MJERA I INTEGRAL

Bilješke s predavanja (Prof. dr. sc. Hrvoje Šikić)
akademske godine 2010./2011.

Natipkao i uredio:
Ivan Krijan

Ova skripta služi samo kao pomoć u praćenju predavanja iz istoimenog kolegija.
Skriptu sam natipkao prema svojim bilješkama s predavanja profesora Šikića, za sve eventualne greške (Kojih sigurno ima, iako sam se potrudio da ih bude što manje.), bilo tipfelere, bilo matematičke greške sam ja odgovorna osoba. Bit ću vrlo zahvalan svakome tko mi javi bilo kakvu uočenu grešku. Hvala!

(Posebno hvala Petru Mlinariću koji je uočio nemali broj grešaka, koje sam zatim ispravio.)

Zagreb, 26. 11. 2012.

Sadržaj

1 UVOD

Kako bismo "izmjerili duljinu" skupa $A \subseteq \mathbb{R}$?
Odaberemo jediničnu vrijednost, u slučaju skupa $\mathbb{R}$ prirodno nam je uzeti da je "duljina" skupa $[0,\, 1]$ jednaka 1. Na osnovu toga prilično je intuitivno reći da je za $a,\, b \in \mathbb{R},\, a \leq b$

$$\text{“duljina od } A\text{”} = b - a, \tag{1.1}$$

gdje je $A = [a,\, b]$.
Znači, "mjera" bi bila neka funkcija

$$m : \mathfrak{D} \to [0,\, +\infty]\,, \tag{1.2}$$

pri čemu je $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Nameće nam se pitanje, što staviti u $\mathfrak{D}$?

- $a,\, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad [a,\, b] \in \mathfrak{D},\ m([a,\, b]) = b - a.$
- $a = b, \quad \{a\} \in \mathfrak{D},\ m(\{a\}) = 0.$
- $\mathbb{R} \in \mathfrak{D},\ m(\mathbb{R}) = +\infty.$

Također je prirodno očekivati, ako je $A \in \mathfrak{D}$ da je onda i $A^c \in \mathfrak{D}$.
No, što je onda $m(A^c)$?
Segment je "konačan", dok je cijeli $\mathbb{R}$ "beskonačan", stoga opravdano očekujemo da je $m([a,\, b]^c) = +\infty$.
Kako je $\mathbb{R}^c = \emptyset$ prirodan je zahtjev da je $m(\emptyset) = 0$. (1.3)
U prethodnom smo koristili da za $A,\, B \in \mathfrak{D}$ takve da je $A \cap B = \emptyset$ vrijedi

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)\,. \tag{1.4}$$

Sada vidimo da je potrebno odrediti i pravila računanja. S realnim brojevima znamo računati, stoga moramo samo uvesti sljedeće. Neka je $a \in \mathbb{R}$, tada je

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty, \quad \text{također} \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty. \tag{1.5}$$

Primjer 1.6 Svaki broj $x \in [0,\ 1]$ možemo napisati u dijadskom rastavu:

$$x = x_1 \cdot \frac{1}{2} + x_2 \cdot \frac{1}{4} + x_3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

pri čemu je $x_j \in \{0,\, 1\}\,,\ \forall j \in \mathbb{N}$.
Kako bismo osigurali jedinstvenost zapisa kažemo da ukoliko postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_m = 1,\ x_{m+j} = 0,\ \forall j \in \mathbb{N},$$

onda uzimamo zapis

$$x_m = 0,\ x_{m+j} = 1,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dakle, svakom realnom broju iz $x \in [0,\, 1]$ pridružujemo jedinstven niz nula i jedinica, odnosno

$$x \mapsto (x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)\,.$$

Odgovarajući niz možemo vjerojatnosno interpretirati kao niz uzastopnih bacanja simetričnog novčića.

$$m(\{x \in [0,\, 1] : x_n = 1\}) = \text{ vjerojatnost da je u } n\text{-tom bacanju ishod 1.}$$

Koristeći pravila (1.1), (1.3), (1.4) nije teško naći neke od tih vjerojatnosti:

$$m\left(\{x \in [0,\, 1] : x_1 = 0\}\right) = m\left(\left[0,\, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
& m\left(\{x \in [0,\, 1] : x_1 = 1,\, x_2 = 0,\, x_3 = 0\}\right) \\
= \; & m\left\{\left\langle \frac{1}{2},\, 1\right] \cap \left(\left[0,\, \frac{1}{4}\right] \cup \left\langle \frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right]\right) \cap \left(\left[0,\, \frac{1}{8}\right] \cup \left\langle \frac{1}{2},\, \frac{5}{8}\right] \cup \left\langle \frac{3}{4},\, \frac{7}{8}\right]\right)\right\} \\
= \; & m\left(\left\langle \frac{1}{2},\, \frac{5}{8}\right]\right) = m\left(\left[\frac{1}{2},\, \frac{5}{8}\right]\right) - m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Ali, koja je mjera skupa

$$A = \left\{x \in [0,\, 1] : \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{2}\right\}?$$

Je li uopće $A \in \mathfrak{D}$? ♦

Jedna ideja bi mogla ići ovako:

$$m\left([a,\, b]\right) = b - a = (b - a) \cdot 1 = \int_a^b 1 dx,$$

pa bismo, recimo za $A \subseteq [0,\, 1]$ htjeli nešto kao

$$m\left(A\right) = \int_0^1 \chi_A\left(x\right) dx. \tag{1.7}$$

Ali, za koje $A \subseteq [0,\, 1]$ je χ_A Riemann integrabilma? Ponovo teško pitanje!
Iz Primjera 1.6 i (1.7) bi mogli zaključiti da bi bilo korisno imati i beskonačne postupke i granične teoreme!
Npr. ako su $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann integrabilne na $[a,\, b]$ i postoji $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ takva da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = f\left(x\right),\ \forall x \in [a,\, b]$, tada prirodno postavljamo sljedeća pitanja:

(1) Je li f Riemann integrabilna?

(2) Postoji li $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n\left(x\right) dx$?

(3) Ako su odgovori na (1) i (2) pozitivni, mora li biti $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n\left(x\right) dx = \int\limits_a^b f\left(x\right) dx$?

Odgovor na sva ova pitanja je, nažalost, negativan! Navedimo i kontraprimjere koji nam to pokazuju:

(1) $f_n = \chi_{\{q1,\, q2,\, \ldots,\, q_n\}}$, pri čemu je $\mathbb{Q} \cap [0,\, 1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tada je očito $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,\, 1]}$, a znamo da ta funkcija nije Riemann integrabilna. Funkcija f_n je integrabilna za svaki $n \in \mathbb{N}$ jer je to funkcija s konačno mnogo prekida.

(2) Definiramo:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right], \\ \frac{2n^2}{2n-1}(1-x), & x \in \left\langle \frac{1}{2n}, 1\right]. \end{cases}$$

Tada je $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \dfrac{n}{2}$, pa je jasno da odgovarajući limes ne postoji.

(3) Definiramo:

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x, & x \in \left[0, \frac{1}{4n}\right], \\ -4n^2 x + 2n, & x \in \left\langle \frac{1}{4n}, \frac{1}{2n}\right], \\ 0, & x \in \left\langle \frac{1}{2n}, 1\right]. \end{cases}$$

Jasno je da je tada $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$, pa je $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$, dok je $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \dfrac{1}{4}$, jer je $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \dfrac{1}{4}$.

Ideja da se problemi kao onaj iz Primjera 1.6 riješe pomoću Riemannovog integrala neće uspjeti. Vratimo se osnovnim pravilima za m.
Npr. dodajmo prebrojive unije.

$$(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathfrak{D},\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ \forall n \neq m \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{D},\ m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \quad (1.8)$$

Primjer 1.6 sugerira da bi u prirodnim situacijama trebalo imati neku vrstu "jednolike razdiobe", preciznije, da za svaki $A \in \mathfrak{D}$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$m(A + x) = m(A). \quad (1.9)$$

Dakle, trebalo bi konstruirati strukturu koja zadovoljava (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.8) i (1.9). Što uzeti za $\mathfrak{D}$? Uzmimo $\mathfrak{D} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Sljedeći teorem nam govori da tada željena struktura ne postoji!

Teorem 1.10 Ne postoji funkcija $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.8) i (1.9).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ s navedenim svojstvima.
Neka su A, $B \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $A \subseteq B$. Po (1.4) slijedi $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$. Budući da je $m(B \setminus A) \geq 0$ dobivamo

$$A \subseteq B \Longrightarrow m(A) \leq m(B). \quad (1.11)$$

Na $\mathbb{R}$ definiramo relaciju $\sim$.

$$a \sim b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{Q}.$$

Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Za $x \in \mathbb{R}$ označimo sa K_x pripadnu klasu ekvivalencije.

$$x \pm \lfloor x \rfloor \in K_x \cap [-1, 1] \Longrightarrow K_x \cap [-1, 1] \neq \emptyset,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Po aksiomu izbora postoji injekcija sa $\mathbb{R}/_\sim$ u $[-1, 1]$. Označimo s A sliku te injekcije, posebno $A \subseteq [-1, 1]$.
Neka je $\mathbb{Q} \cap [-2, 2] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, te definirajmo, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A_n := A + q_n.$$

Jasno je da je $A_n \subseteq [-3,\, 3]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Neka su $m,\, n \in \mathbb{N},\ m \neq n$. Kada bi $x \in A_n \cap A_m$, onda bi postojali $a,\, b \in A$ takvi da je $x = a + q_n$ i $x = b + q_m$, no iz toga onda zaključujemo da je $b - a \in \mathbb{Q}$, tj. $K_a = K_b$. Po izboru a slijedi da je $a = b$, a iz toga onda da je $q_n = q_m$. $\Rightarrow\Leftarrow$
Dakle, $(A_n : n \in \mathbb{N})$ su međusobno disjunktni. Po (1.8) tada vrijedi $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right)$.
Uočimo da je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [-3,\, 3]$, sada po (1.1) i (1.11) dobivamo

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq m\left([-3,\, 3]\right) = 6 < +\infty.$$

Po (1.9) vrijedi $m\left(A_n\right) = m\left(A\right)$, dakle $6 \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m\left(A\right)$, zbog čega zaključujemo da mora biti $m\left(A\right) = 0$.
Neka je $x \in [-1,\, 1]$. Tada postoji $a \in K_x \cap A \cap [-1,\, 1]$, pa je $a - x \in \mathbb{Q} \cap [-2,\, 2]$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_{n_0}$, konačno zaključujemo da je $[-1,\, 1] \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. (1.1) i (1.11) nam sada daju

$$2 = m\left([-1,\, 1]\right) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(A\right) = 0. \ \Rightarrow\Leftarrow$$

$\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Što sada? Niti jednu pretpostavku ne možemo napustiti osim zahtjeva da je $\mathfrak{D} = \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$!
Općenito će biti $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$!
Htjeli bismo konstruirati $\mathfrak{D}$ koji uključuje većinu poznatih skupova iz $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$ i zadovoljava (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.8) i (1.9) za bar jedno m.
Uočimo da je (1.4) zapravo suvišan jer slijedi iz (1.3) i (1.8) uz izbor $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$, $n \geq 3$. Uočimo također da su (1.1) i (1.9) posebni slučajevi. Dakle, želimo razviti teoriju koristeći (1.3) i (1.8). U takvu teoriju spada i novi pojam integrala koji je pomoću (1.7) direktno vezan uz pojam mjere. Taj novi integral je općenitiji od Riemannovog integrala i ima bitno bolje ponašanje na granične postupke. Povijesno gledano pojam integrala (a time i mjere) usavršavao se nekih 100 godina do novog integrala o kojem ćemo učiti u ovom kolegiju. Spomenimo neke korake na tom putu:

- Augustin-Louis Cauchy (1789. - 1857.)
  Promatrao je subdivizije segmenta $[a,\, b]$, $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ i odgovarajuće sume
  $$S\left(\Delta,\, f\right) = \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)\left(x_j - x_{j-1}\right), \quad x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j.$$
  Ukoliko je niz ovih suma konvergentan, to je bio traženi integral. Ovakvim integralom su obuhvaćene sve neprekidne funkcije, kao i one s konačno prekida.

- Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805. - 1859.), Fourierov student.
  Unosi dodatne preciznosti u pojam integrala; omeđenost, konačan broj prekida i konačan broj ekstrema.

- Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826. - 1866.)
  Precizirao integral na način na koji to radimo i danas.
- Jean Gaston Darboux (1842. - 1917.)
  Pokazuje da granični postupak uvijek vodi do $(\underline{I})$ donje i $\left(\overline{I}\right)$ gornje Darbouxove sume.
- Henri Léon Lebesgue (1875. - 1941.)
  U svojoj doktorskoj disertaciji 1902. na pariškom fakultetu Sorbonne razvija novi pojam integrala koji ćemo naučiti u ovom kolegiju.

2 PRSTEN SKUPOVA

Émile Borel (1871. - 1956.) i René-Louis Baire (1874. - 1932.) su bili francuski matematičari koji su promatrali razne oblike skupova. Oni su započeli ono čime ćemo se mi baviti na ovom kolegiju.
$[a,\, b] \setminus [c,\, d]$ može biti oblika $[a,\, c\rangle \cup \langle d,\, b]$, što nam nije lijepo jer smo dobili skupove drukčijeg oblika.
Promotrimo poluotvorene intervale (Takvima nazivamo uvijek one kojima je lijevi rub isključen, a desni uključen.):

$$\langle a,\, b]\,, \quad -\infty < a \leq b < +\infty.$$

Uzimamo da je $\emptyset = \langle a,\, a]$, također vidimo da vrijedi

$$\langle a,\, b] \cap \langle c,\, d] = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{poluotvoreni interval.} \end{cases}$$

Uzmemo li bez smanjenja općenitosti da je $a \leq c$ vidimo i da je

$$\langle a,\, b] \setminus \langle c,\, d] = \begin{cases} \langle a,\, b]\,, \\ \langle a,\, c]\,, \\ \langle a,\, c] \cup \langle d,\, b]\,. \end{cases}$$

Definicija 2.1 Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zove se **poluprsten** (podskupova od X) ako:

(S1) $\emptyset \in \mathcal{S}$.

(S2) $A,\, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.

(S3) $A,\, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\, \exists C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n \in \mathcal{S}$, međusobno disjunktni, t.d.

$$A \setminus B = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n.$$

Primjer 2.2

(a) Neka je $d \in \mathbb{N}$. Definiramo familiju poluotvorenih pravokutnika u $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{P}^d := \left\{ \prod_{i=1}^{d} \langle a_i,\, b_i]\,,\ -\infty < a_i \leq b_i < +\infty,\, i = 1,\, \ldots,\, d \right\}.$$

Lako se pokaže da je $\mathcal{P}^d$ poluprsten, za svaki $d \in \mathbb{N}$.

(b) Neka je $\mathcal{I}$ familija svih 1-intervala,
$[a,\, b]\,,\ \langle a,\, b]\,,\ [a,\, b\rangle\,,\ \langle a,\, b\rangle\,, \quad a,\, b \in \mathbb{R},\ a \leq b.$
Očito je da je $\mathcal{I}$ poluprsten podskupova od $\mathbb{R}$. Također vrijedi $\mathcal{P} \subsetneqq \mathcal{I}$.
Nadalje, za svaki $d \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{I}^d$ familija d-intervala:

$$\mathcal{I}^d := \{I_1 \times \ldots \times I_d,\ I_j \text{ je 1-interval, za } j = 1,\, \ldots,\, d\}\,.$$

Vidimo da je i $\mathcal{I}^d$ poluprsten podskupova od $\mathbb{R}^d$.

♦

Definicija 2.3 Neka je X neprazan skup. **Neprazna** familija $\mathcal{R}$ podskupova od X zove se **prsten** (podskupova od X) ako je $\mathcal{R}$ zatvorena na operacije $\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ, tj. ako je $*$ neka od operacija i $A,\, B \in \mathcal{R}$, onda je i $A * B \in \mathcal{R}$.

Napomena 2.4

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$, očito, jer $\exists A \in \mathcal{R} \Longrightarrow \emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$. Familija $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ je (trivijalni) prsten.

(b) Kako je $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ i $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ vidimo da je dovoljno zahtjevati zatvorenost na operacije $\cup$ i $\setminus$.

(c) π-sistem (sustav) je neprazna familija podskupova od X zatvorena na $\cap$. Jasno je da je π-sistem zatvorena na $\setminus$ poluprsten, također je jasno da obrat općenito ne vrijedi! (Npr. kada je $\langle a, b] \setminus \langle c, d] = \langle a, c] \cup \langle d, b]$.) Svaki prsten je π-sistem i zatvoren je na $\setminus$. Obrat ne vrijedi! Za neprazne skupove $A, B \in X$ t.d. $A \cap B = \emptyset$ vidimo da je $\{A, B, \emptyset\}$ π-sistem, ali to nije prsten! Nije zatvoreno na $\cup$.

(d) Neka je $*$ neka od operacija $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ (Ne nužno uvijek ista!) i $\mathcal{R}$ prsten skupova. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$. Tada je

$$A_1 * (A_2 * \ldots (A_j * A_{j+1}) * \ldots * A_n) \in \mathcal{R}.$$

Ovo nam govori da sa skupovima u prstenu možemo "raditi što želimo" i uvijek ćemo "ostati u" prstenu.

(e) Neka je X neprazan skup, jasno je da je tada $\mathcal{P}(X)$ prsten podskupova od X. Neka je $\{\mathcal{R}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ familija prstenova podskupova od X. Tada je $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda$ prsten podskupova od X. To se lako vidi, naime:

$$A, B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda \Longrightarrow A, B \in \mathcal{R}_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\Longrightarrow A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \Longrightarrow A \cup B, A \setminus B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\lambda.$$

Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neka familija podskupova, definiramo

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{R} : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}, \\ \mathcal{R} \text{ prsten}}} \mathcal{R}$$

prsten generiran s $\mathcal{E}$. To je najmanji prsten koji sadrži $\mathcal{E}$.

(f) Prsten podskupova od X koji sadrži cijeli X zove se **algebra** podskupova od X. Neprazna familija $\mathcal{A}$ podskupova od X je algebra (podskupova od X) ako i samo ako je zatvorena na uniju i unarnu operaciju komplementiranja. Analogno kao u (e) definiramo algebru generiranu familijom $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

(g) Familija svih konačnih podskupova od X je prsten. Ako je X beskonačan to nije algebra. Algebra generirana konačnim podskupovima sastoji se od svih skupova koji su konačni i onih čiji je komplement konačan.

Propozicija 2.5 Ako je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ poluprsten, tada je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{S}) &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i : n \in \mathbb{N}, E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{S} \text{ međusobno disjunktni} \right\} \\ &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} E_i : n \in \mathbb{N}, E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{S} \right\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Označimo desnu stranu s $\mathcal{C}$. Jasno je da je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{R}$ prsten koji sadrži $\mathcal{S}$, jasno je da tada $\mathcal{R}$ sadrži $\mathcal{C}$ jer sadrži sve konačne unije, a iz toga onda direktno slijedi da $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ sadrži $\mathcal{C}$. Dakle, treba pokazati da je $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{C}$. Dovoljno će biti pokazati da je $\mathcal{C}$ prsten podskupova od X. Naime, tada, pošto $\mathcal{C}$ sadrži $\mathcal{S}$ i $\mathcal{C}$ je prsten slijedi da $\mathcal{C}$ sadrži i $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ jer je to najmanji prsten koji sadrži $\mathcal{S}$. Neka je

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i,\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{S} \text{ međusobno disjunktni,}$$

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} F_j,\ F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{S} \text{ međusobno disjunktni.}$$

$A \in \mathcal{C}$ i $B \in \mathcal{C}$, trebamo pokazati da je $A \cup B$ i $A \setminus B$ iz $\mathcal{C}$. Definirajmo

$$G_{ij} := E_i \cap F_j,$$

prema (S2) znamo da je $G_{ij} \in \mathcal{S}$. Prema definiciji vidimo da je

$$\{G_{ij} :\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$$

familija međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{S}$. Prema (S3) znamo da vrijedi

$$E_i \setminus F_j = \bigcup_{k=1}^{p(i,j)} H_k(i, j),$$

gdje su $H_1(i, j), \ldots, H_{p(i,j)}(i, j)$ međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{S}$. Sada vidimo da je

$$\begin{aligned} E_i \setminus B &= E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} F_j = \bigcap_{j=1}^{m} (E_i \setminus F_j) = \bigcap_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{k=1}^{p(i,j)} H_k(i, j) \right) \\ &= \bigcup_{k_1=1}^{p(i,1)} \cdots \bigcup_{k_m=1}^{p(i,m)} \left(\underbrace{H_{k_1}(i, 1) \cap \ldots \cap H_{k_m}(i, m)}_{\in \mathcal{S}} \right). \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $E_i \setminus B$ konačna unija međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{S}$. Naime, skupovi $H_k(i, j)$ su sami po sebi međusobno disjunktni, što će reći da su njihovi presjeci pogotovo disjunktni! Dakle, $E_i \setminus B \in \mathcal{C}$. Analogno se pokaže da je $F_j \setminus A \in \mathcal{C}$. Skupovi $E_1 \setminus B, \ldots, E_n \setminus B$ su međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{C}$, stoga je

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \setminus B) \in \mathcal{C},$$

te analogno

$$B \setminus A = \bigcup_{j=1}^{m} (F_j \setminus A) \in \mathcal{C}.$$

Također je jasno da je $A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} G_{ij} \in \mathcal{C}$. Iz svega ovoga sada konačno slijedi da je

$$A \cup B = \underbrace{(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)}_{\text{međusobno disjunktni}} \in \mathcal{C}.$$

Q.E.D.

