LINEARNA ALGEBRA U KOMBINATORICI

Ivan Krijan

17. 03. 2017.

*Za **domaću zadaću** riješite barem 5 zadatka od onih koji nisu riješeni na predavanju. Rok za predaju je 31.03.2017.*

1. Neka je S skup te $M = (m_{ij})$ matrica dimenzije $n \times n$ s elementima iz S takva da su u svakom retku i svakom stupcu svi elementi različiti. Ako je $\mathbb{F}$ polje s više od n elemenata, dokažite da postoji funkcija $f : S \to \mathbb{F}$ takva da je

$$\det f(M) \neq 0,$$

pri čemu je $f(M) = (f(m_{ij}))$.

2. Neka je u krug raspoređeno $n \geq 3$ realnih brojeva tako da za svaka tri uzastopna vrijedi da je jedan od njih jednak aritmetičkoj sredini preostala dva. Dokažite da su ili svi brojevi međusobno jednaki ili je n djeljiv s 3.

3. Dan je prirodan broj n i n-člani skup S. Neka je

$$\mathcal{A} = \{A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n\}$$

familija koja se sastoji od n međusobno različitih podskupova skupa S. Dokažite da postoji $x \in S$ takav da su svi skupovi

$$A_1 \cup \{x\},\ A_2 \cup \{x\},\ \ldots,\ A_n \cup \{x\}$$

međusobno različiti.

4. Neka je S_n skup svih permutacija brojeva $1, 2, \ldots, n$. Za $\sigma \in S_n$ neka je $I(\sigma) = 1$ ako je σ parna permutacija, a $I(\sigma) = -1$ ako je σ neparna permutacija. Neka je $f(\sigma)$ broj fiksnih točaka od σ. Dokažite da vrijedi:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{I(\sigma)}{f(\sigma) + 1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$

5. Studenti u grupama od po barem dvoje odlaze po sladoled. Nakon što je $k > 1$ grupa otišlo, svaka dva studenta su otišla zajedno točno jednom. Dokažite da je broj studenata najviše jednak k.

6. (Fisherova nejednakost) Neka su $A_1, \ldots, A_m$ različiti podskupovi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pretpostavimo da postoji cijeli broj $1 \leq \lambda \leq n$ takav da je $|A_i \cap A_j| = \lambda$, za sve $i \neq j$. Tada je $m \leq n$.

7. Neka je G konačan i jednostavan graf kojem je svaki vrh obojen u bijelo. U svakom koraku dozvoljeno je odabrati vrh i promjeniti boju (bijelo u crno ili crno u bijelo) tom vrhu i svim njegovim susjedima. Dokažite da je moguće postići da su svi vrhovi crni.

8. U senatu je 2017 senatora. Svaki senator ima neprijatelje unutar senata. Dokažite da postoji neprazan podskup K skupa svih senatora takav da svaki senator u senatu ima paran broj neprijatelja u skupu K.

9. Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $k \leq n - 1$. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ neprazni podskupovi skupa S. Dokažite da je moguće obojiti neke elemente od S u dvije boje, crvenu i plavu, tako da vrijede sljedeći uvjeti:

(a) Svaki element od S je neobojen ili je obojen u crveno ili plavo.

(b) Barem jedan element skupa S je obojen.

(c) Svaki skup A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ je ili čitav neobojen ili je barem jedan element obojen crveno i barem jedan element obojen plavo.

10. Postoji li konfiguracija od 22 različite kružnice i 22 različite točke u ravnini takve da svaka kružnica sadrži barem 7 točaka i svaka točka pripada barem 7 kružnica?

11. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ različiti podskupovi od $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da je $|A_i \cap A_j|$ paran broj za sve $i \neq j$.

    (a) Ako je $|A_i|$ paran broj za sve i, koliko najviše može biti m, u odnosu na n?

    (b) Ako je $|A_i|$ neparan broj za sve i, isto pitanje?

