

# Oktonioni i Hurwitzov teorem

*Ilja Gogić, Sveučilište u Zagrebu*

## Sažetak

Hurwitzova (ili kompozicijska) algebra je realna algebra opskrbljena sa skalar-nim produktom čija je pripadna norma multiplikativna. U ovom predavanju da-jemo klasifikaciju Hurwitzovih algebri, s naglaskom na Cayley–Dicksonovu kons-trukciju, rekurzivnu metodu kojom se iz realnih brojava  $\mathbb{R}$  generiraju kompleksni brojevi  $\mathbb{C}$ , kvaternioni  $\mathbb{H}$  i oktonioni  $\mathbb{O}$ . Na svakoj razini konstrukcije pojavljuju se novi algebarski fenomeni: od gubitka komutativnosti (prijelaz s  $\mathbb{C}$  na  $\mathbb{H}$ ) do narušavanja asocijativnosti (prijelaz s  $\mathbb{H}$  na  $\mathbb{O}$ ). Posebnu pozornost posvećujemo najvećoj Hurwitzovoj algebri – oktonionima, koja je osmodimenzionalna, neasocija-tivna, ali alternativna. Osim od matematičkog značaja, oktonioni imaju i značajnu ulogu u teorijskoj fizici, primjerice u teoriji iznimnih Liejevih grupa i teoriji struna. Predavanje zaključujemo teoremom klasifikacije, prema kojem (do izomorfizam) je-dino algebre  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  i  $\mathbb{O}$  posjeduju Hurwitzovo svojstvo.

**Oznake:** apstraktna algebra, linearna algebra, matematička fizika.

**Ključne riječi:** Hurwitzova algebra, Cayley–Dicksonova konstrukcija, oktonioni, normirana algebra s dijeljenjem, neasocijativna algebra.

## Sadržaj

|   |                                                           |    |
|---|-----------------------------------------------------------|----|
| 1 | Uvod                                                      | 2  |
| 2 | Realne Hurwitzove algebre – definicija i osnovna svojstva | 5  |
| 3 | Cayley-Dicksonova konstrukcija                            | 9  |
| 4 | Algebra oktoniona $\mathbb{O}$                            | 11 |
| 5 | Klasifikacija realnih Hurwitzovih algebri                 | 13 |

# 1 Uvod

Osnovni cilj ovog predavanja je uvesti algebru oktoniona  $\mathbb{O}$ , opisati njena osnovna svojstva, te provesti klasifikaciju realnih Hurwitzovih\* algebri.

Kao motivaciju za ovo predavanje krećemo s jednim starim problemom:

**Problem 1.1 (Hurwitzov problem, 1898.** [10, 11]). Za koje prirodne brojeve  $n$  postoje realni brojevi  $\lambda_{jk}^i$  ( $1 \leq i, j, k \leq n$ ) takvi da za proizvoljne realne brojeve  $x_i, y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) vrijedi sljedeći identitet:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk}^i x_j y_k\right)^2 ?$$

Kako bismo dali odgovarajuću reformulaciju Hurwitzovog problema, promatrat ćemo i algebre koje *nisu nužno asocijativne*. Dakle, u ovom predavanju ćemo pod **algebrom** podrazumijevati vektorski prostor  $A$  nad poljem  $\mathbb{F}$  opskrbljen s bilinearnom operacijom množenja

$$A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto ab.$$

Drugim riječima, vrijedi:

$$(\lambda a + \mu b)c = \lambda(ac) + \mu(bc) \quad \text{i} \quad a(\lambda b + \mu c) = \lambda(ab) + \mu(ac), \quad \text{za sve } \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ i } a, b, c \in A.$$

Ako je množenje u algebri  $A$  *asocijativno*, tj. ako vrijedi

$$(ab)c = a(bc), \quad \text{za sve } a, b, c \in A,$$

naglasit ćemo da je riječ o **asocijativnoj algebri**.

Kao i u slučaju asocijativnih algebri, imamo sljedeće standardne pojmove. Neka je  $A$  proizvoljna algebra nad poljem  $\mathbb{F}$ .

- Podskup  $B$  od  $A$  naziva se **podalgebrom** algebre  $A$  ako je  $B$  algebra s obzirom na operacije dobivene restrikcijom operacija algebre  $A$  na  $B$ .

Za svaki podskup  $S \subseteq A$  postoji *najmanja podalgebra* od  $A$  koja sadrži  $S$  (tj. presjek svih podalgebri koje sadrže  $S$ ). Za nju kažemo da je **algebra generiranom skupom**  $S$  i označavamo ju s  $\langle S \rangle$ .

- Za preslikavanje  $\phi : A \rightarrow B$ , gdje je  $B$  neka druga algebra nad istim poljem  $\mathbb{F}$ , kažemo da je **homomorfizam algebri** ako je  $\mathbb{F}$ -linearno i multiplikativno, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} \phi(\lambda a + \mu b) &= \lambda \phi(a) + \mu \phi(b), \\ \phi(ab) &= \phi(a)\phi(b). \end{aligned}$$

za sve  $a, b \in A$  i  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ . Injektivni homomorfizmi zovu se **monomorfizmi**, surjektivni homomorfizmi **epimorfizmi**, a bijektivni homomorfizmi **izomorfizmi**. Izomorfizmi  $\phi : A \rightarrow A$  zovu se **automorfizmi** algebre  $A$ . Za algebre  $A$  i  $B$  kažemo da su **izomorfne** i pišemo  $A \cong B$  ako postoji izomorfizam  $\phi : A \rightarrow B$ . Očito je izomorfnost algebri relacija ekvivalencije na klasi svih  $\mathbb{F}$ -algebri.

---

\*Adolf Hurwitz (1859.–1919.), njemački matematičar

- Za fiksirani element  $a \in A$  označimo redom s  $L_a$  i  $R_a$  **operatore lijevog**, odnosno **desnog množenja** s  $a$ , tj.

$$L_a, R_a : A \rightarrow A, \quad L_ax := ax, \quad R_ax := xa, \quad x \in A.$$

Očito su  $L_a$  i  $R_a$  linearna preslikavanja, koja općenito nisu homomorfizmi algebre.