Definicija 2.6 Neka je $\emptyset \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ t.d. je $\mu(\emptyset) = 0$. Funkcija μ je **konačno aditivna** na $\mathcal{E}$ ako vrijedi

$$E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E} \text{ međusobno disjunktni i } E := \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E} \Longrightarrow \mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Napomena 2.7 Prsten skupova $\mathcal{R}$ je "prirodna" struktura za promatranje konačno aditivnih funkcija jer je tada automatski $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{R}$.
Neka je $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ konačno aditivna. Tada je

(a) (monotonost) $A, B \in \mathcal{R},\ A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) $A, B \in \mathcal{R},\ A \subseteq B,\ \mu(A) < +\infty \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(c) (konačna subaditivnost) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.

Svojstva (a) i (b) slijede iz, $A, B \in \mathcal{R},\ A \subseteq B$, onda je $B = A \cup (B \setminus A)$, pa zbog konačne aditivnosti

$$\mu(B) = \mu[A \cup (B \setminus A)] = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Svojstvo (c) slijedi iz konačne aditivnosti, svojstva (a) i činjenice da je

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu\left[\bigcup_{j=1}^{n}\left(A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} \mu\left(A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

Ako je μ konačno aditivna funkcija na algebri $\mathcal{A}$ podskupova od X tada je $\mu : \mathcal{A} \to \left[0, \underbrace{\mu(X)}_{\leq +\infty}\right]$, to, naravno, slijedi iz monotonosti funkcije μ.
Proširenje konačno aditivne funkcije $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$, na prsten $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ je funkcija ν za koju vrijedi

$$\nu : \mathcal{R}(\mathcal{S}) \to [0, +\infty],\ \nu(A) = \mu(A),\ \forall A \in \mathcal{S}.$$

Teorem 2.8 Neka je $\mathcal{S}$ poluprsten podskupova od X i $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ konačno aditivna funkcija. Tada postoji i jedinstveno je konačno aditivno proširenje funkcije μ na $\mathcal{R}(\mathcal{S})$. Nadalje, ako je $\mathrm{Im}(\mu) \subseteq [0, +\infty\rangle$ onda isto vrijedi i za proširenje.

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$, tada je $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, gdje su $E_1, \ldots, E_n$ međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{S}$. Sada vidimo da je jedino što možemo napraviti:

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

U predzadnjoj jednakosti smo iskoristili konačnu aditivnost funkcije ν, a u zadnjoj činjenicu da želimo da je ν proširenje od μ. Definiramo:

$$\nu(A) := \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Iz ovoga dobivamo egzistenciju, jedinstvenost funkcije ν i zadnju tvrdnju o konačnosti. Jedino što moramo pokazati je da je definicija dobra i da je ν konačno aditivna na $\mathcal{R}(\mathcal{S})$.

Neka je $A = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$, gdje su $F_1, \ldots, F_m$ međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{S}$, moramo pokazati da je

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(F_j).$$

Definiramo (kao u Propoziciji 2.5) $G_{ij} := E_i \cap F_j \in \mathcal{S}$, računamo.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) &= \sum_{i=1}^{n} \mu\left[\bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(G_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu(G_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} \mu(F_j).\end{aligned}$$

Dokažimo još konačnu aditivnost, neka su $A_1, \ldots, A_p$ međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{R}(\mathcal{S})$, vrijedi $A_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} E_{i,k}$, gdje su $E_{1,k}, \ldots, E_{n_k,k}$ međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{S}$. Vrijedi

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{p}\bigcup_{i=1}^{n_k} E_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k} \mu(E_{i,k}) = \sum_{k=1}^{p} \nu(A_k).$$

Q.E.D.

Primjer 2.9

- Definiramo $\mu : \mathcal{P}^1 \to [0, +\infty]$
$$\mu(\langle a, b]) := b - a.$$
Tvrdimo da je μ konačno aditivna na $\mathcal{P}^1$. Neka je $\langle a, b] = E \in \mathcal{P}^1$, tada je $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, gdje su $E_1, \ldots, E_n$ međusobno disjunktni skupovi iz $\mathcal{P}^1$.
Vidimo da je jedina mogućnost da je $\langle a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i]$, gdje su
$$-\infty < a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq b_2 = \ldots \leq b_{n-1} = a_n \leq b_n = b < +\infty,$$
zato je $\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = b - a = \mu(E)$.

- Neka je $\mu : \mathcal{I} \to [0, +\infty]$, za $I \in \mathcal{I}$ definiramo
$$\mu(I) := \sup I - \inf I,$$
Vidimo da je za I bilo kojeg od oblika $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$;
$$\mu(I) = b - a.$$
Isto kao u prethodnoj točki vidimo da je μ konačno aditivna na $\mathcal{I}$.

- Na $\mathcal{I}^d$ definiramo
$$\mu^d\left(I_1 \times \ldots \times I_d\right) := \prod_{j=1}^{d} \mu^1\left(I_j\right),$$
gdje je $\mu^1 = \mu$ iz prethodne točke. Opet lako vidimo da je μ^d konačno aditivna na $\mathcal{I}^d$.

♦

Lema 2.10 Ako su $(I_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}$ $\left(\text{ili } \mathcal{P}^1\right)$ međusobno disjunktni i $I := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{I}$, tada je
$$\mu\left(I\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(I_n\right).$$

Dokaz. Konačna aditivnost i monotonost nam daju da je
$$\sum_{k=1}^{n} \mu\left(I_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \leq \mu\left(I\right),\ \forall n \in \mathbb{N},$$
dakle, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(I_k\right) \leq \mu\left(I\right)$.
Neka je $\varepsilon > 0$, kako je $I \in \mathcal{I}$ znamo da postoji $K = [a,\, b] \subseteq I$ takav da je
$$\mu\left(I\right) < (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu\left(K\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Slično, $\forall n \in \mathbb{N}$ postoji $U_n = \langle a_n,\, b_n\rangle \supseteq I_n$ takav da je
$$\mu\left(I_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} > (b_n - a_n) = \mu\left(U_n\right).$$
$$K \subseteq I = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n,$$
skupovi U_n su otvoreni i čine pokrivač za kompaktan skup K. Zbog kompaktnosti tada slijedi da postoji konačan potpokrivač. Neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} U_k$, tada je zbog konačne subaditivnosti
$$\mu\left(K\right) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu\left(U_k\right).$$
Konačno dobivamo
$$\begin{aligned}
\mu\left(I\right) &< \mu\left(K\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{N} \mu\left(U_k\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \sum_{k=1}^{N} \left(\mu\left(I_k\right) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{N} \mu\left(I_k\right) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(I_k\right) + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$
Dakle, dobili smo i $\mu\left(I\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(I_k\right)$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

3 MJERE NA σ–PRSTENU

Definicija 3.1 Neka je $\emptyset \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ takva da je $\mu(\emptyset) = 0$. Funkcija μ je **σ-aditivna** na $\mathcal{E}$ ako za svaki niz međusobno disjunktnih skupova $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{E}$ takvih da je $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{E}$ vrijedi da je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

Definicija 3.2 Neprazna familija $\mathcal{F}$ podskupova od X je **σ-prsten** (podskupova od X) ako vrijedi

(a) $A,\, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$,

(b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Ako $\mathcal{F}$ sadrži cijeli X onda se $\mathcal{F}$ zove **σ-algebra** (podskupova od X).
Funkcija μ koja je σ-aditivna na σ-prstenu $\mathcal{F}$ zove se **mjera** na (σ-prstenu) $\mathcal{F}$.

Primjer 3.3

(a) $\{\emptyset\}$ je primjer trivijalnog σ-prstena koji nije σ-algebra!
$\{\emptyset,\, X\}$ je najjednostavnija σ-algebra na X. Mjeru na njoj možemo zadati s $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = a \in [0, +\infty]$.

(b) $\mathcal{P}(X)$ je najveća σ-algebra na X. Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Tada je dobro definirano (Jer je $\mathcal{P}(X)$ σ-algebra, a tada i σ-prsten koji sadrži $\mathcal{E}$.):

(i) σ-prsten generiran familijom $\mathcal{E}$:

$$\sigma_p(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\,:\,\mathcal{E}\subseteq\mathcal{F},\\ \mathcal{F}\ \sigma\text{-prsten}}} \mathcal{F},$$

(ii) σ-algebra generirana familijom $\mathcal{E}$:

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\,:\,\mathcal{E}\subseteq\mathcal{F},\\ \mathcal{F}\ \sigma\text{-algebra}}} \mathcal{F}.$$

Neka je $\mathcal{E} = \{\{x\} : x \in X\}$, tada je

$$\sigma_p(\mathcal{E}) = \{E \subseteq X : E \text{ je prebrojiv}\},$$

$$\sigma(\mathcal{E}) = \{E \subseteq X : E \text{ je prebrojiv ili je } E^c \text{ prebrojiv}\}.$$

Neka je

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A); & A \text{ konačan}, \\ +\infty; & \text{inače}. \end{cases}$$

μ je dobro definirana mjera na $\sigma_p(\mathcal{E})$.

(c) Neka je $\mathcal{F}$ σ-prsten na X i $x \in X$. Definiramo $\delta_x : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ s

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

δ_x je **mjera koncentrirana u točki** $x \in X$. Još se naziva δ mjera u x.

♦

Napomena 3.4

(a) Svaka σ-aditivna funkcija je i konačno aditivna. Obrat, jasno, općenitno ne vrijedi!

(b) Svojstva σ-aditivne funkcije na prstenu $\mathcal{R}$:

(i) (σ-subaditivnost) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \Longrightarrow$

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

(ii) (neprekidnost odozdo) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R} \Longrightarrow$

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

(iii) (neprekidnost odozgo) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R}$ i $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu(A_{n_0}) < +\infty \Longrightarrow$

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Zašto nam je ovdje potrebno postojanje takvog n_0? Naime, ukoliko takav ne postoji ne vrijedi nam neprekidnost odozgo. Neka je $X = [0, +\infty\rangle$, $A_n := [n, +\infty\rangle$. Tada je očito $\mu(A) = \mu(\emptyset) = 0$, dok je $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} +\infty = +\infty$.

(c) Konačna aditivnost i neprekidnost odozdo na prstenu $\mathcal{R}$ nam osiguravaju σ-aditivnost na prstenu $\mathcal{R}$.

Teorem 3.5 Neka je μ σ-aditivna funkcija na poluprstenu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. (Prema Teoremu 2.8 postoji jedinstveno konačno aditivno proširenje ν od μ na $\mathcal{R}(\mathcal{S})$.) Tada je ν σ-aditivna funkcija na $\mathcal{R}(\mathcal{S})$.

Dokaz. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ i $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$. Prema Propoziciji 2.5 znamo da postoji $m \in \mathbb{N}$ te $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{S}$ međusobno disjunktni takvi da je

$$A = E_1 \cup \ldots \cup E_m.$$

Nadalje, prema istoj propoziciji znamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m_n \in \mathbb{N}$ te $E_{n,1}, \ldots, E_{n,m_n} \in \mathcal{S}$ međusobno disjunktni takvi da je

$$A_n = E_{n,1} \cup \ldots \cup E_{n,m_n}.$$

Neka je $k \in \{1, \ldots, m\}$, vrijedi $E_k = E_k \cap A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_k \cap A_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{j=1}^{m_n} (E_k \cap E_{n,j})$. Kako je ovo prebrojiva unija međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{S}$, koristeći σ-aditivnost od μ na $\mathcal{S}$ dobivamo

$$\mu(E_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(E_k \cap E_{n,j}).$$

Slično je $A_n = A \cap A_n = \bigcup_{k=1}^{m} (E_k \cap A_n) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{m_n} (E_k \cap E_{n,j})$. Dakle, prema definiciji funkcije ν vrijedi

$$\nu(A_n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(E_k \cap E_{n,j}).$$

Konačno je

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{k=1}^{m} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(E_k \cap E_{n,j}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(E_k \cap E_{n,j}) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

Zamjena poretka sumacije je opravdana jer su svi sumandi nenegativni. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Korolar 3.6 Postoji jedna i samo jedna σ-aditivna funkcija μ na $\mathcal{R}(\mathcal{I}^d)$ takva da je

$$\mu(I_1 \times \ldots \times I_d) = \prod_{i=1}^{d} (\sup I_i - \inf I_i).$$

Nameće nam se pitanje; može li se μ proširiti do $\sigma_p(\mathcal{R}(\mathcal{I}^d)) = \sigma_p(\mathcal{I}^d)$?

Napomena 3.7 Vrijedi $\sigma(\mathcal{I}^1) = \sigma_p(\mathcal{I}^1) = \sigma_p(\mathcal{P}^1) = \sigma(\mathcal{P}^1)$, te analogne tvrdnje za dimenziju $d \in \mathbb{N}$.

Činjenica da su algebre jednake odgovarajućim prstenima slijedi iz toga da je $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n]$.

Jasno je da vrijedi $\sigma_p(\mathcal{I}^1) \supseteq \sigma_p(\mathcal{P}^1)$, drugu inkluziju vidimo na sljedeći način. Naime, dovoljno je pokazati da je $\mathcal{I}^1 \subseteq \sigma_p(\mathcal{P}^1)$:

- $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left\langle a - \frac{1}{n}, b \right] \in \sigma_p(\mathcal{P}^1)$,
- $\langle a, b \rangle = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right] \in \sigma_p(\mathcal{P}^1)$,
- $[a, b\rangle = [a, a] \cup \langle a, b \rangle \in \sigma_p(\mathcal{P}^1)$.

Sve jednako slijedi u slučaju dimenzije $d \in \mathbb{N}$.
$\sigma_p(\mathcal{I}^d)$ se označava s $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ i naziva **Borelova** σ-algebra na $\mathbb{R}^d$ ili σ-algebra Borelovih podskupova od $\mathbb{R}^d$.

Neka je $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ σ-aditivna funkcija na $\mathcal{R}$. Želimo proširiti μ do σ-aditivne funkcije na $\sigma_p(\mathcal{R})$. Želimo da ima sva lijepa svojstva. Primjetimo, ako

$$\exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R} \text{ t.d. } X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \Longrightarrow \sigma_p(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R}). \tag{3.8}$$

Definiramo $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$:

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) : (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R} \text{ pokrivač za } A, \text{ tj. } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right\}. \tag{3.9}$$

μ^* zadovoljava svojstvo iz sljedeće definicije.

Definicija 3.10 Preslikavanje $m^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ se zove **vanjska mjera** na $X \neq \emptyset$, ako je

- $m^*(\emptyset) = 0$,
- (monotono) $A \subseteq B \Longrightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$,
- (σ-subaditivno) $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n)$.

Definicija 3.11 Neka je m^* vanjska mjera na $X \neq \emptyset$. Kažemo da je $B \subseteq X$ m^***-izmjeriv** ako vrijedi

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c), \ \forall A \in \mathcal{P}(X). \tag{3.12}$$

Primijetimo da nam σ-subaditivnost daje $\leq$. Dakle, dovoljno je provjeriti vrijedi li $\geq$, točnije, dovoljno je provjeriti vrijedi li $\geq$ za $A \subseteq X$ t.d. je $m^*(A) < +\infty$. Nadalje, jasno je da vrijedi

$$m^*(A \cap B) \leq m^*(B) \quad \text{i} \quad m^*(A \cap B^c) \leq m^*(B^c).$$

Ako je $m^*(B) = 0$ ili $m^*(B^c) = 0$ tada se odmah vidi da je B m^*-izmjeriv. Posebno, $\emptyset$ i X su m^*-izmjerivi.

$$\mathcal{M}_{m^*} = \{B \subseteq X \text{ t.d. je } B \ m^*\text{-izmjeriv}\}. \tag{3.13}$$

Teorem 3.14 (Constantin Carathéodory, 1873.-1950.)
Neka je m^* vanjska mjera na X. Tada je $\mathcal{M}_{m^*}$ σ-algebra i $m := m^*|_{\mathcal{M}_{m^*}}$ je mjera.

Dokaz. Znamo da je $\emptyset, X \in \mathcal{M}_{m^*}$. Zatvorenost na komplementiranje u $\mathcal{M}_{m^*}$ dobivamo direktno radi simetrije u Definiciji 3.11. Pokažimo najprije zatvorenost na konačne unije, radi principa matematičke indukcije jasno je da je za to dovoljno pokazati da je unija proizvoljna dva skupa iz $\mathcal{M}_{m^*}$ ponovo u $\mathcal{M}_{m^*}$. Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{m^*}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
m^*(A) &= m^*(A \cap B_1) + m^*(A \cap B_1^c) \quad [\text{jer je } B_1 \in \mathcal{M}_{m^*}] \\
&= m^*(A \cap B_1) + m^*((A \cap B_1^c) \cap B_2) + m^*((A \cap B_1^c) \cap B_2^c) \quad [\text{jer je } B_2 \in \mathcal{M}_{m^*}] \\
&= m^*(A \cap B_1) + m^*((A \setminus B_1) \cap B_2) + m^*(A \setminus (B_1 \cup B_2)) \\
&\geq m^*(A \cap (B_1 \cup B_2)) + m^*(A \cap (B_1 \cup B_2)^c).
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost vrijedi zbog subaditivnosti i činjenice da je

$$(A \cap B_1) \cup ((A \setminus B_1) \cap B_2) = A \cap (B_1 \cup B_2).$$

Radi zaključaka prije teorema vidimo da je $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_{m^*}$. Dakle, $\mathcal{M}_{m^*}$ je algebra podskupova od X.
Moramo još dokazati da je $m := m^* |_{\mathcal{M}_{m^*}}$ σ-aditivna i da je algebra $\mathcal{M}_{m^*}$ zatvorena i na prebrojive unije. U tu svrhu, neka je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{m^*}$. Definiramo $C_1 = B_1$, $C_2 = B_2 \setminus B_1$, $C_3 = B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$, ... Vidimo da je $C_i \in \mathcal{M}_{m^*}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ i da su međusobno disjunktni, stoga možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su početni $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{m^*}$ međusobno disjunktni. Definiramo

$$B := \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n, \quad D_n := B_1 \cup \ldots \cup B_n \in \mathcal{M}_{m^*}.$$

Neka je $A \in \mathcal{P}(X)$, vrijedi

$$m^*(A \cap B_1) = m^*(A \cap D_1),$$

$$\begin{aligned} m^*(A \cap D_{n+1}) &= m^*((A \cap D_{n+1}) \cap D_n) + m^*((A \cap D_{n+1}) \cap D_n^c) \\ &= m^*(A \cap D_n) + m^*(A \cap B_{n+1}). \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom sada izlazi

$$m^*(A \cap D_n) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap B_k). \tag{3.15}$$

Zbog monotonosti vanjske mjere dobivamo da je

$$m^*(A \cap B) \geq m^*(A \cap D_n) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap B_k), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

zato je

$$m^*(A \cap B) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap B_n).$$

No, zbog σ-subaditivnosti vanjske mjere vidimo da vrijedi i suprotna nejedankost. Zato je, konačno

$$m^*(A \cap B) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap B_n),$$

specijalno, stavimo li $A = X$ dobivamo

$$m^*(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(B_n).$$

Dakle, m^* je σ-aditivna na $\mathcal{M}_{m^*}$. Iz (3.15) dalje slijedi

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap D_n) + m^*(A \cap D_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap B_k) + m^*(A \cap D_n^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap B_k) + m^*(A \cap B^c), \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \\ m^*(A) &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap B_n) + m^*(A \cap B^c) \\ &= m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c). \end{aligned}$$

Dakle, $B \in \mathcal{M}_{m^*}$. Q.E.D.

Korolar 3.16 Neka je $\mathcal{R}$ prsten podskupova od X koji zadovoljava (3.8). Ako je $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ σ-aditivna, tada je

- $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$,
- $\mu^* |_{\mathcal{R}} = \mu$,
- $\mu^* \big|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ je mjera.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $\forall E \in \mathcal{R},\ E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ i $\mu^*(E) = \mu(E)$. Očito je $\mu^*(E) \leq \mu(E)$, zbog $E \subseteq E \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$

Neka je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ takav da je $E \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$. Definiramo

$$\widehat{E_1} = E_1,\ \widehat{E_2} = E_2 \setminus E_1,\ \widehat{E_3} = E_3 \setminus (E_1 \cup E_2),\ \ldots,$$

tada su $\widehat{E_i}$ međusobno disjunktni i vrijedi $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \widehat{E_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n$. Zato je

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(E \cap \widehat{E_n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(E \cap \widehat{E_n}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\widehat{E_n}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

Dakle, $\mu(E) \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n)$, za svaki pokrivač $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ od E, zato je prema definiciji od μ^*, $\mu(E) \leq \mu^*(E)$. Dakle, $\mu(E) = \mu^*(E)$. Neka je $A \subseteq X$ takav da je $\mu^*(A) < +\infty$, moramo pokazati da je

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Neka je $\varepsilon > 0$, prema definiciji od μ^* znamo da postoji pokrivač $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ od A takav da je

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\mu(E_n \cap E) + \mu(E_n \cap E^c)] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n \cap E) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n \cap E^c) \\
&\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),\ \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti broja ε slijedi $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Neka je $\nu^d : \mathcal{R}\left(\mathcal{I}^d\right) \to [0, +\infty]$, tada je $\mathcal{M}_{\left(\nu^d\right)^*} = \mathcal{L}_d$ Lebesgueva σ-algebra, ona je pravi nadskup Borelove σ-algebre $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Dakle, $\mathcal{L}_d$ je σ-algebra koja sadrži sve skupove koji su izmjerivi u odnosu na vanjsku Lebesgueovu mjeru, definiranu kao u (3.9).

