GRUPE

Ivan Krijan

11. 05. 2016.

*Za **domaću zadaću** riješite barem 4 od ponuđenih 9 zadataka. Rok predaje je na predavanju 25.05.2016.*

Grupa G je neprazan skup snabdjeven binarnom operacijom $\cdot$ koja zadovoljava:

- (asocijativnost) $x(yz) = (xy)z$, za sve $x, y, z \in G$,
- (jedinica) postoji $e \in G$ takav da je $ex = xe = x$, za sve $x \in G$,
- (inverz) za svaki $x \in G$ postoji $x^{-1} \in G$ takav da je $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Napomena.

- Jedinica u grupi je jedinstvena, također, za dani $x \in G$, njegov inverz x^{-1} je jedinstven.
- Grupu koja je komutativna, tj. $xy = yx$, za sve x, $y \in G$, nazivamo **Abelova** grupa. Abelove grupe ćemo najčešće zapisivati aditivno, tj. binarna operacija će biti $+$.
- Ako je grupa G konačna (a takva će uglavnom i biti), broj njezinih elemenata nazivamo **red** grupe.
- **Red** elementa $x \in G$ je najmanji prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^n = e$. Ako je grupa konačna, onda svaki element ima konačan red. Štoviše, ako je red grupe jednak N, onda je $x^N = e$, za sve $x \in G$. Dakle, u konačnim grupama vrijedi da red svakog elementa dijeli red grupe.
- Podgrupa grupe G je podskup skupa G koji je grupa uz operacije naslijeđene iz grupe G. Oznaka je $H \leq G$. Jasno je da presjek proizvoljne familije podgrupa neke grupe opet podgrupa. Za podskup $S \subseteq G$ sa $\langle S \rangle$ označavamo podgrupu **generiranu** skupom S. To je naprosto presjek svih podgrupa grupe G koje sadrže skup S. Ukoliko postoji konačan skup $S \subseteq G$ takav da je $\langle S \rangle = G$, onda kažemo da je grupa G **konačno generirana**. Ukoliko je taj konačni skup S jednočlan, onda je grupa **ciklička**. Primjer cikličke grupe je naprosto skup cijelih brojeva. Njegovi generatori su 1 ili -1. To su i jedini generatori. Zašto?

Primjer 1. Neka je S neprazan skup i neka je $*$ binarna operacija na S. Ako je $(a * b) * a = b$, za sve $a, b \in S$, dokažite da je $a * (b * a) = b$, za sve $a, b \in S$.
Primjer 2. Neka je G neprazan skup snabdjeven binarnom operacijom $\cdot$ koja je asocijativna i dopušta kraćenje slijeva, tj. ako je $xy = xz$, onda je $y = z$. Ako postoji $a \in G$ takav da je $x^3 = axa$, za sve $x \in G$ dokažite da je $(G, \cdot)$ Abelova grupa.
Primjer 3. Neka je $(G, \cdot)$ grupa s jedinicom e. Ako su $a, b \in G$ takvi da je $a^3 = e$, $ab^2 = ba^2$ i $(a^2b)^{2015} = e$, dokažite da je $a = b$.
Primjer 4. Neka je $p > 2$ prost broj. Dokažite da $p \mid F_{2p(p^2-1)}$, gdje je F_n n-ti Fibonaccijev broj.
Primjer 5. Neka je Γ konačna multiplikativna grupa kvadratnih matrica s kompleksnim elementima, neka je M suma svih matrica iz Γ, dokažite da je $\det M$ cijeli broj.

Teorem. Netrivijalna podgrupa aditivne grupe realnih brojeva je ili ciklička ili je gusta u skupu realnih brojeva.

Primjer 6. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(x) = f(x+\sqrt{2}) = f(x+\sqrt{3})$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da je f konstanta.
Primjer 7. Dan je pravokutnik. U jednom koraku ga smijemo prerezati paralelno jednoj od njegovih stranica i to tako da dobijemo ili polovinu ili trećinu početnog pravokutnika. Dokažite

da, za proizvoljni $\varepsilon > 0$, nakon konačno mnogo koraka možemo postići da se omjer stranica pravokutnika nalazi u intervalu $\langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon\rangle$, tj. možemo doći po volji blizu kvadrata.