- Za element  $a$  algebre  $A$  kažemo da je **invertibilan**, ako postoji element  $b \in A$  takav da vrijedi

$$ab = ba = 1_A.$$

U tom slučaju za element  $b$  kažemo da je **(multiplikativni) inverz** od  $a$ . Općenito, u neasocijativnim algebrama inverzi invertibilnih elemenata ne moraju biti jedinstveni. Srećom, to neće biti slučaj u kontekstu Hurwitzovih algebri (Korolar 2.11).

- Za algebru  $A$  kažemo da je **unitalna** ako postoji element  $1_A \in A$  sa svojstvom da je

$$1_A a = a 1_A = a, \quad \text{za sve } a \in A.$$

Takav element naziva se **jednicom** algebre  $A$  i ona je nužno jedinstvena, bez obzira na to je li  $A$  asocijativna ili ne.

- Za (ne nužno asocijativnu) algebru  $A$  kažemo da je **algebra s dijeljenjem** ako su za svaki  $a \in A$ ,  $a \neq 0$ , pripadni operatori  $L_a$  i  $R_a$  bijektivni. Drugim riječima, za sve  $a \neq 0$  i  $b \in A$  postoje jedinstveni  $x, y \in A$  takvi da vrijedi

$$ax = b \quad \text{i} \quad ya = b.$$

Primijetimo da se u unitalnom i asocijativnom slučaju ova definicija podudara sa standardnom danom definicijom algebre s dijeljenjem, tj. unitalna asocijativna algebra  $A$  je algebra s dijeljenjem ako i samo ako je svaki nenul element u  $A$  invertibilan.

**Zadatak 1.** Neka je  $A$  (ne nužno asocijativna niti unitalna) konačnodimenzionalna algebra s dijeljenjem nad poljem  $\mathbb{F}$ .

- Ako je  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , dokažite da je nužno  $A$  izomorfna s  $\mathbb{C}$ .
- Ako je  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , te je  $A$  neparne dimenzije, dokažite da je nužno  $A$  izomorfna s  $\mathbb{R}$ .

*Napomena.* Analogna tvrdnja u (a) vrijedi ako je  $\mathbb{F}$  bilo koje algebarski zatvoreno polje.

Nadalje, tokom čitavog ovog predavanja promatramo vektorski prostor

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

opremljen standardnim skalarnim produktom

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

i pripadnom (euklidskom) normom

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Nadalje,  $\mathbb{R}^n$  identificiramo sa stupčanim matricama putem identifikacije

$$(x_1, \dots, x_n) \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

tako da je svaki linearni operator s  $\mathbb{R}^n$  u  $\mathbb{R}^n$  oblika  $\mathbf{x} \mapsto T\mathbf{x}$  za neku matricu  $T \in M_n(\mathbb{R})$ .

Vratimo se sada natrag Hurwitzovom problemu.

**Napomena 1.2.** Primijetimo da je funkcija  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bilinearna ako i samo ako su sve njene koordinatne funkcije  $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bilinearne. Nadalje, funkcija (forma)  $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je bilinearna ako i samo ako je oblika

$$\phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle T_i \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk}^i x_j y_k$$

za neku jednoznačno određenu matricu  $T_i = (\lambda_{jk}^i) \in M_n(\mathbb{R})$ . Slijedi da je svaka bilinearna funkcija  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (odnosno množenje na  $\mathbb{R}^n$ ) oblika

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk}^1 x_j y_k, \dots, \sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk}^n x_j y_k \right),$$

za neke  $\lambda_{jk}^i \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq i, j, k \leq n$ ). Stoga, na originalni Hurwitzov problem možemo gledati kao na pitanje za koje prirodne brojeve  $n$  je moguće definirati množenje na  $\mathbb{R}^n$  s obzirom na koje je euklidska norma *multiplikativna*, tj. vrijedi

$$\|\mathbf{x}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|, \quad \text{za sve } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

**Zadatak 2.** Pretpostavimo da smo prostor  $\mathbb{R}^n$  opskrbili s operacijom množenja  $\cdot$  s obzirom na koje je euklidska norma multiplikativna. Dokažite da tada na  $\mathbb{R}^n$  možemo definirati novo množenje  $\star$  s obzirom na koje  $\mathbb{R}^n$  postaje unitalna algebra, te je euklidska norma na  $\mathbb{R}^n$  također multiplikativna.

*Uputa.* Neka je  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  proizvoljan jedinični vektor. Najprije dokažite da su oba pripadna operatora množenja  $L_{\mathbf{v}}, R_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ortogonalna (odnosno da čuvaju skalarni produkt). Zatim na  $\mathbb{R}^n$  definirajte

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} := R_{\mathbf{v}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot L_{\mathbf{v}}^{-1}(\mathbf{y}), \quad \text{za sve } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

i provjerite da to množenje zadovoljava traženja svojstva, pri čemu je pripadna jedinica dana s

$$\mathbf{e} := \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Koristeći Zadatak 2 i Napomenu 1.2, dobivamo:

**Propozicija 1.3.** *Hurwitzov problem ima pozitivno rješenje za  $n \in \mathbb{N}$  ako i samo ako na  $\mathbb{R}^n$  možemo definirati množenje s obzirom na koje  $\mathbb{R}^n$  postaje unitalna algebra i s obzirom na koje je euklidska norma multiplikativna.*

**Napomena 1.4.** Uzeviši u obzir Propoziciju 1.3, mi ćemo u nastavku pretpostavljati da su sve naše algebre  $A$  unitalne.

