MATEMATIČKA ANALIZA NA NATJECANJIMA

Ivan Krijan

16. 03. 2016.

Teorem (Stolz-Cesáro). Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dva niza realnih brojeva. Pretpostavimo da je niz $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo rastući i neograničen. Ukoliko postoji limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},$$

tada postoji i limes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ i oni su jednaki.

Zadaci

*Za **domaću zadaću** riješite **barem 5** zadataka (od onih koje nismo već riješili).*
***Rok** predaje je na predavanju 30.03.2016.*

1. Izračunajte limes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

2. Neka su $1 \le \alpha < \beta$ realni brojevi, dokažite da postoje prirodni brojevi $m, n > 1$ takvi da je $\alpha < \sqrt[n]{m} < \beta$.

3. Niz realnih brojeva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je rekurzivno s
$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \operatorname{arc\,tg}(x_n), \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$
Pokažite da postoji i izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2$.

4. Ispitajte konvergenciju niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je
$$x_1 \in \langle 0, 2\rangle \qquad \text{i} \qquad x_{n+1} = 1+\sqrt{2x_n - x_n^2}, \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

5. Ispitajte konvergenciju niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je
$$x_n > 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{2}\left(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \frac{x_n+1}{x_n-1}, \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

6. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da je $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n) = L \in \mathbb{R}$, dokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

7. (a) Dokažite da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, za svaki $a > 0$.

   (b) Neka su m i k prirodni brojevi te $a_1, \ldots, a_k$ i $b_1, \ldots, b_m$ pozitivni realni brojevi takvi da je
$$\sqrt[n]{a_1} + \ldots + \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{b_1} + \ldots + \sqrt[n]{b_m},$$
   za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $k = m$ i $a_1 \cdots a_k = b_1 \cdots b_m$.

8. Neka je $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Konvergira li niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

9. Neka su a_0, b_0, c_0 realni brojevi, definiramo nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekurzivno:
$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \qquad c_n = \frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2},$$
za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da dani nizovi konvergiraju i odredite im limese.

10. Neka su x_0 i a pozitivni realni brojevi. Definiramo $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$, za $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i odredite mu limes.

11. Neka su $0 < a < b$ realni brojevi, definiramo nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kao $a_1 = a$, $b_1 = b$ i

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da su konvergentni i da su im limesi jednaki.

12. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, odredite (pozitivna, realna) rješenja jednadžbe

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}} = x,$$

gdje se korijen pojavljuje n puta.

13. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$. Dokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

14. Neka je $p \neq 1$ realan broj. Odredite (ako postoji) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$.

15. Neka je $0 < x_0 < 1$ i $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, za $n \geq 0$. Izračunajte (ako postoji) $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

16. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da postoji limes $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(n+x)dx$. Postoji li limes $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)dx$ i ako da, koliko on iznosi?

17. Neka je $f : [a,b] \to [a,b]$ rastuća funkcija. Dokažite da postoji $c \in [a,b]$ takav da je $f(c) = c$.

18. Neka su $9 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ svi prirodni brojevi koji u svom decimalnom zapisu sadrže barem jednu znamenku 9. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}.$$

19. (a) Postoje li padajući nizovi nenegativnih realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} < \infty?$$

(b) Mijenja li se odgovor na pitanje iz (a) ako pretpostavimo da je $b_n = \frac{1}{n}$, za sve $n \in \mathbb{N}$?

20. Neka je $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$, za $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \ldots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1, \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$