SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Bartol Gulam, Bruno Brščić

Maksimalnost Jordanove polugrupe operatora množenja formalno realnih spin faktora

Zagreb, 2026.

Ovaj rad izrađen je u Zavodu za matematičku analizu Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu pod vodstvom prof. dr. sc. Ilje Gogića i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2025./2026.

Popis kratica i oznaka

$\mathbb{F}$	općenito polje
$\mathbb{R}$	polje realnih brojeva
$\mathbb{C}$	polje kompleksnih brojeva
$\mathbb{H}$	algebra kvaterniona
$\mathbb{O}$	algebra oktoniona
$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$	algebra svih $\mathbb{F}$-linearnih endomorfizama vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$
$\mathrm{GL}(V)$	opća linearna grupa vektorskog prostora V
$\mathrm{SL}(V)$	specijalna linearna grupa vektorskog prostora V
$\mathrm{JMS}(\mathcal{J})$	Jordanova multiplikacijska polugrupa Jordanove algebre $\mathcal{J}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru (najčešće standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$)
$\| \cdot \|$	norma na realnom vektorskom prostoru (najčešće euklidska norma na $\mathbb{R}^n$)
$Spin_n$	formalno realni spin faktor $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$
$M_n(\mathbb{F})$	algebra $n \times n$ matrica nad poljem $\mathbb{F}$
$Sym_n(\mathbb{F})$	Jordanova algebra $n \times n$ simetričnih matrica nad poljem $\mathbb{F}$
$H_n(\mathbb{C})$	realna Jordanova algebra $n \times n$ hermitskih matrica nad poljem $\mathbb{C}$
$H_n(\mathbb{H})$	realna Jordanova algebra $n \times n$ hermitskih matrica nad kvaternionima $\mathbb{H}$
$H_3(\mathbb{O})$	Albertova algebra hermitskih 3×3 matrica nad oktonionima $\mathbb{O}$
r	rang matrice/operatora
det	determinanta matrice/operatora
tr	trag matrice/operatora
I_V	identiteta na vektorskom prostoru V
$\mathbb{F}[t]$	algebra polinoma u varijabli t s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$	algebra
$A, B, \ldots$	matrica/operator

Sadržaj rada

1 Uvod **1**

1.1 Početci kvantne mehanike 1

1.2 Opservable i pojava Jordanovih algebri 1

1.3 Spin faktori 3

1.4 Jordanova multiplikacijska polugrupa 4

2 Cilj rada **8**

3 Plan rada **8**

4 Rezultati **9**

4.1 Osnovne definicije i teorija 9

4.1.1 Peirceova dekompozicija 12

4.2 Transvekcije 15

4.3 Spin faktori 16

4.3.1 Osnovna motivacija i definicija 16

4.3.2 Formalno realni spin faktori 21

4.4 Matrični prikaz operatora množenja L_a 24

4.5 Idempotenti i anizotropna preslikavanja 27

4.6 Od anizotropnih preslikavanja do transvekcija 33

4.7 Od ravninskih transvekcija do grupe SL($Spin_n$) 39

4.8 Završni prijelaz od SL($Spin_n$) do svih endomorfizama 50

5 Zaključak **53**

6 Zahvale **54**

Popis literature **55**

Sažetak **57**

Summary **58**

1 Uvod

1.1 Početci kvantne mehanike

Izvorna motivacija za uvođenje Jordanovih algebri proizašla je iz potrebe za podobnim matematičkim okvirom za kvantnu mehaniku. U svrhu boljeg razumijevanja Jordanovih algebri, krenimo od početaka kvantne mehanike.

Kvantna mehanika fizikalna je teorija nastala početkom prošlog stoljeća kao odgovor na pitanja koja klasična fizika nije mogla objasniti: zračenje crnog tijela, fotoelektrični učinak, opis gibanja elektrona u atomu vodika... Smatra se jednom od najuspješnijih teorija u fizici. Početak kvantne mehanike obično se pripisuje radu Maxa Plancka iz 1900. o zračenju crnog tijela u kojem je iznio ideju o kvantizaciji energije. 1905. godine Einstein je uveo hipotezu o svjetlosnim kvantima, čime je pokrenuta velika rasprava u svijetu fizike. 1925. godine Werner Heisenberg formulirao je pristup kvantnoj mehanici koji se oslanjao na opažljive i mjerljive veličine, bez klasičnog opisa elektronskih orbita; taj je rad doveo do matrične mehanike. Na njezinu su daljnjem razvoju uz Heisenberga radili Max Born i Pascual Jordan, po kojem su Jordanove algebre dobile ime.

Iako je nemoguće navesti imena svih koji su doprinijeli stvaranju i razvoju kvantne mehanike, kao ni sve njihove doprinose, spomenimo još Erwina Schrödingera kojem dugujemo valnu funkciju i valnu mehaniku, i Paula Diraca koji je, između ostalog, pokazao ekvivalentnost matričnomehaničkog i valnomehaničkog pristupa.

Više o povijesti kvantne mehanike može se pronaći u [18] i [24].

1.2 Opservable i pojava Jordanovih algebri

Kako je ranije navedeno, Heisenbergov rad iz 1925. postavio je opservable u središte novog formalizma. Matematička pitanja povezana s tim formalizmom navela su Pascuala Jordana da početkom 1930-ih razvija neasocijativne algebarske strukture koje danas nose njegovo ime. Daljnje izlaganje prati [19].

Počnimo od definicije onoga što u fizici promatramo i na čemu provodimo mjerenja, fizikalnog sustava.

Definicija 1.1. Fizikalni sustav je trojka $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \langle , \rangle)$, gdje je $\mathcal{O}$ skup opservabli, $\mathcal{S}$ skup stanja i $\langle , \rangle : \mathcal{O} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ funkcija koja opservabli A i stanju ϕ pridružuje očekivanu vrijednost $\langle A, \phi \rangle$ opservable A u stanju ϕ. Svakoj opservabli A pridružen je mjerni uređaj s omeđenom skalom $\mathrm{Sc}(A) \subset \mathbb{R}$.

Fizikalni su sustavi opisani aksiomima. Na opservablama možemo definirati operacije zbrajanja, množenja realnim skalarom i potenciranja. Fizikalno te bi operacije odgovarale zbroju očekivanja mjerenja te dvije opservable, mjerenju opservable uređajem koji ima reskaliranu skalu i mjerenju opservable uređajem čija se skala razlikuje za odgovarajuću potenciju. Također bismo htjeli moći množiti opservable. Razlog tome je što operatorsko-algebarski formalizam omogućuje korištenje snažne matematičke aparature: opservable se pritom promatraju kao samoadjungirani elementi C^*-algebre [24]. Međutim, fizikalno množenje opservabli ne možemo protumačiti kao što smo protumačili zbrajanje jer umnožak očekivanja izmjerenih vrijednosti ne mora odgovarati očekivanju umnoška. Pokušamo li naivno uvesti množenje, ne zamarajući se fizikalnom interpretacijom, svejedno dolazimo do problema. Naime, opservable su standardno dane hermitskim matricama, tj. operatorima. U konačnodimenzionalnom matričnom modelu opservable su hermitske matrice; njihove su svojstvene vrijednosti realne i predstavljaju

moguće ishode mjerenja. Budući da su hermitske matrice unitarno dijagonalizabilne, te se svojstvene vrijednosti pojavljuju na dijagonali dijagonaliziranog oblika.

Na ideju novog množenja došao je Jordan, tako da je definirao *simetrizirani produkt* opservabli A i B na sljedeći način:

$$A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA).$$

Uočimo da je Jordanov produkt hermitskih matrica (operatora) ponovno hermitska matrica (operator): neka su A i B hermitske matrice ($A^* = A,\ B^* = B$). Tada vrijedi:

$$(A \circ B)^* = \left(\frac{1}{2}(AB + BA)\right)^* = \frac{1}{2}((AB)^* + (BA)^*) = \frac{1}{2}(B^*A^* + A^*B^*) = \frac{1}{2}(BA + AB) = A \circ B$$

Prema tome, ima smisla množiti opservable na ovako opisan način.

Osvrnimo se na neka svojstva ovako definiranog množenja, koje ćemo ponekad zvati simetrizirani produkt. Ono je komutativno:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA) = \frac{1}{2}(BA + AB) = B \circ A.$$

Međutim, množenje $\circ$ općenito nije asocijativno. Primjerice, za hermitske matrice

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$(A \circ B) \circ C = \frac{1}{2}C \neq \frac{1}{4}C = A \circ (B \circ C).$$

Umjesto asocijativnosti, simetrizirani produkt zadovoljava takozvani *Jordanov identitet:*

$$\begin{aligned}
((A \circ A) \circ B) \circ A &= \left(\frac{1}{2}(AA + AA) \circ B\right) \circ A \\
&= \frac{1}{2}(AAB + BAA) \circ A \\
&= \frac{1}{4}(AAAB + AABA + ABAA + BAAA) \\
&= \left(\frac{1}{2}(AA + AA)\right) \circ \left(\frac{1}{2}(BA + AB)\right) \\
&= (A \circ A) \circ (B \circ A).
\end{aligned}$$

Jordan je prilikom definiranja algebri (koje je izvorno nazvao sustavima r-brojeva) htio uhvatiti srž simetriziranog produkta. Uočimo da ne možemo definirati simetrizirani produkt na prostoru na kojem već nemamo definirano asocijativno množenje. Smatrao je da će se komutativno bilinearno množenje esencijalno ponašati kao simetrizirani produkt ako zadovoljava Jordanov identitet. Došao je do sljedeće definicije:

Definicija 1.2. *Jordanova algebra nad poljem* $\mathbb{F}$ (obično karakteristike različite od 2) je vektorski prostor

$\mathcal{J}$ nad poljem $\mathbb{F}$ s bilinearnim produktom

$$\circ : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \quad (x, y) \mapsto x \circ y,$$

takvim da za sve $x, y \in \mathcal{J}$ vrijedi

- $x \circ y = y \circ x$
- $(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x)$, gdje je $x^2 := x \circ x$.

Međutim, za razliku od Liejevih algebri, kod kojih se množenje također definira preko aksioma, a ne preko eksplicitne formule, ali koje se uvijek mogu uložiti u asocijativnu algebru tako da Liejev produkt ima oblik $[A, B] = AB - BA$, kod Jordanovih algebri to nije slučaj. Jordanova algebra naziva se *specijalnom* ako se može izomorfno uložiti u Jordanovu podalgebru od $\mathcal{A}^+$ za neku asocijativnu algebru $\mathcal{A}$, gdje je $\mathcal{A}^+$ opskrbljena sa simetriziranim produktom $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$. Jordanove algebre koje nisu specijalne nazivaju se *iznimnima* (vidjeti [22]).

Kao i kod većine drugih algebarskih struktura, pojavio se problem klasifikacije "najjednostavnijih" Jordanovih algebri, odnosno Jordanovih algebri koje ne sadrže netrivijalne ideale. Takve algebre nazivamo *proste* (engl. *simple*). Taj je problem za jednu veliku i važnu klasu Jordanovih algebri riješen poprilično rano, unutar dvije godine od pojave same strukture. Riječ je o Jordan-von Neumann-Wignerovom klasifikacijskom teoremu koji su isti autori dokazali u radu [17]:

Teorem 1.3 (Jordan-von Neumann-Wigner)**.** *Svaka konačnodimenzionalna prosta formalno realna Jordanova algebra, do na izomorfizam, pripada jednoj od sljedećih familija:*

(1) *algebrama* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *realnih simetričnih matrica,*

(2) *algebrama* $H_n(\mathbb{C})$ *kompleksnih hermitskih matrica,*

(3) *algebrama* $H_n(\mathbb{H})$ *kvaternionskih hermitskih matrica,*

(4) *realnim spin faktorima* $Spin_n$ *za* $n \geq 2$*,*

(5) *iznimnoj Albertovoj algebri* $H_3(\mathbb{O})$.

U Jordan-von Neumann-Wignerovoj klasifikaciji jedina iznimna algebra jest Albertova algebra, koja je izvorno proučavana u [1]. U kasnijem razvoju teorije postavljeno je pitanje postoje li druge proste iznimne Jordanove algebre, osobito u beskonačnodimenzionalnom okviru. Zelmanov je u radovima iz razdoblja 1978.–1983. ([25], [26], [27], [28]) razvio teoriju koja je dovela do tzv. Zelmanovljevog iznimnog teorema: svaka prosta iznimna Jordanova algebra Albertova je tipa i dimenzije 27 nad svojim centrom [22]. Kasnije je za svoj doprinos matematici nagrađen Fieldsovom medaljom.

Unatoč tome što su izvorno potekle iz fizike, Jordanove algebre pokazale su se korisne i u mnogim područjima matematike, primjerice u Liejevoj teoriji i diferencijalnoj geometriji (vidjeti [22]).

1.3 Spin faktori

Jordanove algebre kojima se bavimo u ovom radu su formalno realni spin faktori:

$$Spin_n := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$$

na kojima je Jordanov produkt definiran kao

$$(\alpha, x) \circ (\beta, y) := (\alpha\beta + \langle x, y\rangle, \alpha y + \beta x),$$

gdje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označava standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$, tj. za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Primijetimo da je po Teoremu 1.3 riječ o formalno realnoj prostoj Jordanovoj algebri, što ćemo kasnije i pokazati. Teorem 1.3 pokazuje da spin faktori čine jednu od pet familija konačnodimenzionalnih formalno realnih prostih Jordanovih algebri, što ukazuje na njihovu važnost s algebarskog stajališta. Važni su i u fizici jer se koriste za geometrijske opise nekih kvantnomehaničkih fenomena. Više o spin faktorima bit će rečeno kasnije.

1.4 Jordanova multiplikacijska polugrupa

Kontekst Jordanovih algebri u ovom radu izrastao je iz koncepta rigidnosti Jordanovih homomorfizama i problema automatske aditivnosti. Neka su A i B asocijativni prstenovi. Preslikavanje $\phi\colon A \to B$ naziva se *Jordanov homomorfizam* ako je aditivno, tj. za sve $a, b \in A$ vrijedi

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b),$$

te ako zadovoljava sljedeća dva uvjeta za sve $a, b \in A$:

(i) $\phi(a^2) = \phi(a)^2$,

(ii) $\phi(aba) = \phi(a)\phi(b)\phi(a)$.

Ako u aditivnim grupama prstenova svaki element a ima jedinstvenu polovinu $a/2$, tada su, uz već pretpostavljenu aditivnost preslikavanja ϕ, uvjeti (i) i (ii) ekvivalentni jednostavnijem zahtjevu da preslikavanje ϕ čuva simetrizirani zbroj produkata:

$$\phi(ab + ba) = \phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a), \quad \text{za sve } a, b \in A.$$

Ovako definirana preslikavanja su zapravo prirodna preslikavanja na ranije uvedenim Jordanovim algebrama, no njihova je motivacija došla prije nego što je uopće postojao termin Jordanova algebra i Jordanov homomorfizam. Riječ je o teoriji problema linearnih očuvanja gdje se analizira oblik preslikavanja koja čuvaju određena algebarska i geometrijska svojstva. Ispada da su dosta često takva preslikavanja upravo Jordanovi homomorfizmi. Tako je na primjer Frobenius u svom radu [9] dokazao da je unitalno linearno preslikavanje na prstenu $M_n(\mathbb{C})$ koje čuva determinantu nužno Jordanov automorfizam (bijektivni Jordanov homomorfizam). Kasnije su dokazani slični rezultati poput onih u [13] i [7]. Iako je to bila početna motivacija za proučavanje Jordanovih homomorfizama te je ostala važna i danas, istraživanja su se ubrzo okrenula pitanju njihove unutarnje algebarske strukture i rigidnosti. Budući da su dvije najprirodnije klase Jordanovih homomorfizama asocijativni homomorfizmi i antihomomorfizmi, odnosno linearna preslikavanja $\phi\colon A \to B$ za koja vrijedi:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad \text{ili} \quad \phi(xy) = \phi(y)\phi(x) \tag{1}$$

za sve $x, y \in A$, pitanje koje iz toga izrasta jest kada se opći Jordanov homomorfizam može prikazati kao mješavina (standardna dekompozicija) ovih dviju klasa. U tom je smjeru rani doprinos pružio Germán Ancochea, koji je dokazao da je svaki Jordanov automorfizam na konačnodimenzionalnoj jednostavnoj asocijativnoj algebri $\mathcal{A}$ nužno ili asocijativni automorfizam ili antiautomorfizam [5]. Kao nastavak teorije u radu [16] N. Jacobson i C. E. Rickart pokazali su da je Jordanov homomorfizam iz matričnog prstena $M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$, u proizvoljan prsten suma homomorfizma i antihomomorfizma [16, Theorem 7]. Ovaj rezultat precizno opisuje vezu između Jordanove i asocijativne multiplikativne strukture punih matričnih prstenova. Detaljniji pregled veze teorije problema linearnih očuvanja s Jordanovim homomorfizmima kao i analiza njihove rigidnosti u kontekstu rastava na asocijativne morfizme može se naći u [5].

Paralelno s idejama rigidnosti provlači se i tema automatske aditivnosti multiplikativnih preslikavanja kojoj je važan rani doprinos dao Martindale u svom radu [21]. On pokazuje da je svako bijektivno multiplikativno preslikavanje iz prim (engl. prime) prstena R koji sadrži netrivijalan idempotent e na proizvoljan prsten S automatski aditivno. Iako se [21] bavi asocijativnom strukturom, pitanje o tome kada multiplikativnost ili srodni uvjeti zajedno s nekim zahtjevima poput bijektivnosti garantiraju aditivnost zadanog preslikavanja može se promatrati u raznim drugim strukturama. U radu [23] analizira se upravo pitanje automatske aditivnosti za bijektivna preslikavanja na standardnim operatorskim algebrama (dimenzije strogo veće od 1) koja umjesto asocijativnog množenja zadovoljavaju uvjet očuvanja Jordanovog produkta, tj.

$$\phi\left(\frac{1}{2}(AB + BA)\right) = \frac{1}{2}\big(\phi(A)\phi(B) + \phi(B)\phi(A)\big)$$

za sve operatore $A, B \in \mathcal{A}$. Suvremeni korak u povezivanju automatske aditivnosti i rigidnosti Jordanovih homomorfizama napravljen je u radu [12], gdje se iz definicije Jordanovih homomorfizama izuzima pretpostavka aditivnosti te se pokazuje da je za svako Jordanovo multiplikativno preslikavanje $\phi\colon M_n(\mathbb{F})^+ \to \mathcal{J}$ ($n \geq 2$), gdje je $\mathcal{J}$ proizvoljan Jordanov prsten bez 2-torzije, vrijednost u nuli $e := \phi(0)$ nužno idempotent, a translatirano preslikavanje $X \mapsto \phi(X) - \phi(0)$ je ili trivijalno (jednako nuli) ili injektivni Jordanov homomorfizam prstena. Drugim riječima, samo očuvanje Jordanovog produkta bilo kojeg takvog preslikavanja, uz uklanjanje idempotentne konstante u nuli, automatski povlači njegovu aditivnost i uspostavlja strogu dihotomiju između nul-preslikavanja i injektivnosti. Cilj ovog rada je istražiti tu duboku ispripletenost multiplikativne i linearne strukture, no iz jednog drugačijeg i suptilnijeg kuta. Umjesto izravnog proučavanja nelinearnih Jordanovih preslikavanja, fokusiramo se na linearnu polugrupu generiranu pripadnim operatorima lijevog množenja. Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ (karakteristike različite od 2). Uočimo da na prirodan način proizvoljnom elementu $a \in \mathcal{J}$ možemo pridružiti linearni operator koji djeluje na $\mathcal{J}$, operator lijevog množenja:

$$L_a : \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \quad L_a(x) = a \circ x.$$

Poveznica s Jordanovim preslikavanjima leži u jednostavnoj, ali dubokoj relaciji ispreplitanja (engl. *intertwining relation*). Naime, preslikavanje $\phi\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ čuva Jordanov produkt, odnosno zadovoljava $\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ za sve $x, y \in \mathcal{J}$, ako i samo ako vrijedi:

$$\phi \circ L_x = L_{\phi(x)} \circ \phi, \quad \text{za svaki } x \in \mathcal{J}.$$

Ova relacija povlači da svaka konačna kompozicija operatora množenja isprepliće preslikavanje ϕ s odgovarajućom kompozicijom operatora oblika $L_{\phi(x)}$. U tom smislu, polugrupa generirana operatorima lijevog množenja odnosno sve moguće konačne kompozicije tih operatora može se shvatiti kao linearni dio te multiplikativne strukture koji je prirodno vidljiv svakom Jordanovom preslikavanju. Osnovno pitanje je koje sve operatore obuhvaća ova polugrupa.

Kako bismo precizirali ovaj koncept, uvedimo formalnu definiciju.

Jordanova multiplikacijska polugrupa algebre $\mathcal{J}$ je potpolugrupa od $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{J})$ generirana svim operatorima lijevog množenja, odnosno:

$$\mathrm{JMS}(\mathcal{J}) := \langle L_a \colon a \in \mathcal{J} \rangle \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{J}).$$

Budući da Jordanov produkt ne mora biti asocijativan, za prikladne $a, b, x \in \mathcal{J}$ može vrijediti

$$L_a L_b(x) = a \circ (b \circ x) \neq (a \circ b) \circ x = L_{a \circ b}(x).$$

Stoga kompozicija dvaju operatora lijevog množenja općenito ne mora biti operator lijevog množenja, pa ova polugrupa može biti puno veća od skupa operatora lijevog množenja.