## 2 Realne Hurwitzove algebre – definicija i osnovna svojstva

**Definicija 2.1.** Za realnu algebru  $A$  kažemo da je **Hurwitzova (kompozicijska) algebra** ako  $A$  možemo opskrbiti sa skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  čija je inducirana norma multiplikativna s obzirom na operaciju množenja na  $A$ , tj. vrijedi

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|, \quad \text{za sve } a, b \in A.$$

Prema Propoziciji 1.3 imamo sljedeću reformulaciju Hurwitzovog problema:

**Hurwitzov problem - reformulacija:** Za koje prirodne brojeve  $n$  na unitarnom prostoru  $\mathbb{R}^n$  (sa standardnim skalarnim produktom) možemo definirati operaciju množenja s obzirom na koje je  $\mathbb{R}^n$  realna Hurwitzova algebra?

Prije nego li damo odgovor na Hurwitzov problem, u nastavku ćemo najprije opisati neka osnovna svojstva realnih Hurwitzovih algebri. Krećemo sa sljedećom opservacijom.

**Napomena 2.2.** Neka je  $A$  *konačnodimenzijska* realna algebra  $A$  opskrbljena s multiplikativnom normom (ne nužno induciranom iz skalarnog produkta). Onda je  $A$  algebra s dijeljenjem, te vrijedi da je  $A$  ili dimenzije 1 (pa stoga  $A \cong \mathbb{R}$ ) ili parne dimenzije.

Zaista, multiplikativnost norme implicira da su za sve  $a \in A \setminus \{0\}$  operatori  $L_a$  i  $R_a$  injektivni, stoga bijektivni prema teoremu o rangu i defektu. Nadalje, ako je  $A$  neparne dimenzije, prema Zadatku 1 je nužno  $A \cong \mathbb{R}$ .

Navedimo sada neke osnovne primjere Hurwitzovih algebri.

**Primjer 2.3.** Kao što znamo, euklidska norma je multiplikativna na realnim brojevima  $\mathbb{R}$ , kompleksnim brojevima  $\mathbb{C}$  i kvaternionima  $\mathbb{H}$  (za osnove o kvaternionima vidjeti [8]). Stoga su  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  i  $\mathbb{H}$  realne Hurwitzove algebre. Eksplicitno, imamo sljedeće identitete:

- $n = 1$

$$x_1^2 y_1^2 = (x_1 y_1)^2,$$

- $n = 2$

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2,$$

- $n = 4$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,$$

gdje su

$$z_1 = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4$$

$$z_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3$$

$$z_3 = x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2$$

$$z_4 = x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1.$$

Dakle, odgovor na Hurwitzov problem je potvrđan za  $n = 1, 2, 4$ .

Uskoro ćemo vidjeti da Hurwitzov problem također ima pozitivan odgovor i za  $n = 8$ . Štoviše,  $n = 1, 2, 4, 8$  su jedini takvi brojevi (Teorem 5.1). Dodatno naglasimo da *u ovom trenutku nije jasno da je svaka Hurwitzova algebra nužno konačnodimenzijska*, tako se a priori ne možemo pozivati na Napomenu 2.2.

**Napomena 2.4.** S obzirom da je norma  $\|\cdot\|$  na realnoj Hurwitzovoj algebri  $A$  inducirana iz skalarnog produkta  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , vrijedi *polarizacijski identitet*:

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2} (\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2), \quad \text{za sve } a, b \in A.$$

Nadalje, iz multiplikativnosti norme oĉito slijedi da je  $\|1_A\| = 1$  te  $\|a^{-1}\| = \|a\|^{-1}$  za sve invertibilne elemente  $a \in A$ .

**Zadatak 3.** Neka je  $A$  realna Hurwitzova algebra. DokaŹite da tada za sve  $a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$  vrijede sljedeći identiteti:

$$\begin{aligned} \langle a_1 b, a_2 b \rangle &= \langle a_1, a_2 \rangle \|b\|^2, \\ \langle ab_1, ab_2 \rangle &= \|a\|^2 \langle b_1, b_2 \rangle, \\ \langle a_1 b_1, a_2 b_2 \rangle + \langle a_1 b_2, a_2 b_1 \rangle &= 2 \langle a_1, a_2 \rangle \langle b_1, b_2 \rangle, \\ \langle a_1 a, b_1 b \rangle &= -\langle a_1 b, b_1 a \rangle, \quad \text{ako je } a \perp b. \end{aligned}$$

**Lema 2.5.** Neka je  $A$  realna Hurwitzova algebra. Tada vrijedi

$$a^2 = 2 \langle a, 1_A \rangle a - \|a\|^2 1_A, \quad \text{za sve } a \in A.$$

*Dokaz.* Fiksirajmo  $a \in A$ . Prema trećem i prvom identitetu Zadatka 3, za proizvoljan  $x \in A$  imamo

$$\begin{aligned} \langle x, a^2 - 2 \langle a, 1_A \rangle a + \|a\|^2 1_A \rangle &= \langle x, a^2 \rangle - 2 \langle x, a \rangle \langle a, 1_A \rangle + \|a\|^2 \langle x, 1_A \rangle \\ &= \langle x, a^2 \rangle - \langle x a, a \rangle - \langle x, a^2 \rangle - \|a\|^2 \langle x, 1_A \rangle \\ &= \|a\|^2 \langle x, 1_A \rangle - \|a\|^2 \langle x, 1_A \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, element  $a^2 - 2 \langle a, 1_A \rangle a + \|a\|^2 1_A$  je okomit na sve elemente iz  $A$  pa on mora biti jednak 0. Time dobivamo traŹenu jednakost.  $\square$

**Propozicija 2.6 (Jedinstvenost skalarnog produkta).** Na svakoj realnoj algebri  $A$  postoji najviše jedan skalarni produkt s obzirom na kojeg je  $A$  realna Hurwitzova algebra.

Posebno, ako su  $A$  i  $B$  realne Hurwitzove algebre te  $\phi : A \rightarrow B$  monomorfizam algebri, tada je  $\phi$  izometrija.

