihove kratnosti), tada je* $T \in \mathrm{B}_1(H)$ *ako i samo ako je* $(\lambda_n)_n \in \ell^1$ *i u tom slučaju vrijedi* $\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

(iii) $\mathrm{tr} : \mathrm{B}_1(H) \to \mathbb{C}$ *je pozitivno definitan linearni funkcional, tj. ako je* $T \in \mathrm{B}_1(H)$, $T \geq 0$ *i* $\mathrm{tr}(T) = 0$, *onda je nužno* $T = 0$.

(iv) $\mathrm{F}(H) \subseteq \mathrm{B}_1(H)$ *i* $\mathrm{F}(H)$ *je u normi* $\|\cdot\|_1$ *gust podskup od* $\mathrm{B}_1(H)$.

(v) Ako je $T \in \mathrm{B}_1(H)$, *tada vrijedi* $\mathrm{tr}(TS) = \mathrm{tr}(ST)$ *i* $|\mathrm{tr}(ST)| \leq \|S\|\|T\|_1$ *za svaki operator* $S \in \mathrm{B}(H)$.

(vi) $B_1(H)$ *je samoadjungiran te vrijedi* $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$ *za sve* $T \in \mathrm{B}_1(H)$.

(vii) Ako je $T \in \mathrm{B}_1(H)$ *i* $S \in \mathrm{B}(H)$, *tada vrijedi* $\max\{\|ST\|_1, \|TS\|_1\} \leq \|S\|\|T\|_1$.

Dokaz. (i). Ako je $T \in \mathrm{B}_1(H)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, očito je $\lambda T \in \mathbb{C}$ i $\|\lambda T\|_1 = |\lambda|\|T\|_1$. Nadalje, $\|T\|_1 = 0$ ako i samo ako je $|T_1|^{\frac{1}{2}} = 0$, odnosno ako i samo ako je $T_1 = 0$.

Neka su $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_1(H)$ i $T_1 = V|T_1|$, $T_2 = W|T_2|$, $T_1 + T_2 = U|T_1 + T_2|$ pripadne polarne dekompozicije (Teorem 6.4.11). Budući da je prema Korolaru 6.8.8 operator $T_1 + T_2$ kompaktan, isto vrijedi i za operator $|T_1 + T_2| = U^*(T_1 + T_2)$. Stoga, prema spektralnom teoremu za kompaktan normalan operator (Korolar 6.6.18) postoji ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H i niz $(\lambda_n)_n$ u c_0 takav da vrijedi $|T_1 + T_2| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$. Jer je $|T_1+T_2| \geq 0$, očito je $\lambda_n = \langle |T_1+T_2|e_n, e_n\rangle \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Koristeći CSB-nejednakost i Teorem 6.8.4, imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T_1+T_2|e_n, e_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle (T_1+T_2)e_n, Ue_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\langle T_1e_n, Ue_n\rangle + \langle T_2e_n, Ue_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\langle |T_1|e_n, V^*Ue_n\rangle + \langle |T_2|e_n, W^*Ue_n\rangle) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle |T_1|^{\frac{1}{2}}e_n, |T_1|^{\frac{1}{2}}V^*Ue_n\rangle + \langle |T_2|^{\frac{1}{2}}e_n, |T_2|^{\frac{1}{2}}W^*Ue_n\rangle \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\||T_1|^{\frac{1}{2}}e_n\| \cdot \||T_1|^{\frac{1}{2}}V^*Ue_n\| + \||T_2|^{\frac{1}{2}}e_n\| \cdot \||T_2|^{\frac{1}{2}}W^*Ue_n\| \right) \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_1|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_1|^{\frac{1}{2}}V^*Ue_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_2|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T_2|^{\frac{1}{2}}W^*Ue_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \||T_1|^{\frac{1}{2}}\|_2 \cdot \||T_1|^{\frac{1}{2}}V^*U\|_2 + \||T_2|^{\frac{1}{2}}\|_2 \cdot \||T_2|^{\frac{1}{2}}W^*U\|_2 \\
&\leq \||T_1|^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \||T_2|^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \\
&= \|T_1\|_1 + \|T_2\|_1.
\end{aligned}$$

Odavde istovremeno vidimo da iz $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_1(H)$ slijedi $T_1+T_2 \in \mathrm{B}_1(H)$ te da $\|\cdot\|_1$ na $\mathrm{B}_1(H)$ zadovoljava nejednakost trokuta.