Središnje pitanje onda postaje: *koliko je ova polugrupa velika unutar čitave algebre endomorfizama* $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{J})$? U nedavnom radu [11] pokazano je da vrijedi sljedeće. Neka je $\mathbb{F}$ polje karakteristike različite od 2 i $M_n(\mathbb{F})$ prostor $n \times n$ matrica s koeficijentima iz $\mathbb{F}$. Označimo s $M_n(\mathbb{F})^+$ prostor $M_n(\mathbb{F})$ opremljen simetriziranim produktom $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$. Iz ranijih komentara je jasno da je $(M_n(\mathbb{F})^+, \circ)$ Jordanova algebra (štoviše, moglo bi se reći da je ovo najjednostavniji netrivijalni primjer Jordanove algebre). Tada vrijedi

$$\mathrm{JMS}(M_n(\mathbb{F})^+) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M_n(\mathbb{F})).$$

Drugim riječima, svaki linearni operator na prostoru matrica može se prikazati kao konačna kompozicija operatora Jordanovog množenja i dobivamo potpunu maksimalnost polugrupe $\mathrm{JMS}(M_n(\mathbb{F})^+)$.

Jedna interesantna posljedica ovog rezultata je sljedeća činjenica. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i neka je $A \neq 0$. Tada postoji konačno mnogo matrica $A_1, \ldots, A_k \in M_n(\mathbb{F})$ tako da vrijedi

$$L_{A_1} \ldots L_{A_k}(A) = B,$$

odnosno

$$A_1 \circ (A_2 \circ \cdots \circ (A_k \circ A)) = B.$$

Također, uočimo da je a priori Jordanova multiplikacijska polugrupa zatvorena samo na operaciju komponiranja, ali je u ovom slučaju osim na komponiranje zatvorena i na operacije zbrajanja i množenja skalarom (ispostavlja se da je $\mathrm{JMS}(M_n(\mathbb{F})^+)$ asocijativna algebra s jedinicom, pri čemu množenje unutar algebre odgovara komponiranju). U tom smislu ovaj rezultat spada u tradiciju koja povezuje rigidnost koju nameću Jordanova preslikavanja i automatsku aditivnost, budući da se samo preko Jordanovog množenja, koje je kodirano u operatoru lijevog množenja, može rekonstruirati cijela linearna struktura kodirana pomoću endomorfizama.

Da bismo dodatno istaknuli zanimljivost ovog rezultata i potvrdili da je riječ o fenomenu specifičnom za Jordanove strukture, promotrimo dva primjera kada analogna tvrdnja ne vrijedi: prostor matrica sa

standardnim matričnim množenjem (odnosno sa strukturom asocijativne algebre) i prostor matrica sa strukturom Liejeve algebre.

U ovom odlomku pretpostavljamo $n \geq 2$. Struktura asocijativne algebre na prostoru matrica u neku je ruku najprirodnija struktura algebre na $M_n(\mathbb{F})$ (u prilog tome govori činjenica da su Jordanov produkt i Liejeva zagrada, o kojoj ćemo govoriti u sljedećem odlomku, definirani preko asocijativnog produkta). Definiramo operatore lijevog množenja

$$\Lambda_A : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), \quad \Lambda_A(X) := AX, \quad \text{za } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Neka je $X \in M_n(\mathbb{F})$ singularna matrica ($\det X = 0$). Tada vrijedi

$$\det \Lambda_A(X) = \det(AX) = \det A \det X = 0, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Posebno, kompozicija operatora lijevog množenja uvijek slika singularnu matricu u singularnu matricu. S druge strane, znamo da postoje linearni operatori na $M_n(\mathbb{F})$ koji neku nenul singularnu matricu slikaju u regularnu matricu pa polugrupa generirana operatorima lijevog množenja ne može biti jednaka $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M_n(\mathbb{F}))$.

Analogni rezultat ne vrijedi ni ako na prostoru matrica promatramo strukturu Liejeve algebre (koja je također veoma značajna u kvantnoj teoriji) umjesto Jordanove. Naime, ako na $M_n(\mathbb{F})$ definiramo komutator ili Liejevu zagradu $[A, B] := AB - BA$ i operatore lijevog množenja $\lambda_A : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}),\ \lambda_A(X) = [A, X]$, uočavamo da vrijedi

$$\mathrm{tr}\, \lambda_A(X) = \mathrm{tr}[A, X] = \mathrm{tr}(AX - XA) = \mathrm{tr}(AX) - \mathrm{tr}(XA) = 0, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{F}),$$

pa zaključujemo da se ne mogu svi linearni operatori na $M_n(\mathbb{F})$ prikazati kao kompozicije operatora oblika λ_A: slika svake neprazne kompozicije takvih operatora sadržana je u potprostoru matrica traga nula, dok operator identiteta nema to svojstvo.

Motivirano radom [11], pitanje koje se nameće je za koje još Jordanove algebre možemo očekivati tu maksimalnost polugrupe $\mathrm{JMS}(\mathcal{J})$. Valja naglasiti da ovakav fenomen ima smisla očekivati eventualno kod prostih Jordanovih algebri, tj. Jordanovih algebri koje nemaju netrivijalnih ideala (ideali su potprostori koji i sami imaju strukturu Jordanove algebre i zatvoreni su na množenje svim elementima Jordanove algebre). Pretpostavimo da je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ ideal. Tada vrijedi $\mathcal{J} \circ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$, odnosno

$$L_a \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}, \quad \forall a \in \mathcal{J}.$$

Posebno, s obzirom na to da elementi oblika L_a generiraju $\mathrm{JMS}(\mathcal{J})$, $\mathcal{I}$ je invarijantan na sve operatore u $\mathrm{JMS}(\mathcal{J})$.

Glavni cilj ovog rada je dokazati da se ova iznimna rigidnost u potpunosti prenosi i na formalno realne spin faktore definirane u prošlom odjeljku. Točnije, dokazujemo da za svaki formalno realni spin faktor $Spin_n$ ($n \geq 2$) vrijedi:

$$\mathrm{JMS}(Spin_n) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_n).$$

Ovim rezultatom pokazujemo da maksimalnost Jordanove multiplikacijske polugrupe nije izoliran slučaj matričnog računa, ukazujući na mogućnost daljnjeg istraživanja ovog fenomena u ostalim formalno

realnim prostim Jordanovim algebrama (vidi 1.3).

2 Cilj rada

Glavni cilj rada jest dokazati jednakost $\mathrm{JMS}(Spin_n) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_n)$ za svaki formalno realni spin faktor $Spin_n$ s $n \geq 2$. Dokaz se gradi konstrukcijom dovoljno velikog skupa invertibilnih elemenata Jordanove multiplikacijske polugrupe: najprije se konstruiraju elementarne transvekcije, zatim se dobivaju grupe $\mathrm{SL}(Spin_n)$ i $\mathrm{GL}(Spin_n)$, a završni korak koristi singularni operator koranga 1 kako bi se obuhvatili svi endomorfizmi.

3 Plan rada

Ovdje navodimo kratak sažetak svakog odjeljka.

U prvom odjeljku navodimo osnovne definicije i rezultate vezane uz Jordanove algebre, od kojih je istaknuta Peirceova dekompozicija koja ima važnu ulogu u kasnijem dokazu.

Nakon toga ukratko uvodimo koncept transvekcije budući da one predstavljaju važan teorijski koncept korišten u dokazu.

Sljedeći odjeljak posvećen je spin faktorima, njihovoj definiciji i osnovnom računu u Jordanovoj algebri $Spin_n$. Određen je matrični prikaz operatora lijevog množenja na $Spin_n$ te je naveden dokaz neprostosti algebre $Spin_1$.

Nakon toga prelazimo na nove rezultate. Klasificirani su idempotenti u $Spin_n$, uvedena je ravnina C_r i pokazano je kako određeni operatori djeluju na tu ravninu.

U sljedećem odjeljku uveden je četverofaktorni produkt anizotropnih preslikavanja i pokazano je da u pogodnoj bazi na ravninu djeluje kao elementarna transvekcija, a na njezin komplement kao operator identiteta. Pokazano je da $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži sve elementarne transvekcije.

Nadalje su pokazane pomoćne tvrdnje kako bi se mogla iskoristiti poznata lema da polugrupa koja sadrži sve elementarne transvekcije nužno sadrži specijalnu linearnu grupu.

Naposljetku je dokazano da Jordanova multiplikacijska polugrupa realnih spin faktora sadrži opću linearnu grupu, a zatim je pomoću singularnog operatora koranga 1 dobivena jednakost s cijelim $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_n)$.

4 Rezultati

4.1 Osnovne definicije i teorija

Poglavlje započinjemo elementarnim definicijama vezanim uz Jordanove algebre, glavnu algebarsku strukturu koju proučavamo u ovom radu. Izlaganje u ovom odjeljku prati [10].

Jedna od glavnih klasa Jordanovih algebri koje nas zanimaju jest klasa formalno realnih Jordanovih algebri. One imaju svojstvo da, ako je zbroj kvadrata jednak nuli, svi elementi moraju biti jednaki nuli. Budući da analogno svojstvo vrijedi za realne brojeve, takve algebre nazivamo formalno realnima.

Definicija 4.1. Kažemo da je Jordanova algebra $\mathcal{J}$ *formalno realna* ako za sve $x_1, ..., x_n \in \mathcal{J}$ vrijedi

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

Definicija 4.2. Neka su $\mathcal{J}$ i $\mathcal{K}$ Jordanove algebre nad poljem $\mathbb{F}$. *Jordanov homomorfizam* je linearni operator $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ takav da za sve $x, y \in \mathcal{J}$ vrijedi

$$\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y).$$

Definicija 4.3. *Ideal* u Jordanovoj algebri $\mathcal{J}$ je vektorski potprostor $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}.$$

Kažemo da je Jordanova algebra $\mathcal{J} \neq 0$ prosta ako su joj jedini ideali 0 i $\mathcal{J}$.

Definicija 4.4. Za $x \in \mathcal{J}$ definiramo operator lijevog množenja

$$L_x : \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \; L_x(y) = x \circ y.$$

Navodimo sljedeću korisnu lemu:

Lema 4.5. *Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0. Tada za $a, b, c \in \mathcal{J}$ vrijedi*

$$[L_a, L_{b\circ c}] + [L_b, L_{c\circ a}] + [L_c, L_{a\circ b}] = 0,$$

pri čemu uglate zagrade označavaju komutator $[A, B] = AB - BA$.

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{J}$. Za svaki $y \in \mathcal{J}$ vrijedi

$$[L_x, L_{x^2}](y) = L_x L_{x^2}(y) - L_{x^2} L_x(y) = x \circ (x^2 \circ y) - x^2 \circ (x \circ y) = 0.$$

Dakle,

$$[L_x, L_{x^2}] = 0.$$

Stavimo $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$ za $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Tada izraz $[L_x, L_{x^2}] = 0$ možemo shvatiti kao jednakost polinoma u α, β, γ s koeficijentima u $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{J})$. Uspoređujući koeficijente uz $\alpha\beta\gamma$ dobivamo

$$2[L_a, L_{b\circ c}] + 2[L_b, L_{c\circ a}] + 2[L_c, L_{a\circ b}] = 0.$$

Karakteristika polja $\mathbb{F}$ je 0 pa izraz možemo podijeliti s 2 i dobiti tvrdnju. □

Nešto općenitiji rezultat može se pronaći u [15].

Napomena 4.6. Iako Jordanove algebre u pravilu nisu asocijativne, imaju važno svojstvo koje se zove *potencijska asocijativnost*: za svaki element $a \in \mathcal{J}$ podalgebra $\mathcal{A}$ generirana s a je asocijativna. To će slijediti iz sljedećeg teorema.

Ako je $\mathcal{J}$ unitalna s jedinicom e, zbog potencijske asocijativnosti možemo definirati polinome u jednoj varijabli za Jordanove algebre, tj. za polinom

$$p(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n \in \mathbb{F}[t]$$

je izraz

$$p(a) = \lambda_0 e + \lambda_1 a + \ldots + \lambda_n a^n$$

dobro definiran.

Teorem 4.7 (Albertov teorem o potencijskoj asocijativnosti)**.** *Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0. Tada je $\mathcal{J}$ potencijski asocijativna. Preciznije, za svaki $x \in \mathcal{J}$ potencije x^m su jednoznačno definirane i vrijedi*

$$x^r \circ x^s = x^{r+s},\ r, s \in \mathbb{N},$$

pri čemu potencije definiramo rekurzivno:

$$x^1 := x,\ x^{r+1} := x^r \circ x.$$

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{J}$. Za $m \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\Lambda_m : \mathcal{J} \to \mathcal{J},\ \Lambda_m(y) = x^m \circ y.$$

Istodobnom indukcijom po $N \in \mathbb{N}$ dokazujemo da za sve $r, s \in \mathbb{N}$ takve da je $r + s \leq N$ vrijedi

$$x^r \circ x^s = x^{r+s} \text{ i } [\Lambda_r, \Lambda_s] = 0.$$

Za $N = 2$ je $r = s = 1$ i očito vrijedi

$$x \circ x = x^2 \text{ i } [\Lambda_1, \Lambda_1] = 0.$$

Za $N = 3$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r = 1$ i $s = 2$. Vrijedi

$$x \circ x^2 = x^2 \circ x = x^3 \text{ i}$$

$$[\Lambda_1, \Lambda_2](y) = \Lambda_1\Lambda_2(y) - \Lambda_2\Lambda_1(y) = x \circ (x^2 \circ y) - x^2 \circ (x \circ y) = (x^2 \circ y) \circ x - x^2 \circ (y \circ x) = 0$$

za proizvoljan $y \in \mathcal{J}$ pa je

$$[\Lambda_1, \Lambda_2] = 0.$$

Pretpostavimo da tvrdnje vrijede do nekog $N \geq 3$. Neka je $r + s = N + 1$. Ako je $r = 1$ ili $s = 1$, produktna formula slijedi iz rekurzivne definicije i komutativnosti produkta; komutatorski dio

dokazujemo u nastavku zajedno za sve parove. Neka je $r, s \geq 2$. Tada je $r + 1 \leq N$, pa po pretpostavci indukcije vrijedi $[\Lambda_r, \Lambda_1] = 0$. Vrijedi $x^s = \Lambda_1^{s-1}(x)$, pa je

$$x^r \circ x^s = \Lambda_r \Lambda_1^{s-1}(x) = \Lambda_1^{s-1}\Lambda_r(x) = \Lambda_1^{s-1}(x^{r+1}) = x^{r+s}.$$

Preostaje dokazati da vrijedi $[\Lambda_m, \Lambda_{N+1-m}] = 0$ za $1 \leq m \leq N$. Definiramo

$$C_N := [\Lambda_1, \Lambda_N],\ D_m := [\Lambda_m, \Lambda_{N+1-m}],\ 1 \leq m \leq N.$$

Neka je $2 \leq m \leq N - 1$ i $n = N + 1 - m$. Iz Leme 4.5 i dokazane produktne formule u stupnju $N + 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= [L_{x^{m-1}}, L_{x^n \circ x}] + [L_{x^n}, L_{x \circ x^{m-1}}] + [L_x, L_{x^{m-1} \circ x^n}] \\ &= [\Lambda_{m-1}, \Lambda_{n+1}] + [\Lambda_n, \Lambda_m] + [\Lambda_1, \Lambda_N], \end{aligned}$$

tj.

$$D_{m-1} - D_m + C_N = 0.$$

Iz $D_1 = C_N$ slijedi $D_{N-1} = (N-1)C_N$.

S druge strane, primjenom Leme 4.5 dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= [L_x, L_{x \circ x^{N-1}}] + [L_x, L_{x^{N-1} \circ x}] + [L_{x^{N-1}}, L_{x \circ x}] \\ &= 2[\Lambda_1, \Lambda_N] + [\Lambda_{N-1}, \Lambda_2] \\ &= 2C_N + D_{N-1}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovog identiteta u prethodnu jednakost dobivamo $(N + 1)C_N = 0$. Kako je karakteristika polja 0, slijedi $C_N = 0$. Iz relacije $D_m = D_{m-1} + C_N$ slijedi $D_m = 0$ za $1 \leq m \leq N - 1$, a iz $[\Lambda_N, \Lambda_1] = -C_N = 0$ dobivamo

$$[\Lambda_m, \Lambda_{N+1-m}] = 0,\ 1 \leq m \leq N.$$

Time je indukcija završena.

Podalgebra generirana elementom x razapeta je potencijama od x za koje vrijedi

$$(x^r \circ x^s) \circ x^t = x^{r+s+t} = x^r \circ (x^s \circ x^t).$$

Iz bilinearnosti Jordanovog produkta slijedi asocijativnost na podalgebri generiranoj elementom x. Dakle, $\mathcal{J}$ je potencijski asocijativna. Za nešto drukčiji pristup ovom rezultatu usporediti s [22] i [15]. □

4.1.1 Peirceova dekompozicija

Neka je V vektorski prostor i $P : V \to V$ idempotentan linearni operator, tj. $P^2 = P$. Tada je $V = \ker P \oplus \mathrm{im}P$ i uz odgovarajući izbor baze P možemo prikazati u matričnom obliku kao

$$P = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je r rang od P.

Peirceova dekompozicija analogna je ovoj dekompoziciji za Jordanove algebre. Za Jordanovu algebru $\mathcal{J}$ i idempotentni element $e \in \mathcal{J},\ e \circ e = e$, Peirceova dekompozicija jest rastav prostora $\mathcal{J}$ na svojstvene prostore operatora L_e. U sljedećoj propoziciji navodimo svojstva Peirceove dekompozicije, ali prije nje uvodimo pojam Peirceovog prostora.

Definicija 4.8. Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0 i $e \in \mathcal{J}$ idempotent. Za $\lambda \in \left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ definiramo *Peirceov prostor* s obzirom na idempotent e s

$$\mathcal{J}_\lambda(e) := \{x \in \mathcal{J} : e \circ x = \lambda x\}.$$

Ponekad ćemo umjesto $\mathcal{J}_\lambda(e)$ pisati samo $\mathcal{J}_\lambda$.

Propozicija 4.9. *Neka je $\mathcal{J}$ Jordanova algebra nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike 0 i neka je $e \in \mathcal{J}$ idempotent. Tada se vektorski prostor $\mathcal{J}$ može prikazati kao direktna suma Peirceovih prostora*

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{J}_0(e).$$

Nadalje, vrijede Peirceova pravila množenja:

$$\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_0,$$

$$\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_0 = 0,\ \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_{1/2},$$

$$\mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_{1/2},\ \mathcal{J}_{1/2} \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_0.$$

Posebno, $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_0$ su Jordanove podalgebre, a e je jedinica u podalgebri $\mathcal{J}_1$.

Dokaz. Stavimo $T = L_e$. Pokažimo najprije da vrijedi

$$T(2T - I_{\mathcal{J}})(T - I_{\mathcal{J}}) = 0.$$

Koristeći Lemu 4.5 i $e \circ e = e$ dobivamo

$$0 = [L_z, T] + [T, L_{Tz}] + [T, L_{Tz}] = [L_z, T] + 2[T, L_{Tz}].$$

Primjenom tog identiteta na e dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= ([L_z, T] + 2[T, L_{Tz}])e \\
&= (L_zT - TL_z + 2TL_{Tz} - 2L_{Tz}T)e \\
&= z \circ (e \circ e) - e \circ (z \circ e) + 2e \circ ((z \circ e) \circ e) - 2(e \circ z) \circ (e \circ e) \\
&= e \circ z - e \circ (e \circ z) + 2e \circ (e \circ (e \circ z)) - 2e \circ (e \circ z) \\
&= Tz - T^2z + 2T^3z - 2T^2z \\
&= (T - 3T^2 + 2T^3)z
\end{aligned}$$

za proizvoljan $z \in \mathcal{J}$. Dakle, $0 = 2T^3 - 3T^2 + T = T(2T - I_{\mathcal{J}})(T - I_{\mathcal{J}})$.

Korijeni polinoma $t(2t-1)(t-1)$ su $0, \frac{1}{2}$ i 1. Projektore na pripadne svojstvene potprostore od T možemo zapisati preko Lagrangeovih interpolacijskih polinoma u T:

$$\pi_1 := 2T^2 - T,\ \pi_{1/2} := 4T - 4T^2,\ \pi_0 := I_{\mathcal{J}} - 3T + 2T^2.$$

Iz ranije dokazanog identiteta slijedi da su $\pi_1, \pi_{1/2}$ i π_0 međusobno ortogonalni projektori takvi da je $\pi_1 + \pi_{1/2} + \pi_0 = I_{\mathcal{J}}$. Vrijedi

$$\pi_i(\mathcal{J}) = \mathcal{J}_i(e),\ i \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

pa je

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1(e) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(e) \oplus \mathcal{J}_0(e).$$

Pokažimo sad Peirceova pravila množenja. Neka je $x \in \mathcal{J}_\lambda$, tj. $Tx = \lambda x$. Imamo

$$0 = 2[T, L_{Tx}] + [L_x, T] = 2\lambda[T, L_x] - [T, L_x] = (2\lambda - 1)[T, L_x].$$

Za $\lambda \in \{0, 1\}$ dobivamo $[T, L_x] = 0$. Iz ovoga slijedi da za $x \in \mathcal{J}_\lambda,\ \lambda \in \{0, 1\}$ i $y \in \mathcal{J}_\mu$ vrijedi

$$T(x \circ y) = TL_x(y) = L_xT(y) = L_x(\mu y) = \mu(x \circ y),$$

tj. $x \circ y \in \mathcal{J}_\mu$. Dakle,

$$\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_1,\ \mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_0,\ \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_{1/2},\ \mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_{1/2}.$$

Također, vrijedi $\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_0 \cap \mathcal{J}_1$, a kako je $\mathcal{J}_0 \cap \mathcal{J}_1 = 0$, zaključujemo da je $\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_0 = 0$.