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $A$  Hurwitzova algebra s obzirom na skalarne produkte  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  i  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ . Prema polarizacijskom identitetu (Napomena 2.4) dovoljno je dokazati jednakost induciranih normi, tj. da za sve  $a \in A$  vrijedi  $\|a\|_1 = \|a\|_2$ . Neka je stoga  $a \in A$  proizvoljan. Prema Lemi 2.5 vrijedi

$$2 \langle a, 1_A \rangle_1 a - \|a\|_1^2 1_A = a^2 = 2 \langle a, 1_A \rangle_2 a - \|a\|_2^2 1_A.$$

Jer je  $\|1_A\|_1 = \|1_A\|_2 = 1$ , oĉito je  $\|a\|_1 = \|a\|_2$  za  $a \in \mathbb{R}1_A$ . Ako  $a \notin \mathbb{R}1_A$ , skup  $\{1_A, a\}$  je linearno nezavisan pa iz gornje jednakosti odmah slijedi  $\|a\|_1 = \|a\|_2$ .

Neka je sada  $B$  neka druga realna Hurwitzova algebra te neka je  $\phi : A \rightarrow B$  monomorfizam algebri. Oznaĉimo skalarne produkte na  $A$  i  $B$  redom s  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  i  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  te definirajmo fukciju  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$\langle a_1, a_2 \rangle_\phi := \langle \phi(a_1), \phi(a_2) \rangle_B.$$

Jer je preslikavanje  $\phi$  linearna injekcija, očito je  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$  skalarni produkt na  $A$ . Nadalje, inducirana norma  $\| \cdot \|_\phi$  je multiplikativna. Zaista, zbog multiplikativnosti preslikavanja  $\phi$  i norme  $\| \cdot \|_B$ , za sve  $a_1, a_2 \in A$  imamo

$$\begin{aligned}\|a_1 a_2\|_\phi &= \|\phi(a_1 a_2)\|_B = \|\phi(a_1)\phi(a_2)\|_B = \|\phi(a_1)\|_B \|\phi(a_2)\|_B \\ &= \|a_1\|_\phi \|a_2\|_\phi.\end{aligned}$$

Zaključujemo da je  $A$  Hurwitzova algebra i s obzirom na skalarni produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$  pa iz prve tvrdnje slijedi  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi = \langle \cdot, \cdot \rangle_A$ . Dakle,

$$\langle \phi(a_1), \phi(a_2) \rangle_B = \langle a_1, a_2 \rangle_A, \quad \text{za sve } a_1, a_2 \in A,$$

odnosno  $\phi$  je izometrija. □

Na svakoj realnoj Hurwitzovoj algebri  $A$  definiramo **involuciju**, kao unarnu operaciju

$$* : A \rightarrow A, \quad a^* := 2\langle a, 1_A \rangle 1_A - a. \quad (2.1)$$

Primijetimo da je na  $A = \mathbb{R}$  involucija identiteta, dok se za  $A = \mathbb{C}$ , odnosno  $A = \mathbb{H}$ , involucija podudara s uobičajenim konjugiranjem kompleksnih brojeva, odnosno kvaterniona. Osnovna svojstva involucije dana su u sljedećem zadatku:

**Zadatak 4.** Dokažite da involucija na realnoj Hurwitzovoj algebri  $A$  zadovoljava sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned}(\lambda a + \mu b)^* &= \lambda a^* + \mu b^*, \\ (a^*)^* &= a \\ a^* a &= a a^* = \|a\|^2 1_A \\ (ab)^* &= b^* a^* \\ \langle ax, y \rangle &= \langle x, a^* y \rangle \\ \langle xa, y \rangle &= \langle x, y a^* \rangle \\ \langle x^*, y^* \rangle &= \langle x, y \rangle,\end{aligned}$$

gdje su  $a, b, x, y \in A$  te  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Napomena 2.7.** Neka je  $A$  realna Hurwitzova algebra  $A$ . Primijetimo da za  $a \in A$  zadnja dva svojstva Zadatka 4 možemo reinterpretirati u terminu pripadnih operatora  $L_a$  i  $R_a$  kao

$$\langle L_a x, y \rangle = \langle x, L_{a^*} y \rangle \quad \text{i} \quad \langle R_a x, y \rangle = \langle x, R_{a^*} y \rangle$$

za sve  $x, y \in A$ . Drugim riječima, vrijedi  $(L_a)^* = L_{a^*}$  i  $(R_a)^* = R_{a^*}$ , tj. hermitski adjungirani operatori od  $L_a$  i  $R_a$  su redom operatori  $L_{a^*}$  i  $R_{a^*}$ .

Uvedimo sada i pojam alternativnih algebri:

**Definicija 2.8.** Za algebru  $A$  kažemo da je **alternativna** ako za sve  $a, b \in A$  vrijede identiteti

$$a(ab) = (aa)b, \quad (2.2)$$

$$(ba)a = b(aa). \quad (2.3)$$

Na svakoj algebri  $A$  možemo definirati **asocijator**, kao trilinearno preslikavanje

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : A \times A \times A \rightarrow A, \quad [a, b, c] := (ab)c - a(bc).$$

Koristeći asocijator, jednakosti (2.2) i (2.3) možemo redom zapisati u obliku

$$[a, a, b] = 0 \quad \text{i} \quad [b, a, a] = 0.$$

**Zadatak 5.** Dokažite da je algebra  $A$  alternativna, ako i samo ako je njen asocijator *alternirajuće preslikavanje*, tj. za svaku permutaciju  $\sigma \in S_3$  i svaki izbor elemenata  $a_1, a_2, a_3 \in A$  vrijedi

$$[a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}] = \text{sgn}(\sigma)[a_1, a_2, a_3].$$

**Napomena 2.9.** Iz Zadatka 5 posebno slijedi da u alternativnim algebrama vrijedi tzv. **fleksibilni identitet**

$$a(ba) = (ab)a, \quad (2.4)$$

tako da u njima produkti oblika  $a^2b$ ,  $ab^2$  i  $aba$  imaju jednoznačno značenje.

**Zadatak 6.** Dokažite da u svakoj alternativnoj algebri  $A$  vrijede tzv. **Moufangini identiteti**<sup>†</sup>:

$$(aba)c = a(b(ac)), \quad (2.5)$$

$$c(bab) = ((cb)a)b, \quad (2.6)$$

$$(bc)(ab) = b(ca)b, \quad (2.7)$$

za sve  $a, b, c \in A$ .