Ostaje dokazati da je $B_1(H)$ ideal u $\mathrm{B}(H)$. Pretpostavimo sada da je $T \in \mathrm{B}_1(H)$ i faktorizirajmo $T = T_1T_2$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H)$ (Propozicija 6.8.7). Jer je prema Teoremu 6.8.4 $\mathrm{B}_2(H)$ ideal u $\mathrm{B}(H)$, za svaki operator $S \in \mathrm{B}(H)$ imamo $ST = (ST_1)T_2 \in \mathrm{B}_1(H)$ i $TS = T_1(T_2S) \in \mathrm{B}_1(H)$.

(ii). Pretpostavimo da je $T \in \mathrm{K}(H)$ i neka je $T = V|T|$ njegova polarna dekompozicija. Budući da je $|T| \in \mathrm{K}(H)$ (Teorem 6.6.5) i $|T| \geq 0$, prema spektralnom teoremu za kompaktan normalan operator (Korolar 6.6.18) postoji ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H takva da vrijedi $|T| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$, gdje je $(\lambda_n)_n \in c_0$ (nenegativan) niz svojstvenih vrijednosti za $|T|$. Ako je $T \in \mathrm{B}_1(H)$, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|e_n, e_n\rangle = \operatorname{tr}|T| < \infty.$$

Obratno, ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, onda je $|T| \in \mathrm{B}_1(H)$ nuklearan, pa je posljedično i $T = V|T| \in \mathrm{B}_1(H)$.

(iii). Jasno je da trag definira pozitivan linearni funkcional na $\mathrm{B}_1(H)$. Nadalje, ako je T pozitivan nuklearni operator s dijagonalizacijom $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$, tada je $\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Odavde slijedi da je $\operatorname{tr} T = 0$ ako i samo ako je $T = 0$.

(iv). Dokaz ove činjenice je analogan dokazu tvrdnje (v) Teorema 6.8.4, pa ga ostavljamo za DZ.

(v). Neka su $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H)$. Tada kao u dokazu Propozicije 6.8.9 imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(T_2^*T_1)) &= \frac{1}{4}(\|T_1+T_2\|_2^2 - \|T_1-T_2\|_2^2) = \frac{1}{4}(\|T_1^*+T_2^*\|_2^2 - \|T_1^*-T_2^*\|_2^2) \\
&= \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(T_2T_1^*)).
\end{aligned}$$

Ako u gornjoj jednakosti operator T_1 zamijenimo s operatorom iT_1, dobivamo $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}(T_2^*T_1)) = -\operatorname{Im}(\operatorname{tr}(T_2T_1^*))$. Dakle,

$$\operatorname{tr}(T_2^*T_1) = \overline{\operatorname{tr}(T_2T_1^*)} \quad \forall T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H).$$

Neka je sada $T \in \mathrm{B}_1(H)$, $T = T_2^*T_1$, gdje su $T_1, T_2 \in \mathrm{B}_2(H)$. Tada za sve $S \in \mathrm{B}(H)$ imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(ST) &= \operatorname{tr}((ST_2^*)T_1) = \overline{\operatorname{tr}((T_2S^*)T_1^*)} = \overline{\operatorname{tr}(T_2(T_1S)^*)} = \operatorname{tr}(T_2^*(T_1S)) \\ &= \operatorname{tr}(TS).\end{aligned}$$

Kako bismo dokazali drugi dio tvrdnje, primijetimo da su za $T \in \mathrm{B}_1(H)$ i $S \in \mathrm{B}(H)$, $S|T|^{\frac{1}{2}}$ i $|T|^{\frac{1}{2}}S$ Hilbert-Schmidtovi operatori. Ako je $T = V|T|$ polarna dekompozicija od T i $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ neka ONB za H, primjenom CSB-nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(ST)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle STe_n, e_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle |T|^{\frac{1}{2}}e_n, |T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*e_n\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \||T|^{\frac{1}{2}}e_n\|\||T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*e_n\| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \||T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2\||T|^{\frac{1}{2}}V^*S^*\|_2.\end{aligned}$$

