PELLOVE JEDNADŽBE

Ivan Krijan

18. 05. 2016.

Diofantska jednadžba

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

gdje je D prirodan broj koji nije potpun kvadrat naziva se **Pellova jednadžba**.

Navest ćemo neke osnovne rezultate čije dokaze ovdje nećemo izlagati, zainteresirani se mogu konzultirati s: *Michael J. Jacobson Jr., Hugh C. Williams – Solving the Pell Equation.*

Teorem. Pellova jednadžba uvijek ima netrivijalno rješenje (ono gdje je $y \neq 0$).
Napomena. Ovaj rezultat je jako bitan, naime, najmanji (prirodan) x za koji postoji netrivijalno rješenje jednadžbe $x^2 - 1621y^2 = 1$ ima čak 76 znamenki, tako da bismo vrlo lako mogli zaključiti da rješenje ne postoji.

Neka je (t, u) rješenje Pellove jednadžbe takvo da je $t > 0$, $u > 0$ i $t+u\sqrt{D}$ najmanje moguće. To rješenje zovemo **fundamentalno rješenje** Pellove jednadžbe. Sada imamo sljedeći bitan rezultat.
Teorem. Sva rješenja, (T, U), Pellove jednadžbe dana su s

$$T + U\sqrt{D} = \epsilon(t + u\sqrt{D})^n,$$

gdje je $\epsilon \in \{-1, 1\}$ i $n \in \mathbb{Z}$.

Dakle, jednom kada znamo fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe, onda znamo sva rješenja. Primijetimo da izraz $(t + u\sqrt{D})^{-1}$ ima smisla, to je naprosto jednako $t - u\sqrt{D}$. Ono što zaključujemo je da $\epsilon = -1$, odnosno $n < 0$ u gornjoj formuli rezultiraju samo time da dobijemo sve moguće kombinacije predznaka. No, nas će uglavnom zanimati samo prirodna rješenja, a za to vidimo da su sva oblika

$$T + U\sqrt{D} = (t + u\sqrt{D})^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Uobičajeno je označiti

$$x_n = \frac{(t + u\sqrt{D})^n + (t - u\sqrt{D})^n}{2}, \qquad y_n = \frac{(t + u\sqrt{D})^n - (t - u\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}},$$

za $n \in \mathbb{N}$. Tada niz (x_n, y_n) čini strogo rastući niz svih (prirodnih) rješenja Pellove jednadžbe. Iz činjenice da je $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{D} = (x_n + y_n\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D})$ lako dolazimo do rekurzivnih relacija za sva (prirodna) rješenja Pellove jednadžbe:

$$x_{n+1} = x_1x_n + Dy_1y_n,$$

$$y_{n+1} = x_1y_n + y_1x_n.$$

Pitanje je sada, kako naći fundamentalno rješenje? Nekada to možemo vrlo lako isprobavanjem vrijednosti za y, no već za npr. $D = 13$ ćemo se naraditi, jer je fundamentalno rješenje jednako $649 + 180\sqrt{13}$. Osnovna metoda za nalaženje je metoda verižnih razlomaka gdje, ukratko rečeno, broj $\sqrt{D}$ razvijamo u verižni razlomak do trenutka dolaska u period, tada se točno zna kako izgleda fundamentalno rješenje, ovisno o broju D. No, radi nedostatka vremena, time se trenutno nećemo baviti. Opet, zainteresirani studenti se mogu konzultirati s navedenom knjigom, ili s, jednostavno, Wikipediom. Postoje mnogi alati online koji računaju fundamentalno rješenje za unos broja D.

Primjer 1. Neka su m i D prirodni brojevi i neka D nije potpun kvadrat. Dokažite da tada jednadžba $x^2 - Dy^2 = 1$ ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja takvih da $m \mid y$.
Primjer 2. (VJIMC 2015., 2.2) Odredite sve parove, (n, m), prirodnih brojeva za koje je

$$5^n = 6m^2 + 1.$$

Diofantska jednadžba

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

gdje je D prirodan broj koji nije potpun kvadrat i $N \neq 0$ cijeli broj, naziva se **pellovska jednadžba**. Ta jednadžba ne mora biti rješiva, ali ako je $x + y\sqrt{D}$ njeno rješenje, a $t + u\sqrt{D}$ bilo koje rješenje pripadne Pellove jednadžbe $T^2 - DU^2 = 1$, onda je i

$$(x + y\sqrt{D})(t + u\sqrt{D})$$

rješenje naše pellovske jednadžbe. Za to rješenje kažemo da je **asocirano** s rješenjem $x+y\sqrt{D}$. Skup svih međusobno asociranih rješenja tvore jednu klasu rješenja. Jednostavno se pokaže: ako su $x_1 + y_1\sqrt{D}$ i $x_2 + y_2\sqrt{D}$ dva rješenja pellovske jednadžbe, onda su ona asocirana ako i samo ako je

$$x_1x_2 \equiv Dy_1y_2 \pmod{N} \qquad \text{i} \qquad x_1y_2 \equiv y_1x_2 \pmod{N}.$$

Ako se klasa rješenja K sastoji od rješenja $x_i + y_i\sqrt{D}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, onda rješenja $x_i - y_i\sqrt{D}$ tvore isto jednu klasu rješenja, koju označavamo s $\overline{K}$ i kažemo da je konjugirana klasi K. Konjugirane klase su općenito različite, ali se u nekim slučajevima podudaraju, ako je $K = \overline{K}$, kažemo da je klasa K dvoznačna.