**Zadatak 7.** Koristeći Zadatak 6, dokažite sljedeći **Artinov teorem**<sup>‡</sup>: Algebra  $A$  je alternativna ako i samo ako je svaka podalgebra od  $A$  generirana s dva elementa asocijativna.

*Uputa.* Pretpostavimo da je  $A$  alternativna algebra. Za proizvoljna dva elementa  $a, b \in A$  i  $k \in \mathbb{N}$  označimo s  $p_k = p_k(a, b)$  bilo koji neasocijativni produkt oblika  $x_1x_2 \cdots x_k$  (s nekim poretom zagrada) gdje je svaki  $x_i \in \{a, b\}$ . Kako bismo dokazali da je podalgebra od  $A$  generirana s  $a$  i  $b$  asocijativna, dovoljno je dokazati da vrijedi  $[p_k, q_l, r_m] = 0$  za sve neasocijativne produkte  $p_k(a, b)$ ,  $q_l(a, b)$  i  $r_m(a, b)$ . Potonju tvrdnju dokažite indukcijom po  $n = k + l + m$ .

**Napomena 2.10.** Iz Zadatka 7 posebno slijedi da je svaka alternativna algebra **potencijski asocijativna**, što po definiciji znači da je svaka njena podalgebra generirana jednim elementom asocijativna. Primijetimo da je u potencijski asocijativnim algebrama potenciranje svakog elementa jednoznačno definirano, tj. ne ovisi o načinu postavljanja zagrada.

**Zadatak 8.** Neka je  $A$  alternativna algebra i  $a \in A$  invertibilni element s inverzom  $b \in A$ . Koristeći Moufangine identitete (Zadatak 6), dokažite da za svaki  $x \in A$  vrijedi

$$b(ax) = x = (xa)b.$$

Odavde zaključite da je inverz svakog invertibilnog  $a \in A$  nužno jedinstven. Kao i obično, označavat ćemo ga s  $a^{-1}$ .

<sup>†</sup>Ruth Moufang (1905.–1977.), njemačka matematičarka

<sup>‡</sup>Emil Artin (1898.–1962.), austrijski matematičar

**Korolar 2.11.** *Neka je  $A$  realna Hurwitzova algebra.*

- (a)  *$A$  je alternativna algebra.*  
 (b)  *$A$  je algebra s dijeljenjem. Štoviše, svaki nenul element  $a \in A$  ima jedinstven inverz dan s*

$$a^{-1} = \frac{1}{\|a\|^2} a^*.$$

*Dokaz.* Kako bismo dokazali tvrdnju (a), najprije primijetimo da za sve  $a, b \in A$  vrijedi

$$a^*(ab) = (a^*a)b = \|a\|^2 b. \quad (2.8)$$

Zaista, koristeći Zadatke 3 i 4, za proizvoljan element  $c \in A$  imamo

$$\langle a^*(ab), c \rangle = \langle ab, ac \rangle = \|a\|^2 \langle b, c \rangle = \langle (a^*a)b, c \rangle.$$

Jednakost (2.2) sada dobivamo tako što u (2.8) uvrstimo definiciju (2.1) od  $a^*$ , dok jednakost (2.3) dobivamo iz (2.2) primjenom involucije.

Tvrdnja (b) slijedi direktno iz četvrtog svojstva Zadatka 4 te Zadatka 8.  $\square$

Neka je  $A$  realna Hurwitzova algebra. Za element  $a \in A$  redom definiramo njegov **realni i imaginarni dio**:

$$\operatorname{Re} a := \frac{1}{2}(a + a^*) \quad \text{ i } \quad \operatorname{Im} a := \frac{1}{2}(a - a^*).$$

Ako je  $a = \operatorname{Re} a$ , kažemo da je  $a$  **realan element**, a ako je  $a = \operatorname{Im} a$  kažemo da je  $a$  **čisto imaginarni element**. Očito je element  $a \in A$  realan ako i samo ako je  $a \in \mathbb{R}1_A$ .

**Zadatak 9.** Neka je  $A$  realna Hurwitzova algebra. Označimo s  $\operatorname{Im}(A)$  potprostor svih čisto imaginarnih elemenata u  $A$ . Dokažite:

- (a)  $\operatorname{Im}(A) = \{a \in A : a^2 \in \mathbb{R}1_A, a \notin \mathbb{R}1_A\} \cup \{0\}$ .  
 (b)  $A = (\mathbb{R}1_A) \oplus \operatorname{Im}(A)$  (ortogonalna suma potprostora).

### 3 Cayley-Dicksonova konstrukcija

Za sada znamo da (do na izomorfizam) postoje tri realne Hurwitzove algebre:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  i  $\mathbb{H}$ . Štoviše imamo prirodne inkluzije  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ . Sada ćemo opisati tzv. **Cayley-Dicksonovu konstrukciju**<sup>§,¶</sup> iz koje ćemo dobiti i još jednu realnu Hurwitzovu algebru dimenzije 8 – *algebru oktoniona*  $\mathbb{O}$ .

U tu svrhu fiksirajmo proizvoljnu realnu Hurwitzovu algebru  $A$  dimenzije barem 2. Jer je  $\mathbb{R}1_A \subset A$ ,  $A$  svakako sadrži (barem jednu) pravu podalgebru. Neka je  $B$  bilo koja prava konačnodimenzionalna podalgebra od  $A$ . Izaberimo proizvoljan element  $j \in A$  norme 1 koji je ortogonalan na  $B$ . Posebno, jer je  $1_A \in B$ , imamo  $\langle j, 1_A \rangle = 0$ . Po definiciji involucije slijedi

$$j^* = -j \quad \implies \quad j^2 = -1_A.$$

<sup>§</sup>Arthur Cayley (1821.–1895.), britanski matematičar

<sup>¶</sup>Leonard Eugene Dickson (1874.–1954.), američki matematičar

Također, prema definiciji involucije na realnim Hurwitzovim algebrama,  $B$  je trivijalno zatvorena s obzirom na involuciju, tako da za sve  $b, c \in B$  imamo  $\langle b, c^*j \rangle = \langle c^*b, j \rangle = 0$ . Odavde slijedi da je

$$Bj := \{bj : b \in B\}$$

potprostor od  $A$  koji je ortogonalan na  $B$ . Nadalje, jer je algebra  $A$  alternativna (Korolar 2.11), imamo

$$(xj)(j^{-1}) = (xj)(-j) = -(xj)j = -x(j^2) = x, \quad \text{za sve } x \in A,$$