Odavde i iz Teorema 6.8.4 dobivamo

$$|\operatorname{tr}(ST)| \leq \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2^2\|V^*S^*\| \leq \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2^2\|S\| = \|T\|_1\|S\|.$$

(vi). Ako je $T \in \mathrm{B}_1(H)$ s polarnom dekompozicijom $T = V|T|$, onda je prema Napomeni 6.4.12 $|T^*| = V|T|V^*$. Odavde i iz (v) dobivamo

$$\|T^*\|_1 = \operatorname{tr}|T^*| = \operatorname{tr}(V|T|V^*) = \operatorname{tr}(V^*V|T|) = \operatorname{tr}|T| = \|T\|_1.$$

Posebno je $T^* \in \mathrm{B}_1(H)$.

(vii). Neka su $T \in \mathrm{B}_1(H)$ i $S \in \mathrm{B}(H)$. Napravimo polarne dekomozicije $T = V|T|$ i $ST = W|ST|$, tako da je $|ST| = R|T|$, gdje je $R := W^*SV$. Posebno je $\|R\| \leq \|S\|$, pa koristeći (v) dobivamo

$$\|ST\|_1 = \operatorname{tr}|ST| = \operatorname{tr}(R|T|) \leq \|R\|\|T\|_1 \leq \|S\|\|T\|_1.$$

Nadalje, odavde i iz (vi) dobivamo $\|TS\|_1 = \|S^*T^*\|_1 \leq \|S^*\|\|T^*\|_1 = \|S\|\|T\|_1$. □

Napomena 6.8.12. (a) Neka je $T \in \mathrm{B}_1(H)$. Ako su $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ dvije ONB za H primijetimo da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_n\rangle| \leq \|T\|_1.$$

Zaista, za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $\lambda_n \in \mathbb{C}$ modula 1 takav da je $\lambda_n\langle Te_n, f_n\rangle = |\langle Te_n, f_n\rangle|$ i neka je $U \in \mathrm{B}(H)$ (jedinstven) unitaran operator takav da je $Ue_n = \overline{\lambda_n}f_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je $|\langle Te_n, f_n\rangle| = \langle Te_n, Ue_n\rangle = \langle U^*Te_n, e_n\rangle$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa koristeći Teorem 6.8.11 dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_n\rangle| = \operatorname{tr}(U^*T) \leq \|U^*\|\|T\|_1 = \|T\|_1.$$

(b) Ako su $x, y \in H$, primijetimo da je $\operatorname{tr}(x \otimes y) = \langle x, y\rangle$ i $\|x \otimes y\|_1 = \|x\|\|y\|$. Dakle, na operatorima ranga 1 se sve tri norme $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ podudaraju.

Teorem 6.8.13. *Operator $T \in \mathrm{B}(H)$ je nuklearan ako i samo ako postoje dva kvadratno sumabilna niza vektora $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ u H tako da vrijedi*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n.$$

Pritom nizove $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ možemo izabrati tako da budu ortogonalni te da vrijedi

$$\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^2.$$

Dokaz. Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ dva kvadratno sumabilna niza vektora u H te neka je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormiran skup u H. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $F_n := \sum_{j=1}^n x_j \otimes e_j \in \mathrm{F}(H)$. Tada za $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ imamo

$$\|F_n - F_m\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left(\sum_{j=m+1}^{n} x_j \otimes e_j \right) e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=m+1}^{n} \langle e_k, e_j \rangle x_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Odavde slijedi da je $(F_n)_n$ Cauchyjev niz u $\mathrm{F}(H)$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$, pa prema Teoremu 6.8.4 (iv) imamo $F := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes e_n \in \mathrm{B}_2(H)$. Analogno, $G := \sum_{n=1}^{\infty} y_n \otimes e_n \in \mathrm{B}_2(H)$. Prema Propoziciji 6.5.2 i $\|\cdot\|_2-$neprekidnosti involucije je $\sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes y_n = G^* \in \mathrm{B}_2(H)$, pa koristeći činjenicu da je množenje u normiranoj algebri neprekidno, Propoziciju 6.5.2 (iii) i Napomenu 6.8.12, dobivamo