Pokažimo još preostali identitet. Neka su $x \in \mathcal{J}_\lambda$ i $y \in \mathcal{J}_\mu$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &= [T, L_{x \circ y}] + [L_x, L_{Ty}] + [L_y, L_{Tx}] \\
&= [T, L_{x \circ y}] + \mu[L_x, L_y] + \lambda[L_y, L_x] \\
&= [T, L_{x \circ y}] + (\mu - \lambda)[L_x, L_y].
\end{aligned}$$

Primjenom ove jednakosti na e dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= ([T, L_{x\circ y}] + (\mu - \lambda)[L_x, L_y])e \\
&= (TL_{x\circ y} - L_{x\circ y}T + (\mu - \lambda)L_xL_y - (\mu - \lambda)L_yL_x)e \\
&= e \circ ((x \circ y) \circ e) - (x \circ y) \circ (e \circ e) + (\mu - \lambda)(x \circ (y \circ e)) - (\mu - \lambda)(y \circ (x \circ e)) \\
&= e \circ (e \circ (x \circ y)) - e \circ (x \circ y) + (\mu - \lambda)\mu(x \circ y) - (\mu - \lambda)\lambda(x \circ y) \\
&= T^2(x \circ y) - T(x \circ y) + (\mu - \lambda)^2(x \circ y).
\end{aligned}$$

Za $u = x \circ y$ i $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ dobivamo $T^2u - Tu = 0$. Neka je $u = u_1 + u_{1/2} + u_0$ Peirceova dekompozicija. Vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &= T^2u - Tu \\
&= T^2(u_1 + u_{1/2} + u_0) - T(u_1 + u_{1/2} + u_0) \\
&= u_1 + \frac{1}{4}u_{1/2} - u_1 - \frac{1}{2}u_{1/2} \\
&= -\frac{1}{4}u_{1/2}.
\end{aligned}$$

Polje je karakteristike 0 pa je $u_{1/2} = 0$. Dakle,

$$\mathcal{J}_{1/2} \circ \mathcal{J}_{1/2} \subseteq \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_0.$$

Iz $\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_0 \circ \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_0$ slijedi da su $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_0$ Jordanove podalgebre, i iz $e \circ x = x$, za $x \in \mathcal{J}_1$, slijedi da je e jedinica u $\mathcal{J}_1$. □

Peirceova dekompozicija pokazat će se korisnom kasnije u dokazu jer omogućuje rastav na svojstvene prostore fiksiranog operatora L_e i precizno opisuje kako ih Jordanov produkt međusobno povezuje. Više o teoriji Peirceovih prostora može se pronaći u [22].

4.2 Transvekcije

Transvekcije su jedan od glavnih alata korištenih u kasnijem dokazu maksimalnosti Jordanove multiplikacijske polugrupe formalno realnih spin faktora. Pokazuje se da polugrupa linearnih operatora na vektorskom prostoru V koja sadrži sve elementarne transvekcije nužno sadrži cijelu specijalnu linearnu grupu $\mathrm{SL}(V)$. Pratimo [11], dok se detaljnija teorija transvekcija i njihove uloge u linearnoj algebri može naći u standardnim udžbenicima poput [2].

Definicija 4.10. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. *Transvekcija* na V je linearni operator oblika

$$T = I_V + N,$$

gdje je N nenul linearni operator ranga 1 takav da je $N^2 = 0$. Tada T fiksira hiperravninu $\ker N$ po točkama, a jednodimenzionalni potprostor $\operatorname{im} N \subseteq \ker N$ njegov je središnji pravac.

Od najvećeg interesa bit će nam takozvane *elementarne transvekcije*. Neka je $(b_1, ..., b_n)$ baza prostora V, ε_{ij} operator na V koji šalje element baze b_j u b_i i ostale bazne elemente u 0, tj. $\varepsilon_{ij} b_k = \delta_{jk} b_i$, i $t \in \mathbb{F}$. Za $i \neq j$ i $t \in \mathbb{F}$ stavimo

$$x_{ij}(t) := I_V + t\varepsilon_{ij}.$$

Za $t \neq 0$ operator $x_{ij}(t)$ elementarna je transvekcija, dok je $x_{ij}(0) = I_V$.

Lema 4.11. *Za $t \neq 0$ operator $x_{ij}(t)$ jest transvekcija.*

Dokaz. Za $i \neq j$ vrijedi $\varepsilon_{ij}^2 = 0$, pa je $(x_{ij}(t) - I_V)^2 = t^2 \varepsilon_{ij}^2 = 0$. Osim toga, $\mathrm{r}(t\varepsilon_{ij}) = 1$ za $t \neq 0$. Nadalje,

$$x_{ij}(t) b_k = (I_V + t\varepsilon_{ij}) b_k = b_k$$

za $k \neq j$ pa $x_{ij}(t)$ fiksira hiperravninu $W := \operatorname{span}\{b_k : k \neq j\}$ po točkama. Za $t \neq 0$ vrijedi i $x_{ij}(t) b_j = b_j + t b_i \neq b_j$, pa je operator netrivijalan. □

O transvekcijama se može vrlo intuitivno razmišljati geometrijski. One fiksiraju jednu hiperravninu po točkama, a vektore izvan nje pomiču u jednom fiksnom smjeru sadržanom u toj hiperravnini. Kao što je već navedeno, njihova algebarska važnost dolazi iz činjenice da su to osnovni blokovi specijalne linearne grupe nekog prostora. Kasnije ćemo pokazati da Jordanova multiplikacijska polugrupa sadrži sve elementarne transvekcije i da je to dovoljno da bismo pokazali da sadrži specijalnu linearnu grupu.

4.3 Spin faktori

4.3.1 Osnovna motivacija i definicija

Neka je V konačnodimenzionalni realni vektorski prostor opskrbljen skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i pripadnom normom $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ za $u \in V$. Imamo sljedeću definiciju:

Definicija 4.12. Realni vektorski prostor

$$Spin(V) := \mathbb{R} \oplus V$$

opskrbljen bilinearnim produktom $\circ$ definiranim s

$$(\alpha, u) \circ (\beta, v) := (\alpha\beta + \langle u, v \rangle,\ \alpha v + \beta u), \quad \text{za sve } (\alpha, u), (\beta, v) \in \mathbb{R} \oplus V,$$

zove se *spin faktor* pridružen prostoru V.

Osnovna algebarska motivacija definicije spin faktora dolazi iz sljedeće propozicije čiji smo dokaz preuzeli iz [10]:

Propozicija 4.13. *Spin faktor $Spin(V)$ je realna unitalna Jordanova algebra s jedinicom $(1, 0)$. Nadalje, $Spin(V)$ je formalno realna. Ako je $\dim V \geq 2$, tada je $Spin(V)$ prosta Jordanova algebra.*

Dokaz. Bilinearnost produkta slijedi iz bilinearnosti skalarnog produkta i linearnih operacija u V, a komutativnost iz simetričnosti skalarnog produkta. Za svaki $(\alpha, u) \in Spin(V)$ vrijedi

$$(1, 0) \circ (\alpha, u) = (\alpha, u),$$

pa je $(1, 0)$ jedinica.

1. Jordanov identitet: Neka su $x = (\alpha, u)$ i $y = (\beta, v)$. Stavimo $\rho = \langle u, u \rangle$ i $s = \langle u, v \rangle$. Tada je

$$x^2 = (\alpha^2 + \rho,\ 2\alpha u) \quad \text{i} \quad x \circ y = (\alpha\beta + s,\ \alpha v + \beta u).$$

Iz formule za produkt dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2 \circ (x \circ y) &= ((\alpha^2 + \rho)(\alpha\beta + s) + 2\alpha\langle u, \alpha v + \beta u \rangle,\ (\alpha^2 + \rho)(\alpha v + \beta u) + 2\alpha(\alpha\beta + s)u) \\ &= (\alpha\beta(\alpha^2 + 3\rho) + (3\alpha^2 + \rho)s,\ \alpha(\alpha^2 + \rho)v + (\beta(3\alpha^2 + \rho) + 2\alpha s)u). \end{aligned}$$

S druge strane, iz $x^2 \circ y = ((\alpha^2 + \rho)\beta + 2\alpha s,\ (\alpha^2 + \rho)v + 2\alpha\beta u)$ slijedi:

$$\begin{aligned} x \circ (x^2 \circ y) &= (\alpha((\alpha^2 + \rho)\beta + 2\alpha s) + \langle u, (\alpha^2 + \rho)v + 2\alpha\beta u \rangle,\ \alpha((\alpha^2 + \rho)v + 2\alpha\beta u) + ((\alpha^2 + \rho)\beta + 2\alpha s)u) \\ &= (\alpha\beta(\alpha^2 + 3\rho) + (3\alpha^2 + \rho)s,\ \alpha(\alpha^2 + \rho)v + (\beta(3\alpha^2 + \rho) + 2\alpha s)u). \end{aligned}$$

Dobiveni izrazi su jednaki, pa vrijedi Jordanov identitet $(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x)$.

2. Formalna realnost: Neka su $x_r = (\alpha_r, u_r) \in Spin(V)$ za $r = 1, \ldots, m$ takvi da vrijedi $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 0$. Budući da je $x_r^2 = (\alpha_r^2 + \langle u_r, u_r \rangle,\ 2\alpha_r u_r)$, iz skalarne komponente dobivamo:

$$\sum_{r=1}^{m} (\alpha_r^2 + \langle u_r, u_r \rangle) = 0.$$

Budući da su svi pribrojnici nenegativni realni brojevi, svaki od njih mora biti jednak 0. Zato je $\alpha_r = 0$ i $u_r = 0$ za svaki r, tj. $x_r = 0$ za sve $r = 1, \ldots, m$.

3. Prostost za $\dim V \geq 2$*:* Budući da je $Spin(V)$ unitalna algebra, dovoljno je dokazati da svaki nenul ideal sadrži jedinicu. Neka je $\mathcal{I} \neq 0$ ideal u $Spin(V)$ i neka je $(\alpha, u) \in \mathcal{I}$ nenul element.

- Ako je $u = 0$, tada je $\alpha \neq 0$, pa je $\frac{1}{\alpha}(\alpha, 0) = (1, 0) \in \mathcal{I}$, iz čega slijedi $\mathcal{I} = Spin(V)$.
- Ako je $\alpha = 0$, tada je $u \neq 0$ i $(0, u)^2 = (\langle u, u\rangle, 0)$. Kako je $\langle u, u\rangle > 0$, slijedi $(1, 0) \in \mathcal{I}$, pa je opet $\mathcal{I} = Spin(V)$.
- Ako su $\alpha \neq 0$ i $u \neq 0$, budući da je $\dim V \geq 2$, postoji nenulti vektor $v \in V$ takav da je $\langle u, v\rangle = 0$. Tada je
$$(\alpha, u) \circ (0, v) = (0, \alpha v) \in \mathcal{I}.$$
Kako je $\alpha v \neq 0$, prema prethodnom slučaju slijedi $(1, 0) \in \mathcal{I}$, pa je $\mathcal{I} = Spin(V)$.

Dakle, $Spin(V)$ nema netrivijalnih ideala, pa je prosta. □

Ova propozicija potvrđuje da pitanje maksimalnosti polugrupe operatora množenja za spin faktore ima smisla te promatrana u kontekstu klasifikacijskog teorema 1.3 pokazuje važnost spin faktora kao jedne od pet familija formalno realnih prostih konačnodimenzionalnih Jordanovih algebri.

Napomena 4.14. U prethodnoj propoziciji je pokazano da su za $n \geq 2$ spin faktori proste Jordanove algebre. Za $\dim V = 1$, međutim, spin faktor nije prost. Naime, ako je $\dim V = 1$, možemo odabrati jedinični vektor $u_0 \in V$ takav da je $\langle u_0, u_0\rangle = 1$. Tada je vektorski prostor V razapet vektorom u_0, tj. $V = \{tu_0 : t \in \mathbb{R}\}$.

Elementi algebre $Spin(V) = \mathbb{R} \oplus V$ su uređeni parovi (α, u) gdje je skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, a vektor $u \in V$. Jedinica algebre je $e_0 = (1, 0_V) \in Spin(V)$.

Promatrajmo jednodimenzionalni potprostor algebre $Spin(V)$ razapet elementom $(1, u_0) \in Spin(V)$:

$$\mathcal{I} := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(1, u_0)\} = \{c(1, u_0) : c \in \mathbb{R}\} \subset Spin(V).$$

Dokažimo da je $\mathcal{I}$ Jordanov ideal u $Spin(V)$. Neka je $x = (\alpha, tu_0) \in Spin(V)$ proizvoljan element algebre (pri čemu su $\alpha, t \in \mathbb{R}$, a $tu_0 \in V$) te neka je $y = c(1, u_0) = (c, cu_0) \in \mathcal{I}$ proizvoljan element iz $\mathcal{I}$ ($c \in \mathbb{R}$).

Izračunajmo njihov Jordanov produkt $x \circ y \in Spin(V)$ prema definiciji množenja u $Spin(V)$:

$$\begin{aligned} x \circ y &= (\alpha, tu_0) \circ (c, cu_0) \\ &= (\alpha \cdot c + \langle tu_0, cu_0\rangle,\ \alpha(cu_0) + c(tu_0)) \\ &= (\alpha c + ct\langle u_0, u_0\rangle,\ (c\alpha + ct)u_0)\,. \end{aligned}$$

Kako je $\langle u_0, u_0\rangle = 1$, dobivamo:

$$\begin{aligned} x \circ y &= (c(\alpha + t),\ c(\alpha + t)u_0) \\ &= c(\alpha + t)\,(1, u_0). \end{aligned}$$

Dakle, $\mathcal{I}$ je zatvoren na množenje s bilo kojim elementom iz $Spin(V)$, pa je po definiciji Jordanov ideal u $Spin(V)$.

Nadalje, vrijedi:

1. $\mathcal{I} \neq \{(0, 0_V)\}$ jer je $(1, u_0) \neq (0, 0_V)$,
2. $\mathcal{I} \neq Spin(V)$ jer je $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{I} = 1 < \dim_{\mathbb{R}} Spin(V) = 2$.

Dakle, $\mathcal{I}$ je pravi netrivijalni ideal u $Spin(V)$, pa $Spin(V)$ nije prosta Jordanova algebra.

Napomena 4.15. Kao što je prije navedeno, spin faktori specijalne su Jordanove algebre, što se može vidjeti preko njihove veze s Cliffordovim algebrama. Tu ćemo vezu zapisati u notaciji ovog rada. Za realni euklidski prostor $W \cong \mathbb{R}^n$ sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pišemo:

$$Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W,$$

pri čemu je e_0 jedinični element spin faktora.

Najprije definirajmo pripadnu Cliffordovu algebru $C(W)$ nad prostorom W s obzirom na formu $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ona se definira kao kvocijentna algebra:

$$C(W) = T(W)/\mathfrak{R},$$

gdje je $T(W) = \mathbb{R}1 \oplus W \oplus (W \otimes W) \oplus \dots$ slobodna asocijativna tenzorska algebra nad W (s jedinicom 1), a $\mathfrak{R}$ je obostrani ideal u $T(W)$ generiran elementima oblika $x \otimes x - \langle x, x \rangle 1$ za sve $x \in W$. Budući da je $C(W)$ kvocijent asocijativne tenzorske algebre, ona je po konstrukciji također asocijativna algebra s jedinicom 1.

Unutar $C(W)$ za svaki vektor (odnosno njegovu klasu) $[x] = x + \mathfrak{R}$ vrijedi fundamentalna relacija $[x]^2 = \langle x, x \rangle 1$. Polarizacijom te relacije, tj. raspisivanjem kvadrata zbroja dvaju elemenata $([x]+[y])^2 = \langle x + y, x + y \rangle 1$ unutar asocijativne strukture, izravno se izvode klasične antikomutacijske relacije:

$$[x][y] + [y][x] = 2\langle x, y \rangle 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}([x][y] + [y][x]) = \langle x, y \rangle 1,$$

za sve $x, y \in W$.

Nadalje, definiramo kanonsko ulaganje $\sigma : Spin_n \to C(W)$ kao linearno preslikavanje koje elemente iz $Spin_n$ preslikava u asocijativnu Cliffordovu algebru $C(W)$ na sljedeći način:

$$\sigma(\alpha e_0 + x) = \alpha 1 + [x], \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\, x \in W. \tag{2}$$

Budući da antikomutator u $C(W)$ reproducira skalarni produkt $\langle x, y \rangle 1$, direktno se provjerava da σ čuva Jordanov produkt, odnosno vrijedi:

$$\sigma(a \circ b) = \frac{1}{2}\left(\sigma(a)\sigma(b) + \sigma(b)\sigma(a)\right), \quad \forall a, b \in Spin_n. \tag{3}$$

Budući da je kanonsko linearno preslikavanje $W \to C(W), x \mapsto [x]$, injektivno (vidi [20]), preslikavanje σ je injektivno. Stoga je spin faktor $Spin_n$ specijalna Jordanova algebra, budući da se može realizirati kao Jordanova podalgebra asocijativne algebre $C(W)$ opremljene simetriziranim produktom. Za detaljniju analizu Cliffordovih algebri i spinora čitatelja se upućuje na [20].

Napomena 4.16. Iako gornja propozicija obrazlaže zašto nas s algebarskog stajališta zanimaju spin faktori, njihova početna motivacija došla je iz fizike. Neka je vremenska komponenta $t \in \mathbb{R}$, a prostorna komponenta element proizvoljnog realnog euklidskog prostora V opremljenog skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i induciranom normom $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Događaj u ovakvom poopćenom prostor-vremenu prikazujemo kao uređeni par $(t, v) \in \mathbb{R} \oplus V$. Promatramo referentni događaj u ishodištu $(0, 0_V)$ te, bez smanjenja općenitosti, uzimamo brzinu svjetlosti $c = 1$.

Ako se iz ishodišta u trenutku $t = 0$ emitira svjetlosni signal, njegova prostorna udaljenost nakon vremena t iznosi $r = \|v\|$. Budući da se signal širi brzinom $c = 1$, granica njegove propagacije dana je jednadžbom:

$$t^2 = \|v\|^2 \implies |t| = \|v\| \tag{4}$$

Skup svih točaka (t, v) za koje vrijedi $|t| = \|v\|$ čini *svjetlosni stožac*. U njegovom komplementu razlikujemo tri tipa područja u odnosu na ishodište:

- *vremenski odvojena budućnost ($t > \|v\|$),*
- *vremenski odvojena prošlost ($t < -\|v\|$),*
- *prostorno odvojeno područje ($|t| < \|v\|$).*

Točke na svjetlosnom stošcu predstavljaju svjetlosno odvojene događaje. Zajedno s njegovom unutrašnjošću, gornji stožac $t \geq \|v\|$ opisuje zatvorenu kauzalnu budućnost ishodišta, a donji stožac $t \leq -\|v\|$ zatvorenu kauzalnu prošlost. U prostorno odvojenom području uzročna veza zahtijevala bi signal brži od svjetlosti.

Neka je sad $\mathcal{A} = \mathbb{R} \oplus V$ spin faktor. Cilj je analizirati geometrijsku strukturu skupa svih kvadrata u algebri $\mathcal{A}$, kojeg označavamo s $K = \{a^2 \mid a \in \mathcal{A}\}$. Kvadriranjem proizvoljnog elementa $a \in \mathcal{A}$ izravno dobivamo:

$$a^2 = (\alpha, x) \circ (\alpha, x) = (\alpha^2 + \|x\|^2, 2\alpha x) \tag{5}$$

Neka je $y = (t, v) \in K$ kvadrat nekog elementa a. Njegova "vremenska" i "prostorna" komponenta iznose $t = \alpha^2 + \|x\|^2$ te $v = 2\alpha x$. Povežimo sada ovaj algebarski rezultat s prethodno definiranom kauzalnom strukturom Lorentzovog stošca. Usporedbom komponente t i norme komponente v dobivamo:

$$t - \|v\| = \alpha^2 + \|x\|^2 - \|2\alpha x\| = \alpha^2 + \|x\|^2 - 2|\alpha|\|x\| = (|\alpha| - \|x\|)^2 \tag{6}$$

Budući da je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan, nužno slijedi $t - \|v\| \geq 0$, odnosno $t \geq \|v\|$. Također, budući da su α^2 i $\|x\|^2$ nenegativni, jasno je da vrijedi i $t \geq 0$.

Kako bismo dokazali obratnu inkluziju, odnosno da se svaki element Lorentzova stošca može prikazati kao kvadrat nekog elementa algebre $Spin(V)$, pretpostavimo da je dan uređeni par $(t, v) \in \mathbb{R} \oplus V$ takav da vrijedi $t \geq \|v\|$. Želimo pronaći element $a = (\alpha, x) \in Spin(V)$ za koji vrijedi $a^2 = (t, v)$. Prema definiciji kvadriranja u spin faktoru, ovaj se zahtjev svodi na rješavanje sljedećeg sustava jednadžbi po skalaru $\alpha \in \mathbb{R}$ i vektoru $x \in V$:

$$t = \alpha^2 + \|x\|^2, \tag{7}$$

$$v = 2\alpha x. \tag{8}$$

Razlikujemo nekoliko slučajeva s obzirom na vrijednost parametara:

- Ako je $t = 0$, tada iz uvjeta $0 = t \geq \|v\| \geq 0$ nužno slijedi $\|v\| = 0$, odnosno $v = 0$. U tom slučaju trivijalno odabiremo $\alpha = 0$ i $x = 0$, pa vrijedi $(0, 0)^2 = (0, 0)$.

- Ako je $t > 0$ i $v = 0$, sustav se reducira na $t = \alpha^2$ i $2\alpha x = 0$. Tada možemo odabrati $\alpha = \sqrt{t}$ i $x = 0$, što daje traženi kvadrat $(\sqrt{t}, 0)^2 = (t, 0)$.