(mogli smo se i direktno pozvati na Zadatak 8), tako da je preslikavanje

$$\phi : B \rightarrow Bj, \quad \phi(b) := bj$$

linearna bijekcija. Posebno je

$$\dim_{\mathbb{R}} Bj = \dim_{\mathbb{R}} B. \quad (3.1)$$

Neka je

$$C := B \oplus Bj \subseteq A.$$

Zbog (3.1) je  $\dim_{\mathbb{R}} C = 2 \dim_{\mathbb{R}} B$ . Tvrdimo da je  $C$  podalgebra od  $A$  te da za sve  $a, b, c, d \in B$  vrijede sljedeće jednakosti:

$$(a + bj)^* = a^* - bj, \quad (3.2)$$

$$(a + bj)(c + dj) = (ac - d^*b) + (bc^* + da)j. \quad (3.3)$$

Zaista, jer je  $j \perp B$ , za  $b \in B$  imamo

$$0 = 2\langle j, b^* \rangle 1_A = 2\langle jb, 1_A \rangle 1_A = (jb)^* + jb = -b^*j + jb,$$

tako da je

$$jb = b^*j, \quad \text{za sve } b \in B. \quad (3.4)$$

Odavde dobivamo jednakost (3.2). Kako bismo dokazali jednakost (3.3), dovoljno je dokazati sljedeće identitete:

$$a(dj) = (da)j, \quad (3.5)$$

$$(bj)c = (bc^*)j, \quad (3.6)$$

$$(bj)(dj) = -d^*b. \quad (3.7)$$

Jer je  $Bj \perp B$ , koristeći (3.4) te Zadatke 3 i 4, za proizvoljan  $x \in A$  redom imamo

$$\begin{aligned} \langle a(dj), x \rangle &= \langle dj, a^*x \rangle = \langle (dj)^*, (a^*x)^* \rangle = -\langle dj, x^*a \rangle = \langle da, x^*j \rangle \\ &= \langle da, -xj + 2\langle x, 1_A \rangle j \rangle = -\langle da, xj \rangle = \langle (da)j, x \rangle, \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} \langle (bj)(dj), x \rangle &= \langle bj, x(dj)^* \rangle = \langle (bj)^*, (x(dj)^*)^* \rangle = -\langle jb^*, (dj)x^* \rangle \\ &= -\langle bj, (dj)x^* \rangle = \langle bx^*, (dj)j \rangle = -\langle bx^*, d \rangle = -\langle d^*b, x \rangle. \end{aligned}$$

Time smo dokazali jednakosti (3.5) i (3.7). Jednakost (3.6) dobivamo primjenom involucije na jednakost (3.5), uz supstituciju  $a \leftrightarrow c^*$  i  $d \leftrightarrow b$ .

Napokon, jer je norma na  $A$  multiplikativna, iz (3.3) dobivamo identitet

$$(\|a\|^2 + \|b\|^2)(\|c\|^2 + \|d\|^2) = \|ac - d^*b\|^2 + \|bc^* + da\|^2,$$

iz kojeg slijedi

$$\langle ac, d^*b \rangle = \langle bc^*, da \rangle.$$

Dakle, za sve  $a, b, c, d \in B$  vrijedi

$$\langle d(ac), b \rangle = \langle (da)c, b \rangle,$$

odakle dobivamo

$$d(ac) = (da)c.$$

Time smo dokazali sljedeći rezultat:

**Propozicija 3.1.** *Svaka prava konačnodimenzijska podalgebra realne Hurwitzove algebre je nužno asocijativna.*

## 4 Algebra oktoniona $\mathbb{O}$

Primjenom Cayley-Dicksonove konstrukcije na algebru kvaterniona  $\mathbb{H}$ , dolazimo do algebre oktoniona  $\mathbb{O}$  koju možemo konkretno realizirati na sljedeći način:

- Kao unitarni prostor,  $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ . Označimo s  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_8\}$  kanonsku ortonormiranu bazu za  $\mathbb{R}^8$ . Stavimo

$$1 := \mathbf{e}_1 \quad \text{ i } \quad e_k := \mathbf{e}_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 7),$$

tako da se svaki  $a \in \mathbb{O}$  može na jedinstven način prikazati u obliku

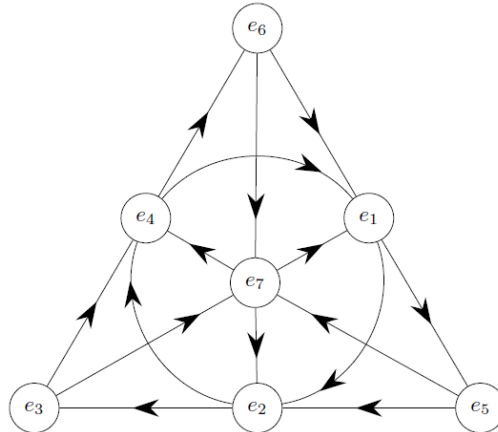
$$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_7e_7,$$

za neke realne brojeve  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ .

