(LINEARNA) ALGEBRA U KOMBINATORICI

Ivan Krijan
zadatke izabrao Matija Bašić
21. 05. 2015.

*Za **domaću zadaću** riješite 4 zadatka od onih koji nisu riješeni na predavanju, neka bude barem jedan iz svakog od područja. Rok predaje je na predavanju 03.06.2015.*

Linearna algebra

1. Neka je S skup te $M = (m_{ij})$ matrica dimenzije $n \times n$ s elementima iz S takva da su u svakom retku i svakom stupcu svi elementi različiti. Ako je $\mathbb{F}$ polje s više od n elemenata, dokažite da postoji funkcija $f : S \to \mathbb{F}$ takva da je
$$\det f(M) \neq 0,$$
pri čemu je $f(M) = (f(m_{ij}))$.

2. Dan je prirodan broj n i n-člani skup S. Neka je
$$\mathcal{A} = \{A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n\}$$
familija koja se sastoji od n međusobno različitih podskupova skupa S. Dokažite da postoji $x \in S$ takav da su svi skupovi
$$A_1 \cup \{x\},\ A_2 \cup \{x\},\ \ldots,\ A_n \cup \{x\}$$
međusobno različiti.

3. Neka je S_n skup svih permutacija brojeva $1, 2, \ldots, n$. Za $\sigma \in S_n$ neka je $I(\sigma) = 1$ ako je σ parna permutacija, a $I(\sigma) = -1$ ako je σ neparna permutacija. Neka je $f(\sigma)$ broj fiksnih točaka od σ. Dokažite da vrijedi:
$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{I(\sigma)}{f(\sigma) + 1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$

4. Studenti u grupama od po barem dvoje odlaze po sladoled. Nakon što je $k > 1$ grupa otišlo, svaka dva studenta su otišla zajedno točno jednom. Dokažite da je broj studenata najviše jednak k.

5. Neka je G konačan i jednostavan graf kojem je svaki vrh obojen u bijelo. U svakom koraku dozvoljeno je odabrati vrh i promjeniti boju (bijelo u crno ili crno u bijelo) tom vrhu i svim njegovim susjedima. Dokažite da je moguće postići da su svi vrhovi crni.

6. U senatu je 2015 senatora. Svaki senator ima neprijatelje unutar senata. Dokažite da postoji neprazan podskup K skupa svih senatora takav da svaki senator u senatu ima paran broj neprijatelja u skupu K.

7. Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $k \leq n - 1$. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ neprazni podskupovi skupa S. Dokažite da je moguće obojiti neke elemente od S u dvije boje, crvenu i plavu, tako da vrijede sljedeći uvjeti:
   (a) Svaki element od S je neobojen ili je obojen u crveno ili plavo.
   (b) Barem jedan element skupa S je obojen.
   (c) Svaki skup A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ je ili čitav neobojen ili je barem jedan element obojen crveno i barem jedan element obojen plavo.

8. Neka je B skup svih uređenih n-torki cijelih brojeva takvih da za svaka dva različita elementa $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da vrijedi $a_i \equiv b_i + 1 \pmod 3$. Dokažite da je $|B| \leq 2^n$. (Uputa: Promotrite funkcije $f_b : \mathbb{Z}_3^n \to \mathbb{Z}_3$ definirane s $f_b(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n (x_i - b_i - 1)$, za svaki $b \in B$.)

9. Postoji li konfiguracija od 22 različite kružnice i 22 različite točke u ravnini takve da svaka kružnica sadrži barem 7 točaka i svaka točka pripada barem 7 kružnica?

Algebra

Definicija. Neka je G konačna grupa i X neprazan skup. Kažemo da grupa G **djeluje** na skup X ako postoji preslikavanje $G \times X \to X$, $(g, x) \to gx$ koje zadovoljava:

1. $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$, za sve $g_1, g_2 \in G$ i za sve $x \in X$.

2. $ex = x$, za sve $x \in X$.

Primijetimo da djelovanje grupe na skupu X inducira permutacije na skupu X. Zaista, za svaki $g \in G$ možemo definirati $\sigma_g : X \to X$, $\sigma_g(x) = gx$, lako se vidi da je to preslikavanje bijekcija. Uvedimo još neke pojmove, pri tome, neka su nam G i X konačni.

- **orbita** elementa $x \in X$ je $\mathrm{Orb}(x) = \{gx : g \in G\} \subseteq X$
- **stabilizator** elementa $x \in X$ je $\mathrm{Stab}(x) = G_x = \{g \in G : gx = x\} \subseteq G$
- skup **invarijanti** elementa $g \in G$ je $X^g = \{x \in X : gx = x\} \subseteq X$

Burnsideova lema. Vrijedi da je: $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} |X^g|$. Ovdje je X/G skup orbita.

Teorem o stabilizatoru i orbiti. Vrijedi da je: $\mathrm{Orb}(x) \cdot \mathrm{Stab}(x) = |G|$.

1. Odredite broj načina da obojimo vrhove jednakostraničnog trokuta u n boja pri čemu bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom smatramo identičnima.

2. Odredite broj različitih ogrlica sastavljenih od k perli u n boja. Ogrlice smatramo identičnima ako se mogu dobiti rotacijom.

3. Odredite broj bojanja ploče $2k \times 2k$ u n boja pri čemu identičnima smatramo bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče.

4. Koristeći teorem o orbiti i stabilizatoru dokažite **Cauchyjevu lemu**: Neka je G konačna grupa i p prost broj koji dijeli red grupe G. Tada G ima element reda p.

5. Odredite broj načina da obojimo vrhove pravilnog peterokuta u n boja pri čemu bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom smatramo identičnima.

6. Odredite broj načina da obojimo vrhove kocke u n boja pri čemu bojanja koja se mogu dobiti rotacijom kocke smatramo identičnima. (Uputa: Najprije pokažite da je grupa rotacija kocke izomorfna grupi permutacija S_4.)

7. Odredite broj bojanja ploče $(2k+1) \times (2k+1)$ u n boja pri čemu identičnima smatramo bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče.

8. Svako od 9 polja 3×3 ploče želimo obojati nekom od n boja. Odredite ukupan broj bojanja ako identičnima smatramo bojanja koaj se mogu dobiti permutacijom redaka i permutacijom stupaca.

9. Na ploči 8×8 svako polje je obojeno crno ili bijelo tako da svaki red i svaki stupac imaju paran broj crnih poja. Dva bojanja smatramo identičnima ako se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče. Odredite broj različitih bojanja.

10. Klasificirajte sve grupe reda 1225.