4 PROSTOR MJERE

Definicija 4.1 **Izmjeriv prostor** je uređen par $(X, \mathcal{F})$, gdje je X skup, a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra. Elemente od $\mathcal{F}$ nazivamo izmjerivim skupovima. Pozitivna mjera na $(X, \mathcal{F})$ je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ koja je σ-aditivna. Sjetimo se da je mjera svaka funkcija $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$, gdje je $\emptyset \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ koja zadovoljava sljedeća dva uvjeta.

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Ukoliko je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{E}$ takav da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}$, onda je

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Nadalje, ako postoji niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ takav da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ i $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\mu(E_n) < +\infty$ onda kažemo da je μ **σ-konačna**.
Mjera je **konačna** ako je $\mu(X) < +\infty$.
Mjera je **vjerojatnosna** ako je $\mu(X) = 1$.
Prostor mjere je uređena trojka $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Primjer 4.2

(a) Neka je $\mathcal{F}$ σ-prsten na X i $x \in X$. Definiramo $\delta_x : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ s

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

δ_x je **mjera koncentrirana u točki** $x \in X$. Još se naziva δ mjera u x.

(b) Neka je $(p_x)_{x\in X} \subseteq [0, +\infty]$, za $A \subseteq X$ definiramo $P(A) = \sum_{x\in A} p_x$. Ovako definirana mjera naziva se **spektralna mjera**. Ona je σ-konačna kada je $p_x < +\infty$, $\forall x \in X$, konačna kada je $\sum_{x\in X} p_x < +\infty$, te vjerojatnosna kada je $\sum_{x\in X} p_x = 1$.

(c) $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d\right)$ i $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, \lambda_d\right)$, gdje je λ_d d-dimenzionalna Lebesgueova mjera, su prostori σ-konačne mjere. Naime

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < n\right\}.$$

(d) Neka je $x_0 \in X$ i $\mathcal{F}$ σ-algebra podskupova od X. Tada je $(X, \mathcal{F}, \delta_{x_0})$ prostor vjerojatnosne mjere. Posebno su za $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \delta_{x_0}\right) \quad \text{i} \quad \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}_d, \delta_{x_0}\right)$$

prostori vjerojatnosne mjere.

♦

Dalje se bavimo pitanjem jedinstvenosti proširenja mjere.

Definicija 4.b.b.1[1] Familija $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **Dynkinova klasa** ako je

(i) $X \in \mathcal{D}$.

(ii) $\mathcal{D}$ je zatvorena na prave razlike. $A,\ B \in \mathcal{D},\ B \subseteq A \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(iii) $\mathcal{D}$ je zatvorena na prebrojive rastuće unije. Ako su $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \in \mathcal{D}$, onda je $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Definicija 4.b.b.2 Klasa podskupova od X koja je zatvorena na konačne presjeke naziva se **π-sustav**.

Napomena 4.b.b.3 Slično kao u Napomeni 2.4 (e) (za prsten generiran nekom familijom) vidimo i u slučaju Dynkinovih klasa da je presjek proizvoljne familije Dynkinovih klasa ponovo Dynkinova klasa, također je jasno da je $\mathcal{P}(X)$ Dynkinova klasa. Zato ima smisla definirati najmanju Dynkinovu klasu generiranu nekom familijom podskupova skupa X. Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neka familija podskupova, definiramo

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D}\,:\,\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D},\\ \mathcal{D}\text{ Dynkinova klasa}}} \mathcal{D}$$

Dynkinovu klasu generiranu s $\mathcal{E}$. To je najmanja Dynkinova klasa koja sadrži $\mathcal{E}$.

Lema 4.b.b.4 Dynkinova klasa $\mathcal{D}$ (podskupova od X) koja je i π-sustav je σ-algebra.

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{D}$, kako je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa znamo da je $X \in \mathcal{D}$, opet, jer je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa vrijedi $A^c = X \setminus A \in \mathcal{D}$, jer su $X,\ A \in \mathcal{D}$. Sada direktno dobivamo i da je $\emptyset = X^c \in \mathcal{D}$. Prema pretpostavci je $\mathcal{D}$ i π-sustav, pokazali smo i da je $\mathcal{D}$ zatvoren na komplementiranje, zato je za $A,\ B \in \mathcal{D}$

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}.$$

Konačno, jer je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa (Dakle, zatvorena na prebrojive rastuće unije.), a upravo smo pokazali da je zatvorena i na proizvoljne konačne unije, dobivamo da je $\mathcal{D}$ zatvorena na proizvoljne prebrojive unije. Zbog svega ovoga je $\mathcal{D}$ σ-algebra. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 4.3 Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{C}$ π-sustav podskupova od X, tada je $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}(\mathcal{C})$.

Dokaz. Jasno je da je $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$, jer je svaka σ-algebra ujedno i Dynkinova klasa, zato je dovoljno pokazati da je $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \supseteq \sigma(\mathcal{C})$, a za to nam je dovoljno pokazati da je $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ σ-algebra. Prema prethodnoj lemi vidimo da je sada potrebno dokazati samo da je $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ π-sustav. Definirajmo

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{C}),\ \forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})\}.$$

Pokažemo li da je $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\mathcal{C})$ odmah dobivamo da je $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ π-sustav, jer je $\mathcal{D}_1$ prema svojoj definiciji zatvoren na konačne presjeke. Također, prema definiciji od $\mathcal{D}_1$ vidimo da je $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{C})$, preostaje nam za pokazati drugu inkluziju. Jasno je da nju dobivamo odmah ukoliko pokažemo da je $\mathcal{D}_1$ Dynkinova klasa koja sadrži $\mathcal{C}$, zato jer je $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ najmanja takva, pa ju svaka druga sadrži. Pokažimo sada potrebno u dva koraka.

1. $\mathcal{D}_1$ je Dynkinova klasa. Dokaz:

[1] Ovdje 'b.b.' stoji za "bez broja". Biti će usuglašena numeracija u nekoj budućoj verziji skripte.

(i) Kako je $X \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, vidimo da je $X \cap B = B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, za svaki $B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$. Dakle, $X \in \mathcal{D}_1$.

(ii) Neka su A, $B \in \mathcal{D}_1$ takvi da je $B \subseteq A$, za svaki $C \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ je $A \cap C$ i $B \cap C$ iz $\mathcal{D}(\mathcal{C})$, zato je i

$$(A \setminus B) \cap C = A \cap B^c \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \in \mathcal{D}(\mathcal{C}), \ \forall C \in \mathcal{D}(\mathcal{C}).$$

Dakle, $A \setminus B \in \mathcal{D}_1$.

(iii) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_1$ rastući niz. Za svaki $B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ je tada $A_n \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B) \in \mathcal{D}(\mathcal{C}), \ \forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{C}).$$

Druga unija je prebrojiva rastuća unija skupova iz $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ pa je ona opet u $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ jer je $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ Dynkinova klasa. Dakle, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_1$.

2. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_1$. Dokaz:
Definirajmo $\mathcal{D}_2 := \{A \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{C}), \ \forall B \in \mathcal{C}\}$. Kako je $\mathcal{C}$ prema pretpostavci teorema π-sustav vidimo da je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_2$. Želimo pokazati da je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_1$, ukoliko je $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\mathcal{C})$ to dobivamo direktno, jer onda svaki skup iz $\mathcal{C}$ presječen s bilo kojim skupom iz $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ "ostaje" u $\mathcal{D}(\mathcal{C})$. No, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\mathcal{C})$ slijedi direktno iz činjenica da je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_2$ i da je $\mathcal{D}_2$ Dynkinova klasa što pokazujemo analogno kao u 1.

Dakle, $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ je Dynkinova klasa koja je i π-sustav, prema prethodnoj lemi, to je σ-algebra.

$\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Korolar 4.4 Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i $\mathcal{C}$ π-sustav na X takav da je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. Ako su μ i ν konačne mjere na $(X, \mathcal{F})$ za koje vrijedi

(a) $\mu(X) = \nu(X)$,

(b) $\mu(C) = \nu(C), \ \forall C \in \mathcal{C}$,

tada je $\mu = \nu$.

Dokaz. Definiramo

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Jasno je da je $\mathcal{D} \neq \emptyset$, jer je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Pretpostavimo li da je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa onda prema prethodnom teoremu vidimo da je $\mathcal{D} = \mathcal{F}$ čime je dokaz gotov. Pokažimo da je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa.

(i) Iz uvjeta (a) odmah slijedi da je $X \in \mathcal{D}$.

(ii) Neka su A, $B \in \mathcal{D}$ takvi da je $B \subseteq A$. Sada je

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B).$$

Dakle, $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(iii) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathcal{D}$. Koristeći neprekidnost mjere u odnosu na rastuće nizove skupova dobivamo da je

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Na kraju još dodajmo da smo konačnost mjera koristili u oduzimanjima, dvije beskonačnosti ne znamo oduzimati! $\mathfrak{Q.E.D.}$

Napomena 4.5 Korolar 4.4 ne mora vrijediti u slučaju da je mjera samo σ-konačna. Neka je $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ te $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{n, n+1, \ldots\}, n \in \mathbb{N}\}$.
Mjere $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ definirane s (Za $A \in \mathcal{F}$.)

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A); & A \text{ konačan}, \\ +\infty; & \text{inače}, \end{cases}$$

$$\nu(A) = \begin{cases} 2 \cdot \operatorname{card}(A); & A \text{ konačan}, \\ +\infty; & \text{inače}, \end{cases}$$

su dobro definirane mjere na $\mathcal{F}$. Vidi se da se one podudaraju na $\mathcal{C}$ i cijelom X, ali ne podudaraju se niti na jednom nepraznom konačnom podskupu od X.

Korolar 4.6 Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, $\mathcal{C}$ π-sustav na X takav da je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ i neka postoji rastući niz $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ takav da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Ako su μ i ν mjere na $(X, \mathcal{F})$ za koje vrijedi

(a) $\mu(C_n) < +\infty$ i $\nu(C_n) < +\infty$, za sve $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\mu(C) = \nu(C), \ \forall C \in \mathcal{C}$,

tada je $\mu = \nu$.

Dokaz. Definirajmo za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap C_n), \ \forall A \in \mathcal{F},$$

$$\nu_n(A) = \nu(A \cap C_n), \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Prema Korolaru 4.4 vidimo da je $\mu_n = \nu_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Koristeći neprekidnost mjera odozdo dobivamo

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \cap X) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \mu\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap C_n)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap C_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to+\infty} \nu_n(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A \cap C_n) \\ &= \nu\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap C_n)\right] = \nu\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \nu(A \cap X) \\ &= \nu(A), \ \forall A \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{Q.E.D.}$

Napomena 4.b.b.5 Korolar 4.6 je primjenjiv npr. za $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{C} = \mathcal{I}^d$. Rastući pokrivač za X nam je npr.

$$C_n := \langle -n, n \rangle^d, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Korolar 4.7 Neka je μ σ-aditivna funkcija na poluprstenu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ako postoji niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ takav da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\mu(E_n) < +\infty$ tada postoji jedna i samo jedna mjera ν_μ na izmjerivom prostoru $(X, \sigma(\mathcal{S}))$ koja je proširenje skupovne funkcije μ. Mjera ν_μ je σ-konačna.

Primjer 4.8 Slučaj Lebesgueove mjere je poseban slučaj prethodnog korolara. To je λ_d, d-dimenzionalna Lebesgueova mjera.
Postoji jedna i samo jedna mjera λ_d na $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ takva da je za sve

$$a_1 < b_1,\, a_2 < b_2,\, \ldots,\, a_d < b_d;\; a_i,\, b_i \in \mathbb{R},\; \forall i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, d\}\,,$$

$$\lambda_d\left(\langle a_1,\, b_1] \times \langle a_2,\, b_2] \times \ldots \times \langle a_d,\, b_d]\right) = \prod_{i=1}^{d}\left(b_i - a_i\right).$$

Ta mjera ima sljedeće važno svojstvo. Neka je

$$\mathcal{D} = \left\{ A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) : \begin{array}{c} \lambda_d\left(A + x\right) = \lambda_d\left(A\right),\; \forall x \in \mathbb{R}; \\ \lambda_d\left(\mu_y^i\left(A\right)\right) = |y|\,\lambda_d\left(A\right),\; \forall i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, d\},\; \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

ovdje nam $\mu_y^i\left(A\right)$ (dilatacija) označava homotetiju skupa A u smjeru i uz faktor y.
Lako se pokazuje da je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa, iz toga onda dobivamo da je $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathcal{D}$. ♦

Napomena 4.9 Krenuli smo od definicije poluprstena $\mathcal{S}$, zatim smo vidjeli da nam to nije dovoljno, pa smo uveli pojam prstena $\mathcal{R}$, a uz njega i pojam prstena generiranog poluprstenom: $\mathcal{R}\left(\mathcal{S}\right)$. Nadalje, definirali smo pojam mjere na σ-prstenu, zatim smo njega proširili na prostor svih izmjerivih skupova u odnosu na vanjsku mjeru koju smo također definirali. Da bi se na kraju vratili na σ-algebre. Ovakav put konstrukcije svih ovih stvari je onaj koji zadaje najmanje tehničkih poteškoća. Sada smo spremni za daljne rezultate.

Definicija 4.10 Neka je $(X,\, \mathcal{F},\, \mu)$ prostor mjere. Reći ćemo da je on **potpun** ako vrijedi

$$E \subseteq F \in \mathcal{F},\; \mu\left(F\right) = 0 \Longrightarrow E \in \mathcal{F} \text{ i } \mu\left(E\right) = 0.$$

Propozicija 4.11 Ako je m^* vanjska mjera na nepraznom skupu X, onda je prostor mjere $(X,\, \mathcal{M}_{m^*},\, m^*)$ potpun.

Dokaz. Definirajmo skup zanemarivih skupova:

$$\mathcal{N}_{m^*} := \left\{A \subseteq X : m^*\left(A\right) = 0\right\}.$$

Zbog monotonosti vanjske mjere dobivamo da ako je $A \in \mathcal{N}_{m^*}$ da su onda i svi njegovi podskupovi u $\mathcal{N}_{m^*}$. Dakle, dovoljno je pokazati da su svi skupovi iz $\mathcal{N}_{m^*}$ m^*-izmjerivi. Neka je $A \in \mathcal{N}_{m^*}$ te $B \in \mathcal{P}\left(X\right)$ proizvoljan, vrijedi

$$m^*\left(B\right) \geq 0 + m^*\left(B \cap A^c\right) = m^*\left(B \cap A\right) + m^*\left(B \cap A^c\right),$$

prva nejednakost vrijedi zbog monotonosti vanjske mjere i činjenice da presjek "smanjuje" skupove, druga jednakost slijedi iz istog razloga, jer je $m^*\left(B \cap A\right) \leq m^*\left(A\right) = 0$. Dakle, A je m^*-izmjeriv, ovime je dokaz priveden kraju. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Lema 4.13 Za svaki $A \in \mathcal{L}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \lambda\left(A\right) &= \inf\left\{\lambda\left(U\right) : A \subseteq U,\; U \subseteq \mathbb{R} \text{ otvoren}\right\} \\ &= \sup\left\{\lambda\left(K\right) : K \subseteq A,\; K \subseteq \mathbb{R} \text{ kompaktan}\right\}. \end{aligned}$$

Ova svojstva se nazivaju redom regularnost izvana i regularnost iznutra.

Dokaz. Ukoliko je $\lambda\left(A\right) = +\infty$ obje tvrdnje trivijalno vrijede, stoga, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda\left(A\right) < +\infty$.

- (Regularnost izvana.)
  Neka je λ^* Lebesgueova vanjska mjera. Kako je $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{\lambda^*}$ vidimo da je dovoljno pokazati da je za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(A) \geq \inf\{\lambda^*(U) : A \subseteq U,\ U \subseteq \mathbb{R} \text{ otvoren}\},$$

  suprotna nejednakost nam slijedi direktno iz monotonosti vanjske mjere.
  Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji niz otvorenih intervala $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvih da je $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n =: I$ i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

  Zbog σ-subaditivnosti vanjske mjere dobivamo

$$\lambda^*(I) = \lambda^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

  Kako je skup I kao prebrojiva unija otvorenih skupova također otvoren, konačno imamo

$$\inf\{\lambda^*(U) : A \subseteq U,\ U \subseteq \mathbb{R} \text{ otvoren}\} \leq \lambda^*(I) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

  Sada zbog proizvoljnosti broja ε tvrdnja slijedi.
  Primjetimo da je tvrdnja dokazana za proizvoljan podskup skupa $\mathbb{R}$, ona tada posebno vrijedi za one koji su Lebesgue izmjerivi.

- (Regularnost iznutra.)
  Jasno je da je dovoljno pokazati da je

$$\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A,\ K \subseteq \mathbb{R} \text{ kompaktan}\}.$$

  Neka je $B_n = [-n, n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada je

$$A = A \cap \mathbb{R} = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(A \cap B_n)}_{C_n}.$$

  Skupovi $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su izmjerivi, skup A je izmjeriv po definiciji, kako je $\mathcal{L}$ σ-algebra zaključujemo da su i skupovi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerivi. Kako je $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ i $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ radi neprekidnosti odozdo dobivamo da je

$$\lambda(A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(C_n).$$

  Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $C_n' := A^c \cap B_n$. Lako vidimo da su i skupovi C_n' izmjerivi. Kako je λ regularna izvana znamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji otvoren skup U_n takav da je $C_n' \subseteq U_n$ i $\lambda(U_n) < \lambda(C_n') + \varepsilon$. Sada je

$$\begin{aligned}
\lambda(B_n) &= \lambda(B_n \cap A) + \lambda(B_n \cap A^c) \\
&> \lambda(B_n \cap A) + \lambda(U_n) - \varepsilon \\
&\geq \lambda(B_n \cap A) + \lambda(U_n \cap B_n) - \varepsilon \\
&\Longrightarrow \\
\lambda(B_n) - \lambda(B_n \cap U_n) &> \lambda(A \cap B_n) - \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \\
\lambda(B_n \cap U_n^c) &> \lambda(C_n) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Skupovi U_n^c su zatvoreni kao komplementi otvorenih, skupovi B_n su kompaktni, zato su kompaktni i skupovi $K_n := B_n \cap U_n^c$, također vrijedi

$$K_n = B_n \cap U_n^c \subseteq B_n \cap (A \cup B_n^c) = B_n \cap A = C_n \subseteq A,$$

prva skupovna inkluzija vrijedi jer je $A^c \cap B_n \subseteq U_n \Longrightarrow A \cup B_n^c \supseteq U_n^c$. Sada dobivamo

$$\sup\{\lambda(K) : K \subseteq A,\ K \subseteq \mathbb{R} \text{ kompaktan}\} \geq \lambda(K_n) > \lambda(C_n) - \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pustimo li $n \to +\infty$ dobivamo

$$\sup\{\lambda(K) : K \subseteq A,\ K \subseteq \mathbb{R} \text{ kompaktan}\} \geq \lambda(A) - \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja ε slijedi tvrdnja. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 4.14 Za svaki $A \in \mathcal{L}$ postoje Borelovi skupovi B i C takvi da je $B \subseteq A \subseteq C$ i $\lambda(C \setminus B) = 0$. Drugim riječima, svaki $A \in \mathcal{L}$ se može prikazati kao $A = B \triangle N$, pri čemu je B Borelov skup i $N \in \mathcal{N}_{(\nu^1)^*}$.

Dokaz. Bez smanjena općenitosti dokaz se svodi na slučaj kada je $\lambda(A) < +\infty$ zato jer se svaki skup iz $\mathcal{L}$ može prikazati kao prebrojiva unija skupova konačne mjere. Prema Lemi 4.13 znamo da za $n \in \mathbb{N}$ postoje otvoren skup U_n i kompkatan skup K_n takvi da je $K_n \subseteq A \subseteq U_n$ i

$$\lambda(A) - \frac{1}{n} \leq \lambda(K_n) \quad \text{i} \quad \lambda(U_n) \leq \lambda(A) + \frac{1}{n}.$$

Uzmemo li $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ i $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ tvrdnja slijedi.
Pokažimo još da je $\lambda(C \setminus B) = 0$, kako je $B \subseteq A \subseteq C$ dobivamo

$$\lambda(C \setminus B) = \lambda(C) - \lambda(B) \leq \lambda(A) + \frac{1}{n} - \left(\lambda(A) - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nejednakost dobivamo iz činjenice da je $K_n \subseteq B$ i $U_n \supseteq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog proizvoljnosti broja $n \in \mathbb{N}$ sada slijedi $\lambda(C \setminus B) = 0$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Napomena 4.15

(a) Iz Teorema 4.14 i Primjera 4.8 lako slijedi da za svaki $A \in \mathcal{L}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ vrijedi $A + x \in \mathcal{L}$, $\mu_y^1(A) \in \mathcal{L}$ (dilatacija) te je

$$\lambda(A + x) = \lambda(A) \quad \text{i} \quad \lambda\left(\mu_y^1(A)\right) = |y|\,\lambda(A).$$

Time je pokazano da je zahtjev iz Teorema 1.10 moguće postići na $\mathcal{L}$.