- Pretpostavimo sada da je $t > 0$ i $v \neq 0$. Iz jednadžbe (8) slijedi da je $\alpha \neq 0$, pa vektor x možemo izraziti kao:
$$x = \frac{v}{2\alpha}. \tag{9}$$
Uvrštavanjem izraza (9) u jednadžbu (7) dobivamo:
$$t = \alpha^2 + \frac{\|v\|^2}{4\alpha^2}.$$
Množenjem cijele jednadžbe s $4\alpha^2$ dolazimo do bikvadratne jednadžbe po α:
$$4\alpha^4 - 4t\alpha^2 + \|v\|^2 = 0. \tag{10}$$
Uvođenjem supstitucije $Y = \alpha^2$, jednadžba (10) prelazi u kvadratnu jednadžbu $4Y^2 - 4tY + \|v\|^2 = 0$, čija su rješenja dana s:
$$Y = \frac{4t \pm \sqrt{16t^2 - 16\|v\|^2}}{8} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - \|v\|^2}}{2}.$$
Budući da po pretpostavci točka (t, v) leži unutar (ili na rubu) Lorentzova stošca, vrijedi $t \geq \|v\|$, što povlači $t^2 - \|v\|^2 \geq 0$. To nam jamči da je diskriminanta nenegativna te da su rješenja za Y realna. Odaberimo veće (pozitivno) rješenje za Y:
$$\alpha^2 = Y = \frac{t + \sqrt{t^2 - \|v\|^2}}{2}.$$
Kako je $t > 0$, odabrana vrijednost za α^2 je strogo pozitivna, pa možemo jednoznačno definirati realni skalar $\alpha > 0$ kao:
$$\alpha = \sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 - \|v\|^2}}{2}}. \tag{11}$$
Sada, uvrštavanjem dobivenog α natrag u (9), definiramo vektor $x \in V$:
$$x = \frac{v}{\sqrt{2\left(t + \sqrt{t^2 - \|v\|^2}\right)}}. \tag{12}$$
Provjerimo normu tako konstruiranog vektora x. Racionalizacijom nazivnika dobivamo:
$$\|x\|^2 = \frac{\|v\|^2}{2\left(t + \sqrt{t^2 - \|v\|^2}\right)} \cdot \frac{t - \sqrt{t^2 - \|v\|^2}}{t - \sqrt{t^2 - \|v\|^2}} = \frac{\|v\|^2\left(t - \sqrt{t^2 - \|v\|^2}\right)}{2\left(t^2 - (t^2 - \|v\|^2)\right)} = \frac{t - \sqrt{t^2 - \|v\|^2}}{2}.$$

Zbrajanjem α^2 i $\|x\|^2$ dobivamo:

$$\alpha^2 + \|x\|^2 = \frac{t + \sqrt{t^2 - \|v\|^2}}{2} + \frac{t - \sqrt{t^2 - \|v\|^2}}{2} = t,$$

što u potpunosti zadovoljava jednadžbu (7), dok je jednadžba (8) zadovoljena izravno po konstrukciji vektora x.

Iz ovog računa slijedi da se skup kvadrata K podudara sa zatvorenim gornjim Lorentzovim stošcem:

$$K = \{(t, v) \in \mathbb{R} \oplus V \mid t \geq \|v\|\} \tag{13}$$

Ovaj algebarski skup K naziva se *pozitivnim konusom* algebre A. Geometrijski gledano, kvadriranjem se cijeli prostor $\mathcal{A}$ preslikava na zatvorenu kauzalnu budućnost ishodišta. Ovaj rezultat povezuje spin faktore s geometrijom Minkowskijeva prostora i ukazuje na povezanost sa specijalnom teorijom relativnosti. Daljnja analiza te poveznice može se naći u [3] i [8].

4.3.2 Formalno realni spin faktori

Neka je $V = \mathbb{R}^n$ sa standardnim euklidskim skalarnim produktom. Tada pripadni spin faktor označavamo s $Spin_n := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ i zovemo formalno realnim spin faktorom. U nastavku rada fokusirat ćemo se isključivo na formalno realne spin faktore te ćemo, kad nema opasnosti od zabune, izostavljati oznaku *formalno realni* te ih nazivati samo spin faktorima. Ovo nije veliki gubitak općenitosti budući da je svaki realni konačnodimenzionalni euklidski prostor izometrički izomorfan s $\mathbb{R}^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$. Uvedimo oznake:

$$e_0 := (1, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad e_i := (0, \epsilon_i) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Tada $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ čini standardnu bazu prostora $Spin_n$. Dakle,

$$Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W, \quad W := \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} \cong \mathbb{R}^n.$$

Potprostor $\mathbb{R}e_0$ zovemo *skalarnim dijelom*, a W *vektorskim dijelom* spin faktora.

Napomena 4.17. Budući da je

$$W = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} = \{0\} \oplus \mathbb{R}^n,$$

u nastavku ćemo vektorski dio W poistovjećivati s prostorom $\mathbb{R}^n$ preko prirodne identifikacije

$$(0, x) \leftrightarrow x.$$

Stoga ćemo, kad god ne može doći do zabune, pisati $x \in W$ i $x \in \mathbb{R}^n$ naizmjenično. Posebno, ako je $r_1, \ldots, r_n$ baza prostora $\mathbb{R}^n$, iste ćemo oznake po potrebi koristiti i za odgovarajuće elemente $(0, r_1), \ldots, (0, r_n)$ iz $W \subseteq Spin_n$.

Lema 4.18. *U bazi* $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ *prostora* $Spin_n$ *vrijedi:*

$$e_0 \circ e_i = e_i \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$e_i \circ e_j = \begin{cases} e_0, & i = j \geq 1, \\ 0, & i \neq j,\ i, j \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz. 1. Množenje s jediničnim elementom e_0*:*

- Za $i = 0$ imamo:

$$e_0 \circ e_0 = (1, 0) \circ (1, 0) = (1 \cdot 1 + \langle 0, 0 \rangle,\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = (1, 0) = e_0.$$

- Za $1 \leq i \leq n$ imamo:

$$e_0 \circ e_i = (1, 0) \circ (0, \epsilon_i) = (1 \cdot 0 + \langle 0, \epsilon_i \rangle,\ 1 \cdot \epsilon_i + 0 \cdot 0) = (0, \epsilon_i) = e_i.$$

Zbog komutativnosti produkta vrijedi $e_0 \circ e_i = e_i \circ e_0 = e_i$ za sve $0 \leq i \leq n$.

2. Množenje baznih elemenata iz vektorskog dijela ($1 \leq i, j \leq n$*):*

$$e_i \circ e_j = (0, \epsilon_i) \circ (0, \epsilon_j) = (0 \cdot 0 + \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle,\ 0 \cdot \epsilon_j + 0 \cdot \epsilon_i) = (\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle,\ 0).$$

Budući da je $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ ortonormirana baza, vrijedi:

- Ako je $i = j \geq 1$, tada je $\langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle = 1$, pa je:

$$e_i \circ e_i = (1, 0) = e_0.$$

- Ako je $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n)$, tada je $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = 0$, pa je:

$$e_i \circ e_j = (0, 0) = 0.$$

□

Prije nego što prijeđemo na detaljnu analizu same multiplikacijske polugrupe, iskazujemo sljedeći teorem koji nećemo eksplicitno koristiti, no važan je zbog dubljih implikacija o simetriji koju posjeduju spin faktori. Dokaz teorema može se pronaći u [10].

Teorem 4.19. *Neka je* $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$ *formalno realni spin faktor dimenzije* $n + 1$*, gdje je* $W \cong \mathbb{R}^n$ *opremljen standardnim euklidskim skalarnim produktom. Grupa automorfizama Jordanove algebre* $Spin_n$*, koju označavamo s* $Aut(Spin_n)$*, izomorfna je ortogonalnoj grupi* $O(n)$*. Svaki automorfizam* $\Phi \in Aut(Spin_n)$ *djeluje trivijalno na skalarnom dijelu i fiksira jedinični element* e_0*, dok na vektorskom dijelu* W *djeluje kao ortogonalna transformacija.*

Geometrijski gledano, ovaj izomorfizam s ortogonalnom grupom nosi temeljnu motivacijsku ulogu za čitavu strategiju dokaza o maksimalnosti polugrupe. Budući da grupa $\mathrm{O}(n)$ djeluje tranzitivno na

jediničnoj sferi vektorskog potprostora W, to povlači da u vektorskom dijelu prostora nema povlaštenih ili koordinatno specifičnih smjerova. Prostor je u potpunosti izotropan.

Ta će nam ravnopravnost smjerova kasnije omogućiti fiksiranje jednog smjera bez potrebe za uvođenjem složenih koordinatnih sustava. Za širi geometrijski kontekst Jordanovih i Liejevih struktura vidjeti [4].

4.4 Matrični prikaz operatora množenja L_a

Budući da je cilj proučiti opseg polugrupe operatora množenja na realnim spin faktorima, prvi korak je analiza samog operatora množenja. Za fiksirani element $a = (\alpha, u) \in Spin_n$ (gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $u \in \mathbb{R}^n$), operator množenja

$$L_a \colon Spin_n \to Spin_n, \quad L_a(z) := a \circ z$$

je linearan operator na realnom spin faktoru $Spin_n = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$. Za proizvoljan element $z = (\beta, x) \in Spin_n$, djelovanje operatora L_a dano je formulom:

$$L_a(\beta, x) = (\alpha, u) \circ (\beta, x) = \big(\alpha\beta + \langle u, x\rangle,\ \alpha x + \beta u\big).$$

Propozicija 4.20. *Neka je $a = (\alpha, u) \in Spin_n$ proizvoljan element realnog spin faktora $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$. U standardnoj bazi $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, operator množenja $L_a \colon Spin_n \to Spin_n$, definiran s $L_a(z) = a \circ z$, ima sljedeći blok-matrični prikaz reda $(n+1) \times (n+1)$:*

$$[L_a] = \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ u & \alpha I_n \end{bmatrix},$$

gdje je I_n jedinična matrica reda n, $u \in \mathbb{R}^n$ je prikazan kao stupčani vektor, a u^T kao retčani vektor.

Dokaz. Neka je $z = (\beta, x) \in Spin_n$ proizvoljan element, gdje je $\beta \in \mathbb{R}$ skalarna komponenta, a $x \in \mathbb{R}^n$ vektorska komponenta.

Prema definiciji Jordanovog produkta u $Spin_n$, djelovanje operatora L_a na element z glasi:

$$L_a(z) = a \circ z = (\alpha, u) \circ (\beta, x) = \big(\alpha\beta + \langle u, x\rangle,\ \alpha x + \beta u\big).$$

Identificirajući element $z = (\beta, x) \in Spin_n$ sa stupčanim vektorom $\begin{bmatrix} \beta \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, izračunatu sliku $L_a(z)$ možemo zapisati pomoću matričnog množenja:

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta + \langle u, x\rangle \\ \alpha x + \beta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta + u^T x \\ \beta u + \alpha I_n x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ u & \alpha I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ x \end{bmatrix}.$$

Budući da gornja jednakost vrijedi za svaki vektor $\begin{bmatrix} \beta \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, slijedi da je $[L_a] = \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ u & \alpha I_n \end{bmatrix}$ upravo tražena matrica operatora L_a. □

Korolar 4.21. *Neka je $a = (\alpha, u) \in Spin_n$ ($n \geq 1$). Determinanta operatora množenja $L_a \colon Spin_n \to Spin_n$ dana je formulom:*

$$\det(L_a) = (\alpha^2 - \|u\|^2)\alpha^{n-1}.$$

Posebno, operator L_a je invertibilan ako i samo ako vrijedi:

1. *Za $n = 1$: $\alpha^2 - \|u\|^2 \neq 0$ (tj. element a je invertibilan u algebri $Spin_1$).*
2. *Za $n \geq 2$: $\alpha^2 - \|u\|^2 \neq 0$ i $\alpha \neq 0$.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji, u rastavu $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ matrica operatora L_a ima blok-strukturu:

$$[L_a] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ u & \alpha I_n \end{bmatrix},$$

gdje je $A = \alpha \in \mathbb{R}$, $B = u^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $C = u \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ te $D = \alpha I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Slučaj $\alpha \neq 0$:

Kada je $\alpha \neq 0$, blok $D = \alpha I_n$ je invertibilan s inverzom $D^{-1} = \frac{1}{\alpha} I_n$. Primjenom formule za Schurov komplement:

$$\det(L_a) = \det(D) \cdot \det(A - BD^{-1}C),$$

dobivamo:

$$\det(D) = \det(\alpha I_n) = \alpha^n,$$

$$A - BD^{-1}C = \alpha - u^T \left(\frac{1}{\alpha} I_n\right) u = \alpha - \frac{1}{\alpha} u^T u = \alpha - \frac{\|u\|^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - \|u\|^2}{\alpha}.$$

Uvrštavanjem natrag u formulu slijedi:

$$\det(L_a) = \alpha^n \cdot \left(\frac{\alpha^2 - \|u\|^2}{\alpha}\right) = (\alpha^2 - \|u\|^2)\alpha^{n-1}.$$

2. Slučaj $\alpha = 0$:

Za $\alpha = 0$ matrica ima oblik $[L_a] = \begin{bmatrix} 0 & u^T \\ u & 0 \end{bmatrix}$.

- Ako je $n = 1$, pišemo $u = u_1 e_1$ s $u_1 \in \mathbb{R}$. Tada je matrica $\begin{bmatrix} 0 & u_1 \\ u_1 & 0 \end{bmatrix}$, pa je $\det(L_a) = -u_1^2 = -\|u\|^2 = \alpha^2 - \|u\|^2$ za $\alpha = 0$; time formula vrijedi i u ovom slučaju.
- Ako je $n \geq 2$, slika operatora L_a sadržana je u potprostoru $\operatorname{span}\{e_0, (0, u)\}$, pa je $\mathrm{r}(L_a) \leq 2 < n+1$ i zato $\det(L_a) = 0$. Budući da je tada $(0 - \|u\|^2)0^{n-1} = 0$, formula vrijedi i za $\alpha = 0$.

Operator L_a je invertibilan ako i samo ako je $\det(L_a) \neq 0$. Za $n = 1$ imamo $\det(L_a) = \alpha^2 - \|u\|^2$, pa je uvjet $\alpha^2 - \|u\|^2 \neq 0$.

Za $n \geq 2$ imamo $\det(L_a) = (\alpha^2 - \|u\|^2)\alpha^{n-1}$, pa $\det(L_a) \neq 0$ zahtijeva da je $\alpha^2 - \|u\|^2 \neq 0$ i $\alpha \neq 0$. □

Napomena 4.22 (Nemogućnost generiranja svih endomorfizama za $n = 1$)**.** Za $n = 1$, realni spin faktor $Spin_1 = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1$ je dvodimenzionalan. Prema općoj blok-matričnoj formuli za operator množenja L_a (gdje je $a = (\alpha, u) \in Spin_1$, a $u = \beta e_1 \in \mathbb{R}e_1$), matrica operatora L_a u bazi (e_0, e_1) ima oblik:

$$[L_a] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Promotrimo skup svih 2×2 matrica tog oblika:

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

Skup $\mathcal{M}$ zatvoren je na matrično množenje. Zaista, za proizvoljne dvije matrice iz $\mathcal{M}$ vrijedi:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ a_1b_2 + b_1a_2 & a_1a_2 + b_1b_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}.$$

Budući da je svaki generator polugrupe $\mathrm{JMS}(Spin_1)$ oblika $[L_a] \in \mathcal{M}$, a kompozicija bilo kojeg konačnog broja takvih operatora ostaje unutar skupa $\mathcal{M}$, slijedi:

$$\mathrm{JMS}(Spin_1) \subseteq \mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Kako je $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M} = 2$, dok je algebra svih linearnih operatora $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_1) \cong M_2(\mathbb{R})$ dimenzije $2^2 = 4$, zaključujemo da polugrupa množenja ne može generirati sve endomorfizme:

$$\mathrm{JMS}(Spin_1) \neq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_1).$$

Ovaj rezultat u potpunosti je u skladu s ranije dokazanom činjenicom da $Spin_1$ nije prosta Jordanova algebra, budući da u općoj teoriji jednakost $\mathrm{JMS}(\mathcal{J}) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{J})$ nužno implicira da je algebra $\mathcal{J}$ prosta.

4.5 Idempotenti i anizotropna preslikavanja

U ovom odjeljku prelazimo na samu konstrukciju nekih operatora unutar naše polugrupe. Cilj je konstruirati *anizotropna preslikavanja*, odnosno preslikavanja koja razlikuju jedan povlašteni smjer od drugih. Ona će služiti kao most prema dobivanju elementarnih transvekcija. Prema teoremu 4.19 i napomeni nakon njega ideja je fiksirati jedan smjer određen jediničnim vektorom r i onda iskoristiti Peirceovu dekompoziciju. Prije toga treba analizirati strukturu idempotenata koja je u spin faktorima dosta jednostavna. Imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 4.23. *Neka je $Spin_n = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ realni spin faktor opskrbljen standardnim euklidskim skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Element $x \in Spin_n$ je idempotent ($x^2 = x$) ako i samo ako je x jednak jednom od trivijalnih idempotenata $(0,0)$ ili $e_0 = (1,0)$, ili je oblika*

$$p_r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}r\right) \quad \text{za neki jedinični vektor } r \in \mathbb{R}^n \ (\|r\| = 1).$$

Nadalje, za svaki jedinični vektor $r \in \mathbb{R}^n$, idempotenti p_r i p_{-r} su međusobno ortogonalni i njihov zbroj daje jedinicu algebre e_0:

$$p_r + p_{-r} = e_0 \quad i \quad p_r \circ p_{-r} = (0,0).$$

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je element $x = (\alpha, u) \in Spin_n$, pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $u \in \mathbb{R}^n$, idempotent u algebri $Spin_n$. Prema definiciji množenja u $Spin_n$, njegov kvadrat glasi $x^2 = (\alpha^2 + \|u\|^2, 2\alpha u)$, pa se uvjet $x^2 = x$ svodi na jednakost uređenih parova

$$(\alpha^2 + \|u\|^2, 2\alpha u) = (\alpha, u).$$

Izjednačavanjem skalarne i vektorske komponente dobivamo sustav jednadžbi $\alpha^2 + \|u\|^2 = \alpha$ te $(2\alpha - 1)u = 0$.

Ako je vektorska komponenta jednaka nuli ($u = 0$), prva jednadžba prelazi u $\alpha^2 = \alpha$, što daje rješenja $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$. Time dobivamo dva trivijalna idempotenta $(0,0)$ i $e_0 = (1,0)$. Pretpostavimo s druge strane da je vektorska komponenta nenul ($u \neq 0$). Tada iz jednakosti $(2\alpha - 1)u = 0$ nužno slijedi da je skalar u zagradi jednak nuli, odnosno $\alpha = \frac{1}{2}$. Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu dobivamo $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \|u\|^2 = \frac{1}{2}$, odakle izračunom slijedi $\|u\|^2 = \frac{1}{4}$, odnosno $\|u\| = \frac{1}{2}$. Ako definiramo vektor $r := 2u \in \mathbb{R}^n$, uočavamo da je njegova norma $\|r\| = 2\|u\| = 1$, pa vektor u možemo zapisati u obliku $u = \frac{1}{2}r$ za jedinični vektor $r \in \mathbb{R}^n$. Time je pokazano da svi netrivijalni idempotenti moraju biti oblika $p_r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}r\right)$ za $\|r\| = 1$.

Obratno, neposrednim uvrštavanjem lako se provjerava da svi navedeni elementi doista jesu idempotenti. Za bilo koji fiksirani jedinični vektor $r \in \mathbb{R}^n$ ($\|r\| = 1$), promatrajmo sada par idempotenata $p_r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}r\right)$ i $p_{-r} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}r\right)$. Njihovim zbrajanjem po komponentama dobivamo

$$p_r + p_{-r} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r\right) = (1,0) = e_0,$$

dok izračun njihovog Jordanovog produkta daje

$$p_r \circ p_{-r} = \left(\frac{1}{4} + \left\langle \frac{1}{2}r, -\frac{1}{2}r \right\rangle, \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}r\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r\right)\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\|r\|^2, 0\right) = (0,0),$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz uvjeta $\|r\| = 1$. □

Sada kada poznajemo strukturu idempotenata, sljedeći je cilj iskoristiti Peirceovu dekompoziciju. Za slične metode u općenitijim slučajevima vidjeti na primjer [22].

Fiksirajmo stoga $r \in \mathbb{R}^n$ ($\|r\| = 1$). Neka je $a = (\alpha, \beta r) \in Spin_n$, pri čemu su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Definiramo dva komplementarna idempotenta određena s vektorom r:

$$p_r = \frac{1}{2}(e_0 + r) \quad \text{i} \quad p_{-r} = \frac{1}{2}(e_0 - r).$$

Prema prošloj propoziciji ovo su idempotenti i zadovoljavaju jednakosti $p_r + p_{-r} = e_0$ te $p_r \circ p_{-r} = 0$. Korištenjem ovih idempotenata, element $a = \alpha e_0 + \beta r$ možemo zapisati kao njihovu linearnu kombinaciju:

$$a = (\alpha + \beta)p_r + (\alpha - \beta)p_{-r}.$$

Idempotent p_r inducira Peirceovu dekompoziciju cijelog prostora $Spin_n$ na svojstvene potprostore operatora lijevog množenja L_{p_r} danu sa $Spin_n = \mathcal{J}_1(p_r) \oplus \mathcal{J}_{1/2}(p_r) \oplus \mathcal{J}_0(p_r)$.

Da bismo eksplicitno odredili svojstvene potprostore, uzmimo proizvoljan element $x = \gamma e_0 + w \in Spin_n$. Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ rastavimo na dio paralelan s r i dio ortogonalan na r, tj. $w = cr + w_\perp$, gdje je $c = \langle r, w \rangle \in \mathbb{R}$, a $w_\perp \in r^\perp$.