- Slično kao i na kvaternionima  $\mathbb{H}$ , na prostoru  $\mathbb{O}$  definiramo operaciju množenja tako da najprije specificiramo međusobne produkte elemenata  $e_1, \dots, e_7$ . Najprije deklariramo da je 1 multiplikativna jedinica u  $\mathbb{O}$  te definiramo

$$e_1^2 = e_2^2 = \dots = e_7^2 = -1.$$

Međusobne produkte različitih  $e_j e_k$  najjednostavnije je zapamtiti koristeći sljedeću sliku:



To je ilustracija tzv. **Fanove ravnine**<sup>‡</sup>, odnosno konačne projektivne ravnine reda 2. Fanova ravnina ukupno ima 7 točaka ( $e_1, \dots, e_7$ ) i 7 pravaca (stranice trokuta, visine trokuta i kružnica), svake dvije točke određuju jedinstven pravac koji njima prolazi, svaki pravac sadrži točno tri točke (koje su ciklički uređene strelicama kao na slici), te kroz svaku točku prolaze točno tri pravca. Dakle, ako je  $(e_i, e_j, e_k)$  ciklički uređena trojka, tada je

$$e_i e_j = e_k \quad \text{te} \quad e_k e_j = -e_i.$$

Npr. imamo:  $e_2 e_1 = -e_4$ ,  $e_2 e_6 = e_7$ ,  $e_3 e_6 = -e_4$ ,  $e_5 e_4 = -e_7$ ,  $e_7 e_6 = -e_2$ .

Definiciju množenja zatim po bilinearnosti proširujemo na čitav  $\mathbb{O}$  i na taj način  $\mathbb{O}$  dobiva strukturu algebre.

- Nije teško (ali je naporno) provjeriti da je euklidska norma na  $\mathbb{O}$  multiplikativna s obzirom na prethodno definirano množenje, tako da je  $\mathbb{O}$  zaista realna Hurwitzova algebra dimenzije 8.
- S obzirom da je  $\mathbb{O}$  realna Hurwitzova algebra, ona je alternativna (Korolar 2.11). Nadalje, algebra  $\mathbb{O}$  nije asocijativna, jer npr. imamo

$$-e_6 = (e_1 e_2) e_3 \neq e_1 (e_2 e_3) = e_6.$$

- Kao i na svakoj realnoj Hurwitzovoj algebri, involucija na  $\mathbb{O}$  je definirana formulom (2.1). Eksplicitno, imamo

$$(a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_7 e_7)^* = a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - \dots - a_7 e_7.$$

Nije teško direktno iz definicije množenja na  $\mathbb{O}$  provjeriti da za sve  $a \in \mathbb{O}$  vrijedi poznati identitet

$$a^* a = a a^* = \|a\|^2 1.$$

**Definicija 4.1.** Ovako definirana (Hurwitzova) algebra  $\mathbb{O}$  zove se **algebra oktoniona**.

**Napomena 4.2.** Oktonione je prvotno otkrio J. T. Graves<sup>\*\*</sup> 1894. godine, ubrzo nakon što je W. R. Hamilton<sup>††</sup> otkrio kvaternione. Oktonione je nezavisno otkrio i A. Cayley, a njegov članak o tom oktriću (objavljen 1895. godine) izašao je ranije nego što je objavljen Gravesov člank. Zbog toga se otkriće oktoniona često (i nepravdeno) pripisuje samo Cayleyu te se njemu u čast govori o Cayleyevim okotonionima ili Cayleyevim brojevima.

Za detaljnije informacije o povijesti otkrića oktoniona s pripadnim referencama, kao i o njihovim dodatnim svojstvima i primjenama, čitatelja upućujemo na [3] (vidjeti također i [7]).

<sup>‡</sup> Gino Fano (1871.–1952.), talijanski matematičar

<sup>\*\*</sup> John Thomas Graves (1806.–1870.), irski matematičar i pravnik

<sup>††</sup> William Rowan Hamilton (1805.–1865.), irski matematičar

## 5 Klasifikacija realnih Hurwitzovih algebri

Koristeći prethodna razmatranja, sada možemo (do na izomorfizam) u potpunosti klasificirati realne Hurwitzove algebre. Neka je stoga  $A$  realna Hurwitzova algebra.

- Ako je  $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$ , tada je  $A = \mathbb{R}1_A \cong \mathbb{R}$ .
- Neka je  $\dim_{\mathbb{R}} A > 1$ . Tada je  $B_1 := \mathbb{R}1_A$  prava podalgebra od  $A$  pa Cayley-Dicksonovom konstrukcijom na  $B_1$  dobivamo dvodimenzionalnu podalgebru  $B_2$  od  $A$  koja je izomorfna s algebrom kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$ . Posebno, ako je  $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$ , imamo  $A \cong \mathbb{C}$ .
  - Ako je  $\dim_{\mathbb{R}} A > 2$ , Cayley-Dicksonovom konstrukcijom na podalgebru  $B_2$  dolazimo do podalgebre  $B_4$  dimenzije 4 koja je izomorfna algebri kvaterniona  $\mathbb{H}$  (Zadatak 10). Dakle,

$$2 < \dim_{\mathbb{R}} A \leq 4 \implies A \cong \mathbb{H},$$

tako da posebno ne postoje trodimenzionalne realne Hurwitzove algebre.

- Ako je  $\dim_{\mathbb{R}} A > 4$ , Cayley-Dicksonovom konstrukcijom na podalgebru  $B_4$  dolazimo do podalgebre  $B_8$  dimenzije 8. Primijetimo da je  $B_8$  neasocijativna algebra. Naime, neka je  $B_8 = B_4 \oplus B_4j$ , gdje je  $j \in A$  kao u Cayley-Dicksonovoj konstrukciji. Kako algebra  $B_4 \cong \mathbb{H}$  nije komutativna, postoje elementi  $a, b \in B_4$  takvi da je  $ab \neq ba$ . Tada je i  $(ba)j \neq (ab)j$  pa koristeći svojstvo (3.5) dobivamo

$$a(bj) = (ba)j \neq (ab)j.$$

Štoviše, algebra  $B_8$  je izomorfna algebri oktoniona  $\mathbb{O}$  (Zadatak 10). Dakle,

$$4 < \dim_{\mathbb{R}} A \leq 8 \implies A \cong \mathbb{O}.$$

- Ostaje još primijetiti da tu Cayley-Dicksonova konstrukcija staje. Naime, ako bi postojala realna Hurwitzova algebra  $A$  dimenzije veće od 8, tada bi prema prethodnom razmatranju  $A$  sadržavala neasocijativnu pravu podalgebru  $B_8 \cong \mathbb{O}$ , što je kontradikcija s Propozicijom 3.1.