Među svim rješenjima $x + y\sqrt{D}$ u danoj klasi K sada ćemo izabrati jedno, $x^* + y^*\sqrt{D}$ na sljedeći način. Neka je y^* najmanja nenegativna vrijednost od y što se pojavljuje u klasi K. Ukoliko K nije dvoznačna, onda je pripadajući x^* jedinstveno određen, ako je, onda, uz uvjet $x^* \geq 0$ također jedinstveno odredimo x^*. Ovako odabrano rješenje $x^* + y^*\sqrt{D}$ zovemo **fundamentalno rješenje** pellovske jednadžbe $x^2 - Dy^2 = N$.

Primijetimo da pellovska rješenja ima više fundamentalnih rješenja, točno onoliko koliko ima različitih klasa rješenja, dobro je što je taj broj uvijek konačan. Dakle, jednom kada znamo sva (međusobno neasocirana) fundamentalna rješenja pellovske jednadžbe, onda znamo sva njena rješenja. Opet se postavlja pitanje, kako odrediti ta fundamentalna rješenja? Postoji rezultat koji nam daje ocjene na x^* i y^*.

Teorem. Neka je $t + u\sqrt{D}$ fundamentalno rješenje Pellove jednadžbe $T^2 - DU^2 = 1$, tada za svako fundamentalno rješenje, $x^* + y^*\sqrt{D}$ jednadžbe $x^2 - Dy^2 = N$ vrijede nejednakosti

$$0 \leq y^* \leq \frac{u\sqrt{|N|}}{\sqrt{2(t + \operatorname{sgn} N)}}, \qquad 0 \leq |x^*| \leq \sqrt{\frac{(t + \operatorname{sgn} N)|N|}{2}},$$

gdje je $\operatorname{sgn} N = 1$, ako je $N > 0$ i $\operatorname{sgn} N = -1$, ako je $N < 0$, predznak broja N.

Primjer 3. Nađite sve prirodne brojeve a za koje su $a+1$ i $3a+1$ istovremeno potpuni kvadrati i pokažite da ih ima beskonačno mnogo. Neka je a_n, $n \in \mathbb{N}$ rastući niz takvih brojeva. Dokažite da je tada i $a_na_{n+1} + 1$ potpun kvadrat, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 4. Nađite sve prirodne brojeve $b > 1$ takve da je $\overline{111}_b$ jednako nekom trokutastom broju $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Primjer 5. Neka je $k > 1$ kvadratno slobodan prirodan broj, nađite sva prirodna rješenja jednadžbi

$$x^2 - (k^2 - k)y^2 = -1 \qquad \text{i} \qquad x^2 - (k^2 - k)y^2 = k^2.$$

Primjer 6. Neka je p neparan prost broj te neka pellovska jednadžba $x^2 - Dy^2 = p$ ima rješenje. Dokažite da se sva rješenja te jednadžbe nalaze u istoj klasi ako i samo ako $p \mid D$.

Za **domaću zadaću** riješite barem 6 zadataka od dolje ponuđenih. Ukoliko neki od primjera ne riješimo na satu, možete i njih rješavati. Rok za predaju zadaće je na predavanju 01.06.2016.

Zadatak 1. Dokažite da postoji beskonačno mnogo trokuta čije su duljine stranica tri uzastopna prirodna broja i čija je površina također prirodan broj. Navedite tri primjera takvih trokuta čije su površine najmanje.

Zadatak 2. Dokažite da postoji beskonačno mnogo skupova koji se sastoje od tri uzastopna

prirodna broja, tako da je svaki od tih brojeva jednak sumi kvadrata dvaju cijelih brojeva. Navedite barem 6 takvih skupova.

Zadatak 3. Znamo kako izgleda *kvadratna sredina* n pozitivnih realnih brojeva:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Je li kvadratna sredina prvih n prirodnih brojeva ikada prirodan broj?

Zadatak 4. Dokažite da postoji beskonačno mnogo trokutastih brojeva koji su potpuni kvadrati. Odredite ih sve. *(Trokutasti brojevi su brojevi $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, za $n \in \mathbb{N}$.)*

Zadatak 5. Dokažite da postoji beskonačno mnogo trokutastih brojeva koji se razlikuju za 1 od potpunog kvadrata. Točnije, oblika su $m^2 \pm 1$. Odredite ih sve.

Zadatak 6. Odredite barem 4 skupa od tri uzastopna trokutasta broja čiji je produkt potpun kvadrat.

Zadatak 7. Odredite barem 4 skupa od tri uzastopna trokutasta broja čija je suma potpun kvadrat.

zadatak 8. Odredite sve uređene trojke prirodnih brojeva (x, y, z) za koje je $(1+x^2)(1+y^2) = 1 + z^2$.

Zadatak 9. Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodan broj m takav da je

$$1 + 2 + \ldots + m = (m + 1) + (m + 2) + \ldots + n.$$

Zadatak 10. Odredite sve prirodne brojeve m i n za koje je $(m+1)+(m+2)+\ldots+n = mn$.

ZAdatak 11. Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi k i m takvi da je

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) + \ldots + (m - 2)(m - 1) + (m - 1)m.$$

Zadatak 12. Odredite sva cjelobrojna rješenja, (x, y, u, v), sustava:

$$\begin{aligned} 2uv - xy &= 16, \\ xv - uy &= 12. \end{aligned}$$