Izračunajmo produkt $L_{p_r}(x) = p_r \circ x$:

$$\begin{aligned} L_{p_r}(x) &= \frac{1}{2}(e_0 + r) \circ (\gamma e_0 + cr + w_\perp) \\ &= \frac{1}{2}\gamma e_0 + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}w_\perp + \frac{1}{2}\gamma r + \frac{1}{2}c(r \circ r) + \frac{1}{2}(r \circ w_\perp). \end{aligned}$$

Kako je $r \circ r = \|r\|^2 e_0 = e_0$ i $r \circ w_\perp = \langle r, w_\perp \rangle e_0 = 0$, sređivanjem dobivamo:

$$L_{p_r}(x) = \left(\frac{\gamma + c}{2}\right) e_0 + \left(\frac{\gamma + c}{2}\right) r + \frac{1}{2}w_\perp.$$

Sada za svaku svojstvenu vrijednost $\lambda \in \left\{1, 0, \frac{1}{2}\right\}$ rješavamo jednadžbu $L_{p_r}(x) = \lambda x$:

- *Za svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$:* Izjednačavanjem komponenti dobivamo $\frac{\gamma+c}{2} = \gamma \implies c = \gamma$, te $\frac{1}{2}w_\perp = 1 \cdot w_\perp \implies w_\perp = 0$. Svaki svojstveni vektor mora imati oblik $\gamma(e_0 + r)$, što znači da je pripadni svojstveni potprostor jednodimenzionalan i razapet elementom $e_0 + r$:

$$\mathcal{J}_1(p_r) = \text{span}\{e_0 + r\}.$$

- *Za svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$:* Izjednačavanjem komponenti dobivamo $\frac{\gamma+c}{2} = 0 \implies c = -\gamma$, te $\frac{1}{2}w_\perp = 0 \implies w_\perp = 0$. Svaki svojstveni vektor ima oblik $\gamma(e_0 - r)$, pa je i ovaj potprostor jednodimenzionalan i razapet elementom $e_0 - r$:

$$\mathcal{J}_0(p_r) = \text{span}\{e_0 - r\}.$$

- *Za svojstvenu vrijednost $\lambda = \frac{1}{2}$:* Iz skalarne komponente dobivamo $\frac{\gamma+c}{2} = \frac{1}{2}\gamma$, pa je $c = 0$. Iz komponente u smjeru r tada slijedi $\frac{1}{2}(c+\gamma) = \frac{1}{2}c$, odnosno $\gamma = 0$, dok za $w_\perp \in r^\perp$ imamo identitet

$\frac{1}{2}w_\perp = \frac{1}{2}w_\perp$. Dakle, ovaj potprostor obuhvaća cijeli ortogonalni komplement $r^\perp$ (dimenzije $n-1$):

$$\mathcal{J}_{1/2}(p_r) = r^\perp.$$

Dva jednodimenzionalna Peirceova potprostora $\mathcal{J}_1(p_r) = \text{span}\{e_0 + r\}$ i $\mathcal{J}_0(p_r) = \text{span}\{e_0 - r\}$ spajamo u njihovu direktnu sumu:

$$\mathcal{J}_1(p_r) \oplus \mathcal{J}_0(p_r) = \text{span}\{e_0 + r,\ e_0 - r\}.$$

Budući da je $e_0 = \frac{1}{2}((e_0 + r) + (e_0 - r))$ i $r = \frac{1}{2}((e_0 + r) - (e_0 - r))$, ova dvodimenzionalna suma razapeta je elementima e_0 i r.

Tu dvodimenzionalnu ravninu označavamo s:

$$C_r := \text{span}\{e_0, r\} = \mathcal{J}_1(p_r) \oplus \mathcal{J}_0(p_r).$$

Na taj se način cijeli prostor $Spin_n$ prirodno raspada na dvodimenzionalnu ravninu C_r i njezin ortogonalni komplement $r^\perp$:

$$Spin_n = C_r \oplus r^\perp.$$

Kako smo element a rastavili preko idempotenata kao $a = (\alpha + \beta)p_r + (\alpha - \beta)p_{-r}$, zbog linearnosti se i pripadni operator množenja L_a raspada na zbroj operatora:

$$L_a = (\alpha + \beta)L_{p_r} + (\alpha - \beta)L_{p_{-r}}.$$

Budući da je $p_{-r} = e_0 - p_r$, operator $L_{p_{-r}}$ ima svojstvene vrijednosti $1 - \lambda$ u odnosu na Peirceove potprostore idempotenta p_r:

- Na $\mathcal{J}_1(p_r)$ operator L_{p_r} djeluje s 1, a $L_{p_{-r}}$ s 0.
- Na $\mathcal{J}_0(p_r)$ operator L_{p_r} djeluje s 0, a $L_{p_{-r}}$ s 1.
- Na $\mathcal{J}_{1/2}(p_r) = r^\perp$ oba operatora L_{p_r} i $L_{p_{-r}}$ djeluju s $\frac{1}{2}$.

Sada izravno dobivamo kako operator L_a djeluje na komponente rastava $Spin_n = C_r \oplus r^\perp$:

1. *Na ravnini C_r (u bazi $(e_0 + r, e_0 - r)$):*

   - Na elementu $e_0 + r \in \mathcal{J}_1(p_r)$ operator L_a djeluje kao:

   $$(\alpha + \beta) \cdot 1 + (\alpha - \beta) \cdot 0 = \alpha + \beta.$$

   - Na elementu $e_0 - r \in \mathcal{J}_0(p_r)$ operator L_a djeluje kao:

   $$(\alpha + \beta) \cdot 0 + (\alpha - \beta) \cdot 1 = \alpha - \beta.$$

   Dakle, L_a čuva ravninu C_r, a njegova matrica restrikcije $L_a|_{C_r}$ u bazi $(e_0 + r, e_0 - r)$ je dijagonalna: $\begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha - \beta \end{bmatrix}$.

2. *Na ortogonalnom komplementu $r^\perp$:* Za svaki $w_\perp \in r^\perp = \mathcal{J}_{1/2}(p_r)$, L_a djeluje kao:

$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{2}w_\perp + (\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{2}w_\perp = \alpha w_\perp.$$

Dakle, L_a na cijelom potprostoru $r^\perp$ djeluje kao čisto skalarno množenje s α.

Kao posljedicu gornje analize imamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 4.24. *Neka je $a = (\alpha, \beta r) \in Spin_n$, pri čemu su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $r \in \mathbb{R}^n$ je jedinični vektor ($\|r\| = 1$). Promatrajmo dvodimenzionalnu ravninu $C_r := \text{span}\{e_0, r\}$ te ortogonalni komplement $r^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle r, x\rangle = 0\}$.*

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. *Potprostori C_r i $r^\perp$ su invarijantni za operator množenja $L_a \colon Spin_n \to Spin_n$.*

2. *U bazi (f_+, f_-) ravnine C_r, definiranoj elementima*

$$f_+ := e_0 + r \quad i \quad f_- := e_0 - r,$$

matrica restrikcije operatora L_a na ravninu C_r je dijagonalna i ima oblik:

$$[L_a|_{C_r}] = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 0 & \alpha-\beta \end{bmatrix}.$$

3. *Restrikcija operatora L_a na ortogonalni komplement $r^\perp$ djeluje kao skalarno množenje s α, odnosno za svaki $x \in r^\perp$ vrijedi:*

$$L_a(x) = \alpha x.$$

Definicija 4.25. Neka je $r \in W$ proizvoljan fiksiran jedinični vektor. Dvodimenzionalni potprostor $C_r \subseteq Spin_n$ definiran kao

$$C_r := \text{span}\{e_0, r\}$$

zovemo *invarijantnom ravninom* pridruženom vektoru r.

Napomena 4.26. Geometrija idempotenata u spin faktorima uklapa se u širi geometrijski okvir Jordanovih struktura; za takav kontekst vidjeti [6].

Za komplementarne idempotente p_r i p_{-r} iz prethodnog računa dobivamo

$$\mathcal{J}_{1/2}(p_r) = \mathcal{J}_{1/2}(p_{-r}) = r^\perp,$$

dok su $\mathcal{J}_1(p_r) = \text{span}\{e_0 + r\}$ i $\mathcal{J}_1(p_{-r}) = \text{span}\{e_0 - r\}$. Zato je upravo zajednički Peirceov $1/2$-prostor jednak $r^\perp$. Za svaki jedinični vektor $x \in r^\perp$ vrijedi $x^2 = e_0 = p_r + p_{-r}$. Ta će nam sloboda izbora elementa $x \in r^\perp$ omogućiti prijelaz s anizotropnih preslikavanja na elementarne transvekcije pomoću biranja novih osi u ravnini $\text{span}\{r, x\}$.

Propozicija 4.27. *Za svaki $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ postoje elementi $a_t = (1, tr)$ i $b_t = (\gamma(t), \delta(t)r)$ u $Spin_n$ takvi da operator $L_{a_t}L_{b_t}L_{a_t}$ djeluje kao operator identiteta na ravnini C_r, a na ortogonalnom komplementu*

$r^\perp$ kao množenje pozitivnim skalarom $\lambda(t)$, pri čemu je

$$\gamma(t) = \lambda(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}, \quad \delta(t) = \frac{-2t}{(1-t^2)^2}.$$

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji, restrikcija operatora množenja na ravninu C_r u bazi (f_+, f_-) ima dijagonalni oblik. Za element $a_t = (1, tr)$ odgovarajuća matrica restrikcije je $\mathrm{diag}(1+t, 1-t)$. Slično, za element $b_t = (\gamma(t), \delta(t)r)$, matrica restrikcije na C_r iznosi $\mathrm{diag}(\gamma(t)+\delta(t), \gamma(t)-\delta(t))$.

Operator $L_{a_t} L_{b_t} L_{a_t}$ na ravnini C_r odgovara umnošku triju dijagonalnih matrica:

$$\begin{bmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(t)+\delta(t) & 0 \\ 0 & \gamma(t)-\delta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)^2(\gamma(t)+\delta(t)) & 0 \\ 0 & (1-t)^2(\gamma(t)-\delta(t)) \end{bmatrix}.$$

Kako bi ovaj operator bio jednak operatoru identiteta na C_r, dijagonalni elementi moraju biti jednaki 1:

$$(1+t)^2(\gamma(t)+\delta(t)) = 1 \implies \gamma(t)+\delta(t) = \frac{1}{(1+t)^2},$$
$$(1-t)^2(\gamma(t)-\delta(t)) = 1 \implies \gamma(t)-\delta(t) = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo tražene koeficijente:

$$2\gamma(t) = \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{(1-t)^2+(1+t)^2}{(1-t^2)^2} = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \implies \gamma(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2},$$
$$2\delta(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{(1-t)^2-(1+t)^2}{(1-t^2)^2} = \frac{-4t}{(1-t^2)^2} \implies \delta(t) = \frac{-2t}{(1-t^2)^2}.$$

S druge strane, znamo da L_{a_t} djeluje na ortogonalnom komplementu $r^\perp$ kao množenje skalarnim dijelom elementa a_t, što iznosi 1. Slično, L_{b_t} na $r^\perp$ djeluje kao množenje skalarom $\gamma(t)$. Stoga kompozicija $L_{a_t} L_{b_t} L_{a_t}$ na potprostoru $r^\perp$ djeluje kao množenje skalarom $1 \cdot \gamma(t) \cdot 1 = \gamma(t)$. Dakle, traženi parametar skaliranja je $\lambda(t) = \gamma(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$. □

Korolar 4.28. *Za svaki $\lambda > 0$ i svaki jedinični vektor $r \in W$ postoji operator u polugrupi* $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ *koji djeluje kao operator identiteta na ravnini C_r te kao množenje skalarom λ na ortogonalnom komplementu $r^\perp$.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da funkcija $\lambda : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $\lambda(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$ poprima sve pozitivne vrijednosti. Očito je $\lambda(t) > 0$ za sve $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Promotrimo interval $(1, +\infty)$. Budući da je funkcija λ neprekidna na tom intervalu te vrijedi

$$\lim_{t \to 1^+} \lambda(t) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{t \to +\infty} \lambda(t) = 0,$$

prema teoremu o međuvrijednostima, funkcija poprima sve vrijednosti iz intervala $(0, +\infty)$. S obzirom na to da su L_{a_t} i L_{b_t} operatori lijevog množenja, operator $L_{a_t} L_{b_t} L_{a_t}$ pripada polugrupi $\mathrm{JMS}(Spin_n)$, čime je tvrdnja dokazana. □

Napomena 4.29. Operatore iz prethodnog korolara prirodno je zvati *anizotropnim preslikavanjima* (ili

anizotropnim skaliranjima) te ćemo ih u nastavku rada označavati s $S_r(\lambda)$. Naziv dolazi iz geometrijske intuicije: za razliku od standardnih izotropnih skaliranja koja prostor rastežu ravnomjerno u svim smjerovima, ova preslikavanja ne djeluju na svim smjerovima jednako, nego razlikuju jednu povlaštenu ravninu od ostatka prostora.

Geometrijski gledano, operator $S_r(\lambda) \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ fiksira čitavu ravninu $C_r = \mathrm{span}\{e_0, r\}$ po točkama, dok na njezinom ortogonalnom komplementu $r^\perp$ djeluje kao skaliranje za faktor λ. Prema korolaru 4.28 ovakva preslikavanja se nalaze u $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ za svaki $\lambda > 0$.

4.6 Od anizotropnih preslikavanja do transvekcija

U ovom odjeljku anizotropna preslikavanja konstruirana u prethodnom koraku koristimo za dobivanje elementarnih transvekcija na koordinatnim ravninama. Kao što je prije navedeno u poglavlju o transvekcijama, polugrupa operatora na nekom vektorskom prostoru koja sadrži sve elementarne transvekcije s obzirom na neku bazu automatski sadrži cijelu specijalnu linearnu grupu tog vektorskog prostora. Jednom kad imamo specijalnu linearnu grupu možemo dobiti i opću linearnu grupu $\mathrm{GL}(Spin_n)$ te naposljetku i cijelu polugrupu endomorfizama. Stoga je esencijalni korak dokaza pokazati egzistenciju elementarnih transvekcija unutar naše polugrupe. Neka su $p, q \in W$ ortonormirani vektori i promatrajmo dvodimenzionalnu ravninu $R := \mathrm{span}\{p, q\}$. Uvest ćemo još dva dijagonalna smjera u toj ravnini:

$$u_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(p+q), \quad u_- := \frac{1}{\sqrt{2}}(p-q).$$

Za proizvoljan parametar $\lambda > 0$, definiramo sljedeća četiri anizotropna skaliranja:

$$D_p(\lambda) := S_p(\lambda), \quad D_q(\lambda) := S_q(\lambda), \quad H_+(\lambda) := S_{u_+}(\lambda), \quad H_-(\lambda) := S_{u_-}(\lambda).$$

Prema korolaru 4.28 svi navedeni operatori pripadaju polugrupi $\mathrm{JMS}(Spin_n)$.

Lema 4.30. *Matrice operatora $D_p(\lambda)$, $D_q(\lambda)$, $H_+(\lambda)$ i $H_-(\lambda)$ na ravnini R u bazi (p, q) glase redom:*

$$D_p(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad D_q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$H_+(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix}, \qquad H_-(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\lambda & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1+\lambda \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Prema definiciji, anizotropno skaliranje fiksira svoj definicijski smjer, a na ortogonalni komplement djeluje množenjem s λ. Zato operator $D_p(\lambda) = S_p(\lambda)$ fiksira vektor p, dok okomiti vektor q množi s λ, iz čega izravno slijedi matrica $\mathrm{diag}(1, \lambda)$. Analogno, $D_q(\lambda) = S_q(\lambda)$ fiksira q, a p množi s λ, što daje matricu $\mathrm{diag}(\lambda, 1)$.

Kako bismo odredili djelovanje operatora $H_+(\lambda)$ i $H_-(\lambda)$, zapišimo najprije bazne vektore p i q preko dijagonalnih smjerova u_+ i u_-:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+ + u_-), \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+ - u_-).$$

Operator $H_+(\lambda) = S_{u_+}(\lambda)$ fiksira u_+, a okomiti smjer u_- množi s λ. Stoga imamo:

$$H_+(\lambda)p = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+ + \lambda u_-) = \frac{1}{2}(p+q) + \frac{\lambda}{2}(p-q) = \frac{1+\lambda}{2}p + \frac{1-\lambda}{2}q,$$
$$H_+(\lambda)q = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+ - \lambda u_-) = \frac{1}{2}(p+q) - \frac{\lambda}{2}(p-q) = \frac{1-\lambda}{2}p + \frac{1+\lambda}{2}q.$$

Time smo dobili matricu za $H_+(\lambda)$.

Analogno, operator $H_-(\lambda) = S_{u_-}(\lambda)$ fiksira u_-, a u_+ množi s λ, pa slijedi:

$$H_-(\lambda)p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda u_+ + u_-) = \frac{\lambda}{2}(p+q) + \frac{1}{2}(p-q) = \frac{1+\lambda}{2}p + \frac{\lambda-1}{2}q,$$
$$H_-(\lambda)q = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda u_+ - u_-) = \frac{\lambda}{2}(p+q) - \frac{1}{2}(p-q) = \frac{\lambda-1}{2}p + \frac{1+\lambda}{2}q.$$

Ovim su izvedene sve četiri matrice. □

Definicija 4.31. Za pozitivne realne parametre $a, b, c, d > 0$, definiramo operator $M(a,b,c,d)$ kao produkt četiriju anizotropnih preslikavanja.

$$M(a,b,c,d) := D_p(a)H_-(b)D_q(c)H_+(d)$$

Napomena 4.32. Matrični prikaz restrikcije operatora $M(a,b,c,d)$ na ravninu R u bazi (p,q) dobiva se izravnim množenjem četiriju matrica iz prethodne leme i eksplicitno glasi:

$$M(a,b,c,d)|_R = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} c(1+b)(1+d)+(b-1)(1-d) & c(1+b)(1-d)+(b-1)(1+d) \\ a(c(b-1)(1+d)+(1+b)(1-d)) & a(c(b-1)(1-d)+(1+b)(1+d)) \end{bmatrix}.$$

Na ortogonalnom komplementu $R^\perp$ ravnine R unutar vektorskog dijela W, svaki od četiri faktora djeluje kao homogeno skalarno množenje s pripadnim parametrom. Zbog toga cijeli produkt $M(a,b,c,d)$ na potprostoru $R^\perp$ djeluje kao množenje skalarom $abcd$.

Propozicija 4.33. *Za svaki realni parametar $t \geq 0$ postoje pozitivni skalari $a, b, c, d > 0$ takvi da pripadni četverofaktorski produkt $M(a,b,c,d) \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ na ortogonalnom komplementu $R^\perp$ djeluje kao operator identiteta, dok na ravnini R u bazi (p,q) djeluje matricom $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; za $t > 0$ to je elementarna transvekcija, a za $t = 0$ operator identiteta. Drugim riječima, vrijedi:*

$$M(a,b,c,d)p = p, \quad M(a,b,c,d)q = q + tp, \quad M(a,b,c,d)|_{R^\perp} = \mathrm{Id}_{R^\perp}.$$

Osim toga, svaki od četiriju faktora $D_p(a)$, $H_-(b)$, $D_q(c)$ i $H_+(d)$ fiksira e_0, pa vrijedi i $M(a,b,c,d)e_0 = e_0$.

Dokaz. Prema prethodnoj napomeni, matrični prikaz restrikcije operatora $M(a,b,c,d)$ na ravninu R izjednačavamo s matricom željenog oblika u bazi (p,q):

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} c(1+b)(1+d)+(b-1)(1-d) & c(1+b)(1-d)+(b-1)(1+d) \\ a(c(b-1)(1+d)+(1+b)(1-d)) & a(c(b-1)(1-d)+(1+b)(1+d)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih matričnih elemenata na pozicijama $(1,1)$, $(2,1)$ i $(2,2)$, koji ne ovise o parametru t, dobivamo sustav od tri jednadžbe. Tom sustavu pridružujemo i nužan uvjet $abcd = 1$ kako bi operator na ortogonalnom komplementu $R^\perp$ djelovao trivijalno. Time postavljamo sljedeće četiri

relacije:

$$c(1+b)(1+d) + (b-1)(1-d) = 4, \tag{1}$$

$$c(b-1)(1+d) + (1+b)(1-d) = 0, \tag{2}$$

$$a[c(b-1)(1-d) + (1+b)(1+d)] = 4, \tag{3}$$

$$abcd = 1. \tag{4}$$

Cilj je izraziti parametre a, c i d preko slobodnog parametra b bez korištenja jednadžbe s gornjeg desnog mjesta matrice koja eksplicitno sadrži vanjski parametar t.