Definicija. Neka je G konačna grupa i X neprazan skup. Kažemo da grupa G **djeluje** na skup X ako postoji preslikavanje $G \times X \to X$, $(g, x) \to gx$ koje zadovoljava:

1. $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$, za sve $g_1, g_2 \in G$ i za sve $x \in X$.
2. $ex = x$, za sve $x \in X$.

Primijetimo da djelovanje grupe na skupu X inducira permutacije na skupu X. Zaista, za svaki $g \in G$ možemo definirati $\sigma_g : X \to X$, $\sigma_g(x) = gx$, lako se vidi da je to preslikavanje bijekcija. Uvedimo još neke pojmove, pri tome, neka su nam G i X konačni.

- **orbita** elementa $x \in X$ je $\mathrm{Orb}(x) = \{gx : g \in G\} \subseteq X$
- **stabilizator** elementa $x \in X$ je $\mathrm{Stab}(x) = G_x = \{g \in G : gx = x\} \subseteq G$
- skup **invarijanti** elementa $g \in G$ je $X^g = \{x \in X : gx = x\} \subseteq X$

Burnsideova lema. Vrijedi da je: $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} |X^g|$. Ovdje je X/G skup orbita.

Teorem o stabilizatoru i orbiti. Vrijedi da je: $|\mathrm{Orb}(x)| \cdot |\mathrm{Stab}(x)| = |G|$.

Primjer 8. Koristeći teorem o orbiti i stabilizatoru dokažite **Cauchyjevu lemu**: Neka je G konačna grupa i p prost broj koji dijeli red grupe G. Tada G ima element reda p.

Primjer 9. Odredite broj bojanja ploče $2k \times 2k$ u n boja pri čemu identičnima smatramo bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče.

Primjer 10. Prostor E^3 podijeljen je na jedinične kockice i uveden je koordinatni sustav na standardni način. Bojamo kockice u n boja, tako da:

- Kockice (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) su obojane istom bojom ako:
  1. $x_i \equiv y_i \pmod 2$, za $i = 1, 2, 3$ ili
  2. $x_i \equiv y_i + 1 \pmod 2$, za $i = 1, 2, 3$.
- Bojanja smatramo istima ako se jedno iz drugoga može dobiti translacijom.

Odredite broj bojanja prostora.

Zadatak 1. Dokažite ili opovrgnite: Ako je F konačan skup s barem 2 elementa, onda na F postoji binarna operacija $*$ takva da, za sve $x, y, z \in F$ vrijedi:

- $x * z = y * z \Longrightarrow x = y$,
- $x * (y * z) \neq (x * y) * z$.

Zadatak 2. Neka su r, s, t u parovima relativno prosti prirodni brojevi. Neka je G Abelova grupa s jedinicom e, ako su $a, b \in G$ takvi da je $a^r = b^s = (ab)^t = e$, dokažite da je $a = b = e$.

Zadatak 3. Vrijedi li tvrdnja prethodnog zadatka za proizvoljnu grupu G?

Zadatak 4. Neka je G grupa s jedinicom e te neka su $a, b \in G$ i n prirodan broj. Ako je $(aba^{-1})^n = e$, dokažite da je $b^n = e$.

Zadatak 5. Neka je G grupa koja ne sadrži element reda 2, ako je $(xy)^2 = (yx)^2$, za sve $x, y \in G$ dokažite da je grupa G Abelova.

Zadatak 6. Dokažite da beskonačno mnogo potencija broja 2 počinje znamenkom 7.

Zadatak 7. Dokažite da je skup $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ gust u intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Zadatak 8. Odredite broj bojanja ploče $(2k+1) \times (2k+1)$ u n boja pri čemu identičnima smatramo bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče.

Zadatak 9. Svako od 9 polja 3×3 ploče želimo obojati nekom od n boja. Odredite ukupan broj bojanja ako identičnima smatramo bojanja koja se mogu dobiti permutacijom redaka i permutacijom stupaca.