(b) Uočimo da je time pokazano da je skup A iz dokaza Teorema 1.10 primjer skupa iz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ koji nije u $\mathcal{L}$. Dakle, $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(c) Može se pokazati da je $\operatorname{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = 2^{\aleph_0}$.

(d) Neka je $C \subseteq [0,\,1]$ **Cantorov trijadski skup**. $C := \bigcap_{n=0}^{+\infty} J_n$, pri čemu je

$$J_0 := [0,\,1],\ J_1 := \left[0,\,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\,1\right],\ \ldots,$$

J_{n+1} se dobije iz J_n tako da se iz svakog segmenta koji pripada skupu J_n izbaci srednja trećina.
Očito je svaki J_n zatvoren, pa je i C zatvoren. C je i omeđen, dakle, C je kompaktan. Uočimo da je

$$\lambda\left([0,\,1]\setminus C\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots=1,$$

što nam govori da je $\lambda\left(C\right)=0$.

Nadalje, postoji bijekcija sa C na brojeve u trijadskom zapisu oblika $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2\cdot\frac{x_n}{3^n}$, $x_n\in\{0,\,1\}$. Slijedi, $\operatorname{card}\left(C\right)=2^{\aleph_0}$. Posljedica je, $\operatorname{card}\left(\mathcal{P}\left(C\right)\right)=2^{2^{\aleph_0}}>\operatorname{card}\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$. Očito je $\mathcal{P}\left(C\right)\subseteq\mathcal{N}_{(\nu^1)^*}$. Dakle, postoje zanemarivi skupovi koji nisu Borelovi, te vrijedi $\operatorname{card}\left(\mathcal{L}\right)=2^{2^{\aleph_0}}$. Posebno,

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\subsetneqq\mathcal{L}. \tag{4.16}$$

(4.16) se može pokazati i direktno, to ćemo i napraviti kasnije!

Uočimo da se λ prirodno veže uz funkciju $f\left(x\right)=x$ ($\lambda\left(\langle 0,\,x]\right)=x,$ za $x>0$). Ovo nije slučajno i može se lijepo poopćiti. Neka je ν mjera na $(\mathbb{R},\,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right))$ takva da je

$$\nu\left(K\right)<+\infty,\ \text{za svaki } K\subseteq\mathbb{R} \text{ kompaktan.} \tag{4.17}$$

Definiramo $F_\nu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$F_\nu\left(x\right):=\begin{cases}\nu\left(\langle 0,\,x]\right), & x\geq 0,\\ -\nu\left(\langle x,\,0]\right), & x<0.\end{cases} \tag{4.18}$$

Lako je iz osnovnih svojstava mjere dokazati da je:

- F_ν neopadajuća (monotonost mjere),
- neprekidna zdesna (neprekidnost mjere),
- $F_\nu\left(0\right)=0$, za svaki $\langle a,\,b]\in\mathcal{P}^1$ je

$$\nu\left(\langle a,\,b]\right)=F_\nu\left(b\right)-F_\nu\left(a\right).$$

Koristeći Carathéodoryjevu konstrukciju (slično kao i za Lebesgueovu mjeru) dobijemo svojevrsni obrat.

Teorem 4.19 Neka je $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neopadajuća i neprekidna zdesna. Tada postoji jedna i samo jedna mjera ν_F na $(\mathbb{R},\,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right))$ takva da je

$$\nu\left(\langle a,\,b]\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right), \tag{4.20}$$

za svaki $a,\,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$. Mjera ν_F zadovoljava (4.17).

Napomena 4.21 Neka je F neopadajuća i neprekidna zdesna i $C \in \mathbb{R}$.
Tada je i $G(x) := F(x) + C$ neopadajuća i neprekidna zdesna. Iz (4.20) slijedi $\nu_F = \nu_G$. Dakle, postoji 1-1 korespodencija između mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ koje zadovoljavaju (4.17) i klasa funkcija $\{G : G(x) := F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$. Stavimo li dodatni zahtjev, npr. da je $F(0) = 0$, onda dobivamo 1-1 korespodenciju $\nu \longleftrightarrow F_\nu$. Uočimo da postoje

$$F(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x) \quad \text{i} \quad F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x),$$

te vrijedi

$$-\infty \leq F(-\infty) \leq F(x) \leq F(+\infty) \leq +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mjera ν je konačna ako i samo ako je $F_\nu(-\infty), F_\nu(+\infty) \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\nu(\mathbb{R}) = F_\nu(+\infty) - F_\nu(-\infty).$$

U tom slučaju obično ν vežemo uz predstavnika klase za kojeg je $G_\nu(-\infty) = 0$.

5 IZMJERIVE FUNKCIJE

Neka su X i Y neprazni skupovi i $f : X \to Y$ funkcija. Inverzna slika funkcije se dobro ponaša na skupovne operacije, pa se lako pokaže sljedeća tvrdnja

$$\mathcal{Y}\ \sigma\text{-algebra na } Y \Longrightarrow f^{-1}(\mathcal{Y})\ \ \sigma\text{-algebra na } X. \tag{5.1}$$

Slično se dokazuje

$$\mathcal{X}\ \sigma\text{-algebra na } X \Longrightarrow \left\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{X}\right\}\ \ \sigma\text{-algebra na } Y. \tag{5.2}$$

Definicija 5.3 Neka su $(X, \mathcal{X})$ i $(Y, \mathcal{Y})$ izmjerivi prostori. Funkcija f je $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$**-izmjeriva** (Izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, koristimo samo "izmjeriva" ako su σ-algebre jasne.) ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}$.

Vrlo često je izmjerivost dovoljno promatrati na generirajućoj familiji, što je posljedica sljedeće leme.

Lema 5.4 Ako je $f : X \to Y$ funkcija i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, tada je

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right).$$

Dokaz. Po (5.1) je $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ σ-algebra koja očito sadrži $f^{-1}(\mathcal{E})$.
Slijedi $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Po (5.2) je $\left\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)\right\}$ σ-algebra na Y koja očito sadrži $\mathcal{E}$, pa onda i $\sigma(\mathcal{E})$. Tvrdnja slijedi. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Propozicija 5.5 Neka su $(X, \mathcal{X})$ i $(Y, \mathcal{Y})$ izmjerivi prostori, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ takav da je $\mathcal{Y} = \sigma(\mathcal{E})$. Funkcija $f : X \to Y$ je $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-izmjeriva ako i samo ako je $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{X}$.

Dokaz. Slijedi direktno iz Leme 5.4. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Neka je $X \neq \emptyset$ i $\{(Y_k, \mathcal{Y}_k) : k \in K\}$ neprazna familija izmjerivih prostora. Neka je za svaki $k \in K$ zadana funkcija $f_k : X \to Y_k$. Tada je $\sigma\left(\bigcup_{k\in K} f_k^{-1}(\mathcal{Y}_k)\right)$ najmanja σ-algebra na X sa svojstvom da je svaka f_k izmjeriva, oznaka:

$$\sigma(f_k : k \in K). \tag{5.6}$$

Neka je $\{(X_k, \mathcal{X}_k) : k \in K\}$ neprazna familija izmjerivih prostora. Promatramo Kartezijev produkt skupova $\prod_{k\in K} X_k$ i za svaki $k_0 \in K$ promatramo projekcije $\pi_{k_0} : \prod_{k\in K} X_k \to X_{k_0}$,

$$\pi_{k_0}\left((x_k)_{k\in K}\right) = x_{k_0}.$$

Najmanju σ-algebru u odnosu na koju su sve π_k izmjerive, tj. $\sigma(\pi_k : k \in K)$, označenu s

$$\bigotimes_{k\in K} \mathcal{X}_k, \tag{5.7}$$

nazivamo **produktnom σ-algebrom**.

Lako se pokazuje da je $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Također, $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Definiramo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, tada je

$$\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) = \sigma\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \{\{-\infty\}, \{+\infty\}\}\right),$$

Borelova σ-algebra na proširenom $\mathbb{R}$. Potrebno je definirati operacije s ∞.

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

$(+\infty) + (-\infty)$ se ne definira, kao ni $(-\infty) + (+\infty)$.
Nadalje, za $a \in \mathbb{R}$ je $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$.

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

$$a \in \langle 0, +\infty \rangle \Longrightarrow a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty,$$

$$a \in \langle -\infty, 0 \rangle \Longrightarrow a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty.$$

Također je

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

Definiramo

$$\inf \emptyset = +\infty, \quad \sup \emptyset = -\infty,$$

za $\emptyset \neq A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, ukoliko je A omeđen odozgo vrijedi $\sup A \in \mathbb{R}$, a ukoliko je A neomeđen odozgo, onda $\sup A = +\infty$.
Svaki niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ima

$$\limsup_n a_n := \inf_k \left(\sup_{n\geq k} a_n \right), \quad \liminf_n a_n := \sup_k \left(\inf_{n\geq k} a_n \right).$$

Uvijek vrijedi $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$. Limes postoji ako i samo ako je

$$\liminf_n a_n = \limsup_n a_n.$$

Može biti i $\pm\infty$. Reći ćemo da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ima sumu ako vrijedi da $+\infty$ i $-\infty$ ne mogu oba istovremeno biti članovi niza (a_n) te ako niz parcijalnih suma, $\sum_{k=1}^{n} a_k$, ima limes u $\overline{\mathbb{R}}$. Ako su svi $a_n \in [0, +\infty]$, tada suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uvijek postoji kao element iz $[0, +\infty]$.
Neka je $(U, \mathcal{U})$ topološki prostor. Općenito definiramo:

$$\mathcal{B}(U) = \sigma(\mathcal{U}).$$

Lema 5.8 Ako su $(U, \mathcal{U})$ i $(V, \mathcal{V})$ topološki prostori i $f : U \to V$ neprekidna, tada je f $(\mathcal{B}(U), \mathcal{B}(V))$-izmjeriva. (Borel izmjeriva.)

Dokaz. Neprekidnost znači $f^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$. Tvrdnja sada slijedi iz Leme 5.4 i definicije Borelove σ-algebre.

Q.E.D.

Funkcije koje su $(\mathcal{B}(U), \mathcal{B}(V))$-izmjerive kraće nazivamo **Borelove funkcije**. Slično, na $\mathbb{R}^{d_1}$, $\mathbb{R}^{d_2}$, Lebesgueove funkcije.
Iz Leme 5.8 zaključujemo da su sljedeće funkcije Borelove

$$\begin{array}{ll} \text{zbrajanje,} & + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \text{“pozitivno zbrajanje”,} & + : [0, +\infty] \times [0, +\infty] \to [0, +\infty], \\ \text{apsolutna vrijednost,} & |\cdot| : \overline{\mathbb{R}} \to [0, +\infty], \\ \text{množenje skalarom,} & a\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \text{“pozitivno množenje skalarom”,} & a \in [0, +\infty], \ a\cdot : [0, +\infty] \to [0, +\infty], \\ \text{množenje,} & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \text{funkcija } \frac{1}{x}, & \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}. \end{array} \tag{5.9}$$

Lema 5.10 Neka su $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$, $(Z, \mathcal{Z})$ izmjerivi prostori. Ako su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ izmjerive tada je i $g \circ f$ izmjeriva.

Dokaz.

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{Z}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{Z})\right) \subseteq f^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}.$$

Q.E.D.

Teorem 5.11 Neka je $(X, \mathcal{X})$ izmjeriv prostor.

(a) Ako su $f, g : X \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjerive, tada su $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjerive i funkcije $f + g$, $f \cdot g$, αf $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$, $\dfrac{1}{f}$ (Definirana tamo gdje je $f \neq 0$.), $|f|$, $\max(f, g) = f \vee g$, $\min(f, g) = f \wedge g$, f^+, f^-.
Nadalje, izmjerivi su i skupovi

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\}, \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

(b) Ako su $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive, tada su $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive i funkcije $|f|$, $f \vee g$, $f \wedge g$, f^+, f^-, izmjerivi su i skupovi

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\}, \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

(c) Posebno, ako su $f, g : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive, tada su $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive i funkcije $f + g$, $f \cdot g$, αf $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$.

Dokaz. Promatramo $F : X \to \mathbb{R}^2$ definiranu sa

$$F(x) := (f(x), g(x)).$$

$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \sigma(\pi_1, \pi_2)$.
$f = \pi_1 \circ F$, $g = \pi_2 \circ F$, dakle, F je $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$-izmjeriva.
Po Lemi 5.10 i po (5.9) slijedi izmjerivost funkcija $f + g = + \circ F$, $\alpha f = (\alpha\cdot) \circ f$, $f \cdot g = \cdot \circ F$.
Slično, koristeći (5.9) i f s Lemom 5.10 dobivamo izmjerivost $|f|$ i $\dfrac{1}{f}$. Koristeći formule

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|),$$

slijedi izmjerivost funkcija $f \vee g$ i $f \wedge g$. Sada dobivamo i izmjerivost funkcija

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = (-f) \vee 0. \tag{5.12}$$

Kao što smo upravo pokazali, funkcija $f-g$ je izmjeriva, vrijedi

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\} = (f-g)^{-1}(\langle -\infty, 0\rangle).$$

Skup $\langle -\infty, 0\rangle$ je Borelov, pa je skup $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ izmjeriv. Slično pokazujemo za ostale skupove. Ovime smo dokazali (a) dio, dio (b) i (c) idu slično. Npr.

$$\begin{aligned}\{x \in X : f(x) < g(x)\} &= [\{x \in X : f(x) = -\infty\} \cap \{x \in X : g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}] \\ &\cup [\{x \in X : f(x), g(x) \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)\}] \\ &\cup [\{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\} \cap \{x \in X : g(x) = +\infty\}].\end{aligned}$$

$\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Teorem 5.13 Neka je $(X, \mathcal{X})$ izmjeriv prostor. Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, koje su $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-izmjerive, tada su $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-izmjerive i funkcije $\inf\limits_n f_n$, $\sup\limits_n f_n$, $\liminf\limits_n f_n$, $\limsup\limits_n f_n$ i $\lim\limits_n f_n$.

$\left(\text{Na domeni } \left\{x \in X : \lim\limits_n f_n(x) \text{ postoji u } \overline{\mathbb{R}}\right\}.\right)$

Dokaz. Za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $\left\{x \in X : \sup\limits_n f_n(x) \le t\right\} = \bigcap\limits_n \{x \in X : f_n(x) \le t\}$, pa je to $\mathcal{X}$-izmjeriv skup. Budući da klasa $\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$ generira $\overline{\mathbb{R}}$, izmjerivost $\sup\limits_n f_n$ slijedi po Propoziciji 5.5. Slično pokazujemo za $\inf\limits_n f_n$. Sada izmjerivost funkcija $\liminf\limits_n f_n$ i $\limsup\limits_n f_n$ slijedi po definicionoj formuli. Koristeći Teorem 5.11 (b), domena funkcije $\lim\limits_n f_n$ je izmjeriva, pa slijedi izmjerivost od $\lim\limits_n f_n$. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Primjer 5.14

(a) Svaka $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ koja je neprekidna je ujedno i Borelova (Lema 5.8).

(b) Neka je I 1-interval, $f : I \to \mathbb{R}$ monotona. Tada je za svaki $t \in \mathbb{R}$ skup $\{x \in I : f(x) < t\}$ ili prazan, ili singleton (sadrži samo jedan element) ili 1-interval. On je, dakle, u svakom slučaju Borelov, iz čega zaključujemo da je f izmjeriva, odnosno Borelova.

(c) Sve kombinacije s neprekidnim i monotonim funkcijama uz pomoć operacija iz Leme 5.11 daju Borelove funkcije.

(d) Ako je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-izmjeriva i $A \in \mathcal{X}$, tada možemo promatrati σ-algebru

$$A \cap \mathcal{X} := \{A \cap E : E \in \mathcal{X}\}.$$

$f|_A$ je $(A \cap \mathcal{X}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-izmjeriva. Za $t \in \mathbb{R}$ je

$$\{x \in A : f(x) < t\} = A \cap \{x \in X : f(x) < t\}.$$

(e) Slično pokažemo da ako su $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $f|_{A_n}$ $(A_n \cap \mathcal{X}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-izmjeriva tada je i $f\Big|_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ $\left(\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \mathcal{X}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$-izmjeriva.

(f) Ako je $A \in \mathcal{X}$, tada je χ_A izmjeriva. Obratno, ako je χ_A izmjeriva, tada je $A \in \mathcal{X}$. Funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je **jednostavna** ako je $\mathrm{Im}(f)$ konačan skup. Uočimo da je f izmjeriva i jednostavna ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ i $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{X}$ međusobno disjunktni, takvi da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{F_i}.$$

♦

Očito je limes izmjerivih i jednostavnih funkcija ponovo izmjeriva funkcija.

Teorem 5.15 Neka je $f : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva. Tada postoji rastući niz jednostavnih, izmjerivih funkcija $f_n : X \to [0, +\infty\rangle$ takvih da je $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, za svaki $x \in X$.

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n$ definiramo

$$A_{n,k} := \left\{ x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\},$$

jasno je da je $A_{n,k} \in \mathcal{X}$. Za $n \in \mathbb{N}$ skupovi $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,n\cdot 2^n}$ su međusobno disjunktni. Definiramo

$$f_n := \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} + n \cdot \chi_{X \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n\cdot 2^n} A_{n,k} \right)}.$$

Lako se vidi da je $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ i $f_n(x) \nearrow f(x)$, za svaki $x \in X$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Svaka izmjeriva funkcija se može prikazati kao $f = f^+ - f^-$. Primjenom Teorema 5.15 na f^+ i f^- dobivamo:

Korolar 5.16 Ako je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva, tada postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ jednostavnih, izmjerivih funkcija (s vrijednostima u $\mathbb{R}$) takav da je

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \ \forall x \in X.$$

6 INTEGRAL POZITIVNE FUNKCIJE

Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je jednostavna i izmjeriva ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni i $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}. \tag{6.1}$$

Neka je $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, \mathcal{F}, \mu)$ skup svih jednostavnih, izmjerivih funkcija. Definiramo:

$$\mathcal{S}_+ := \{f \in \mathcal{S} : f \geq 0\}. \tag{6.2}$$

Ako je $f \in \mathcal{S}_+$, onda u prikazu (6.1) vrijedi $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty\rangle$. Za $f \in \mathcal{S}_+$ definiramo **integral od** f (U odnosu na mjeru μ, nad X.):

$$\int_X f d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k). \tag{6.3}$$

Uočimo da je $\int_X f d\mu \in [0, +\infty]$ jer je suma u (6.3) uvijek definirana. Dokažimo sada da je definicija integrala dobra. Neka je

$$f = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$$

neki drugi prikaz funkcije f tipa (6.1). Uočimo da za $A_k \cap B_l \neq \emptyset$ mora vrijediti $a_k = b_l$. U (6.1) su skupovi međusobno disjunktni pa po konačnoj aditivnosti slijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{m} \mu(A_k \cap B_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_k \mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} b_l \mu(A_k \cap B_l) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_l \mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{l=1}^{m} b_l \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap B_l) = \sum_{l=1}^{m} b_l \mu(B_l).
\end{aligned}$$

Uočimo da smo koristili da je $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{l=1}^{m} B_l$, a to možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti. Dakle, $\int_X$ je dobro definiran funkcional.

Propozicija 6.4 Ako su $f, g \in \mathcal{S}_+$ i $\alpha \in [0, +\infty\rangle$, tada vrijedi:

(i) $\alpha f \in \mathcal{S}_+$ i $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$,

(ii) $f + g \in \mathcal{S}_+$ i $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$,

(iii) ako je $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X$ tada je

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Dokaz. Neka su $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ i $g = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ zapisi funkcija f i g tipa (6.1).