Započinjemo od jednadžbe (2). Izoliranjem prvog pribrojnika dobivamo:

$$c(b-1)(1+d) = -(1+b)(1-d) = (1+b)(d-1).$$

Uz pretpostavku $b \neq 1$, dijeljenjem izrazimo parametar c:

$$c = \frac{(1+b)(d-1)}{(b-1)(1+d)}. \tag{5}$$

Sada uvrstimo ovaj izraz za c u jednadžbu (1):

$$\frac{(1+b)(d-1)}{(b-1)(1+d)}(1+b)(1+d) + (b-1)(1-d) = 4.$$

Kratimo zajednički član $(1+d)$ u prvom pribrojniku i promijenimo predznak u drugom pribrojniku kako bismo izjednačili baze razlomka:

$$\frac{(1+b)^2(d-1)}{b-1} - (b-1)(d-1) = 4.$$

Izlučivanjem zajedničkog faktora $(d-1)$ slijedi:

$$(d-1)\left[\frac{(1+b)^2 - (b-1)^2}{b-1}\right] = 4.$$

Razvojem kvadrata u brojniku unutar zagrade dobivamo $(1+2b+b^2) - (b^2-2b+1) = 4b$, pa jednadžba prelazi u:

$$(d-1)\frac{4b}{b-1} = 4.$$

Dijeljenjem cijele jednadžbe s 4, a potom množenjem s $(b-1)$ dobivamo:

$$b(d-1) = b-1 \implies bd - b = b-1 \implies bd = 2b-1.$$

Dijeljenjem s b izvodimo konačan izraz za parametar d:

$$d = \frac{2b-1}{b}.$$

Kako bismo odredili parametar c, izračunajmo najprije pomoćne izraze $d-1$ i $1+d$ supstitucijom

upravo izvedenog parametra d:

$$d-1=\frac{2b-1}{b}-1=\frac{b-1}{b},\quad 1+d=1+\frac{2b-1}{b}=\frac{3b-1}{b}.$$

Uvrštavanjem ovih relacija natrag u jednadžbu (5) dobivamo:

$$c=\frac{1+b}{b-1}\cdot\frac{\frac{b-1}{b}}{\frac{3b-1}{b}}=\frac{1+b}{b-1}\cdot\frac{b-1}{3b-1}=\frac{1+b}{3b-1}.$$

Preostaje odrediti parametar a iz jednadžbe (3). Izračunajmo vrijednost unutar uglate zagrade uvrštavanjem nađenih izraza za c i d, uzimajući u obzir da je $1-d=\frac{1-b}{b}$:

$$\begin{aligned}c(b-1)(1-d)+(1+b)(1+d)&=\frac{1+b}{3b-1}(b-1)\frac{1-b}{b}+(1+b)\frac{3b-1}{b}\\&=\frac{1+b}{b}\left[\frac{-(b-1)^2}{3b-1}+(3b-1)\right]\\&=\frac{1+b}{b}\left[\frac{-(b^2-2b+1)+(9b^2-6b+1)}{3b-1}\right]\\&=\frac{1+b}{b}\cdot\frac{8b^2-4b}{3b-1}\\&=\frac{1+b}{b}\cdot\frac{4b(2b-1)}{3b-1}=\frac{4(1+b)(2b-1)}{3b-1}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovog sređenog izraza natrag u jednadžbu (3) dobivamo:

$$a\cdot\frac{4(1+b)(2b-1)}{3b-1}=4\implies a=\frac{3b-1}{(1+b)(2b-1)}.$$

Na samom kraju, provjeravamo konzistentnost sustava i ispunjenje uvjeta (4) na ortogonalnom komplementu direktnim množenjem svih četiriju izvedenih parametara:

$$abcd=\left(\frac{3b-1}{(1+b)(2b-1)}\right)\cdot b\cdot\left(\frac{1+b}{3b-1}\right)\cdot\left(\frac{2b-1}{b}\right)=1.$$

Budući da se svi multiplikativni faktori u nazivnicima i brojnicima unakrsno krate, identitet $abcd=1$ je univerzalno zadovoljen. Preostaje još odrediti ovisnost parametra t o slobodnom parametru b te pokazati da se za svaki $t\geq 0$ mogu osigurati strogo pozitivne vrijednosti preostalih parametara a, c i d. Promatranjem elementa na poziciji $(1,2)$ u polaznoj matričnoj jednakosti dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{4}\left[c(1+b)(1-d)+(b-1)(1+d)\right]=t,$$

što množenjem s 4 daje:

$$c(1+b)(1-d)+(b-1)(1+d)=4t.$$

Uvrštavanjem ranije izvedenih izraza $1-d=\frac{1-b}{b}$, $1+d=\frac{3b-1}{b}$ te $c=\frac{1+b}{3b-1}$, lijevu stranu jednadžbe

transformiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 4t &= \frac{1+b}{3b-1}(1+b)\frac{1-b}{b} + (b-1)\frac{3b-1}{b} \\ &= -\frac{(b-1)(1+b)^2}{b(3b-1)} + \frac{(b-1)(3b-1)^2}{b(3b-1)}. \end{aligned}$$

Izlučivanjem zajedničkog faktora $\frac{b-1}{b(3b-1)}$ dobivamo:

$$4t = \frac{b-1}{b(3b-1)}\left[(3b-1)^2 - (1+b)^2\right].$$

Razvojem i oduzimanjem kvadrata unutar uglate zagrade slijedi:

$$(3b-1)^2 - (1+b)^2 = (9b^2 - 6b + 1) - (b^2 + 2b + 1) = 8b^2 - 8b = 8b(b-1),$$

pa uvrštavanjem tog rezultata natrag u izraz za $4t$ imamo:

$$4t = \frac{b-1}{b(3b-1)} \cdot 8b(b-1) = \frac{8(b-1)^2}{3b-1}.$$

Dijeljenjem s 4 dobivamo konačnu funkcijsku ovisnost parametra t o parametru b:

$$t = \frac{2(b-1)^2}{3b-1}.$$

Kako bismo dovršili dokaz, potrebno je pokazati da za svaki zadani parametar $t \geq 0$ postoji odabir parametra b takav da su svi pripadni parametri a, c i d strogo pozitivni realni brojevi. Ograničit ćemo se na izbor $b \geq 1$.

Granični slučaj $b = 1$ nije bio obuhvaćen dijeljenjem s $b - 1$ u prethodnom računu. Za $t = 0$ zato izravno uzmemo $a = b = c = d = 1$; tada je $M(1, 1, 1, 1)$ operator identiteta, pa su svi traženi uvjeti ispunjeni.

Za $b > 1$, izrazi $(3b - 1)$, $(1 + b)$ i $(2b - 1)$ su očito strogo pozitivni. Budući da su parametri a, c i d definirani kao umnošci i kvocijenti ovih izraza, oni nužno ostaju strogo pozitivni za svaki izbor $b > 1$.

Promatrajmo sada funkciju $t : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ zadanu s $t(b) = \frac{2(b-1)^2}{3b-1}$. Funkcija t je neprekidna na čitavoj domeni te vrijedi $t(1) = 0$ i $\lim_{b\to+\infty} t(b) = +\infty$. Prema teoremu o međuvrijednostima, funkcija t poprima sve vrijednosti iz intervala $[0, +\infty)$.

Dakle, za svaki zadani parametar $t \geq 0$ možemo pronaći odgovarajući $b \geq 1$ koji generira strogo pozitivne parametre $a, c, d > 0$ takve da je ispunjen uvjet $abcd = 1$ i da pripadna matrica poprima željeni oblik $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ na ravnini R, čime je propozicija u potpunosti dokazana. □

Korolar 4.34. *Za svaki ortonormirani par $p, q \in W$ i svaki $t \in \mathbb{R}$ polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži operator koji fiksira e_0 i $R^\perp$ po točkama, gdje je $R = \mathrm{span}\{p, q\}$, te zadovoljava*

$$p \mapsto p, \quad q \mapsto q + tp.$$

Za $t \neq 0$ to je elementarna transvekcija na ravnini R, a za $t = 0$ operator identiteta.

Dokaz. Promatrajmo modificirani četverofaktorski produkt operatora iz polugrupe $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ definiran kao:

$$M'(a,b,c,d) := D_p(a)H_+(b)D_q(c)H_-(d),$$

gdje su $a, b, c, d > 0$ strogo pozitivni parametri osigurani Propozicijom 4.33 za zadanu vrijednost $t \geq 0$.

Na ortogonalnom komplementu $R^\perp$ svaki od faktora i dalje djeluje kao homogeno skaliranje, pa cijeli produkt djeluje kao množenje skalarom $abcd = 1$, što znači da je $M'(a,b,c,d)|_{R^\perp} = \mathrm{Id}_{R^\perp}$.

Za određivanje djelovanja na ravnini R, uočimo odnos između matrica operatora $H_+(b)$ i $H_-(b)$. Njihovi elementi na glavnoj dijagonali su identični, dok su elementi na sporednoj dijagonali suprotnog predznaka. Algebarski, to znači da su te dvije matrice vezane konjugacijom pomoću matrice refleksije $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, odnosno vrijedi $H_+(b) = SH_-(b)S$ i $H_-(b) = SH_+(b)S$. Budući da su $D_p(a)$ i $D_q(c)$ dijagonalne matrice, one komutiraju s matricom S. Koristeći činjenicu da je $S^2 = I$, matricu restrikcije operatora M' na ravninu R možemo izraziti preko matrice polaznog operatora $M(a,b,c,d)|_R$:

$$\begin{aligned} M'(a,b,c,d)|_R &= D_p(a)H_+(b)D_q(c)H_-(d) \\ &= D_p(a)\,(SH_-(b)S)\,D_q(c)\,(SH_+(d)S) \\ &= SD_p(a)H_-(b)D_q(c)H_+(d)S \\ &= S \cdot M(a,b,c,d)|_R \cdot S. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem poznate matrice transvekcije za operator $M(a,b,c,d)|_R$ dobivamo:

$$M'(a,b,c,d)|_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Time su pokriveni svi negativni parametri; zajedno s prethodnim rezultatom polugrupa sadrži sve operatore navedenog oblika, pri čemu su za $t \neq 0$ elementarne transvekcije, a za $t = 0$ dobivamo operator identiteta. □

4.7 Od ravninskih transvekcija do grupe $\mathrm{SL}(Spin_n)$

Prema prethodnom odjeljku, kombiniranjem anizotropnih skaliranja na općenitoj ravnini $R = \mathrm{span}\{p, q\}$ dobili smo elementarne transvekcije. Posebno, ako u tim izrazima specificiramo bazne vektore $p = e_i$ i $q = e_j$ za $1 \leq i \neq j \leq n$, izravno slijedi da polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži sve operatore $I_W + t\varepsilon_{ij}$ za svaki $t \in \mathbb{R}$; za $t \neq 0$ to su elementarne transvekcije, a za $t = 0$ operator identiteta na vektorskom dijelu $W \cong \mathbb{R}^n$, koje djeluju trivijalno na skalarnom pravcu $\mathbb{R}e_0$.

U nastavku iskazujemo standardnu lemu iz linearne algebre (dokaz se može naći u [2] [14]) koja jamči da prisutnost svih elementarnih transvekcija u odabranoj bazi implicira generiranje cijele specijalne linearne grupe $\mathrm{SL}(W)$.

Lema 4.35. *Neka je W konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ s uređenom bazom $\mathcal{E} = (b_1, \ldots, b_d)$, pri čemu je $d \geq 2$, te neka je $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(W)$ polugrupa koja sadrži sve operatore*

$$x_{ij}(t) = I_W + t\varepsilon_{ij} \quad (1 \leq i \neq j \leq d,\ t \in \mathbb{F})$$

u odnosu na bazu $\mathcal{E}$, gdje je ε_{ij} operator ranga 1 koji šalje b_j u b_i, a sve ostale bazne vektore u 0.

Tada polugrupa $\mathcal{S}$ sadrži čitavu specijalnu linearnu grupu:

$$\mathrm{SL}(W) \subseteq \mathcal{S}.$$

Direktnom primjenom te leme imamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 4.36. *Neka je $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$ realni spin faktor za $n \geq 2$, pri čemu je $W \cong \mathbb{R}^n$ vektorski dio. Tada polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži čitavu specijalnu linearnu grupu vektorskog dijela W:*

$$\mathrm{SL}(W) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n),$$

pri čemu se svaki operator $h \in \mathrm{SL}(W)$ identificira s endomorfizmom $I_{\mathbb{R}e_0} \oplus h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_n)$ koji fiksira skalarni pravac $\mathbb{R}e_0$ po točkama.

Dokaz. Prema korolaru 4.34 polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži sve operatore na vektorskom dijelu W oblika $I_{\mathbb{R}e_0} \oplus (I_n + tE_{ij})$ za $1 \leq i \neq j \leq n$ i $t \in \mathbb{R}$; za $t \neq 0$ to su elementarne transvekcije, a za $t = 0$ operator identiteta. Primjenom Leme 4.35 na prostor W izravno slijedi $\mathrm{SL}(W) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n)$. □

Sljedeći problem je to što se grupa $\mathrm{SL}(W)$ sastoji isključivo od operatora koji djeluju unutar vektorskog dijela $W \cong \mathbb{R}^n$, dok skalarni pravac $\mathbb{R}e_0$ ostavljaju fiksiranim po točkama. Da bismo dokazali da polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ generira sve endomorfizme prostora $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$, moramo dobiti operatore koji spajaju skalarni i vektorski dio — odnosno moramo konstruirati transvekciju čiji središnji pravac "izlazi" iz hiperravnine W.

Prvi korak u tom smjeru jest pronalazak invertibilnog operatora množenja $U \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ koji pomiče skalarni pravac $\mathbb{R}e_0$.

Lema 4.37. *Neka je $n \geq 2$ i neka je $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \in W$ jedinični vektor ($\|r\| = 1$), neka je $a = (1, \sqrt{3}r) \in Spin_n$ te neka je $U := L_a \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ pripadni operator množenja.*

Tada vrijedi:

1. *Operator U pomiče skalarni pravac, tj. $U(e_0) \notin \mathbb{R}e_0$.*

2. *Operator U je invertibilan i njegov inverz pripada polugrupi, tj. $U^{-1} \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$.*

Dokaz. 1. Djelovanjem operatora $U = L_a$ na jedinicu algebre $e_0 = (1, 0)$ dobivamo:

$$U(e_0) = L_a(e_0) = a \circ e_0 = a = (1, \sqrt{3}r).$$

Budući da je $\sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \neq 0$, vektorski dio elementa $U(e_0)$ je nenul, pa slijedi $U(e_0) \notin \mathbb{R}e_0$.

2. Da bismo dokazali invertibilnost operatora U, iskoristit ćemo ranije dokazani trofaktorski identitet $L_{a_t} L_{b_t} L_{a_t}$ za parametar $t = \sqrt{3}$.

Prisjetimo se da za $a_t = (1, tr)$ i $b_t = (\gamma(t), \delta(t)r)$, s koeficijentima

$$\gamma(t) = \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)^2} \quad \text{i} \quad \delta(t) = \frac{-2t}{(1 - t^2)^2},$$

kompozicija $L_{a_t} L_{b_t} L_{a_t}$ djeluje na ravnini $C_r = \mathrm{span}\{e_0, r\}$ kao operator identiteta, dok na ortogonalnom komplementu $r^\perp$ djeluje kao skalarno množenje s $\lambda(t) = \gamma(t)$.

Uvrštavanjem $t = \sqrt{3}$ dobivamo:

$$a_{\sqrt{3}} = (1, \sqrt{3}r) = a,$$

dok za koeficijente elementa $b_{\sqrt{3}}$ imamo:

$$\gamma(\sqrt{3}) = \frac{1 + (\sqrt{3})^2}{(1 - (\sqrt{3})^2)^2} = \frac{1 + 3}{(1 - 3)^2} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$\delta(\sqrt{3}) = \frac{-2\sqrt{3}}{(1 - (\sqrt{3})^2)^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Definirajmo element $b := \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \in Spin_n$. Budući da je faktor skaliranja na $r^\perp$ jednak $\lambda(\sqrt{3}) = 1$, kompozicija $L_a L_b L_a$ djeluje kao identiteta na C_r i na $r^\perp$, pa je to identiteta na čitavom prostoru $Spin_n$:

$$L_a L_b L_a = \mathrm{id}_{Spin_n} \implies U L_b U = \mathrm{id}_{Spin_n}.$$

Odavde slijedi da U ima desni inverz $L_b U$. Budući da je $Spin_n$, kao vektorski prostor, konačnodimenzionalan, U je invertibilan, pa mu je inverz dan s

$$U^{-1} = L_b U \in \mathrm{JMS}(Spin_n),$$

što je kompozicija dvaju operatora množenja iz polugrupe $\mathrm{JMS}(Spin_n)$, pa i sam pripada polugrupi. □

Propozicija 4.38. *Neka je $T_t \in \mathrm{SL}(W) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n)$ operator na vektorskom dijelu W zadan s*

$$T_t(e_2) := e_2 + te_1, \quad T_t(e_k) := e_k \quad (k \neq 2), \quad T_t(e_0) := e_0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

te neka je $U = L_a \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ operator množenja iz Leme 4.37.

Za svaki $t \in \mathbb{R}$ definirajmo konjugirani operator:

$$S_t := UT_tU^{-1}.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. *Za svaki $t \in \mathbb{R}$ operator S_t pripada polugrupi* $\mathrm{JMS}(Spin_n)$.

2. *Skup $\mathcal{S} = \{S_t : t \in \mathbb{R}\}$ tvori transvekcijsku podgrupu u* $\mathrm{JMS}(Spin_n)$.

Dokaz. 1. Operator $T_t = \mathrm{id}_{\mathbb{R}e_0} \oplus (I_n + tE_{12})$ za $t \neq 0$ jest elementarna ravninska transvekcija u W, a za $t = 0$ operator identiteta; prema Korolaru 4.34 pripada polugrupi $\mathrm{JMS}(Spin_n)$. Budući da po Lemi 4.37 i operator U i njegov inverz U^{-1} pripadaju $\mathrm{JMS}(Spin_n)$, kompozicija $S_t = UT_tU^{-1}$ pripada $\mathrm{JMS}(Spin_n)$.

2. Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ imamo:

$$S_a \circ S_b = (UT_aU^{-1})(UT_bU^{-1}) = UT_a(U^{-1}U)T_bU^{-1} = U(T_aT_b)U^{-1} = UT_{a+b}U^{-1} = S_{a+b}.$$

Uočimo da je $S_0 = UI_{Spin_n}U^{-1} = I_{Spin_n}$ te $S_t^{-1} = S_{-t} \in \mathcal{S}$. Dakle $\mathcal{S}$ je podgrupa od $\mathrm{JMS}(Spin_n)$.

Nadalje, kako je $T_t = I + tN$, gdje je N nilpotentni operator ranga 1, imamo $S_t = I + t(UNU^{-1})$. Operator $N' := UNU^{-1}$ također je ranga 1 i zadovoljava $(N')^2 = 0$, pa je $S_t - I = tN'$ operator ranga 1 za $t \neq 0$. Stoga je S_t transvekcija za $t \neq 0$, dok je $S_0 = I$. □

Propozicija 4.39. *Neka je $\{S_t : t \in \mathbb{R}\}$ transvekcijska podgrupa u* $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ *definirana s $S_t = UT_tU^{-1}$, pri čemu je $a = (1, \sqrt{3}r)$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ te $U = L_a$. Tada vrijedi:*

1. *Vektor $U(e_1)$ ne leži u hiperravnini W, pa središnji pravac transvekcijske podgrupe $\{S_t\}$, jednak $\mathbb{R}U(e_1)$, izlazi iz hiperravnine W.*

2. *Transvekcija S_1 ne fiksira skalarni pravac po točkama, tj. $S_1(e_0) \notin \mathbb{R}e_0$.*

Dokaz. 1. Središnji pravac polazne transvekcijske podgrupe $\{T_t\}$ u W jednak je $\operatorname{im} N = \mathbb{R}e_1$. Za konjugiranu podgrupu $\{S_t\}$ središnji pravac glasi:

$$\operatorname{im} N' = U(\operatorname{im} N) = U(\mathbb{R}e_1) = \mathbb{R}U(e_1).$$

Izračunajmo eksplicitno sliku baznog vektora e_1 pod operatorom $U = L_a$:

$$U(e_1) = a \circ e_1 = (e_0 + \sqrt{3}r) \circ e_1 = e_1 + \sqrt{3}(r \circ e_1).$$

Kako je $r \circ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \circ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle e_1 + e_2, e_1\rangle e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_0$, dobivamo:

$$U(e_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e_0 + e_1.$$

Budući da je skalarna komponenta $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \neq 0$, slijedi da $U(e_1) \notin W$, pa je središnji pravac $\mathbb{R}U(e_1)$ nagnut izvan hiperravnine W.

2. Izračunajmo sada djelovanje transvekcije $S_1 = UT_1U^{-1}$ na jedinicu algebre e_0. Prisjetimo se iz dokaza Leme 4.37 da je $U^{-1} = L_bU$ za $b = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$, pa je:

$$U^{-1}(e_0) = b \circ a = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \circ \left(1, \sqrt{3}r\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{4}e_2\right).$$

Primjenom transvekcije T_1 (koja šalje $e_2 \mapsto e_2 + e_1$, a ostale bazne vektore fiksira) dobivamo:

$$T_1(U^{-1}(e_0)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{4}(e_2 + e_1)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{4}e_2\right).$$

Sada primijenimo operator $U = L_{(1,\sqrt{3}r)}$ na dobiveni element. Za dokaz tvrdnje $S_1(e_0) \notin \mathbb{R}e_0$ dovoljno je pokazati da je vektorska komponenta elementa $S_1(e_0)$ različita od nule. Prema definiciji množenja u $Spin_n$, za vektorski dio imamo:

$$\mathrm{Vec}(S_1(e_0)) = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{4}e_2\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}r = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{4}e_2\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{4}e_2\right) = \frac{\sqrt{6}}{4}e_1 \neq 0.$$

Kako je vektorska komponenta nenul, izravno slijedi da $S_1(e_0) \notin \mathbb{R}e_0$. □

Ovime smo konstruirali transvekcijsku podgrupu $\{S_t : t \in \mathbb{R}\}$ čiji središnji pravac izlazi iz hiperravnine W, a u njoj se nalazi operator $I_{Spin_n} + N$ za kojeg vrijedi $(I_{Spin_n} + N)e_0 \notin \mathbb{R}e_0$. Kako bismo dobili cijelu grupu $\mathrm{SL}(Spin_n)$ koristit ćemo sljedeću lemu:

Lema 4.40. *Neka je $J = \mathbb{R}f_0 \oplus W$ realni vektorski prostor s $\dim W = n \geq 2$, te neka je $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(J)$ polugrupa. Pretpostavimo da vrijede sljedeći uvjeti:*

(i) Polugrupa $\mathcal{S}$ sadrži grupu $\mathrm{SL}(W)$ proširenu tako da djeluje trivijalno na skalarnom pravcu $\mathbb{R}f_0$ (tj. fiksira f_0 po točkama);

(ii) Presjek $\mathcal{S} \cap \mathrm{GL}(J)$ sadrži transvekcijsku podgrupu $\{I_J + tN : t \in \mathbb{R}\}$ čiji središnji pravac $\mathrm{im}\, N$ nije sadržan u hiperravnini W;

(iii) Za operator $V := I_J + N$ vrijedi $V(f_0) \notin \mathbb{R}f_0$.