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n = FG^* \in \mathrm{B}_1(H) \qquad \text{i} \qquad \|T\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n \otimes y_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\|.$$

Obratno, neka je $T \in \mathrm{B}_1(H)$ i $T = V|T|$ njegova polarna dekompozicija. Prikažimo operator $|T|$ u dijagonalnom obliku $|T| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$, gdje su svi $\lambda_n > 0$ i $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB za $(\ker |T|)^{\perp} = (\ker T)^{\perp}$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $y_n := \sqrt{\lambda_n} e_n$ i $x_n := V y_n$. Očito je $(y_n)_n$ ortogonalan niz u H. Budući da je V parcijalna izometrija s inicijalnim prostorom $(\ker T)^{\perp}$, niz $(x_n)_n$ je također ortogonalan i $\|x_n\|^2 = \|y_n\|^2 = \lambda_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \mathrm{tr}\,|T| = \|T\|_1$$

i

$$T = V|T| = V\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} V(\sqrt{\lambda_n} e_n) \otimes \sqrt{\lambda_n} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n.$$

□

Neka je $T \in \mathrm{B}_1(H)$. Tada je s

$$\varphi_T : \mathrm{K}(H) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_T(K) := \mathrm{tr}(KT) = \mathrm{tr}(TK).$$

dobro definiran linearni funkcional na $\mathrm{K}(H)$. Nadalje, prema Teoremu 6.8.11 imamo

$$\sup\{|\,\mathrm{tr}(TK)| : K \in \mathrm{K}(H), \|K\| \leq 1\} \leq \|T\|_1,$$

što pokazuje da je φ_T ograničen funkcional s $\|\varphi_T\| \leq \|T\|_1$. Vrijedi i puno više:

Teorem 6.8.14. *Preslikavanje* $\Phi : T \mapsto \varphi_T$ *definira izometrički izomorfizam s* $\mathrm{B}_1(H)$ *na dual* $\mathrm{K}(H)^*$.

Napomena 6.8.15. Za seskvilinearnu formu $[\cdot,\cdot] : H \times H \to \mathbb{C}$ kažemo da je **ograničena** ako postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$|[x, y]| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Svaki ograničen operator $T \in \mathrm{B}(H)$ očito definira ograničenu seskvilinearnu formu $[\cdot,\cdot]_T$ na H danu s

$$[x, y]_T := \langle Tx, y \rangle, \quad x, y \in H. \tag{6.29}$$

Obratno, svaka ograničena seskvilinearna forma $[\cdot,\cdot]$ na H je oblika $[\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot]_T$ za neki $T \in \mathrm{B}(H)$. Zaista, za fiksiran vektor $y \in H$ preslikavanje $x \mapsto [x, y]$ definira ograničen linearni funkcional na H, pa prema Teoremu 6.2.1 postoji jedinstven vektor iz H, kojeg ćemo označiti s Ry, takav da je $[x, y] = \langle x, Ry \rangle$ za sve $x \in H$. Lako se provjeri da preslikavanje $R : y \mapsto Ry$ definira ograničen linearni operator na H, tj. $R \in \mathrm{B}(H)$. Ako stavimo $T := R^*$, zaključujemo da je $[\cdot,\cdot]$ oblika (6.29). Ovaj rezultat je u literaturi poznat kao *Rieszov teorem o reprezentaciji ograničene seskvilinearne forme.*

Dokaz Teorema 6.8.14. Trebamo dokazati da je preslikavanje Φ surjektivno te da vrijedi $\|\Phi(T)\| \geq \|T\|_1$ za sve $T \in \mathrm{B}_1(H)$. Za $\varphi \in \mathrm{K}(H)^*$ definirajmo

$$[x, y]_\varphi := \varphi(x \otimes y) \qquad \text{za sve } x, y \in H.$$

Tada je $|[x, y]_\varphi| \leq \|\varphi\|\|x\|\|y\|$ za sve $x, y \in H$, pa $[\cdot, \cdot]_\varphi$ definira ograničenu seskvilinearnu forma na H. Prema Napomeni 6.8.15 postoji jedinstven ograničen operator $T \in \mathrm{B}(H)$ takav da vrijedi

$$\langle Tx, y\rangle = [x, y]_\varphi = \varphi(x \otimes y) \quad \forall x, y \in H. \tag{6.30}$$