(i) $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty\rangle \Longrightarrow \alpha a_1, \ldots, \alpha a_n \in [0, +\infty\rangle \Longrightarrow \alpha f \in \mathcal{S}_+$, a da je $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$ slijedi iz

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k \mu(A_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k).$$

(ii) Opet možemo bez smanjenja općenitosti uzeti da je (Dodamo 0 ukoliko je potrebno.) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{l=1}^{m} B_l$, sada je

$$f + g = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (a_k + b_l) \chi_{A_k \cap B_l},$$

a to je prikaz funkcije $f + g$ tipa (6.1). Kako je $a_k + b_l \in [0, +\infty\rangle$ dobivamo da je $f + g \in \mathcal{S}_+$. Nadalje, po (6.3), imamo:

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)\, d\mu &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (a_k + b_l)\, \mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_k \mu(A_k \cap B_l) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} b_l \mu(A_k \cap B_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) + \sum_{l=1}^{m} b_l \mu(B_l) \\
&= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.
\end{aligned}$$

(iii) $f, g \in \mathcal{S}_+$ i $f \leq g \Longrightarrow g - f \in \mathcal{S}_+$. Imajući na umu da je za $h \in \mathcal{S}_+$, $\int_X h d\mu \geq 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_X g d\mu &= \int_X [f + (g - f)]\, d\mu = \text{ koristeći (ii)} \\
&= \int_X f d\mu + \underbrace{\int_X (g - f)\, d\mu}_{\geq 0} \\
&\geq \int_X f d\mu.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 6.5 Ako su $f \in \mathcal{S}_+$ i $(f_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{S}_+$ takvi da je za sve $x \in X$ i sve $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ i za svaki $x \in X$ je $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$. Tada vrijedi

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Očito postoje svi integrali koji su "u igri". Prema Propoziciji 6.4 (iii) vidimo da je

$$0 \leq \int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Iz ovoga vidimo da postoji $L := \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$ i da je $L \leq \int_X f d\mu$. Ukoliko je $L = +\infty$ vidimo da je onda i $\int_X f d\mu = +\infty$ pa smo gotovi. Dalje radimo pod pretpostavkom da je $L < +\infty$. Neka je $\varepsilon \in \langle 0,\, 1\rangle$. Neka je $f = \sum_{k=1}^{p} a_k \chi_{A_k}$ prikaz funkcije f tipa (6.1) takav da su svi $a_1, \ldots, a_p$ međusobno različiti i niti jedan nije 0. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $k \in \{1, \ldots, p\}$ definiramo:

$$A(n,\, k) := \{x \in A_k : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\, a_k\}.$$

Vidimo da je $A(n,\, k) \in \mathcal{F}$ i $A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A(n,\, k)$, rastuća unija. Nadalje, definiramo:

$$g_n := \sum_{k=1}^{p} (1-\varepsilon)\, a_k \chi_{A(n,\, k)}.$$

Vidimo da je $g_n \in \mathcal{S}_+$, $g_n \leq g_{n+1}$ i $g_n \leq f_n$, dakle, postoji $\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu$ i vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} (1-\varepsilon)\, a_k \mu(A(n,\, k)) = \\
&\quad \text{neprekidnost od } \mu \text{ u odnosu na rastuće nizove} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (1-\varepsilon)\, a_k \mu(A_k) = (1-\varepsilon) \int_X f d\mu,\ \forall \varepsilon \in \langle 0,\, 1\rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, $L \geq \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = (1-\varepsilon) \int_X f d\mu, \forall \varepsilon \in \langle 0,\, 1\rangle$.

Konačno, zaključujemo, $L < +\infty \Longrightarrow \int_X f d\mu < +\infty$ i $L \geq \int_X f d\mu$. Q.E.D.

Definicija 6.6 Neka je $f : X \to [0,\, +\infty]$ $\left(\mathcal{F},\, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva. Definiramo **integral od** f (U odnosu na mjeru μ, nad X.):

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X g d\mu : g \in \mathcal{S}_+,\, g \leq f \right\}.$$

Napomena 6.7

(a) Ako je $f \in \mathcal{S}_+$ onda je $\int_X f d\mu$ u deficionom skupu. Za $g \in \mathcal{S}_+$ takav da je $g \leq f$ je i $\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$. Zaključujemo da se definicije podudaraju na $\mathcal{S}_+$.

(b) Ako je $f : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva, onda sup postoji, tj. $\int\limits_X f d\mu \in [0, +\infty]$.

(c) Neka je $A \in \mathcal{F}$, $f := (+\infty) \cdot \chi_A$, $f_n := n \cdot \chi_A$. Tada vrijedi $f_n \in \mathcal{S}_+$ i $f_n \leq f$.

$$\int\limits_X f d\mu \geq \int\limits_X f_n d\mu = n \cdot \mu(A).$$

Ukoliko je $\mu(A) > 0 \Longrightarrow \int\limits_X f d\mu = +\infty$, a ako je $\mu(A) = 0 \Longrightarrow n \cdot \mu(A) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je $g \in \mathcal{S}_+$ takav da je $g \leq f$ i $g \neq f$. Postoji dovoljno velik $n \in \mathbb{N}$ takav da je $g \leq f_n$. Tada je $\int\limits_X g d\mu \leq \int\limits_X f_n d\mu = 0$, iz čega zaključujemo da je $\int\limits_X f d\mu = 0$. Dakle,

$$\int\limits_X f d\mu = \begin{cases} +\infty, & \mu(A) > 0, \\ 0, & \mu(A) = 0. \end{cases}$$

Lema 6.8 Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_+$ neopadajući niz jednostavnih izmjerivih funkcija i

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \ \forall x \in X,$$

tada je f $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva i $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

Dokaz. Prvi dio tvrdnje slijedi iz Teorema 5.13. Nadalje, postoji

$$L := \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu \in [0, +\infty].$$

Jasno je da vrijedi $L \leq \int\limits_X f d\mu$. Neka je $g \in \mathcal{S}_+$ takva da je $g \leq f$. Tada je $g_n := g \wedge f_n$ ponovo iz $\mathcal{S}_+$ i vrijedi

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x), \quad g = \lim_{n\to+\infty} g_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Uočimo da je $\int\limits_X g_n d\mu \leq \int\limits_X f_n d\mu$. Po Lemi 6.5 slijedi

$$\int\limits_X g d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X g_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = L.$$

Dakle, L je gornja međa definicionog skupa za integral od f. Slijedi $\int\limits_X f d\mu \leq L$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 6.9 Ako su $f, g : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive i $\alpha \in [0, +\infty\rangle$, tada:

(i) $\alpha f : X \to [0, +\infty]$ je $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva i

$$\int\limits_X \alpha f d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu.$$

(ii) $(f+g) : X \to [0, +\infty]$ je $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva i

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

(iii) Ako je $f(x) \leq g(x)\,,\ \forall x \in X$, onda je

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Dokaz. Po Teoremu 5.15 postoje rastući nizovi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnih izmjerivih funkcija takvih da $f_n \to f$ i $g_n \to g$ (Po točkama!). Dokaz za (i) i (ii) slijedi iz Leme 6.8 i Propozicije 6.4. Tvrdnja (iii) slijedi direktno iz definicije integrala jer definicioni skup funkcije g sadrži definicioni skup funkcije f. Q.E.D.

Korolar 6.10 (Čebiševljeva nejednakost)
Ako je $f : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva i $0 < t < +\infty$, tada je

$$\mu(A_t) \leq \frac{1}{t}\int_X \chi_{A_t} \cdot f d\mu \leq \frac{1}{t}\int_X f d\mu,$$

pri čemu je $A_t := \{x \in X : f(x) \geq t\}$.

Dokaz. $A_t = f^{-1}([t, +\infty])$, pa je izmjeriv. Tvrdnja slijedi iz monotonosti integrala i nejednakosti

$$0 \leq t \cdot \chi_{A_t} \leq f \cdot \chi_{A_t} \leq f.$$

Q.E.D.

Korolar 6.11 Ako je $f : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva i $\int_X f d\mu < +\infty$, tada vrijedi:

(i) $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$,

(ii) $\{x \in X : f(x) > 0\}$ je σ-konačan (Može se prekriti s prebrojivo mnogo skupova konačne mjere.),

(iii) ako je $\int_X f d\mu = 0$, tada

$$\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0.$$

Dokaz.

(i) Definiramo $A_n := \{x \in X : f(x) \geq n\}$, tada vrijedi $A_n \searrow \{x \in X : f(x) = +\infty\}$. Po Korolaru 6.10 je

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{n}\underbrace{\int_X f d\mu}_{<+\infty}.$$

Dakle, $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$.

(ii) Definiramo $A_{\frac{1}{n}} := \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \nearrow \{x \in X : f(x) > 0\}$. Primjenom Korolara 6.10 slijedi tvrdnja.

(iii) Definiramo iste skupove kao u dokazu od (ii). Tvrdnja opet slijedi direktno iz Korolara 6.10.

Q.E.D.

Napomena 6.12 Ako je $P(x)$ neko svojstvo koje ovisi o $x \in X$, onda kažemo da je $P(x)$ ispunjeno **gotovo svuda** (g.s.) (Ili skoro svuda (s.s.).) ako postoji izmjeriv skup N takav da je $\mu(N) = 0$ i $P(x)$ vrijedi za svaki $x \in N^c$.
Npr. Korolar 6.11 (i) kaže da je f konačna (g.s.), Korolar 6.11 (iii) kaže da je $f = 0$ (g.s.).

7 INTEGRABILNE FUNKCIJE

Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere i neka je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva funkcija. Tada su i funkcije $f^+, f^- : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive, pa postoje

$$\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu \in [0, +\infty]. \tag{7.1}$$

Reći ćemo da **integral funkcije** f **postoji** ako je barem jedan od integrala u (7.1) konačan i u tom slučaju definiramo **integral funkcije** f kao

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{7.2}$$

Ponekad pišemo $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ ili $\int_X f(x)\, \mu(dx)$. Ako je $X = \mathbb{R}^d$ i $\mu = \lambda_d$ govorimo o **Lebesgueovom integralu** i obično pišemo $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$. Ako je $A \in \mathcal{F}$, kažemo da funkcija f ima integral nad A, ako postoji integral funkcije $\chi_A \cdot f$ i tada definiramo

$$\int_A f d\mu := \int_X \chi_A \cdot f d\mu. \tag{7.3}$$

Ako je f definirana samo na A proširimo ju tako da je $f|_{A^c} = 0$.

Napomena 7.4

(a) Ako su $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive funkcije i $f = g$ (g.s.), tada ili postoje integrali funkcija f i g ili ne postoje integrali funkcija f i g. U prvom slučaju je $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$. Zaista, po pretpostavci je skup $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ izmjeriv i $\mu(A) = 0$. Definiramo $h := (+\infty) \cdot \chi_A$. Uočimo $\int_X h d\mu = 0$. Nadalje, uočimo da je $f^+ \leq g^+ + h$ i $g^+ \leq f^+ + h$. Slijedi

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X g^+ d\mu + \int_X h d\mu = \int_X g^+ d\mu \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X h d\mu = \int_X f^+ d\mu.$$

Slično za f^- i g^-. Dakle,

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X g^+ d\mu \quad \text{i} \quad \int_X f^- d\mu = \int_X g^- d\mu.$$

(b) Ako funkcije $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ obje imaju integrale, to **ne znači** da i funkcija $f + g$ ima integral. Neka je $X = \mathbb{R}$ i

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases} \qquad h(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vidimo da je $\int_X f d\mu = +\infty$, $\int_X g d\mu = -\infty$, te $h^+ = f$ i $h^- = -g$. Dakle, funkcija h nema integral.

(c) Ako postoji integral funkcije f, tada vrijedi $\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f|\, d\mu$.

Zaista, ako je $\int\limits_X |f|\, d\mu = +\infty$ tvrdnja trivijalno vrijedi. Ako je $\int\limits_X |f|\, d\mu \in \mathbb{R}$, tada je i $\int\limits_X f^+ d\mu$, $\int\limits_X f^- d\mu \in [0, +\infty\rangle$, tvrdnja tada slijedi zbog

$$|a - b| \leq |a| + |b|\,,\ \forall a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Ovaj posljednji slučaj je od posebnog značenja!

Definicija 7.5 Izmjeriva funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je **integrabilna nad** $A \in \mathcal{F}$ (ili **μ-integrabilna nad** $A \in \mathcal{F}$) ako postoji integral od f nad A i konačan je.

U slučaju $A = X$ obično izostavljamo "nad X". Sljedeće tvrdnje ćemo izreći "nad X", ali vrijede i nad svakim $A \in \mathcal{F}$. Očito vrijedi da je izmjeriva funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilna ako i samo ako

$$\int\limits_X f^+ d\mu,\ \int\limits_X f^- d\mu \in [0, +\infty\rangle\,. \tag{7.6}$$

Odavde lako slijedi da za izmjerivu funkciju $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ vrijedi da je integrabilna ako i samo ako su

$$f^+ \text{ i } f^- \text{ integrabilne, a to vrijedi ako i samo ako je } |f| \text{ integrabilna.} \tag{7.7}$$

Iz Korolara 6.11 direktno slijedi da ako je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilna, tada je f (g.s.) konačna, a tada je i $|f|$ (g.s.) konačna i

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} \text{ je } \mu\ \sigma\text{-konačan.} \tag{7.8}$$

Napomena 7.9 Iz navedenih rezultata slijedi da ako je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabilna, onda se bez smanjenja općenitosti može smatrati da je f realna funkcija.

$$\tilde{f} := f \cdot \chi_{\{x \in X : |f(x)| < +\infty\}}.$$

Očito je $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva i μ-integrabilna te $\tilde{f} = f$ (g.s.).

Lema 7.10 Ako su funkcije $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to [0, +\infty\rangle$ μ-integrabilne i ako vrijedi $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, tada je

$$\int\limits_X f_1 d\mu - \int\limits_X f_2 d\mu = \int\limits_X g_1 d\mu - \int\limits_X g_2 d\mu.$$

Dokaz. Uočimo da su $\int\limits_X f_1 d\mu$, $\int\limits_X f_2 d\mu$, $\int\limits_X g_1 d\mu$, $\int\limits_X g_2 d\mu \in [0, +\infty\rangle$. Nadalje, $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$. Tvrdnja slijedi zbog linearnosti integrala za pozitivne funkcije. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 7.11 Ako su $f,\, g : X \to \mathbb{R}$ μ-integrabilne i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada su μ-integrabilne i funkcije αf i $f+g$ i vrijedi

$$\int\limits_X \alpha f(x)\,\mu(dx) = \alpha \int\limits_X f(x)\,\mu(dx)\,,$$

$$\int\limits_X (f+g)\,d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu.$$

Ako je uz to $f(x) \leq g(x)$, za svaki $x \in X$, tada je

$$\int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X g d\mu.$$

Dokaz. Za $\alpha = 0$ očito. Za $\alpha > 0$ je $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ i $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ pa tvrdnja direktno slijedi. Za $\alpha < 0$ slično, jer je $(\alpha f)^+ = (-\alpha)\, f^-$ i $(\alpha f)^- = (-\alpha)\, f^+$.
Zbog $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ i $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ i monotonosti te linearnosti integrala pozitivnih funkcija slijedi

$$0 \leq \int\limits_X (f+g)^+\,d\mu \leq \int\limits_X f^+ d\mu + \int\limits_X g^+ d\mu < +\infty,$$

slično za $(f+g)^-$, iz čega slijedi integrabilnost funkcije $f+g$. Nadalje, vrijedi

$$(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-\,,$$

no, također je

$$f+g = \left(f^+ - f^-\right) + \left(g^+ - g^-\right) = \left(f^+ + g^+\right) - \left(f^- + g^-\right).$$

Dakle, $(f+g)^+ - (f+g)^- = \left(f^+ + g^+\right) - \left(f^- + g^-\right)$, sada koristimo Lemu 7.10 (U drugoj jednakosti.) i linearnost integrala pozitivnih funkcija (U trećoj jednakosti.).

$$\int\limits_X (f+g)\,d\mu = \int\limits_X (f+g)^+\,d\mu - \int\limits_X (f+g)^-\,d\mu = \int\limits_X \left(f^+ + g^+\right) d\mu - \int\limits_X \left(f^- + g^-\right) d\mu =$$

$$= \left(\int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu\right) + \left(\int\limits_X g^+ d\mu - \int\limits_X g^- d\mu\right) = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu.$$

Posljednja tvrdnja slijedi iz upravo dokazane linearnosti integrala, monotonosti integrala i činjenice da je $g - f \geq 0$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Definicija 7.12 Za prostor mjere $(X,\, \mathcal{F},\, \mu)$ definiramo vektorski prostor

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X,\, \mathcal{F},\, \mu,\, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ je } \mu\text{-integrabilna na } X.\}\,.$$

Na tom prostoru definiramo $\|\ \|_1 : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$ pomoću

$$\|f\|_1 := \int\limits_X |f|\,\mu(dx)\,,\ \ f \in \mathcal{L}^1(X,\, \mathcal{F},\, \mu,\, \mathbb{R})\,.$$

Napomena 7.13

(a) Iz Napomene 7.9 slijedi da je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabilna ako i samo ako postoji $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ takva da je $\tilde{f} = f$ (g.s.).

(b) $f \mapsto \int\limits_X f d\mu$ je linearni funkcional na prostoru $\mathcal{L}^1$.

(c) Lako se vidi da $\| \ \|_1$ ima sljedeća svojstva:

(i) $\|f\|_1 \geq 0, \ \forall f \in \mathcal{L}^1$.

(ii) $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1 \, , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^1$.

(iii) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \, , \ \forall f, \, g \in \mathcal{L}^1$.

(iv) $\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ (g.s.).

To pokazuje da je $\mathcal{L}^1$ "skoro" normiran prostor.
Nije ispunjena tvrdnja ($\|f\|_1 = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$).

(d) Ako imamo vektorski prostor V i funkciju $\mathbf{|} \ \mathbf{|}$ sa svojstvima (i)-(iv) (U smislu $f \equiv 0 \Longrightarrow \mathbf{|} \, f \, \mathbf{|} = 0$, ali obrat ne vrijedi nužno.). Onda promatramo klasu ekvivalencije

$$f \sim g \Longleftrightarrow \mathbf{|} \, f - g \, \mathbf{|} = 0.$$

Neka je $V^{\sim} := V/_{\sim}$ kvocijentni prostor, odnosno, prostor svih klasa ekvivalencije $[f] = \{g \in V : f \sim g\}$. Na $V^{\sim}$ definiramo $\mathbf{|} \ \mathbf{|}^{\sim}$:

$$\mathbf{|} \, [f] \, \mathbf{|}^{\sim} := \mathbf{|} \, f \, \mathbf{|} \, .$$

Neka su $f, \, g \in V$ takve da je $[f] = [g]$, tada je

$$\mathbf{|} \, g \, \mathbf{|} = \mathbf{|} \, (g - f) + f \, \mathbf{|} \leq \mathbf{|} \, g - f \, \mathbf{|} + \mathbf{|} \, f \, \mathbf{|} = \mathbf{|} \, f \, \mathbf{|} \, .$$

Dakle, $\mathbf{|} \, g \, \mathbf{|} \leq \mathbf{|} \, f \, \mathbf{|}$, analogno dobijemo i suprotnu nejednakost, stoga je $\mathbf{|} \, g \, \mathbf{|} = \mathbf{|} \, f \, \mathbf{|}$, pa je definicija dobra! Sada se lako vidi da je $(V^{\sim}, \ \mathbf{|} \ \mathbf{|}^{\sim})$ normiran prostor.

(e) Definiramo normiran prostor $L^1 = L^1 \left(X, \, \mathcal{F}, \, \mu, \, \mathbb{R}\right) := \left(\mathcal{L}^1 \left(X, \, \mathcal{F}, \, \mu, \, \mathbb{R}\right)\right)^{\sim}$. Zbog jednostavnosti zapisa i dalje označavamo $\| \ \|_1^{\sim}$ kao $\| \ \|_1$. Obično umjesto $\|[f]\|_1$ kraće pišemo $\|f\|_1$.

$$[f] := \{g : X \to \mathbb{R} : g \text{ je izmjeriva i } g = f \text{ (g.s.)}\} \, .$$

8 GRANIČNI TEOREMI

U cijelom ovom poglavlju podrazumijevamo sljedeće. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor mjere. Funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva. Niz $(f_n) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz funkcija $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ koje su $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjerive.

Teorem 8.1 (O monotonoj konvergenciji.)
Ako za gotovo svaki $x \in X$ vrijedi $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \nearrow f(x)$, tada je

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Gornja pretpostavka znači da postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$ i da za svaki $x \in A^c$ vrijedi

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \nearrow f(x).$$

Promatramo niz (g_n) i funkciju g, zadane sa

$$g := f \cdot \chi_{A^c}, \quad g_n := f_n \cdot \chi_{A^c}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sve one su izmjerive, jer je A izmjeriv i vrijedi

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots \nearrow g(x), \ \forall x \in X.$$

Iz Napomena 7.4 slijedi da je $\int_X g d\mu = \int_X f d\mu$ i $\int_X g_n d\mu = \int_X f_n d\mu$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, preostalo je dokazati da je

$$\int_X g d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu.$$

Nema problema s egzistencijom integrala jer su sve funkcije nenegativne. Zbog monotonosti je

$$0 \leq \int_X g_1 d\mu \leq \int_X g_2 d\mu \leq \ldots \leq \int_X g d\mu \in [0, +\infty].$$

Neka je $I := \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu$. Slijedi da je $I \leq \int_X g d\mu$. Pošto je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $g_n : X \to [0, +\infty]$, znamo da postoji rastući niz $(g_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_+$ takav da je

$$g_n(x) = \lim_{k\to+\infty} g_k^n(x), \ \forall x \in X.$$

Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $h_n := \max\left(g_n^1, g_n^2, \ldots, g_n^n\right)$. Slijedi da je $h_n : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva. Uočimo da je h_n jednostavna. Iz definicije slijedi da je $h_n \leq h_{n+1}$ i $h_n \leq g_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uočimo i $g(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x)$, $\forall x \in X$. Po Lemi 6.8 i monotonosti integrala konačno slijedi

$$\int_X g d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X h_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = I.$$

Q.E.D.