Tada polugrupa $\mathcal{S}$ sadrži čitavu specijalnu linearnu grupu prostora J:

$$\mathrm{SL}(J) \subseteq \mathcal{S}.$$

Napomena 4.41. U dokazu ćemo koristiti sljedeću notaciju: Ako je J^* dualni prostor prostora J, tada za proizvoljni netrivijalni funkcional $\psi \in J^*$ i nenul vektor $c \in J$ tenzorski produkt $\psi \otimes c$ identificiramo s linearnim operatorom $T\colon J \to J$ ranga 1 čije je djelovanje na elementu $x \in J$ zadano s:

$$(\psi \otimes c)(x) := \psi(x)c.$$

Nadalje, ako je $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ fiksirana baza prostora J, a $(f_0^*, f_1^*, \ldots, f_n^*)$ pripadna dualna baza prostora J^* (definirana s $f_k^*(f_m) = \delta_{km}$, gdje je δ_{km} Kroneckerov simbol), tada standardni matrični generator E_{jk}

(operator koji preslikava $f_k \mapsto f_j$, a sve ostale bazne vektore u 0) u tenzorskom zapisu poprima oblik:

$$E_{jk} = f_k^* \otimes f_j.$$

Doista, izravnim djelovanjem na proizvoljni bazni vektor f_m dobivamo:

$$\left(f_k^* \otimes f_j\right)(f_m) = f_k^*(f_m) f_j = \delta_{km} f_j = E_{jk}(f_m),$$

što zbog linearnosti opravdava ovu identifikaciju na čitavom prostoru J.

Dokaz. Korak 1: Svođenje operatora N na kanonski oblik. Budući da je $\dim J = n + 1$, fiksirajmo bazu $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ prostora J, gdje f_0 razapinje skalarni pravac, a $(f_1, \ldots, f_n)$ je baza prostora W. Iz pretpostavke (ii) slijedi da je N linearni operator na J takav da je $\mathrm{r}(N) = 1$ i $N^2 = 0$; pritom sama lema ne pretpostavlja da $N \in \mathcal{S}$, nego da su svi operatori $I_J + tN$ u $\mathcal{S}$.

Iz uvjeta $\mathrm{rang}(N) = 1$ slijedi da je slika operatora $\mathrm{Im}(N)$ jednodimenzionalni potprostor u J. Odaberimo nenul vektor $c \in J$ koji razapinje $\mathrm{Im}(N)$. Tada za svaki vektor $x \in J$ slika $N(x)$ mora biti proporcionalna vektoru c, odnosno vrijedi $N(x) = \alpha_x c$ za neki skalar $\alpha_x \in \mathbb{R}$. Preslikavanje $x \mapsto \alpha_x$ je linearno zbog linearnosti operatora N, pa predstavlja linearni funkcional na J. Označimo taj funkcional s $\psi \in J^* \setminus \{0\}$, čime dobivamo tenzorski zapis $N = \psi \otimes c$, odnosno $N(x) = \psi(x)c$.

Nadalje, iskoristimo uvjet nilpotentnosti $N^2 = 0$. Za proizvoljni $x \in J$ imamo:

$$N^2(x) = N(N(x)) = N(\psi(x)c) = \psi(x)N(c) = \psi(x)\psi(c)c = 0.$$

Budući da je $c \neq 0$ i $\psi \neq 0$, gornja jednakost povlači da nužno mora vrijediti $\psi(c) = 0$.

Iz uvjeta leme znamo da je $N(f_0) \neq 0$, što u tenzorskom zapisu daje $\psi(f_0)c \neq 0$. To implicira $\psi(f_0) \neq 0$. Operator N možemo normalizirati tako da funkcional poprimi vrijednost 1 na vektoru f_0. Doista, definiramo li novi funkcional $\psi' = \frac{1}{\psi(f_0)}\psi$ i novi vektor $c' = \psi(f_0)c$, uočavamo da produkt ostaje invarijantan:

$$\psi' \otimes c' = \left(\frac{1}{\psi(f_0)}\psi\right) \otimes (\psi(f_0)c) = \psi \otimes c = N.$$

Pritom vrijedi $\psi'(f_0) = \frac{\psi(f_0)}{\psi(f_0)} = 1$. Zadržavajući oznake ψ i c radi jednostavnosti, u nastavku pretpostavljamo da je $\psi(f_0) = 1$.

Rastavimo sada vektor c i funkcional ψ s obzirom na direktnu sumu $J = \mathbb{R}f_0 \oplus W$:

$$c = \alpha f_0 + u, \quad (u \in W,\, \alpha \in \mathbb{R}), \qquad \psi|_W = -\mu, \quad (\mu \in W^*).$$

Kako je $\psi(f_0) = 1$, djelovanje funkcionala na proizvoljni element $\beta f_0 + x \in J$ (gdje je $x \in W$) poprima oblik $\psi(\beta f_0 + x) = \beta - \mu(x)$. Uvrštavanjem ovih dekompozicija u uvjet $\psi(c) = 0$, dobivamo:

$$\psi(\alpha f_0 + u) = \alpha - \mu(u) = 0 \implies \mu(u) = \alpha.$$

Budući da je $N(f_0) = \psi(f_0)c = c$, a prema uvjetu leme je $N(f_0) \notin \mathbb{R}f_0$, zaključujemo da vektorska komponenta u mora biti strogo različita od nule ($u \neq 0$). S druge strane, prema uvjetu (ii) leme, središnji pravac $\mathrm{im}\, N = \mathbb{R}c$ nije sadržan u hiperravnini W. To znači da c ne može biti čisto vektorski element, odnosno njegova skalarna komponenta α mora biti različita od nule ($\alpha \neq 0$). Iz relacije $\alpha = \mu(u)$ tada

slijedi i da je $\mu(u) \neq 0$.

Konstruirajmo sada operator $h \in \mathrm{SL}(W)$ na sljedeći način. Potprostor $\ker \mu$ ima dimenziju $\dim W - 1 = n - 1$. Kako je $\mu(u) = \alpha \neq 0$, vektor u ne pripada jezgri $\ker \mu$. Odaberimo bazu $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ za W tako da postavimo $u_1 = u$, dok preostale vektore $\{u_2, \ldots, u_n\}$ izaberemo direktno iz potprostora $\ker \mu$. Definirajmo najprije invertibilni linearni operator $h_0 : W \to W$ preko djelovanja na ovu bazu:

$$h_0(u) = \alpha f_1, \qquad h_0(u_i) = f_i \quad \text{za } i \geq 2.$$

Operator h_0 preslikava bazu u bazu i njegova determinanta iznosi $\det(h_0) = d \neq 0$. Kako bismo osigurali da transformacija pripada grupi $\mathrm{SL}(W)$, modificiramo djelovanje na vektoru u_2 (što je izvedivo jer je po pretpostavci $\dim W = n \geq 2$) te definiramo operator h:

$$h(u) = \alpha f_1, \qquad h(u_2) = \frac{1}{d} f_2, \qquad h(u_i) = f_i \quad \text{za } i \geq 3.$$

Sada vrijedi $\det(h) = \frac{1}{d}\det(h_0) = 1$, što znači da $h \in \mathrm{SL}(W)$. Provjerimo slaganje s funkcionalom μ na baznim elementima:

$$\begin{aligned}
(f_1^* \circ h)(u) &= f_1^*(\alpha f_1) = \alpha = \mu(u), \\
(f_1^* \circ h)(u_2) &= f_1^*\left(\frac{1}{d} f_2\right) = 0 = \mu(u_2), \\
(f_1^* \circ h)(u_i) &= f_1^*(f_i) = 0 = \mu(u_i) \quad \text{za } i \geq 3.
\end{aligned}$$

Budući da se linearni funkcionali $f_1^* \circ h$ i μ podudaraju na čitavoj bazi, oni su identični na cijelom prostoru W, pa vrijedi $\mu = f_1^* \circ h$, odnosno $\mu \circ h^{-1} = f_1^*$.

Proširimo operator h na cijeli prostor J u obliku $H = \mathrm{Id}_{\mathbb{R} f_0} \oplus h$. Budući da je $h \in \mathrm{SL}(W)$, prošireni operator H pripada podgrupi $\mathrm{SL}(W) \subseteq \mathcal{S}$. Provedimo sada eksplicitan račun konjugacije $\tilde{N} = HNH^{-1}$ djelovanjem na proizvoljni element $y = \beta f_0 + x \in J$ (gdje je $x \in W$):

$$\tilde{N}(y) = (H \circ (\psi \otimes c) \circ H^{-1})(y) = H\big(\psi(H^{-1}(y))c\big) = \psi(H^{-1}(y))H(c).$$

Izračunajmo odvojeno vektorsku i funkcionalnu komponentu pod djelovanjem operatora H:

(a) Za vektor smjera imamo:

$$H(c) = H(\alpha f_0 + u) = \alpha H(f_0) + h(u) = \alpha f_0 + \alpha f_1 = \alpha(f_0 + f_1).$$

(b) Za funkcionalnu komponentu, uočimo da je $H^{-1}(y) = \beta f_0 + h^{-1}(x)$, pa vrijedi:

$$\psi(H^{-1}(y)) = \psi(\beta f_0 + h^{-1}(x)) = \beta - \mu(h^{-1}(x)) = \beta - (\mu \circ h^{-1})(x) = \beta - f_1^*(x).$$

Zapišimo ovo preko dualnih funkcionala na cijelom prostoru J. Po definiciji dualne baze, funkcional f_0^* izdvaja skalarnu komponentu ($f_0^*(y) = \beta$), dok funkcional f_1^* djeluje isključivo na vektorski dio ($f_1^*(y) = f_1^*(x)$). Prema tome, imamo:

$$\psi(H^{-1}(y)) = f_0^*(y) - f_1^*(y) = (f_0^* - f_1^*)(y).$$

Uvrštavanjem rezultata *(a)* i *(b)* natrag u izraz za $\tilde{N}(y)$ dobivamo:

$$\tilde{N}(y) = \big[(f_0^* - f_1^*)(y)\big] \cdot \big[\alpha(f_0 + f_1)\big],$$

što u tenzorskom zapisu daje traženi kanonski oblik

$$\tilde{N} = (f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha(f_0 + f_1).$$

Budući da su $H, H^{-1} \in \mathrm{SL}(W) \subseteq \mathcal{S}$ i $I_J + tN \in \mathcal{S}$ za svaki t, zatvorenost polugrupe na kompoziciju daje

$$I_J + t\tilde{N} = H(I_J + tN)H^{-1} \in \mathcal{S} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Posebno, $I_J \pm \tilde{N} \in \mathcal{S}$.

Korak 2: Konjugacija transvekcija iz W s operatorima $I_J \pm \tilde{N}$. U polugrupi $\mathcal{S}$ promatramo elementarne transvekcije iz podgrupe $\mathrm{SL}(W)$, označene s $x_{i1}(t) = I_J + tE_{i1}$ i $x_{1i}(t) = I_J + tE_{1i}$ za fiksni indeks $i \geq 2$. Važno je istaknuti da ovi operatori, za svaki parametar $t \in \mathbb{R}$, po pretpostavci leme pripadaju polugrupi $\mathcal{S}$. Po napomeni 4.41 ove elementarne transvekcije možemo zapisati kao:

$$x_{i1}(t) = I_J + tE_{i1} = I_J + t(f_1^* \otimes f_i) \qquad \text{i} \qquad x_{1i}(t) = I_J + tE_{1i} = I_J + t(f_i^* \otimes f_1).$$

Budući da je $\tilde{N}^2 = 0$, izravno vrijedi da je $(I_J + \tilde{N})^{-1} = I_J - \tilde{N}$. U nastavku računamo konjugacije ovih dviju transvekcija pomoću operatora $I_J + \tilde{N} \in \mathcal{S}$.

1. Promatrajmo najprije konjugaciju transvekcije $x_{i1}(t)$ za fiksni indeks $i \geq 2$. Sređivanjem produkta triju zagrada i iskorištavanjem linearnosti tenzorskog produkta dobivamo:

$$\begin{aligned}(I_J + \tilde{N})x_{i1}(t)(I_J - \tilde{N}) &= (I_J + \tilde{N})\big(I_J + t(f_1^* \otimes f_i)\big)(I_J - \tilde{N}) \\ &= (I_J + \tilde{N})\Big(I_J - \tilde{N} + t(f_1^* \otimes f_i) - t(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N}\Big) \\ &= I_J - \tilde{N} + t(f_1^* \otimes f_i) - t(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N} + \tilde{N} - \tilde{N}^2 + t\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i) - t\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N}.\end{aligned}$$

Kako je $\tilde{N}^2 = 0$, članovi $-\tilde{N}$ i $+\tilde{N}$ se poništavaju, pa izraz poprima oblik:

$$= I_J + t(f_1^* \otimes f_i) - t(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N} + t\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i) - t\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N}.$$

Kako bismo izračunali mješovite produkte, uvrstit ćemo oblik iz prošlog koraka $\tilde{N} = (f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha(f_0 + f_1)$:

(a) Za član $(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N}$ imamo kompoziciju operatora:

$$\begin{aligned}(f_1^* \otimes f_i) \circ \Big((f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha(f_0 + f_1)\Big) &= (f_0^* - f_1^*) \otimes (f_1^* \otimes f_i)\big(\alpha(f_0 + f_1)\big) \\ &= (f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha f_1^*(f_0 + f_1) f_i.\end{aligned}$$

Po definiciji dualne baze vrijedi $f_1^*(f_0) = 0$ i $f_1^*(f_1) = 1$, što daje $f_1^*(f_0 + f_1) = 1$. Prema tome, linearna kombinacija kolapsira u:

$$(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N} = \alpha(f_0^* - f_1^*) \otimes f_i = \alpha(f_0^* \otimes f_i) - \alpha(f_1^* \otimes f_i).$$

(b) Za član $\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i)$ promatramo djelovanje operatora $\tilde{N}$ na desni vektor f_i:

$$\Big((f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha(f_0 + f_1)\Big) \circ (f_1^* \otimes f_i) = f_1^* \otimes \tilde{N}(f_i).$$

Budući da za indeks $i \geq 2$ vrijedi $f_0^*(f_i) = 0$ i $f_1^*(f_i) = 0$, izravno slijedi da je $\tilde{N}(f_i) = (f_0^*(f_i) - f_1^*(f_i))\alpha(f_0 + f_1) = 0$, pa je cijeli produkt jednak nuli:

$$\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i) = 0.$$

(c) S obzirom na to da je desni dio produkta $\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i) = 0$, zadnji trostruki produkt također iščezava:

$$\tilde{N}(f_1^* \otimes f_i)\tilde{N} = 0.$$

Uvrštavanjem izračunatih kontrakcija *(a)*, *(b)* i *(c)* natrag u polazni izraz, dobivamo:

$$\begin{aligned}(I_J + \tilde{N})x_{i1}(t)(I_J - \tilde{N}) &= I_J + t(f_1^* \otimes f_i) - t\big(\alpha(f_0^* \otimes f_i) - \alpha(f_1^* \otimes f_i)\big) \\ &= I_J - t\alpha(f_0^* \otimes f_i) + t(1 + \alpha)(f_1^* \otimes f_i).\end{aligned}$$

Prelaskom na matrične generatore preko identifikacije $E_{jk} = f_k^* \otimes f_j$, prepisujemo rezultat u konačni oblik:

$$(I_J + \tilde{N})x_{i1}(t)(I_J - \tilde{N}) = I_J - t\alpha E_{i0} + t(1 + \alpha)E_{i1} \in \mathcal{S}. \tag{14}$$

2. Promatramo sada analogni račun konjugacije za drugu elementarnu transvekciju $x_{1i}(t) = I_J + t(f_i^* \otimes f_1)$ uz fiksni indeks $i \geq 2$. Razvijanjem produkta triju zagrada dobivamo identičnu polaznu relaciju:

$$\begin{aligned}(I_J + \tilde{N})x_{1i}(t)(I_J - \tilde{N}) &= (I_J + \tilde{N})\big(I_J + t(f_i^* \otimes f_1)\big)(I_J - \tilde{N}) \\ &= (I_J + \tilde{N})\Big(I_J - \tilde{N} + t(f_i^* \otimes f_1) - t(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N}\Big) \\ &= I_J - \tilde{N} + t(f_i^* \otimes f_1) - t(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N} + \tilde{N} - \tilde{N}^2 + t\tilde{N}(f_i^* \otimes f_1) - t\tilde{N}(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N}.\end{aligned}$$

Poništavanjem članova $-\tilde{N}$ i $+\tilde{N}$ zbog nilpotentnosti $\tilde{N}^2 = 0$, izraz se svodi na:

$$= I_J + t(f_i^* \otimes f_1) - t(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N} + t\tilde{N}(f_i^* \otimes f_1) - t\tilde{N}(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N}.$$

Uvrštavanjem eksplicitnog oblika operatora $\tilde{N} = (f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha(f_0 + f_1)$, mješovite produkte računamo slično kao i gore:

(a) Za član $(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N}$ imamo kompoziciju u kojoj se $\tilde{N}$ primjenjuje prva. Za proizvoljan vektor $y \in J$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\Big[(f_i^* \otimes f_1) \circ \Big((f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha(f_0 + f_1)\Big)\Big](y) &= (f_i^* \otimes f_1)\big(\tilde{N}(y)\big) \\ &= f_i^*\big(\tilde{N}(y)\big)f_1 \\ &= \big(f_0^*(y) - f_1^*(y)\big)\alpha f_i^*(f_0 + f_1)f_1.\end{aligned}$$

Budući da za indeks $i \geq 2$ dualni funkcional f_i^* poništava vektore f_0 i f_1 (vrijedi $f_i^*(f_0) = 0$ i $f_i^*(f_1) = 0$), imamo $f_i^*(f_0 + f_1) = 0$. Stoga ova kompozicija iščezava na cijelom prostoru J:

$$(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N} = 0.$$

(b) Budući da je desni dio produkta jednak nuli, i trostruki produkt trivijalno iščezava:

$$\tilde{N}(f_i^* \otimes f_1)\tilde{N} = 0.$$

(c) Za preostali netrivijalni član $t\tilde{N}(f_i^* \otimes f_1)$ promatramo djelovanje operatora $\tilde{N}$ na desni vektor f_1:

$$\Big((f_0^* - f_1^*) \otimes \alpha(f_0 + f_1)\Big) \circ (f_i^* \otimes f_1) = f_i^* \otimes \tilde{N}(f_1).$$

Sliku baznog vektora f_1 pod djelovanjem operatora $\tilde{N}$ računamo izravno:

$$\tilde{N}(f_1) = \big(f_0^*(f_1) - f_1^*(f_1)\big)\alpha(f_0 + f_1) = (0 - 1)\alpha(f_0 + f_1) = -\alpha(f_0 + f_1).$$

Uvrštavanjem ovog rezultata natrag u tenzorski zapis kompozicije dobivamo:

$$\tilde{N}(f_i^* \otimes f_1) = f_i^* \otimes \big(-\alpha(f_0 + f_1)\big) = -\alpha(f_i^* \otimes f_0) - \alpha(f_i^* \otimes f_1).$$

Uvrštavanjem izračunatih kontrakcija *(a)*, *(b)* i *(c)* natrag u polazni izraz, dobivamo:

$$\begin{aligned}(I_J + \tilde{N})x_{1i}(t)(I_J - \tilde{N}) &= I_J + t(f_i^* \otimes f_1) - t \cdot 0 + t\big(-\alpha(f_i^* \otimes f_0) - \alpha(f_i^* \otimes f_1)\big) - t \cdot 0 \\ &= I_J - t\alpha(f_i^* \otimes f_0) + t(1 - \alpha)(f_i^* \otimes f_1).\end{aligned}$$

Prelaskom na matrične generatore preko standardne identifikacije $E_{jk} = f_k^* \otimes f_j$, prepisujemo rezultat u korigirani konačni oblik:

$$(I_J + \tilde{N})x_{1i}(t)(I_J - \tilde{N}) = I_J - t\alpha E_{0i} + t(1 - \alpha)E_{1i} \in \mathcal{S}. \tag{15}$$

Korak 3: Eliminacija elemenata iz $\mathrm{SL}(W)$*, račun komutatora i generiranje cijele grupe* $\mathrm{SL}(J)$. Iz prethodnih koraka imamo osigurane dvije obitelji operatora u polugrupi $\mathcal{S}$ za svaki fiksni indeks $i \geq 2$ i proizvoljni parametar $t \in \mathbb{R}$:

$$Y_{i1}(t) := (I_J + \tilde{N})x_{i1}(t)(I_J - \tilde{N}) = I_J - t\alpha E_{i0} + t(1 + \alpha)E_{i1} \in \mathcal{S}, \tag{16}$$

$$Y_{1i}(t) := (I_J + \tilde{N})x_{1i}(t)(I_J - \tilde{N}) = I_J - t\alpha E_{0i} + t(1 - \alpha)E_{1i} \in \mathcal{S}. \tag{17}$$

Provedimo najprije izolaciju čistih transvekcija koje povezuju skalarni indeks 0 s prostornim indeksima $i \geq 2$:

(a) Dobivanje transvekcija $x_{i0}(t)$ *za* $i \geq 2$*:* Uočimo da je $E_{i0}E_{i1} = 0$. Množenjem operatora $Y_{i1}(t) \in \mathcal{S}$

zdesna s elementom $x_{i1}(-t(1+\alpha)) \in \mathcal{S}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} Y_{i1}(t) \cdot x_{i1}(-t(1+\alpha)) &= (I_J - t\alpha E_{i0} + t(1+\alpha)E_{i1}) \cdot (I_J - t(1+\alpha)E_{i1}) \\ &= I_J - t\alpha E_{i0} + t(1+\alpha)E_{i1} - t(1+\alpha)E_{i1} + t^2\alpha(1+\alpha)E_{i0}E_{i1} - t^2(1+\alpha)^2E_{i1}^2 \\ &= I_J - t\alpha E_{i0} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Budući da je skalar $\alpha \neq 0$ fiksiran, preslikavanje $t \mapsto -t\alpha$ predstavlja bijekciju na $\mathbb{R}$. Stoga zaključujemo da za svaki $i \geq 2$ i svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$x_{i0}(t) = I_J + tE_{i0} \in \mathcal{S}.$$