Tvrdimo da je $T \in \mathrm{B}_1(H)$ i da je $\varphi = \varphi_T$. Zaista, neka je $T = V|T|$ polarna dekompozicija od T i fiksirajmo neku ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ za H. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$C_n := \left(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k\right) V^* = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes Ve_k.$$

Onda je $C_n \in \mathrm{F}(H)$ i $\|C_n\| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je prema (6.30)

$$\|\varphi\| \geq |\varphi(C_n)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k \otimes Ve_k)\right| = \sum_{k=1}^{n} |\langle Te_k, Ve_k\rangle| = \sum_{k=1}^{n} \langle |T|e_k, e_k\rangle.$$

Odavde slijedi da je

$$\|T\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle |T|e_k, e_k\rangle \leq \|\varphi\|.$$

Dakle, $T \in \mathrm{B}_1(H)$ i $\|T\|_1 = \|\varphi\|$.

Preostalo nam je dokazati da je $\varphi = \varphi_T$. Kako su oba funkcionala φ i φ_T neprekidna i kako je $\mathrm{F}(H)$ $\|\cdot\|_1$-gust podskup od $\mathrm{B}_1(H)$ (Teorem 6.8.11 (iv)), dovoljno je dokazati da vrijedi $\varphi(F) = \varphi_T(F)$ za sve $F \in \mathrm{F}(H)$. Neka je stoga $F \in \mathrm{F}(H)$. Tada prema Propoziciji 6.5.3 postoji konačno mnogo vektora $x_1, \ldots, x_n \in H$ i $y_1, \ldots, y_n \in H$ tako da vrijedi $F = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$. Onda je prema Napomeni 6.8.12 $\langle Tx_k, y_k\rangle = \operatorname{tr}(Tx_k \otimes y_k)$ za sve $1 \leq k \leq n$, tako da je zbog (6.30) i linearnosti traga

$$\begin{aligned}\varphi(F) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \langle Tx_k, y_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr}(Tx_k \otimes y_k) = \operatorname{tr}(TF) \\ &= \varphi_T(F)\end{aligned}$$

Time je dokaz teorema u potpunosti završen. $\square$

Na skupove operatora $\mathrm{F}(H)$, $\mathrm{B}_1(H)$, $\mathrm{B}_2(H)$, $\mathrm{K}(H)$ i $\mathrm{B}(H)$ prirodno je redom gledati kao nekomutativne analogone od c_{00}, ℓ^1, ℓ^2, c_0 i ℓ^∞. Budući da je ℓ^∞ dual od ℓ^1, ta nam analogija može sugerirati da je $\mathrm{B}(H)$ dual od $\mathrm{B}_1(H)$. Kako bismo dokazali da je to zaista tako, najprije primijetimo da je za svaki $S \in \mathrm{B}(H)$ s

$$\psi_S : \mathrm{B}_1(H) \to \mathbb{C}, \qquad \psi_S(T) := \operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$$

dobro definiran linearni funkcional na $\mathrm{B}_1(H)$.

Teorem 6.8.16. *Preslikavanje $\Psi : S \mapsto \psi_S$ definira izometrički izomorfizam s $\mathrm{B}(H)$ na $\mathrm{B}_1(H)^*$.*

Dokaz. Iz Teorema 6.8.11 (v) slijedi da je $\|\psi_S\| \leq \|S\|$, tako da je $\psi_S \in \mathrm{B}_1(H)^*$. Također, preslikavanje Ψ je očito linearno. Neka je $\varepsilon > 0$ i izaberimo jedinični vektor $x \in H$ takav da je $\|Sx\| > \|S\| - \varepsilon$. Sada izaberimo jedinični vektor $y \in H$ takav da je $\langle Sx, y\rangle = \|Sx\|$. Tada za $C := x \otimes y$ imamo $C \in \mathrm{F}(H) \subseteq \mathrm{B}_1(H)$ i $\|C\|_1 = 1$. Dakle,

$$\|\psi_S\| \geq |\operatorname{tr}(SC)| = \operatorname{tr}(Sx \otimes y) = \langle Sx, y\rangle = \|Sx\| > \|S\| - \varepsilon.$$

Jer je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $\|\psi_S\| = \|S\|$. Dakle, preslikavanje Ψ je izometrija.