Korolar 8.2 (Beppo Levijev teorem.)
Ako je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to [0, +\infty]$, tada je

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Promatramo niz $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$, to je rastući niz nenegativnih, izmjerivih funkcija, sada tvrdnja slijedi iz Teorema 8.1. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Primjer 8.3 Ako je $f \geq 0$ možemo definirati $\nu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ pomoću

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{8.4}$$

Očito je $\nu(\emptyset) = 0$. Ako su $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ međusobno disjunktni i $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, tada je $\chi_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}$. Po Korolaru 8.2 dobijemo (Treća jednakost.):

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_X f \cdot \chi_A d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f \cdot \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f \cdot \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

Dakle, ν je mjera na $(X, \mathcal{F})$. Uočimo da je ν konačna ako i samo ako je f μ-integrabilna.

$$\forall A \in \mathcal{F}, \ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0. \tag{8.5}$$

♦

Lema 8.6 (Fatouova lema.)
Ako je $f_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onda je

$$\int_X \left(\liminf_n f_n \right) d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Uočimo da je $g_n : X \to [0, +\infty]$ $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva. Lako vidimo i da je

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots, \ \forall x \in X,$$

jer je infimum "manjeg" skupa "veći", također, vrijedi

$$\liminf_n f_n(x) = \sup_n g_n = \lim_{n \to +\infty} g_n(x), \ \forall x \in X,$$

jer je niz (g_n) rastući. Prema definiciji od g_n vidimo da je $g_n \leq f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, zato je

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \liminf_n \int_X g_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Sada primjenom Teorema 8.1 (Druga jednakost.) dobivamo

$$\begin{aligned}\int_X \left(\liminf_n f_n\right) d\mu &= \int_X \left(\lim_{n\to+\infty} g_n\right) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu \\ &= \liminf_n \int_X g_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorem 8.7 (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji.)
Ako je $g : X \to [0, +\infty]$ μ-integrabilna funkcija te za gotovo svaki $x \in X$ vrijedi

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \text{i} \quad |f_n(x)| \leq g(x), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

tada su f i f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ μ-integrabilne funkcije i

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Po Napomeni 7.9 bez smanjenja općenitosti možemo smatrati da je g konačna funkcija. Korekcijom (Slično kao u dokazu Teorema 8.1.) na skupu mjere nula (Skup na kojem eventualno nisu konačne mora biti skup mjere nula, jer je funkcija g μ-integrabilna pa ona nije konačna najviše na nekom skupu mjere nula, a ona majorizira funkciju f i funkcije f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.) slijedi da su i funkcije f, f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ bez smanjenja općenitosti konačne funkcije. Uz navedenu korekciju dobivamo da je za svaki $x \in X$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \text{i} \quad |f_n(x)| \leq g(x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in X$. Zaključujemo da su funkcije $|f|$, $|f_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ majorizirane funkcijom g koja je μ-integrabilna, stoga su i funkcije $|f|$, $|f_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ μ-integrabilne, a prema (7.7) zaključujemo da su zato i funkcije f, f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ μ-integrabilne. Nadalje, uočimo da je $(g + f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih izmjerivih funkcija za koji vrijedi

$$g + f = \lim_{n\to+\infty} (g + f_n) = \liminf_n (g + f_n).$$

Primjenom Fatouove leme dobivamo

$$\int_X (g + f) d\mu \leq \liminf_n \int_X (g + f_n) d\mu.$$

Kako je $\int_X g d\mu \in \mathbb{R}$ smijemo ga oduzeti, pa imamo

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Na isti način analiziramo niz $(g - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih izmjerivih funkcija. Dobivamo

$$\int_X (g - f) d\mu \leq \liminf_n \int_X (g - f_n) d\mu \Longleftrightarrow -\int_X f d\mu \leq \liminf_n \left(-\int_X f_n d\mu\right),$$

iskoristimo li da je za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva $\liminf\limits_n(-a_n) = -\limsup\limits_n(a_n)$, dobijemo

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Dakle,

$$\limsup_n \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu,$$

a znamo da vrijedi (općenito) da je $\limsup\limits_n \int\limits_X f_n d\mu \geq \liminf\limits_n \int\limits_X f_n d\mu$. Dakle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu$ postoji i jednak je $\int\limits_X f d\mu$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Neka su $a,\, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Promatramo prostor s Lebesgueovom mjerom λ:

$$([a,\, b]\,,\, \mathcal{B}([a,\, b])\,,\, \lambda)\,,$$

gdje je $\mathcal{B}([a,\, b]) := \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a,\, b]$. Nadalje, funkcije koje su Riemann integrabilne na segmentu $[a,\, b]$ nazivati ćemo (R)-integrabilnima, funkcije koje su λ-integrabilne, odnosno Lebesgue integrabilne nazivati ćemo (L)-integrabilnima. Također ćemo uvesti oznake:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,dx, \text{ Riemannov integral,}$$

$$\int_{[a,\,b]} f d\lambda = (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,dx, \text{ Lebesgueov integral.}$$

Teorem 8.8 Neka je $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.

(i) f je (R)-integrabilna na $[a,\, b]$ ako i samo ako je f neprekidna u gotovo svakoj točki $x \in [a,\, b]$.

(ii) Ako je f (R)-integrabilna na $[a,\, b]$, tada je f i (L)-integrabilna i

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dokaz. Neka je f (R)-integrabilna, tada postoji niz subdivizija $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ segmeta $[a,\, b]$ takav da je

$$D^*(f;\, \Delta_n) - D_*(f;\, \Delta_n) < \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

gdje su D^* i D_* gornja, odnosno donja Darbouxova suma. Neka je

$$\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k_n} = b\}\,,$$

definiramo

$$\begin{aligned} g_n &:= f(a) \cdot \chi_{\{x_0\}} + m_1 \cdot \chi_{\langle x_0,\, x_1]} + \ldots + m_{k_n} \cdot \chi_{\langle x_{k_n-1},\, x_{k_n}]}, \\ h_n &:= f(a) \cdot \chi_{\{x_0\}} + M_1 \cdot \chi_{\langle x_0,\, x_1]} + \ldots + M_{k_n} \cdot \chi_{\langle x_{k_n-1},\, x_{k_n}]}, \end{aligned}$$

gdje su (Postoje radi omeđenosti funkcije f.)

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \ i = 1, \ldots, k_n, \\ M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \ i = 1, \ldots, k_n. \end{aligned}$$

Uočimo da su h_n, g_n jednostavne Borelove funkcije te vrijedi

$$g_n \leq g_{n+1} \leq f \leq h_{n+1} \leq h_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prema definiciji Lebesgueovog integrala vidimo da je

$$(\mathrm{L}) \int_a^b g_n(x)\, dx = D_*(f; \Delta_n) \quad \text{i} \quad (\mathrm{L}) \int_a^b h_n(x)\, dx = D^*(f; \Delta_n).$$

Funkcija f je omeđena, dakle, postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Neka je $c := \max\{|m|, |M|\}$, tada je funkcija $r(x) = c$, $\forall x \in [a, b]$ iz $\mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$. Uočimo da funkcija r dominira funkcije f, g_n, h_n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nadalje, uočimo da postoje (Monotoni i omeđeni limesi.)

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x), \ \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x), \ \forall x \in [a, b].$$

Po Teoremu 8.7 vrijedi da su funkcije g i h (L)-integrabilne i

$$(\mathrm{L}) \int_a^b g(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} D_*(f; \Delta_n) = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\, dx,$$

$$(\mathrm{L}) \int_a^b h(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} D^*(f; \Delta_n) = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Kako je $g \leq f \leq h$ slijedi da je $h - g \geq 0$, a prema prethodnom je $\int_{[a,\, b]} (h - g)\, d\lambda = 0$, dakle

$$g = h \ \ \lambda\text{-(g.s.)} \Longrightarrow g = f = h \ \ \lambda\text{-(g.s.)} \Longrightarrow (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Neka je $\tilde{E} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, pošto je $\tilde{E}$ jednak prebrojivoj uniji konačnih skupova vidimo da je $\lambda\left(\tilde{E}\right) = 0$, definiramo:

$$E := \tilde{E} \cup \{x \in [a, b] : g(x) \neq h(x)\},$$

kako je E jednak uniji dvaju skupova čija je Lebesgueova mjera jednaka nuli, zaključujemo da je i E Lebesgue izmjeriv te da je $\lambda(E) = 0$. Neka je $x \in [a, b] \setminus E$, tada je $g(x) = f(x) = h(x)$, odnosno

$$g_n(x) \nearrow f(x) \quad \text{i} \quad h_n(x) \searrow f(x).$$

Nadalje, $x \notin \tilde{E}$, stoga, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstven $i_n \in \{1, \ldots, k_n\}$ takav da je $x \in [x_{i_n-1}, x_{i_n}]$. Označimo $S_n := [x_{i_n-1}, x_{i_n}]$, kako su subdivizije rastuće (Svaka sljedeća sadrži sve točke one prethodne i eventualno još neke.), za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \supseteq S_{n+1}$. Prema definiciji funkcija g_n i h_n vidimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(x) = m_{i_n} \quad \text{i} \quad h_n(x) = M_{i_n}.$$

Dakle, $\inf\limits_{x\in S_n} f(x) \nearrow f(x)$ i $\sup\limits_{x\in S_n} f(x) \searrow f(x)$. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a,\, b]$ proizvoljan niz koji konvergira u x, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_n \in S_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Jednostavno promatramo podniz za koji to vrijedi, takav sigurno postoji, jer je $x \in S_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to x$. Sada, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\inf_{x\in S_n} f(x) \leq f(x_n) \leq \sup_{x\in S_n} f(x)\,,$$

prema teoremu o sendviču dobivamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. Dakle, funkcija f je neprekidna u svakoj točki $x \in [a,\, b] \setminus E$, kako je $\lambda(E) = 0$ zaključujemo da je funkcija f neprekidna u gotovo svakoj točki $x \in [a,\, b]$. Obratno, ako je f gotovo svuda neprekidna, promatramo

$$\Delta_n := \left\{ x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{2^n},\ i = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2^n \right\}$$

te konstruiramo g_n i h_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ analogno. Neka je x bilo koja točka u kojoj je funkcija f neprekidna, tada je

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x)\,.$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to+\infty} (h_n - g_n) = 0$ λ-(g.s.), po Teoremu 8.7 tada dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b (h_n - g_n)(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b [h_n(x) - g_n(x)]\, dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} [D^*(f;\, \Delta_n) - D_*(f;\, \Delta_n)]\,. \end{aligned}$$

Odnosno, f je (R)-integrabilna. $\mathfrak{Q.E.D.}$

9 L^p–PROSTORI

Opišimo najprije dva tehnička rezultata. Neka je $(X,\, \mathcal{F},\, \mu)$ prostor mjere, $(Y,\, \mathcal{G})$ izmjeriv prostor i $f : X \to Y$ $(\mathcal{F},\, \mathcal{G})$-izmjeriva funkcija. Definiramo funkciju $\mu f^{-1} : \mathcal{G} \to [0,\, +\infty]$ pomoću

$$\mu f^{-1}(B) := \mu\left(f^{-1}(B)\right),\ B \in \mathcal{G}. \tag{9.1}$$

Lako se vidi (Uistinu, iskoristimo dobro ponašanje praslike s obzirom na skupovne operacije i činjenicu da je μ mjera na $(X,\, \mathcal{F})$.) da je μf^{-1} mjera na $(Y,\, \mathcal{G})$, naziva se **slika mjere μ u odnosu na f.**

Teorem 9.2 Neka je μf^{-1} slika mjere μ u odnosu na f te neka je $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\mathcal{G},\, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva funkcija. Tada je g μf^{-1}-integrabilna ako i samo ako je $g \circ f$ μ-integrabilna. U tom slučaju vrijedi

$$\int\limits_Y g d\left(\mu f^{-1}\right) = \int\limits_X g \circ f d\mu. \tag{9.3}$$

Dokaz. $g \circ f$ je $\left(\mathcal{F},\, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva kao kompozicija dviju $\left(f,\, (\mathcal{F},\, \mathcal{G})\,;\, g,\, \left(\mathcal{G},\, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$ izmjerivih funkcija. Dokaz ovog Teorema biti će tipični primjer primjene **Lebesgueove indukcije**, provesti ćemo ga u 4 koraka.

1. Dokazujemo tvrdnju najprije za $g = \chi_B$, gdje je $B \in \mathcal{G}$. Primijetimo da je u ovom slučaju dovoljno dokazati da su integrali jednaki. Njihovo postojanje nije upitno jer je g nenegativna funkcija, preostaje pitanje konačnosti, no, ukoliko dokažemo da su u svakom slučaju jednaki, jasno je da će konačnost jednoga povlačiti konačnost drugoga i obratno. Jasno je da je $g \circ f = \chi_{f^{-1}(B)}$, računamo:

$$\begin{aligned}\int\limits_Y g d\left(\mu f^{-1}\right) &= \mu f^{-1}(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)\\ &= \int\limits_{f^{-1}(B)} d\mu = \int\limits_X g \circ f d\mu.\end{aligned}$$

2. Nadalje, neka je g jednostavna funkcija. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $A_1,\, \ldots,\, A_n \in \mathcal{G}$ međusobno disjunktni te $a_1,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$g = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}.$$

Sada jednostavno iskoristimo činjenicu da je integral linearni operator i dokazano u 1.

$$\begin{aligned}\int\limits_Y g d\left(\mu f^{-1}\right) &= \int\limits_Y \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}\right) d\left(\mu f^{-1}\right) = \sum_{i=1}^n \left(a_i \int\limits_Y \chi_{A_i} d\left(\mu f^{-1}\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \left(a_i \int\limits_X \chi_{A_i} \circ f d\mu\right) = \int\limits_X \left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\chi_{A_i} \circ f\right)\right) d\mu\\ &= \int\limits_X \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}\right) \circ f\right] d\mu = \int\limits_X g \circ f d\mu.\end{aligned}$$

3. Sada dokazujemo tvrdnju za proizvoljnu nenegativnu (jasno, izmjerivu) funkciju g. Neka je, dakle, g nenegativna izmjeriva funkcija, prema Teoremu 5.15 znamo da postoji rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $g_n \nearrow g$. Sada iskoristimo Teorem o monotonoj konvergenciji i dokazano u 2, odnosno da tvrdnja vrijedi za g_n, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\int_Y g d\left(\mu f^{-1}\right) &= \int_Y \left(\lim_{n\to+\infty} g_n\right) d\left(\mu f^{-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_Y g_n d\left(\mu f^{-1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n \circ f d\mu = \int_X \left[\lim_{n\to+\infty} (g_n \circ f)\right] d\mu \\ &= \int_X g \circ f d\mu.\end{aligned}$$

4. Konačno, proizvoljnu funkciju g rastavimo na njen pozitivni i negativni dio, $g = g^+ - g^-$. Iskoristimo linearnost integrala i činjenicu da tvrdnja vrijedi za g^+ i g^-. Dakle, tvrdnja vrijedi i za g.

$\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Uočimo, za $f(x) = -x$, $\lambda f^{-1} = \lambda$, za $f(x) = x + y,\ y \in \mathbb{R}$ je također $\lambda f^{-1} = \lambda$. Dakle, vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(-x)\,\lambda(dx), \tag{9.4}$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x+y)\,\lambda(dx),\ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{9.5}$$

Promotrimo funkciju $f : X \to \mathbb{C}$, uočimo da je $f = \mathrm{Re}f + i \cdot \mathrm{Im}f$, također $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Očito je da je f izmjeriva ako i samo ako su $\mathrm{Re}f$ i $\mathrm{Im}f$ izmjerive. Reći ćemo da je f μ-integrabilna ako su $\mathrm{Re}f$ i $\mathrm{Im}f$ μ-integrabilne, tada je

$$\int_X f d\mu = \int_X \mathrm{Re}f d\mu + i \cdot \int_X \mathrm{Im}f d\mu.$$

Direktno iz definicije slijedi da je i ovaj integral linearan. Opet zbog definicije direktno slijedi da vrijedi teorem o monotonoj konvergenciji, također, očito je

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$

Nadalje, $\mathbb{F}$ će nam stajati za jedno od dva moguća polja koja promatramo, to su $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere i $1 \leq p < +\infty$. Definiramo:

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F}) := \{f : X \to \mathbb{F} \text{ izmjeriva} : |f|^p \text{ je } \mu\text{-integrabilna}\}.$$

Vrijedi

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right),$$

dakle,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F}) \text{ je vektorski prostor nad } \mathbb{F}. \tag{9.6}$$

Na $\mathcal{L}^p$ definiramo $\| \ \|_p : \mathcal{L}^p \to [0, +\infty\rangle$,

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9.7}$$

Uočimo da je, za $\alpha \in \mathbb{F}$, $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$, to slijedi direktno iz linearnosti integrala. Nadalje, također primijetimo da je $\|f\|_p = 0$ ako i samo ako je $f = 0$ μ-(g.s.).

Pokažimo da slična definicija vrijedi i za $p = +\infty$:

$$\mathcal{L}^{+\infty}(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F}) := \left\{ f : X \to \mathbb{F} \text{ izmjeriva} : \begin{array}{c} \exists M > 0, \ \forall A \in \mathcal{F} \text{ t.d. } \mu(A) < +\infty, \\ \mu(A \cap \{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0 \end{array} \right\}. \tag{9.8}$$

Lako se vidi (kao i prije) da je $\mathcal{L}^{+\infty}(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F})$ vektorski prostor. Definiramo $\| \ \|_{+\infty}$ kao infimum svih brojeva M koji zadovoljavaju definiciju (9.8), to je tzv. esencijalni supremum funkcije f. Uočimo da za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) < +\infty$ vrijedi

$$\mu\left(A \cap \left\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_{+\infty}\right\}\right) = 0. \tag{9.9}$$

Očito je $\| \ \|_{+\infty} : \mathcal{L}^{+\infty} \to [0, +\infty\rangle$, nadalje, kao i prije, vidimo da je, za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$, $\|\alpha f\|_{+\infty} = |\alpha| \, \|f\|_{+\infty}$. Također,

$$\|f\|_{+\infty} = 0 \iff \begin{array}{c} \forall A \in \mathcal{F} \text{ t.d. } \mu(A) < +\infty \\ \mu(A \cap \{x \in X : |f(x)| > 0\}) = 0, \end{array}$$

odnosno, $\|f\|_{+\infty} = 0$ ako i samo ako je $f = 0$ (g.s.) na svakom mjerljivom skupu.

Sada smo, za svaki $p \in [1, +\infty]$, konstruirali prostor $\mathcal{L}^p$ na kojemu nam još nedostaje nejednakost trokuta funkcije $\| \ \|_p$ da bi ona bila "skoro" norma.

Za $1 < p < +\infty$ postoji točno jedan q, $1 < q < +\infty$ takav da je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{9.10}$$

Uz dogovor da je $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, isto vrijedi i za parove $(p, q) = (1, +\infty), (+\infty, 1)$. Kažemo da su p i q **konjugirani eksponenti**.

Lema 9.11 (Youngova nejednakost.)
Ako su $1 < p, q < +\infty$ konjugirani eksponenti i $x, y \in [0, +\infty\rangle$, tada vrijedi

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Dokaz. Za $xy = 0$ tvrdnja je trivijalna. Gledamo slučaj $0 < x, y < +\infty$. Neka je $u := x^p$, $v := y^q$, $t := \dfrac{u}{v}$. Uočimo da je $t \in \langle 0, +\infty\rangle$. Promatramo funkciju

$$t \mapsto \frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{\frac{1}{p}},$$

$t = 1$ daje vrijednost 0, tvrdimo da je to minimum ove funkcije, to se lako provjeri deriviranjem. Dakle,

$$t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}, \ \forall t \in \langle 0, +\infty\rangle,$$

množeći s v dobivamo

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q} \Longleftrightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Q.E.D.

Teorem 9.12 (Hölderova nejednakost.)
Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere te $1 \leq p, q \leq +\infty$ konjugirani eksponenti. Ako je $f \in \mathcal{L}^p$ i $g \in \mathcal{L}^q$, tada je $fg \in \mathcal{L}^1$ i vrijedi:

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

Dokaz. Primijetimo najprije da je

$$\int_X |fg| \, d\mu = \|fg\|_1 .$$

Za slučaj $p = 1$, $q = +\infty$ (Te analogno obratno.) imamo $f \in \mathcal{L}^1$, $g \in \mathcal{L}^{+\infty}$. Budući da je $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ σ-konačan, slijedi (po (9.9)) da je

$$\mu\left(\left\{x \in X : f(x) \neq 0, \, |g(x)| > \|g\|_{+\infty}\right\}\right) = 0.$$

To znači, $|f(x)\, g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_{+\infty}$ μ-(g.s.). Zbog $f \in \mathcal{L}^1$ i $\|g\|_{+\infty} < +\infty$ slijedi $|f(x)\, g(x)|$, odnosno fg je iz $\mathcal{L}^1$ i vrijedi

$$\|fg\|_1 \leq \left\| f \cdot \|g\|_{+\infty} \right\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_{+\infty} ,$$

što je i trebalo pokazati. Neka je sada $1 < p, q < +\infty$. Ukoliko je $\|f\|_p = 0$ ili $\|g\|_q = 0$ onda je $f = 0$ (g.s.) ili $g = 0$ (g.s.), odnosno, svakako je $|fg| = 0$ (g.s.) pa je lijeva strana Hölderove nejednakosti jednaka 0, dakle, nejednakost vrijedi. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|f\|_p > 0$ i $\|g\|_q > 0$. Primijenimo li Youngovu nejednakost na brojeve $\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ i $\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ dobivamo

$$\frac{|f(x)\, g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q .$$

Integriranjem konačno dobivamo da je

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \cdot \int_X |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \cdot \underbrace{\int_X |f(x)|^p \, \mu(dx)}_{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\|g\|_q^q} \cdot \underbrace{\int_X |g(x)|^q \, \mu(dx)}_{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Množenjem s $\|f\|_p \cdot \|g\|_q$ dobivamo traženu nejednakost. Q.E.D.