(b) Dobivanje transvekcija $x_{0i}(t)$ za $i \geq 2$: Analogno, uočavajući da je $E_{0i}E_{1i} = 0$, množimo operator $Y_{1i}(t) \in \mathcal{S}$ zdesna s elementom $x_{1i}(-t(1-\alpha)) \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} Y_{1i}(t) \cdot x_{1i}(-t(1-\alpha)) &= (I_J - t\alpha E_{0i} + t(1-\alpha)E_{1i}) \cdot (I_J - t(1-\alpha)E_{1i}) \\ &= I_J - t\alpha E_{0i} + t(1-\alpha)E_{1i} - t(1-\alpha)E_{1i} + t^2\alpha(1-\alpha)E_{0i}E_{1i} - t^2(1-\alpha)^2E_{1i}^2 \\ &= I_J - t\alpha E_{0i} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Ponovno budući da je $\alpha \neq 0$, preslikavanje $t \mapsto -t\alpha$ linearna bijekcija na $\mathbb{R}$. Imamo da za svaki $i \geq 2$ i svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$x_{0i}(t) = I_J + tE_{0i} \in \mathcal{S}.$$

Preostaje konstruirati elementarne transvekcije koje izravno povezuju skalarni pravac f_0 s prvom prostornom osi f_1, to jest operatore $x_{10}(t)$ i $x_{01}(t)$. Za to ćemo koristiti grupovne komutatore u $\mathcal{S}$ definirane s $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Fiksiramo jedan indeks $i \geq 2$ (što je izvedivo jer je $\dim W \geq 2$):

(c) Dobivanje transvekcija $x_{10}(t)$: Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ promatrajmo komutator transvekcija $x_{1i}(a) \in \mathrm{SL}(W) \subseteq \mathcal{S}$ i $x_{i0}(b) \in \mathcal{S}$ (koju smo osigurali u koraku *(a)*). Iskoristit ćemo pravilo množenja matričnih generatora $E_{jk}E_{lm} = \delta_{kl}E_{jm}$. Kako je $x_{1i}(a)^{-1} = x_{1i}(-a)$ i $x_{i0}(b)^{-1} = x_{i0}(-b)$, imamo:

$$\begin{aligned} [x_{1i}(a), x_{i0}(b)] &= (I_J + aE_{1i})(I_J + bE_{i0})(I_J - aE_{1i})(I_J - bE_{i0}) \\ &= (I_J + aE_{1i} + bE_{i0} + abE_{10})(I_J - aE_{1i} - bE_{i0} + abE_{10}). \end{aligned}$$

Množenjem ovih dviju zagrada i poništavanjem svih produkata generatora koji daju nulu (poput $E_{1i}^2 = 0$, $E_{i0}^2 = 0$, $E_{i0}E_{1i} = 0$), izraz se znatno reducira. Preživljavaju samo linearni članovi i oni uz generator E_{10}:

$$\begin{aligned} [x_{1i}(a), x_{i0}(b)] &= I_J + aE_{1i} + bE_{i0} + abE_{10} - aE_{1i} - bE_{i0} - abE_{1i}E_{i0} + abE_{10} \\ &= I_J + abE_{10} + abE_{10} - abE_{10} \\ &= I_J + abE_{10} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Odabirom parametara $a = 1$ i $b = t$, dobivamo da za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$x_{10}(t) = I_J + tE_{10} \in \mathcal{S}.$$

(d) Dobivanje transvekcija $x_{01}(t)$: Analogno, promatramo komutator transvekcije $x_{0i}(a) \in \mathcal{S}$ (iz koraka *(b)*) i $x_{i1}(b) \in \mathrm{SL}(W) \subseteq \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}[x_{0i}(a), x_{i1}(b)] &= (I_J + aE_{0i})(I_J + bE_{i1})(I_J - aE_{0i})(I_J - bE_{i1}) \\ &= (I_J + aE_{0i} + bE_{i1} + abE_{01})(I_J - aE_{0i} - bE_{i1} + abE_{01}).\end{aligned}$$

Nakon množenja i poništavanja članova čiji su produkti jednaki nuli dobivamo:

$$[x_{0i}(a), x_{i1}(b)] = I_J + abE_{01} \in \mathcal{S}.$$

Za $a = 1$ i $b = t$, slijedi da za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$x_{01}(t) = I_J + tE_{01} \in \mathcal{S}.$$

Zaključak: Iz točaka *(a)*, *(b)*, *(c)* i *(d)* slijedi da polugrupa $\mathcal{S}$ sadrži sve operatore $x_{jk}(t) = I_J + tE_{jk}$ za sve parove različitih indeksa $0 \leq j \neq k \leq n$ i sve skalare $t \in \mathbb{R}$; za $t \neq 0$ to su elementarne transvekcije, dok je $x_{jk}(0) = I_J$. Korištenjem leme 4.35 slijedi da je $\mathrm{SL}(J) \subseteq \mathcal{S}$. □

Kao direktnu posljedicu imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 4.42. *Neka je $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$ realni spin faktor za $n \geq 2$. Tada polugrupa* $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ *sadrži čitavu specijalnu linearnu grupu prostora $Spin_n$:*

$$\mathrm{SL}(Spin_n) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n).$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi izravnom primjenom leme 4.40 na prostor $J = Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$ i polugrupu $\mathcal{S} = \mathrm{JMS}(Spin_n)$. Naime, svi potrebni uvjeti leme su ispunjeni:

(i) polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži grupu $\mathrm{SL}(W)$ pri čemu njezini elementi djeluju trivijalno na skalarnom pravcu $\mathbb{R}e_0$ (Propozicija 4.36).

(ii) presjek $\mathrm{JMS}(Spin_n) \cap \mathrm{GL}(Spin_n)$ sadrži transvekcijsku podgrupu $\{S_t : t \in \mathbb{R}\}$ čiji je središnji pravac $\mathbb{R}U(e_1)$ nagnut izvan hiperravnine W (Propozicija 4.38 i Propozicija 4.39);

(iii) transvekcija S_1 ne fiksira skalarni pravac, odnosno $S_1(e_0) \notin \mathbb{R}e_0$ (Propozicija 4.39).

Prema tome, zaključujemo da vrijedi $\mathrm{SL}(Spin_n) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n)$. □

4.8 Završni prijelaz od $\mathrm{SL}(Spin_n)$ do svih endomorfizama

Nakon što smo u prethodnom odjeljku dokazali da polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži čitavu specijalnu linearnu grupu $\mathrm{SL}(Spin_n)$, sljedeći korak prema dobivanju svih endomorfizama jest proširenje na sve invertibilne operatore.

Propozicija 4.43. *Neka je $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$ realni spin faktor za $n \geq 2$. Tada polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži čitavu opću linearnu grupu prostora $Spin_n$:*

$$\mathrm{GL}(Spin_n) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n).$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u dva koraka. Najprije ćemo pokazati da se za svaki skalar $\gamma \in \mathbb{R}^\times$ može konstruirati linearno invertibilan operator $H \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ čija je determinanta jednaka γ, a potom iz toga izvesti inkluziju $\mathrm{GL}(Spin_n) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n)$.

1. *Realizacija svake nenul determinante invertibilnim elementom polugrupe:*

- *Slučaj $\gamma > 0$:* Za proizvoljan pozitivan skalar $\gamma > 0$, promatrajmo element $a_\mu = (\mu, 0) \in Spin_n$ za $\mu = \gamma^{\frac{1}{n+1}} > 0$. Pripadni operator množenja je obični skalarni operator $L_{(\mu,0)} = \mu I_{Spin_n}$. Budući da je dimenzija prostora $Spin_n$ jednaka $d = n + 1$, njegova determinanta iznosi:

$$\det(\mu I_{Spin_n}) = \mu^{n+1} = \left(\gamma^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} = \gamma.$$

  Operator μI je invertibilan u polugrupi (njegov je inverz $L_{(\mu^{-1},0)} \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$), čime su ostvarene sve pozitivne determinante.

- *Slučaj $\gamma < 0$:* Promatrajmo element $a_0 = (1, 2e_1) \in Spin_n$. Prema Korolaru 4.21, determinanta pripadnog operatora množenja L_{a_0} iznosi:

$$\det(L_{a_0}) = (1^2 - \|2e_1\|^2) \cdot 1^{n-1} = (1 - 4) \cdot 1 = -3 < 0.$$

  Budući da je $\det(L_{a_0}) = -3 \neq 0$, operator L_{a_0} invertibilan je kao linearni operator na $Spin_n$. Za zadani negativan skalar $\gamma < 0$, kvocijent $\frac{\gamma}{-3} > 0$ je pozitivan, pa možemo odabrati $\mu = \left(\frac{\gamma}{-3}\right)^{\frac{1}{n+1}} > 0$. Definirajmo operator:

$$H := \mu \,\mathrm{id}_{Spin_n} \circ L_{a_0} = L_{(\mu,0)} \circ L_{(1,2e_1)} \in \mathrm{JMS}(Spin_n).$$

  Operator H je invertibilan kao kompozicija dva invertibilna operatora, a njegova determinanta iznosi:

$$\det(H) = \det(\mu \,\mathrm{id}) \cdot \det(L_{a_0}) = \mu^{n+1} \cdot (-3) = \left(\frac{\gamma}{-3}\right) \cdot (-3) = \gamma.$$

2. *Inkluzija $\mathrm{GL}(Spin_n) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n)$:* Neka je $G \in \mathrm{GL}(Spin_n)$ proizvoljan invertibilan endomorfizam te neka je $\gamma = \det(G) \in \mathbb{R}^\times$. Prema prvom koraku, odaberimo invertibilan operator $H \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ takav da je $\det(H) = \gamma$. Promatrajmo linearni operator $H^{-1}G$. Njegova determinanta iznosi:

$$\det(H^{-1}G) = \det(H)^{-1} \cdot \det(G) = \gamma^{-1} \cdot \gamma = 1,$$

što znači da $H^{-1}G \in \mathrm{SL}(Spin_n)$. Kako po Propoziciji 4.42 vrijedi $\mathrm{SL}(Spin_n) \subseteq \mathrm{JMS}(Spin_n)$, imamo $H^{-1}G \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$. Konačno, budući da $H \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ i $H^{-1}G \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$, iz zatvorenosti polugrupe na kompoziciju slijedi:

$$G = H \circ (H^{-1}G) \in \mathrm{JMS}(Spin_n).$$

□

Kako bismo zaključili završni dokaz iskazujemo lemu čiji se dokaz može naći u [11].

Lema 4.44. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor dimenzije $d \geq 1$ nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ polugrupa. Pretpostavimo da vrijede sljedeći uvjeti:*

(i) $\mathcal{S}$ sadrži čitavu opću linearnu grupu prostora V, tj. $\mathrm{GL}(V) \subseteq \mathcal{S}$;

(ii) Polugrupa $\mathcal{S}$ sadrži barem jedan singularni operator ranga $d-1$ (koranga 1).

Tada je polugrupa $\mathcal{S}$ jednaka čitavoj algebri endomorfizama prostora V:

$$\mathcal{S} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

Teorem 4.45. *Neka je $Spin_n = \mathbb{R}e_0 \oplus W$ realni spin faktor za $n \geq 2$. Tada je njegova Jordanova multiplikacijska polugrupa jednaka čitavoj algebri realnih endomorfizama:*

$$\mathrm{JMS}(Spin_n) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_n).$$

Dokaz. Prema Propoziciji 4.43, polugrupa $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ sadrži čitavu opću linearnu grupu $\mathrm{GL}(Spin_n)$.

Kako bismo primijenili Lemu 4.44, preostaje u polugrupi $\mathrm{JMS}(Spin_n)$ pronaći jedan singularni operator koranga 1.

Promatrajmo element $a_1 = (1, e_1) \in Spin_n$. Pripadni operator množenja jest $L_{a_1} = L_{(1,e_1)} \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$. Prema Korolaru 4.21, determinanta operatora L_{a_1} iznosi:

$$\det(L_{a_1}) = (1^2 - \|e_1\|^2) \cdot 1^{n-1} = (1-1) \cdot 1 = 0,$$

što znači da je operator L_{a_1} singularan. Izračunajmo njegovu jezgru. Za proizvoljan element $x = (\beta, w) \in Spin_n$ vrijedi $L_{a_1}(x) = 0$ ako i samo ako je:

$$(1, e_1) \circ (\beta, w) = (0,0) \iff (\beta + \langle e_1, w\rangle,\ \beta e_1 + w) = (0,0).$$

Izjednačavanjem vektorske komponente dobivamo $w = -\beta e_1$. Uvrštavanjem tog izraza u skalarnu komponentu imamo $\beta + \langle e_1, -\beta e_1\rangle = \beta(1 - \|e_1\|^2) = 0$, što je ispunjeno za svaki $\beta \in \mathbb{R}$ jer je $\|e_1\| = 1$. Prema tome, jezgra operatora L_{a_1} je jednodimenzionalna i razapeta elementom $(1, -e_1)$:

$$\ker(L_{a_1}) = \mathrm{span}\{(1, -e_1)\} = \mathbb{R}(e_0 - e_1).$$

Prema teoremu o rangu i defektu, slijedi da je rang operatora L_{a_1} jednak:

$$\mathrm{r}(L_{a_1}) = \dim(Spin_n) - \dim(\ker(L_{a_1})) = (n+1) - 1 = n.$$

Dakle, $L_{a_1} \in \mathrm{JMS}(Spin_n)$ je singularni operator ranga $d - 1 = n$ (koranga 1).

Konačno, primjenom Leme 4.44 na prostor $V = Spin_n$ (dimenzije $d = n + 1$) i polugrupu $\mathcal{S} = \mathrm{JMS}(Spin_n)$ slijedi:

$$\mathrm{JMS}(Spin_n) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(Spin_n),$$

čime je dokaz glavnog teorema u potpunosti završen. □

5 Zaključak

Glavni rezultat rada pokazuje da je za svaki realni spin faktor $Spin_n$ s $n \geq 2$ polugrupa generirana operatorima Jordanovog lijevog množenja maksimalna, odnosno jednaka cijeloj algebri endomorfizama. Dokaz je bitno konačnodimenzionalan i oslanja se na strukturu spin faktora: karakterizacija idempotenata i Peirceova dekompozicija omogućuju konstrukciju anizotropnih preslikavanja iz kojih se dobivaju elementarne transvekcije nužne za obuhvaćanje grupe $\mathrm{SL}(Spin_n)$ i provedbu završnog prijelaza s $\mathrm{GL}(Spin_n)$ na sve endomorfizme pomoću singularnog operatora koranga 1. Slučaj $Spin_1$ namjerno je izuzet jer nije prosta Jordanova algebra i njegova multiplikacijska polugrupa nije maksimalna.

Značaj ovog rezultata proizlazi iz činjenice da je struktura Jordanovog množenja na spin faktorima dovoljna za generiranje cijele algebre endomorfizama. Tako se ovaj rad nastavlja na tradiciju analize problema automatske aditivnosti Jordanovih multiplikativnih preslikavanja, ukazujući na izrazitu rigidnost Jordanovog množenja za familiju realnih spin faktora. Naposljetku, ovaj rezultat prirodno otvara pitanje ponaša li se ista polugrupa jednako i na preostale četiri familije konačnodimenzionalnih prostih formalno realnih Jordanovih algebri iz teorema 1.3.

6 Zahvale

Veliko hvala našem mentoru prof. dr. sc. Ilji Gogiću na entuzijazmu, uloženom trudu i satima bez kojih ovaj rad ne bi bio moguć.

Zahvaljujemo i prof. dr. sc. Matiji Kazalickom na pomoći, podršci i korisnim savjetima.

Popis literature

[1] A. A. Albert, *On a certain algebra of quantum mechanics*, Annals of Mathematics, Second Series 35 (1934), no. 1, 65–73.

[2] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, 1957.

[3] J. C. Baez, *The Octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society 39 (2002), no. 2, 145–205.

[4] W. Bertram, *The Geometry of Jordan and Lie Structures*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1754, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.

[5] M. Brešar, E. Zelmanov, *Jordan homomorphisms: A survey*, Serdica Math. J. **51** (2025), no. 3–4, 203–230.

[6] C.-H. Chu, *Jordan Structures in Geometry and Analysis*, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 190, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[7] J. Dieudonné, *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables*, Arch. Math. **1** (1949), 282–287.

[8] J. Faraut, A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1994.

[9] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.

[10] I. Gogić, *Jordanove algebre: od matričnih primjera do formalno realne klasifikacije*, predavanja u okviru fakultativnog kolegija *Studentska natjecanja iz matematike*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, Zagreb, 2026.

[11] I. Gogić, M. Kazalicki, M. Tomašević, *The Jordan multiplication semigroup of matrix algebras is the full endomorphism semigroup*, arXiv:2604.17664, 2026.

[12] I. Gogić, M. Kazalicki, M. Tomašević, *Jordan rigidity of full matrix algebras*, arXiv:2606.16666, 2026.

[13] L.-K. Hua, *A theorem on matrices over a sfield and its applications*, Acta Math. Sinica **1** (1951), 109–163.

[14] S. P. Humphries, *Generation of special linear groups by transvections*, J. Algebra 99 (1986), no. 2, 480–495.

[15] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 39, Providence, Rhode Island, 1968.

[16] N. Jacobson and C. E. Rickart, *Jordan homomorphisms of rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 479–502.

[17] P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Annals of Mathematics, Second Series 35 (1934), no. 1, 29–64.

[18] E. V. Küçük, *The Birth of Quantum Mechanics: A Historical Study Through the Canonical Papers*, arXiv:2503.13630, 2025.

[19] M. Livaić, *C^*-algebarski formalizam kvantne mehanike*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, PMF-FO, Zagreb, 2021.

[20] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Second Edition, London Mathematical Society Lecture Note Series 286, Cambridge University Press, 2001.

[21] W. S. Martindale III, *When are multiplicative mappings additive?*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 695–698.

[22] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2004.

[23] L. Molnár, *Jordan maps on standard operator algebras*, in: Z. Daróczy and Zs. Páles (eds.), *Functional Equations—Results and Advances*, Advances in Mathematics (Dordrecht), Vol. 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 305–320.

[24] F. Strocchi, *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics: A Short Course for Mathematicians*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2005.

[25] E. Zelmanov, *Jordan algebras with finiteness conditions*, Algebra i Logika **17** (1978), no. 6, 693–704.

[26] E. Zelmanov, *Primary Jordan algebras*, Algebra i Logika **18** (1979), no. 2, 162–175.

[27] E. Zelmanov, *Absolute zero divisors and algebraic Jordan algebras*, Siberian Mathematical Journal **23** (1982), no. 6, 841–854.

[28] E. Zelmanov, *Prime Jordan algebras. II*, Siberian Mathematical Journal **24** (1983), no. 1, 73–85.

Sažetak

Bartol Gulam, Bruno Brščić

Maksimalnost Jordanove polugrupe operatora množenja formalno realnih spin faktora

Jordanove algebre proizašle su iz potrebe za matematičkom aksiomatizacijom kvantne mehanike, no ubrzo su postale zaseban predmet izučavanja. Jedan od smjerova tih istraživanja očituje se u proučavanju rigidnosti Jordanovih preslikavanja, što se dobro nadovezuje na analizu problema automatske aditivnosti. Ovaj rad nastavlja u smjeru tih pitanja analizirajući Jordanovu multiplikacijsku polugrupu spin faktora, koji čine jednu od pet familija konačnodimenzionalnih prostih formalno realnih Jordanovih algebri. Središnji rezultat rada je dokaz da je ta polugrupa upravo jednaka polugrupi svih endomorfizama prostora $Spin_n$. Najprije je uvedena opća teorija Jordanovih algebri: osnovne definicije, Peirceova dekompozicija te su obrađene transvekcije budući da imaju veliku ulogu u kasnijem dokazu. Zatim je napravljen pregled realnih spin faktora, njihova motivacija, dokaz prostosti za $n \geq 2$ te kratki izračuni s operatorom Jordanovog množenja. Klasificirani su idempotentni elementi i pokazano je da Jordanova multiplikacijska polugrupa sadrži sve elementarne transvekcije ravnine. Pomoću elementarnih transvekcija dokazano je da Jordanova multiplikacijska polugrupa sadrži specijalnu linearnu grupu. Naposljetku je pokazano da sadrži sve invertibilne operatore, a konstrukcijom singularnog operatora koranga 1 i sve endomorfizme vektorskog prostora $Spin_n$.

Ključne riječi: Jordanove algebre; spin faktori; Jordanova multiplikacijska polugrupa; transvekcije.

Summary

Bartol Gulam, Bruno Brščić

Maximality of the Jordan multiplication semigroup of formally real spin factors

Jordan algebras originated from the need for a mathematical axiomatization of quantum mechanics, but they soon became an independent subject of study. One of the directions of this research is manifested in the study of the rigidity of Jordan mappings, which ties in well with the analysis of the problem of automatic additivity. This manuscript continues in the direction of these questions by analyzing the Jordan multiplication semigroup of spin factors, which form one of the five families of finite-dimensional simple formally real Jordan algebras. The central result of the paper is the proof that this semigroup is precisely equal to the semigroup of all endomorphisms on the space $Spin_n$.

First, the general theory of Jordan algebras is introduced: basic definitions, Peirce decomposition, and transvections are covered, since they play a major role in the subsequent proof. Then, an overview of real spin factors is given, including their motivation, a proof of simplicity for $n \geq 2$, and brief calculations with the Jordan multiplication operator. Idempotent elements are classified, and it is shown that the Jordan multiplication semigroup contains all elementary plane transvections. Using elementary transvections, it is proved that the Jordan multiplication semigroup contains the special linear group. Finally, it is shown that it contains all invertible operators and, by constructing a singular operator of corank 1, that it contains all endomorphisms of the vector space $Spin_n$.

Key words: Jordan algebras; spin factors; Jordan multiplication semigroup; transvections.