Preostaje dokazati surjektivnost od Ψ. Neka je $\psi \in \mathrm{B}_1(H)^*$. Koristeći analogne argumente kao u dokazu Teorema 6.8.14 dolazimo do operatora $S \in \mathrm{B}(H)$ koji zadovoljava $\langle Sx, y\rangle = \psi(x \otimes y)$ za sve $x, y \in H$, odakle onda dobivamo da je $\psi(F) = \psi_S(F)$ za sve operatore $F \in \mathrm{F}(H)$. Kako je prema Teoremu 6.8.11 $\mathrm{F}(H)$ u $\|\cdot\|_1$ gust potprostor od $\mathrm{B}_1(H)$ te kako su funkcionali ψ i ψ_S neprekdini, zaključujemo da je $\psi = \psi_S$. $\square$

Bibliografija

[1] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis*, Gulf Professional Publishing, 1998.

[2] Lj. Arambašić, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2022.

[3] W. Arveson, *An Invitation to C^*-algebras*, Springer-Verlag, 1976.

[4] D. Bakić, *Normirani prostori*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2022. (skripta).

[5] T. Berić, M. Tomašević, *Zbirka riješenih zadataka iz Normiranih prostora*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2021. (zbirka).

[6] T. Berić, M. Tomašević, *Zbirka riješenih zadataka iz Operatora na normiranim prostorima*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2021. (zbirka).

[7] A. Bowers, N. J. Kalton, *An Introductory Course in Functional Analysis*, Springer, 2014.

[8] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 2nd edition, Springer Science & Business Media, 2013.

[9] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 2nd edition, 1990.

[10] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[11] V. Čačić, *Teorija skupova*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2024. (skripta).

[12] Z. Čerin, *Metrički prostori*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb (skripta).

[13] M. Fabian , P. Habala , P. Hájek , V. M. Santalucia , J. Pelant , V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag, 2001.

[14] A. Fellhauer, *On the relation of three theorems of analysis to the axiom of choice*, J. Log. Anal., **9** (2017).

[15] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 2013.

[16] G. B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, second edition, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[17] I. Gogić, *Baireov teorem o kategoriji*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2019. (rukopis).

[18] I. Gogić, *Odabrana poglavlja teorije operatorskih algebri*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2017. (skripta).

[19] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača, *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2021. (skripta).

[20] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača, *Integrali funkcija više varijabli*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2021. (skripta).

[21] I. Gogić, M. Tomašević, *Gelfand-Mazurov teorem i Osnovni teorem algebre*, časopis math.e, br. 37, 2020.

[22] B. Guljaš, *Normirani prostori i operatori*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2010. (skripta).

[23] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[24] H. Herrlich, K. Keremedis, *The Baire Category Theorem and choice*, Topology Appl., **108** (2000), 157–167.

[25] R. Hines, *James' space: a (counter-)example in Banach spaces*, 2014 (rukopis).

[26] T. Jech, *Set Theory*, Springer, The Third Millennium Edition, revised and expanded, 2007.

[27] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Volume I: Elementary Theory*, AMS, Providence, 1997.

[28] A. Karagila, *Zornian Functional Analysis or: How I Learned to Stop Worrying and Love the Axiom of Choice*, arXiv:2010.15632 [math.FA]

[29] H. Kraljević, *Kompaktni operatori*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2008. (skripta).

[30] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza: elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[31] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.

[32] R. Mrazović, *Mjera i integral*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2023. (skripta)

[33] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Incorporated, 2nd edition, 2000.

[34] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, San Diego, 1990.

[35] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, 2nd edition, 1980.

[36] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer, 2012.

[37] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[38] Š. Ungar, *Matematička analiza u $\mathbb{R}^n$*, Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.