Teorem 9.13 (Nejednakost Minkowskog.)
Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere i $1 \leq p \leq +\infty$. Ako su $f, g \in \mathcal{L}^p$, tada je $f + g \in \mathcal{L}^p$ i

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dokaz. Činjenicu da je $f + g \in \mathcal{L}^p$ smo već dokazali. Slučaj $p = 1$ je također napravljen ranije. Neka je $p = +\infty$. Neka je S_f skup svih brojeva M koji zadovoljavaju definiciju (9.8) za funkciju f, S_g isti skup za funkciju g, te S_{f+g} za funkciju $f + g$. Potrebno je pokazati da je

$$\inf S_{f+g} \leq \inf S_f + \inf S_g.$$

Primijetimo da je $\inf S_f + \inf S_g = \inf (S_f + S_g)$, gdje je

$$S_f + S_g := \{M_f + M_g : M_f \in S_f,\, M_g \in S_g\}.$$

Iz činjenice da je $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ dobivamo da je $S_{f+g} \supseteq S_f + S_g$, dakle,

$$\inf S_{f+g} \leq \inf (S_f + S_g) = \inf S_f + \inf S_g.$$

Nadalje, neka je $1 < p < +\infty$. Neka je q takav da su p i q konjugirani eksponenti. Primijetimo da je $p + q = pq \Longrightarrow (p-1) \cdot q = p$. Dakle, $\left(|f+g|^{p-1}\right)^q = |f+g|^p$. Zaključujemo da je $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$. Vrijedi

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|) \cdot |f+g|^{p-1},$$

integriranjem dobivamo

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu.$$

Primjenom Hölderove nejednakosti proizlazi

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq \|f\|_p \cdot \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left(\int_X \left|(f+g)^{p-1}\right|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= [pq - q = p] = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\frac{p}{q} = p - 1\right] = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \|f+g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Ukoliko je $\|f+g\|_p = 0$ tvrdnja trivijalno slijedi, ukoliko je $\|f+g\|_p > 0$ tvrdnja slijedi dijeljenjem s $\|f+g\|_p^{p-1}$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Dakle, za $\mathcal{L}^p$ imamo istu situaciju kao i za $\mathcal{L}^1$ (Vidi Napomenu 7.13.). Koristeći kvocijentni prostor iz Napomene 7.13 definiramo

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F}) := \left(\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F})\right)^{\sim},$$

$1 \leq p \leq +\infty$. Također, pišemo $\|f\|_p$ umjesto $\|[f]\|_p$. Slijedi,

$$\left(L^p, \|\ \|_p\right) \text{ je normiran prostor za sve } p \in [1, +\infty]. \tag{9.14}$$

10 KONVERGENCIJA

$\overline{\mathbb{R}}$ ćemo gledati kao (g.s.) $\mathbb{R}$, slučaj polja $\mathbb{C}$, kao što će se vidjeti, se lako svodi na slučaj polja $\mathbb{R}$. Nadalje, promatrat ćemo prostor mjere $(X, \mathcal{F}, \mu)$ te funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ i $f_n : X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ za koje ćemo podrazumijevati da su $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjerive.
Promatrajmo najprije slučaj konačne mjere. $(\mu(X) < +\infty)$
Iz analize znamo da uniformna konvergencija čuva dobra analitička svojstva, jer uniformna konvergencija zapravo znači da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

Promatrajmo verziju ove konvergencije tipa (g.s.), odnosno, $\exists A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$ i

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in A^c}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

Uočimo da je ovo zapravo konvergencija u

$$L^{+\infty} = L^{+\infty}(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R}).$$

Znači, $f_n, f \in L^{+\infty}$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_{+\infty} = 0$. Na isti način promatramo i L^p, za $p \in [1, +\infty\rangle$. Uočimo

$$\left(\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f\|_{+\infty} \cdot \left(\underbrace{\mu(X)}_{<+\infty}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dakle, $\|f_n - f\|_{+\infty} \to 0 \Longrightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$, specijalno

$$\lim_{n\to+\infty}|f_n(x) - f(x)| = 0,\ \forall x \in A^c.$$

Prijeđimo sada na opći slučaj mjere.
Definicija 10.1 Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema f:

(a) **u srednjem reda** p $(1 \leq p \leq +\infty)$ ako su $f_n \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}^p$ i

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_p = 0;$$

(b) **skoro (ili gotovo) svuda** (Pišemo (a.e.), (s.s.), (g.s.).) ako postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$ i

$$\lim_{n\to+\infty}|f_n(x) - f(x)| = 0,\ \forall x \in A^c;$$

(c) **po mjeri** (Pišemo $f_n \xrightarrow{\mu} f$.) ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Teorem 10.2 Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ **prostor konačne mjere** i $1 \leq p \leq +\infty$.

(a) Ako su $f_n \in \mathcal{L}^{+\infty}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}^{+\infty}$ i $\|f_n - f\|_{+\infty} \to 0$ onda su $f_n \in \mathcal{L}^p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}^p$ te

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

(b) Ako su $f_n \in \mathcal{L}^{+\infty}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}^{+\infty}$ i $\|f_n - f\|_{+\infty} \to 0$ onda

$$f_n \xrightarrow{\text{g.s.}} f.$$

(c) Ako su $f_n \in \mathcal{L}^p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}^p$ i $\|f_n - f\|_p \to 0$ onda

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

(d) Ako $f_n \xrightarrow{\text{g.s.}} f$ onda

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Dokaz.

(a) Već pokazano.

(b) Iz (9.9) i činjenice da je $\mu(X) < +\infty$ vidimo da je, za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_{+\infty}\right\}\right) = 0.$$

Nadalje, pošto je $\mathbb{N}$ prebrojiv, slijedi da postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$ i da za svaki $x \in A^c$ vrijedi

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{+\infty}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi $\|f_n - f\|_{+\infty} \to 0$, tvrdnja slijedi.

(c) Slučaj $p = +\infty$ slijedi direktno iz (b) i (d). Neka je $1 \leq p < +\infty$. Neka je $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx) &= \int_{\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}} |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx) \\
&+ \underbrace{\int_{\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}} |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx)}_{\geq 0} \\
&\geq \int_{\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}} |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx) \\
&\geq \varepsilon^p \cdot \int_{\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}} \mu(dx) \\
&= \varepsilon^p \cdot \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right).
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \leq \frac{\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx)}{\varepsilon^p} = \left(\frac{\|f_n - f\|_p}{\varepsilon}\right)^p \tag{10.3}$$

Tvrdnja slijedi direktno iz (10.3) jer $\|f_n - f\|_p \to 0$. Primijetimo da za $p \neq +\infty$ nigdje nismo koristili da je μ konačna mjera.

(d) Neka je $\varepsilon > 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$A_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}.$$

Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \Longrightarrow B_n \searrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Očito je $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \subseteq \{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$. Po pretpostavci je $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = 0$, iz toga slijedi da je $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$, a kako je $A_n \subseteq B_n$ dobivamo da je $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$, odnosno, $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Q.E.D.

Napomena 10.4

(a) Uočimo da (10.3) vrijedi za svaki prostor mjere, pa slijedi tvrdnja

$$1 \le p < +\infty,\ \|f_n - f\|_p \to 0 \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

(b) Promatramo prostor Lebesgueove mjere $([0,\,1],\,\mathcal{B}([0,\,1]),\,\lambda)$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $f_n : [0,\,1] \to \mathbb{R}$ pomoću

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{\frac{1}{p}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vidimo da $\|f_n\|_p \to 0$ za $p < +\infty$, dok je $\|f_n\|_{+\infty} = +\infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(c) Primjer iz (b) pokazuje i da obrat u Teoremu 10.2 (b) općenito ne vrijedi.

(d) Opet promatramo prostor Lebesgueove mjere $([0,\,1],\,\mathcal{B}([0,\,1]),\,\lambda)$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $f_n : [0,\,1] \to \mathbb{R}$ pomoću

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{nx}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vidimo da $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, ali $\|f_n\|_1 = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(e) $([0,\,1],\,\mathcal{B}([0,\,1]),\,\lambda)$.

$$\begin{aligned} &f_1 = \chi_{[0,\,1\rangle}, \\ &f_2 = \chi_{\left[0,\,\frac{1}{2}\right\rangle},\ f_3 = \chi_{\left[\frac{1}{2},\,1\right\rangle}, \\ &f_4 = \chi_{\left[0,\,\frac{1}{4}\right\rangle},\ f_5 = \chi_{\left[\frac{1}{4},\,\frac{2}{4}\right\rangle},\ f_6 = \chi_{\left[\frac{2}{4},\,\frac{3}{4}\right\rangle},\ f_7 = \chi_{\left[\frac{3}{4},\,1\right\rangle}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Vidimo da, za svaki $p \in [1,\,+\infty\rangle$, $\|f_n\|_p \to 0$, ali f_n ne konvergira gotovo svuda prema 0.

(f) Na prostoru mjere koji nije konačan konvergencija (g.s.) ne mora povlačiti konvergenciju po mjeri. Npr. promatrajmo $(\mathbb{R},\,\mathcal{B}(\mathbb{R}),\,\lambda)$ te funkcije (za svaki $n \in \mathbb{N}$) $f_n := \chi_{[n,\,+\infty\rangle}$. Vidimo da $f_n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$, ali ne konvergira po mjeri.

Teorem 10.5 Vrijedi na **općem prostoru mjere**. Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$, tada postoji podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takav da $f_{n_k} \xrightarrow{\text{g.s.}} f$.

Dokaz. Induktivno konstruiramo podniz. Neka je n_1 najmanji prirodan broj za koji je

$$\mu\left(\{x \in X : |f_{n_1}(x) - f(x)| > 1\}\right) \le \frac{1}{2}.$$

Takav sigurno postoji jer $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Nadalje, za $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, n_k biramo tako da bude najmanji takav za kojega vrijedi da je $n_k > n_{k-1}$ i

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Definiramo

$$A_k := \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\},$$

vrijedi

$$\mu\left(\bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=j}^{+\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j-1}}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi $\bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k \searrow \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k$, stoga je

$$\mu\left(\underbrace{\bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k}_{\in \mathcal{F}}\right) = \lim_{j \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k\right) = 0.$$

Ako $x \notin \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k$ slijedi da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da $x \notin \bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k$, za taj j vrijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq j$ slijedi

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Dakle, za svaki $x \in X \setminus \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{k=j}^{+\infty} A_k$ vrijedi da $f_{n_k}(x) \to f(x)$, odnosno $f_{n_k} \xrightarrow{\text{g.s.}} f$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 10.6 (Egorovljev teorem.)
Ako je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ **prostor konačne mjere** i $f_n \xrightarrow{\text{g.s.}} f$, tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A^c) < \varepsilon$ i f_n konvergira uniformno na A prema f.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$g_n := \sup_{j \geq n} |f_j - f|.$$

Uočimo da je g_n (g.s.) konačna te da $g_n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$, Teorem 10.2 (d) nam govori da tada i $g_n \xrightarrow{\mu} 0$. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo izabrati $n_k \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\mu\left(\left\{x \in X : g_{n_k}(x) > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Neka je $A_k := \left\{x \in X : g_{n_k}(x) \leq \frac{1}{k}\right\}$ te $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Vrijedi

$$\mu(A^c) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k^c\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k^c) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Neka je $\delta > 0$. Uzmimo $k \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je $\frac{1}{k} < \delta$. Tada, za $n \geq n_k$ vrijedi (Zbog toga što je $A \subseteq A_k$.)

$$|f_n(x) - f(x)| < g_{n_k}(x) \leq \frac{1}{k} < \delta, \ \forall x \in A.$$

Dakle, f_n konvergira uniformno prema f na A. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Teorem 10.7 Vrijedi na **općem prostoru mjere**. Neka su $f_n \in \mathcal{L}^1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}^1$ i pretpostavimo da vrijedi ili $f_n \xrightarrow{\text{g.s.}} f$ ili $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Ako postoji μ-integrabilna nenegativna funkcija g takva da je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ (g.s.) i $|f| \leq g$ (g.s.), tada

$$\|f_n - f\|_1 \to 0.$$

Dokaz. Ako $f_n \xrightarrow{\text{g.s.}} f$, onda $|f_n - f| \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$. Vrijedi $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| < 2g$ (g.s.), pa primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \Longleftrightarrow \|f_n - f\|_1 \to 0.$$

Nadalje, ako je $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i pretpostavimo da ne vrijedi da $\|f_n - f\|_1 \to 0$, tada postoji $\varepsilon > 0$ i podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $\|f_{n_k} - f\|_1 \geq \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 10.5 postoji podniz tog podniza, $\left(f_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ koji konvergira (g.s.) prema f (zato jer cijeli niz, a time i podniz konvergira po mjeri prema f). No, sada prema prvom dijelu teorema vidimo da za taj podniz vrijedi da $\left\|f_{n_{k_l}} - f\right\|_1 \to 0$, što je kontradikcija s izborom podniza f_{n_k}. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Teorem 10.8 Vrijedi na **općem prostoru mjere**. Prostor $\left(L^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R}), \| \ \|_p\right)$, $1 \leq p \leq +\infty$, je potpun. Prostor koji je normiran i potpun nazivamo **Banachov prostor**.

Dokaz. Iz opće teorije znamo da je dovoljno dokazati da je svaki apsolutno konvergentan red ujedno i konvergentan. Promotrimo najprije slučaj $p = +\infty$. Neka je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^{+\infty}$ takav da je $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_{+\infty} < +\infty$. Za $k \in \mathbb{N}$ definiramo

$$N_k := \left\{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_{+\infty}\right\}.$$

Uočimo da za $x \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ vrijedi da $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ konvergira, jer konvergira apsolutno. Neka je

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x), & x \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k, \\ 0, & x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k. \end{cases}$$

f je omeđena i izmjeriva funkcija. Uočimo da je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ lokalno zanemariv skup. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_{+\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{+\infty}.$$

Kako je desna strana ove nejednakosti ostatak konvergentnog reda zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_{+\infty} = 0.$$

Nadalje, neka je $1 \leq p < +\infty$ te neka je $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^p$ takav da je $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p < +\infty$. Definiramo $g : X \to [0, +\infty]$ pomoću

$$g(x) := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)|\right)^p,$$

uz dogovor $(+\infty)^p = +\infty$. Jasno je da je g nenegativna izmjeriva funkcija.

$$\left(\int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p,$$

pa po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\int\limits_X g d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right)^p d\mu \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_p\right)^p < +\infty.$$

Dakle, g je μ-integrabilna iz čega slijedi da je g (g.s.) konačna. Za gotovo svaki x red $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ apsolutno konvergira, a onda i konvergira. Definirajmo

$$f(x) := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right) \cdot \chi_{\{x\in X : g(x) < +\infty\}},$$

f je izmjeriva i u $\mathcal{L}^p$ je. Uočimo da je $|f|^p \leq g$. Dakle, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| \to 0$ (g.s.), zbog definicije od f. Također je $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right|^p \leq g(x)$ (g.s.). Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji nam sada daje tvrdnju. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Napomena 10.9 Isti dokaz vrijedi i za polje $\mathbb{C}$.

11 HAHNOVA DEKOMPOZICIJA

Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Reći ćemo da je funkcija $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ **potpuno aditivna** (signed measure) ako je $\nu(\emptyset) = 0$ i ako vrijedi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ međusobno disjunktni, tada je

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Reći ćemo da je ν **konačna** (potpuno aditivna) funkcija ako vrijedi $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Uzmemo li $A, B \in \mathcal{F}$ takve da je $A \cap B = \emptyset$ i stavimo $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, dobivamo

$$\nu(A) + \nu(B) = \nu(A \cup B). \tag{11.1}$$

Posebno, to znači: $\nu(A) + \nu(A^c) = \nu(X)$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Dakle, ta suma ne može biti oblika $(+\infty) + (-\infty)$ ili $(-\infty) + (+\infty)$, jer onda ta suma ne bi bila definirana. Nadalje, ako postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\nu(A) = \pm\infty$ onda mora biti i $\nu(X) = \pm\infty$ inače (11.1) ne bi vrijedilo. Zaključujemo:

$$\nu : \mathcal{F} \to \langle -\infty, +\infty] \quad \text{ili} \quad \nu : \mathcal{F} \to [-\infty, +\infty\rangle. \tag{11.2}$$

Slično, iz (11.1) slijedi

$$A, B \in \mathcal{F} \text{ i } A \subseteq B,\ \nu(B) \in \mathbb{R} \Longrightarrow \nu(A) \in \mathbb{R}. \tag{11.3}$$

Npr. ako je $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R})$ onda po Teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je

$$\nu(A) := \int_A f d\mu \tag{11.4}$$

konačna potpuno aditivna funkcija na $(X, \mathcal{F})$. Uočimo da je $f = f^+ - f^-$ pa dobijemo:

$$\nu(A) = \underbrace{\int_A f^+ d\mu}_{\nu_1(A)} - \underbrace{\int_A f^- d\mu}_{\nu_2(A)}, \tag{11.5}$$

što pokazuje da se ν može napisati kao razlika dvije konačne mjere. Uočimo da ako su ν_1 i ν_2 mjere na prostoru $(X, \mathcal{F})$ i barem jedna je konačna, tada je s

$$\nu := \nu_1 - \nu_2$$

zadana jedna potpuno aditivna funkcija. Prirodno je pitanje vrijedi li ovakva dekompozicija za svaku potpuno aditivnu funkciju. Koristeći iste dokaze kao u slučaju mjere, lako se pokaže da za potpuno aditivnu funkciju ν vrijedi:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \nearrow A \text{ niz u } \mathcal{F} \Longrightarrow \nu(A) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) \tag{11.6}$$

i

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \searrow A \text{ niz u } \mathcal{F} \text{ i } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \nu(A_{n_0}) \in \mathbb{R} \Longrightarrow \nu(A) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n). \tag{11.7}$$

Nadalje, slično se s konačne aditivnosti prelazi na potpunu aditivnost; dokaz isti kao i u slučaju mjere.

Lema 11.8 Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ konačno aditivna funkcija za koju vrijedi $\nu(\emptyset) = 0$. Ako ν zadovoljava (11.6) tada je ν potpuno aditivna funkcija. Ako ν zadovoljava (11.7) u slučaju $A = \emptyset$, tada je ν potpuno aditivna funkcija.

Neka je ν potpuno aditivna funkcija na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Reći ćemo da je $A \in \mathcal{F}$ **pozitivan skup** (za ν) ako vrijedi:

$$B \in \mathcal{F},\ B \subseteq A \Longrightarrow \nu(B) \geq 0. \tag{11.9}$$

Slično, ako za sve $B \in \mathcal{F}$ vrijedi $B \subseteq A \Longrightarrow \nu(B) \leq 0$, onda kažemo da je A **negativan skup**.

Lema 11.10 Neka je ν potpuno aditivna funkcija na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Ako je $A \in \mathcal{F}$ takav da je $-\infty < \nu(A) < 0$, tada postoji negativan skup B (za ν) takav da je ispunjeno $B \subseteq A$, $\nu(B) \leq \nu(A)$.