12. Odredite najmanji prirodni broj n sa svojstvom: *Ako su x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 realni brojevi takvi da postoji n različitih odabira cijelih brojeva $1 \leq p < q < r \leq 5$ takvih da je $x_p + x_q + x_r = 0$, onda je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.*

13. (Gallaijev teorem) Skup vrhova svakog jednostavnog grafa se može particionirati u dva skupa (ne nužno neprazna) tako da svaki skup vrhova inducira podgraf u kojemu su svi vrhovi parnog stupnja. Dokažite.

14. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ realni brojevi takvi da, za svaki $1 \leq i \leq 2n+1$, možemo maknuti a_i te ostalih $2n$ brojeva podijeliti u dvije grupe od n brojeva čija je suma jednaka. Dokažite da je $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n+1}$.

15. Dokažite: ako su svi kostupnjevi (kostupanj para vrhova je broj vrhova koji su incidentni s oba vrha) jednostavnog grafa s n vrhova neparni, onda je n neparan.

16. Na tulumu se nalazi $2n$ ljudi. Svaka osoba ima paran broj prijatelja (prijateljstvo smatramo simetričnom relacijom). Dokažite da postoje dvije osobe koje imaju paran broj zajedničkih prijatelja na tulumu.

17. Za skup T kažemo da je paran ako ima paran broj elemenata. Neka je n paran prirodan broj i neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ parni podskupovi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažite da postoje neki $i \neq j$ takvi da je $|S_i \cap S_j|$ paran broj.

18. Imamo n novčića nepoznatih masa i ravnotežnu vagu s dvije zdjelice. Smijemo staviti nekoliko novčića na jednu zdjelicu i isti broj novčića na drugu. Ono što možemo nakon toga očitati na vagi je koja je zdjelica teža ili su pak jednake. Pokažite da je potrebno barem $n-1$ takvih vaganja da bismo mogli zaključiti da su svi novčići jednake mase.

19. Na matematičkoj konferenciji, svaka dva matematičara su ili prijatelji ili stranci. U vrijeme ručka, svaki matematičar ruča u jednoj od dvije velike menze. Svaki matematičar inzistira na tome da ruča u menzi u kojoj se nalazi paran broj njegovih prijatelja. Dokažite da je broj načina na koje se matematičare može rasporediti u dvije menze potencija broja 2.

20. Pretpostavimo da imamo tablicu $m \times n$ realnih brojeva takvu da je suma svakog retka i suma svakog stupca cijeli broj. Dokažite da je moguće zaokružiti na više ili na manje (dakle, napraviti $\lceil \cdot \rceil$ ili $\lfloor \cdot \rfloor$) svaki koeficijent tako da sume ostanu jednake.

21. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ neprazni podskupovi od $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažite da postoje neprazni i disjunktni $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n+1\}$ takvi da je

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in J} A_k.$$

22. Na natjecanju s n zadataka je sudjelovalo m natjecatelja. Svaki zadatak je vrijedio određen (prirodan) broj bodova i nisu se mogli dobiti parcijalni bodovi. Nakon što su svi radovi bodovani, ispostavilo se da bi se mijenjanjem bodova na zadacima mogao postići bilo koji (striktan) redoslijed natjecatelja. Koliko najviše može iznosti broj m, u odnosu na n?

23. Svako polje $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ ploče sadrži 1 ili -1. Takav raspored bojeva nazivamo *uspješnim* ako je svaki broj jednak umnošku svojih susjeda (polja koja s tim poljem imaju zajedničku stranicu). Odredite broj uspješnih rasporeda brojeva.

24. Neka je $B \subseteq \mathbb{Z}_3^n$ sa svojstvom da za svaka dva različita elementa iz B, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, postoji $1 \leq i \leq n$ takav da je $a_i = b_i + 1$ (u $\mathbb{Z}_3$). Dokažite da je $|B| \leq 2^n$.