**Zadatak 10.** Koristeći iste oznake kao u prethodnom razmatranju, dokažite da je  $B_4 \cong \mathbb{H}$  i  $B_8 \cong \mathbb{O}$ .

Sve zajedno, dokazali smo sljedeći važan teorem:

**Teorem 5.1 (Hurwitzov teorem, 1898.).** *Do na izomorfizam postoje točno četiri realne Hurwitzove algebre: algebra realnih brojeva  $\mathbb{R}$ , algebra kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$ , algebra (Hamiltonovih) kvaterniona  $\mathbb{H}$  i algebra (Cayleyevih) oktoniona  $\mathbb{O}$ .*

**Napomena 5.2.** Hurwitzov teorem ima razna poopćenja, između ostalog na algebre nad proizvoljnim poljima (vidjeti npr. [1, 2, 7, 12, 14, 17]). Također, tvrdnja Hurwitzovog teorema vrijedi i uz znatno slabije pretpostavke na algebru  $A$ . Tako je npr. Albert 1947. godine dokazao da su  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  i  $\mathbb{O}$  jedine unitalne konačnodimenzionalne realne algebre koje dopuštaju multiplikativnu normu. Urbanik i Wright<sup>††,§§</sup> su 1960. generalizirali

<sup>††</sup>Kazimierz Urbanik (1930.–2005.), poljski matematičar

<sup>§§</sup>Fred Boyer Wright, Jr. (1925.–2006.), američki matematičar

Albertov teorem ispustivši pretpostavku konačne dimenzionalnosti algebre [17] (također vidjeti pregledni rad [15]).

Nadalje, M. Zorn<sup>¶¶</sup> je 1931. godine dokazao sljedeće direktno poopćenje Frobeniusovog teorema: do na izomorfizam,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  i  $\mathbb{O}$  su jedine konačnodimenzijske alternativne realne algebre s dijeljenjem [18]. Novo razdoblje u teoriji realnih algebri s dijeljenjem otvorio je Hopf 1940. godine, dokazavši da konačnodimenzijska komutativna realna algebra s dijeljenjem može imati samo dimenziju jedan ili dva, te da je dimenzija svake realne algebre s dijeljenjem ili potencija broja dva ili beskonačna [9]. Hopfove metode bile su topološke i nadahnule su daljnji razvoj koji je kulminirao 1958. godine tzv.  $(1, 2, 4, 8)$ -teoremom, kojeg su dokazali R. Bott<sup>\*\*\*</sup>, J. Milnor<sup>†††</sup> i M. Kervaire<sup>‡‡‡</sup> koristeći alate algebarske topologije [4, 13].  $(1, 2, 4, 8)$ -teorem ukratko tvrdi da je svaka konačnodimenzijska realna algebra s dijeljenjem nužno dimenzije 1, 2, 4 ili 8.

Za recentnije rezultate o klasifikaciji realnih algebri s dijeljenjem algebra čitatelja upućujemo na [6], dok za detaljniji pregled bogate teorije neasocijativnih algebri upućujemo na [5, 16].

## Literatura

- [1] A. A. Albert, *Non-associative algebras. I: Fundamental concepts and isotopy*, Ann. Math. (2), **43** (1942), 685–707.
- [2] A. A. Albert, *Absolute valued real algebras*, Ann. of Math. (2), **48** (1947), 495–501.
- [3] J. C. Baez, *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 145–205.
- [4] R. Bott & J. W. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc., **64** (1958), 87–89.
- [5] P. L. Clark, *Nonassociative Algebras*, University of California, Irvine, 2010. <https://www.math.uci.edu/~brusso/Clarknonassocalgebra22pp.pdf>
- [6] E. Darpo, *Some modern developments in the theory of real division algebras*, Proc. Estonian Acad. Sci. **59**(1) (2010), 53–59.
- [7] H.-D. Ebbinghaus et al., *Numbers*, translated from the second 1988 German edition by H. L. S. Orde Translation edited and with a preface by J. H. Ewing, Graduate Texts in Mathematics Readings in Mathematics, 123, Springer, New York, 1991.
- [8] I. Gogić, *Quaternions and the Frobenius theorem*, Huawei materials for student competitions in mathematics, 2025.
- [9] H. Hopf, *Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra*, Comment. Math. Helv. **13** (1940), 219–239.
- [10] A. Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1898, 309–316.
- [11] A. Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen*, Math. Ann., **88** (1923), 1–25.
- [12] L. Ingelstam, *Non-associative normed algebras and Hurwitz’ problem*, Ark. Mat., **5** (1964), 231–238.
- [13] M. A. Kervaire, *Non-parallelizability of the  $n$ -sphere for  $n > 7$* , Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A., **44** (3) (1958), 280–283.
- [14] R. Précenth, *The  $(1, 2, 4, 8)$ -Theorem for Composition Algebras*, Uppsala University, Department of Mathematics, U.U.D.M. Project Report 2013:11, June 2013, <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:627712/FULLTEXT01.pdf>
- [15] A. Rodriguez Palacios, *Absolute valued algebras, and absolute-valued Banach spaces*, Adv. Courses Math. Anal. I, 99–155, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2004.

---

<sup>¶¶</sup>Max August Zorn (1906.–1993.), njemački matematičar (poznat po Zornovoj lemi iz teorije skupova)

<sup>\*\*\*</sup>Raoul Bott (1923.–2005.), mađarsko-američki matematičar

<sup>†††</sup>John Willard Milnor (1931.–), američki matematičar

<sup>‡‡‡</sup>Michel André Kervaire (1927.–2007.), francuski matematičar

- [16] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York & London, 1966.
- [17] K. Urbanik, F. B. Wright, *Absolute-valued algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 861–866.
- [18] M. A. Zorn, *Theorie der alternativen Ringe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **8** (2) (1931), 123–147.