Dokaz. Neka je

$$\delta_1 := \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{F},\ E \subseteq A\}.$$

Familija čiji supremum promatramo je neprazna jer je $\emptyset$ njen element, kako je $\nu(\emptyset) = 0$ zaključujemo da je $\delta_1 \geq 0$. Po definiciji supremuma postoji $A_1 \in \mathcal{F}$ takav da je $A_1 \subseteq A$ i $\nu(A_1) \geq \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, 1\right\}$. Dalje induktivno definiramo

$$\delta_n := \sup\left\{\nu(E) : E \in \mathcal{F},\ E \subseteq A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)\right\}$$

i $A_n \subseteq A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)$, $\nu(A_n) \geq \min\left\{\frac{\delta_n}{2}, 1\right\}$. Naravno, u svakom koraku, za δ_n vrijedi isti razlog kao za δ_1 zbog kojega je $\delta_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Time smo dobili nizove

$$(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{i} \quad (A_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Uočimo da su $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ međusobno disjunktni. Definiramo skupove

$$A_\infty := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \text{i} \quad B := A \setminus A_\infty.$$

Vidimo da je $B \in \mathcal{F}$ i $B \subseteq A$. Pokazati ćemo da je B traženi skup. Kako je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\nu(A_n) \geq 0$ zaključujemo da je $\nu(A_\infty) \geq 0$. Znamo da je $\nu(A) = \nu(A_\infty) + \nu(B)$, kako je $\nu(A_\infty) \geq 0$ dobivamo da je $\nu(A) \geq \nu(B)$. Moramo još pokazati da je B negativan skup. Po pretpostavci imamo da je $\nu(A) \in \mathbb{R}$, a kako je $A_\infty \subseteq A$ dobivamo da je i $\nu(A_\infty) \in \mathbb{R}$. Potpuna aditivnost povlači da je $\nu(A_\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n)$. Kako je $\nu(A_\infty) \in \mathbb{R}$ vidimo da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n)$ konvergentan pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0.$$

Neka je $E \in \mathcal{F}$ takav da je $E \subseteq B = A \setminus A_\infty$. Slijedi da je $E \subseteq A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, dakle,

$$\nu(E) \leq \delta_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Konačno, slijedi da je $\nu(E) \leq 0$, odnosno, B je negativan skup. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 11.11 (Hahnova dekompozicija.)
Neka je ν potpuno aditivna funkcija na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Tada postoje $P, N \in \mathcal{F}$ takvi da je $P \cup N = X$, $P \cap N = \emptyset$, P pozitivan skup (za ν), N negativan skup (za ν). Par (P, N) s ovim svojstvima nazivamo **Hahnova dekompozicija funkcije** ν.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti promatramo $\nu : \mathcal{F} \to \langle -\infty, +\infty]$. Neka je

$$L := \inf \{\nu(A) : A \text{ je negativan skup za } \nu\},$$

$\emptyset$ je element familije čiji infimum promatramo, dakle, znamo da je $L \in \overline{\mathbb{R}}$ i da je $L \leq 0$. Stoga, postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ negativnih skupova za koje vrijedi $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \nu(A_n)$. Neka je

$$N := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n,$$

gdje je $A'_1 := A_1$, $A'_2 := A_2 \setminus A_1$, $A'_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ...
Budući da je podskup negativnog skupa i sam negativan, dobivamo da je N disjunktna prebrojiva unija negativnih skupova. Neka je $E \in \mathcal{F}$ takav da je $E \subseteq N$, tada vrijedi da je $E = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (E \cap A'_n)$ te je to disjunktna unija. Vrijedi da je $\nu(E \cap A'_n) \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog potpune aditivnosti je

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(E \cap A'_n) \Longrightarrow \nu(E) \leq 0,$$

dakle, N je negativan skup, zbog toga je $L \leq \nu(N)$. Nadalje, $\nu(N) \leq \nu(A_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pustimo li $n \to +\infty$ u poslijednjoj nejednakosti, dobivamo da je $\nu(N) \leq L$, dakle, $L = \nu(N)$. Kako je $\nu(N) \leq 0$ i $\nu : \mathcal{F} \to \langle -\infty, +\infty]$ dobivamo da je $L \in \mathbb{R}$. Neka je

$$P := N^c.$$

Potrebno je pokazati da je P pozitivan skup za ν. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq P$ i $\nu(A) < 0 \Longrightarrow -\infty < \nu(A) < 0$. Po Lemi 11.10 postoji negativan skup $B \in \mathcal{F}$ takav da je $B \subseteq A$ i $\nu(B) \leq \nu(A)$, posebno, $\nu(B) < 0$. Promotrimo skup $B \cup N$, to je negativan skup, zato jer je $B \subseteq A \Longrightarrow B \subseteq P$, a kako je $P \cap N = \emptyset$, slijedi $B \cap N = \emptyset$. Zbog definicije broja L slijedi da je

$$L \leq \nu(B \cup N) = \nu(B) + \nu(N) = \nu(B) + L,$$

kako je $L \in \mathbb{R}$ dobivamo da je $\nu(B) \geq 0$, što je kontradikcija. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Što možemo reći o jedinstvenosti? Nije jedinstvena! Evo i primjera:
Promatrajmo prostor Lebesgueove mjere $([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), \lambda)$ te definirajmo potpuno aditivnu funkciju:

$$\nu(A) := \int_A x\lambda(dx), \ \forall A \in \mathcal{B}([-1, 1]).$$

Imamo barem dvije Hahnove dekompozicije:

$$\left(\underbrace{[0, 1]}_{P}, \underbrace{[-1, 0\rangle}_{N}\right) \quad \text{i} \quad \left(\underbrace{\langle 0, 1]}_{P}, \underbrace{[-1, 0]}_{N}\right).$$

Primijetimo da se razlikuju na skupu mjere nula!

Općenito, ako su $(P_1,\, N_1)$ i $(P_2,\, N_2)$ Hahnove dekompozicije, onda su skupovi oblika $P_1 \cap N_2$, $P_2 \cap N_1$ i pozitivni i negativni, a onda im mjera mora biti nula, $\nu\left(P_1 \cap N_2\right) = \nu\left(P_2 \cap N_1\right) = 0$.

Neka je $(P,\, N)$ Hahnova dekompozicija za potpuno aditivnu funkciju ν. Definiramo $\nu^+,\, \nu^- : \mathcal{F} \to [0,\, +\infty]$ pomoću

$$\begin{aligned} \nu^+(A) &:= \nu(A \cap P)\,, \\ \nu^-(A) &:= -\nu(A \cap N)\,. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Lako se vidi da su ν^+ i ν^- mjere na $\mathcal{F}$ i barem jedna od njih je konačna. Neka je $A \in \mathcal{F}$ i promatramo $B \in \mathcal{F}$, $B \subseteq A$, vrijedi

$$\nu(B) = \nu^+(B) - \nu^-(B) \leq \nu^+(B) \leq \nu^+(A)\,,$$

poslijednja nejednakost vrijedi jer je ν^+ mjera. Kako je $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$ dobivamo (Slično za ν^-.):

$$\begin{aligned} \nu^+(A) &= \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{F},\ B \subseteq A\}\,, \\ \nu^-(A) &= \sup\{-\nu(B) : B \in \mathcal{F},\ B \subseteq A\}\,. \end{aligned} \tag{11.13}$$

(11.13) nam pokazuje da ν^+ i ν^- ne ovise o izboru Hahnove dekompozicije, dobivamo:

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \tag{11.14}$$

i to je takozvana **Jordanova dekompozicija** za ν, a ν^+, ν^- nazivamo **pozitivni, odnosno negativni dio od** ν.
OPREZ! Jordanova dekompozicija je zadana ili sa (11.12) ili sa (11.13) i jedinstvena je.

Funkciju $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ nazivamo **varijacija od** ν. Uočimo da je $|\nu|$ mjera na $(X,\, \mathcal{F})$ te da je to najmanja mjera sa svojstvom:

$$|\nu(A)| \leq |\nu|(A)\,,\ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{11.15}$$

Kada kažemo najmanja mislimo sljedeće. Neka je μ mjera na $(X,\, \mathcal{F})$ za koju vrijedi

$$|\nu(A)| \leq \mu(A)\,,\ \forall A \in \mathcal{F}, \tag{$*$}$$

tada je $\mu(A) \geq |\nu|(A)\,,\ \forall A \in \mathcal{F}$. Pokažimo to. Neka je μ mjera na $(X,\, \mathcal{F})$ za koju vrijedi $(*)$. Za $A \in \mathcal{F}$ tada vrijedi da je

$$\mu(A \cap P) \geq |\nu(A \cap P)| = \nu^+(A)\,,$$

analogno dobijemo da je

$$\mu(A \cap N) \geq \nu^-(A)\,,$$

Kako je $(A \cap P) \cap (A \cap N) = \emptyset$ i $(A \cap P) \cup (A \cap N) = A$, vrijedi

$$\mu(A) = \mu(A \cap P) + \mu(A \cap N) \geq \nu^+(A) + \nu^-(A) = |\nu|(A)\,.$$

Imamo posebnu oznaku za $|\nu|(X)$ i to je $\|\nu\|$. $\|\nu\|$ nazivamo **totalna varijacija od** ν. Uočimo da je ν konačna potpuno aditivna funkcija ako i samo ako je $\|\nu\| < +\infty$.

12 APSOLUTNA NEPREKIDNOST

Neka je $f \in \mathcal{L}^1(A, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R})$ i neka je $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana s

$$\nu(A) := \int_A f d\mu.$$

Znamo da je ν potpuno aditivna funkcija i da je

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \, d\mu.$$

Zaključujemo da $|\nu|$ (i ν) zadovoljavaju:

$$A \in \mathcal{F}, \ \mu(A) = 0 \Longrightarrow |\nu|(A) = 0. \tag{12.1}$$

Uočimo da $|\nu|(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$, također, jasno je da obrat, općenito, ne mora vrijediti. Primijetimo da ukoliko je ν mjera tada je $|\nu| = \nu$.

Definicija 12.2 Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, neka je μ mjera na $(X, \mathcal{F})$ te neka je ν potpuno aditivna funkcija na $(X, \mathcal{F})$. Reći ćemo da je ν **apsolutno neprekidna u odnosu na** μ (Pišemo $\nu \ll \mu$) ako vrijedi (12.1).

Kada je μ Lebesgueova mjera kažemo da se radi o apsolutnoj neprekidnosti, bez da navodimo mjeru. Lako se vidi

$$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \nu^-, \nu^+ \ll \mu \Longleftrightarrow |\nu| \ll \mu \tag{12.3}$$

Lema 12.4 Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Ako je ν konačna mjera na $(X, \mathcal{F})$ tada vrijedi da je $\nu \ll \mu$ ako i samo ako

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ takav da } \forall A \in \mathcal{F}, \ \mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka je $\nu \ll \mu$. Pretpostavimo suprotno, odnosno,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ takav da } \forall \delta > 0, \ \exists A_\delta \in \mathcal{F} \text{ takav da } \mu(A_\delta) < \delta \text{ i } \nu(A_\delta) \geq \varepsilon.$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ promatrajmo odgovarajući $\delta = \dfrac{1}{2^k}$, tada postoji $A_k \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A_k) < \dfrac{1}{2^k}$, a $\nu(A_k) \geq \varepsilon$. Neka je

$$A := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \Longrightarrow \mu(A) = 0.$$

S druge strane, jer je ν konačna (Specijalno, vrijedi nam neprekidnost odozgo.),

$$\nu(A) = \lim_{n \to +\infty} \nu\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \geq \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n) \geq \lim_{n \to +\infty} \varepsilon = \varepsilon > 0.$$

Kontradikcija s (12.1)! Obratno, neka

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ takav da } \forall A \in \mathcal{F}, \ \mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

Neka je $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$, primijetimo da je tada, za svaki $\delta > 0$, $\mu(A) < \delta$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ je $\nu(A) < \varepsilon$, konačno, $\nu(A) = 0$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Teorem 12.5 (Radon – Nikodym za mjere.)
Neka su μ i ν σ-konačne mjere na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Ako je $\nu \ll \mu$, tada postoji funkcija $g : X \to [0, +\infty\rangle$ koja je $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva i za svaki $A \in \mathcal{F}$ je

$$\nu(A) = \int_A g d\mu.$$

Funkcija g s navedenim svojstvima jedinstveno je određena do na μ-(g.s.).

Dokaz. Pretpostavimo najprije da teorem vrijedi u slučaju kada su mjere μ i ν konačne. Pokazati ćemo da tada vrijedi i za σ-konačne mjere. Neka je $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ niz skupova μ-konačne mjere čija je unija X te neka je $(C_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ niz skupova ν-konačne mjere čija je unija također X. Uočimo da je tada $(B_k \cap C_l)_{k,\, l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ niz skupova čija je i μ i ν mjera konačna i čija je unija jednaka X. Njih je također prebrojivo, označimo taj niz s $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Definiramo

$$A_1 = A'_1,\ A_2 = A'_2 \setminus A'_1,\ A_3 = A'_3 \setminus (A'_1 \cup A'_2),\ \ldots,$$

dobili smo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ međusobno disjunktnih skupova čija unija je X i čija je i μ i ν mjera konačna. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ promatrajmo izmjeriv prostor $(A_n, \mathcal{F} \cap A_n)$. Po pretpostavci da teorem vrijedi za konačne mjere dobivamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji funkcija $g_n : A_n \to [0, +\infty\rangle$ koja je $(\mathcal{F} \cap A_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva i za svaki $A \in \mathcal{F}$ je

$$\nu(A \cap A_n) = \int_{A\cap A_n} g_n d\mu,$$

također, g_n s navedenim svojstvima jedinstveno je određena do na μ-(g.s.) lokalno na A_n. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odgovarajuću funkciju g_n proširimo na cijeli X tako da je $g_n(x) = 0,\ \forall x \in A_n^c$. Dakle, svaka od funkcija g_n je $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva. Definiramo

$$g := \sum_{n=1}^{+\infty} g_n,$$

funkcija g je $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva jer je jednaka limesu rastućeg niza izmjerivih funkcija. Iz definicije funkcije g direktno slijedi da je

$$\int_{A\cap A_n} g_n d\mu = \int_{A\cap A_n} g d\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada, za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap A_n)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A\cap A_n} g d\mu = \int_A g d\mu.$$

Opravdajmo još posljednju jednakost. Znamo da je, za svaki $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{A\cap A_n} g d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{N} (A\cap A_n)} g d\mu.$$

Neka je, za svaki $N \in \mathbb{N}$, $g_N := g|_{\bigcup_{n=1}^{N} (A\cap A_n)}$, odmah vidimo da je $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ rastući niz nenegativnih $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjerivih funkcija koje konvergiraju u g. Prema teoremu o monotonoj

konvergenciji sada slijedi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{A\cap A_n} g d\mu = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{A\cap A_n} g d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}(A\cap A_n)} g d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{A} g_N d\mu = \int\limits_{A} g d\mu.$$

Dakle, pokazali smo da je teorem dovoljno dokazati u slučaju kada su μ i ν konačne mjere. Definiramo

$$\mathcal{H} := \left\{ f : X \to [0, +\infty] : \begin{array}{c} f \text{ je } \left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\text{-izmjeriva i} \\ \int\limits_A f d\mu \leq \nu(A), \ \forall A \in \mathcal{F} \end{array} \right\}.$$

Vidimo da je $f \equiv 0 \in \mathcal{H}$, zbog čega je $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Tvrdimo:

$$f_1, f_2 \in \mathcal{H} \Longrightarrow f_1 \vee f_2 \in \mathcal{H}. \tag{12.6}$$

Neka je

$$A_1 := \{x \in A : f_1(x) > f_2(x)\},$$
$$A_2 := \{x \in A : f_1(x) \leq f_2(x)\}$$

Vidimo da je $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$. Vrijedi

$$\int\limits_A (f_1 \vee f_2) d\mu = \int\limits_{A_1} f_1 d\mu + \int\limits_{A_2} f_2 d\mu \leq \nu(A_1) + \nu(A_2) = \nu(A).$$

Dakle, $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{H}$. Po definiciji supremuma postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ takav da je

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \sup\left\{ \int\limits_X f d\mu : f \in \mathcal{H} \right\}. \tag{12.7}$$

Neka je $h_n := f_1 \vee \ldots \vee f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Po (12.6) zaključujemo da je $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$. Stoga je $\int\limits_X h_n d\mu \leq \sup\left\{ \int\limits_X f d\mu : f \in \mathcal{H} \right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Očito je $h_n \geq f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, zato je $\int\limits_X h_n d\mu \geq \int\limits_X f_n d\mu$, dakle,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X h_n d\mu = \sup\left\{ \int\limits_X f d\mu : f \in \mathcal{H} \right\}.$$

Očito je $h_n \leq h_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je $g := \lim\limits_{n\to+\infty} h_n$, u smislu da je $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$, $\forall x \in X$. Dakle, $g : X \to [0, +\infty]$ i g je $\left(\mathcal{F}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-izmjeriva, $h_n \nearrow g$. Po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned} &\int\limits_A g d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_A h_n d\mu \leq \nu(A), \ \forall A \in \mathcal{F} \\ &\Longrightarrow g \in \mathcal{H} \text{ i } \int\limits_X g d\mu = \sup\left\{ \int\limits_X f d\mu : f \in \mathcal{H} \right\}. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Definirajmo $\nu_0(A) := \nu(A) - \int\limits_A g d\mu$. Vidimo da je ν_0 nenegativna (zbog (12.8)) potpuno aditivna funkcija, dakle, ν_0 je mjera. Tvrdimo da je $\nu_0 \equiv 0$. Pošto je ν_0 mjera dovoljno je dokazati da je $\nu_0(X) = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\nu_0(X) > 0$. Zbog $\mu(X) < +\infty$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\nu_0(X) > \varepsilon \cdot \mu(X)$. Promatramo $\nu_0 - \varepsilon\mu$. Neka je (P, N) Hahnova dekompozicija za $\nu_0 - \varepsilon\mu$. Posebno, za svaki $A \in \mathcal{F}$ je $\nu_0(A \cap P) \geq \varepsilon\mu(A \cap P)$. Zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int\limits_A g d\mu + \nu_0(A) \geq \int\limits_A g d\mu + \nu_0(A \cap P) \\ &\geq \int\limits_A g d\mu + \varepsilon\mu(A \cap P) = \int\limits_A (g + \varepsilon\chi_P)\, d\mu. \end{aligned}$$

Dakle, $g + \varepsilon\chi_P \in \mathcal{H}$. Tvrdimo da je $\mu(P) > 0$. U suprotnom bi bilo $\mu(P) = 0 \Longrightarrow \nu(P) = 0$. Uočimo da je i

$$\int\limits_P g d\mu = 0 \Longrightarrow \nu_0(P) = 0 \Longrightarrow \nu_0(X) - \varepsilon\mu(X) = (\nu_0 - \varepsilon\mu)(N) \leq 0,$$

što je kontradikcija s $\nu_0(X) > \varepsilon\mu(X)$. Dakle, $\mu(P) > 0$. Pošto je $\int\limits_X g d\mu \leq \nu(X) < +\infty$, vrijedi

$$\int\limits_X (g + \varepsilon\chi_P)\, d\mu = \int\limits_X g d\mu + \varepsilon\mu(P) > \int\limits_X g d\mu,$$

a to je kontradikcija s (12.8), jer je $g + \varepsilon\chi_P \in \mathcal{H}$. Dakle, $\nu_0 \equiv 0$, iz toga zaključujemo da je $\nu(A) = \int\limits_A g d\mu,\ \forall A \in \mathcal{F}$. Uočimo da je $g \geq 0$ i $\int\limits_X g d\mu < +\infty$ iz čega zaključujemo da je g (g.s.) konačna, u odnosu na mjeru μ. Dakle, g lako redefiniramo tako da $g : X \to [0, +\infty\rangle$. Neka su g i h takve da je $g \geq 0$, $h \geq 0$, obje su izmjerive i za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\int\limits_A g d\mu = \nu(A) = \int\limits_A h d\mu.$$

$$B := \{x \in X : g(x) > h(x)\},$$

vrijedi $(g - h)\chi_B \geq 0$.

$$\int\limits_X (g - h)\chi_B d\mu = \int\limits_B g d\mu - \int\limits_B h d\mu = 0,$$

dakle, $(g - h)\chi_B = 0$ μ-(g.s.) $\Longrightarrow \mu(B) = 0$, analogno je $\mu(\{x \in X : h(x) > g(x)\}) = 0$, dakle $h = g$ μ-(g.s.). $\mathfrak{Q.E.D.}$

Primijenimo li upravo dokazani teorem na ν^+ i ν^- dobivamo:

Korolar 12.9 (Radon – Nikodym.)
Neka je μ σ-konačna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Ako je ν konačna potpuno aditivna funkcija za koju vrijedi $\nu \ll \mu$, tada postoji $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{R})$ takva da je

$$\nu(A) = \int\limits_A g d\mu,\ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Ovakva funkcija g je μ-(g.s.) jedinstvena.

U oba slučaja (Teorem 12.5 i Korolar 12.9.) funkciju g označavamo s $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ i zovemo **Radon – Nikodymova derivacija od ν u odnosu na μ.**

Definicija 12.10 Neka su μ i ν mjere na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Reći ćemo da su μ i ν (**međusobno**) **singularne** (Pišemo $\mu \perp \nu$.) ako postoji particija $\{E, E^c\} \subseteq \mathcal{F}$ skupa X takva da je $\mu(E) = 0$ i $\nu(E^c) = 0$.

Teorem 12.11 (Lebesgueova dekompozicija.)
Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Ako je ν σ-konačna mjera na $(X, \mathcal{F})$. Tada postoje i jedinstvene su mjere ν_a i ν_s na $(X, \mathcal{F})$ takve da je

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu.$$

ν_a nazivamo apsolutno neprekidni dio, a ν_s singularni dio mjere ν, u odnosu na mjeru μ.

Dokaz. Kao i u dokazu Radon – Nikodymovog teorema za mjere pokazujemo da je dovoljno tvrdnju dokazati u slučaju kada je ν konačna mjera. Definiramo

$$\mathcal{N}_\mu := \{B \in \mathcal{F} : \mu(B) = 0\}.$$

Po definiciji supremuma postoji niz $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}_\mu$ takav da je

$$\lim_{k\to+\infty} \nu(B_k) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Neka je

$$N := \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \Longrightarrow \mu(N) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\mu(B_k)}_{=0} = 0 \Longrightarrow N \in \mathcal{N}_\mu.$$

Definiramo ν_s pomoću $\nu_s(A) := \nu(A \cap N)$, $A \in \mathcal{F}$. Vidimo da je ν_s mjera i da je $\nu_s \perp \mu$. Definiramo ν_a pomoću

$$\nu_a(A) := \nu(A \cap N^c), \ A \in \mathcal{F}.$$

Vidimo da je $\nu = \nu_a + \nu_s$. Neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(B) = 0$, neka je $B' := B \cap N^c$. Pretpostavimo da je $\nu(B') > 0$ tada je

$$\nu(N \cup B') = \nu(N) + \nu(B') > \nu(N) \geq \nu(B_k), \ \forall k \in \mathbb{N},$$

dakle,

$$N \cup B' \in \mathcal{N}_\mu \quad \text{i} \quad \nu(N \cup B') > \sup\{\nu(C) : C \in \mathcal{N}_\mu\},$$

što je očita kontradikcija. Zaključujemo da je $\nu(B') = 0$, odnosno $\nu_a(B) = 0$, konačno, $\nu_a \ll \mu$. Preostaje još dokazati jedinstvenost. Neka je $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu_a' + \nu_s'$. Zbog konačnosti mjere dobivamo da je

$$\nu_a - \nu_a' = \nu_s - \nu_s' \quad \text{i} \quad (\nu_a - \nu_a') \ll \mu, \quad (\nu_s - \nu_s') \perp \mu,$$

iz čega zaključujemo da je $\nu_a - \nu_a' = 0$ i $\nu_s - \nu_s' = 0$. $\mathfrak{Q.E.D.}$