

LINEARNA ALGEBRA

Ivan Krijan

20. 04. 2018.

Cilj ovog izlaganja je pokazati studentima neke “trikove” koje do sada možda nisu vidjeli, a i ako jesu, uvijek je korisno utvrditi znanje. Koncentrirati ćemo se na najosnovnije tvrdnje u linearnoj algebri koje svaki natjecatelj (točnije, svaki student matematike) **mora** znati. Prepostavlja se poznavanje pojmoveva kao što su:

- **polje** (npr. \mathbb{Q} ili \mathbb{R}) i **algebarski zatvoreno polje** (npr. \mathbb{C}),
- **konačnodimenzionalni vektorski prostor, vektor, skalar, baza, linearni operator**
- **matrica** (regularna, singularna), **trag, determinanta, jezgra, slika,**
- prostori $GL(n, \mathbb{K})$ i $SL(n, \mathbb{K})$.

Najprije ćemo navesti najosnovnija svojstva (definicije, teoreme, leme, propozicije, …), a zatim ćemo pokazati neke trikove za rješavanje zadataka. To i je cilj ovog izlaganja, dokaze svega ovdje navedenog ste ili već čuli na nekom kolegiju ili ćete tek čuti, tako da se time nećemo ovdje zamarati.

Definicije. Neka je V konačnodimenzionalni (dimenzije n) vektorski prostor nad poljem \mathbb{K} te neka je $A \in L(V)$, tj. A je linearni operator $V \rightarrow V$. Također, s A ćemo označavati i matricu danog linearog operatora u nekoj (fiksnoj) bazi prostora V . Odabir te baze je ovdje nebitan. Zašto?

- **svojstvena vrijednost** operatora A je svaki $\lambda \in \mathbb{K}$ takav da postoji $0 \neq v \in V$ takav da je $Av = \lambda v$. Ekvivalentno to možemo zapisati kao $(A - \lambda I)v = 0$, kako je $v \neq 0$, to znači da je $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$, odnosno da operator $A - \lambda I$ nije regularan, konačno, to znači da je $\det(A - \lambda I) = 0$.
- **spektar** operatora A je skup svih svojstvenih vrijednosti:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}\} = \{\lambda \in \mathbb{K} : \det(A - \lambda I) = 0\},$$

jasno je da je taj skup konačan, točnije, broj njegovih elemenata je $\leq n$, zašto?

- **svojstveni vektor** operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ je svaki ne-nul vektor iz skupa

$$V_\lambda(A) = \{v \in V : Av = \lambda v\} = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

kojeg nazivamo **svojstveni potprostor** operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ . Dimenziju tog potprostora nazivamo **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ .

- **karakteristični polinom** operatora A se definira kao $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, to je polinom stupnja $n = \dim V$ s koeficijentima iz \mathbb{K} . Skup svih njegovih nultočaka (u $\mathbb{K}!$) je upravo $\sigma(A)$. Kratnost nultočke $\lambda \in \mathbb{K}$ polinoma k_A nazivamo **algebarska kratnost** svojstvene vrijednosti λ .
- za svaki polinom $p \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ definiran je linearni operator $p(A) : V \rightarrow V$, $p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$. Kažemo da polinom p **poništava** operator A ako je $p(A) = 0$ (ovdje nam je 0 zapravo $n \times n$ nul-matrica).
- operator (matrica) A je **dijagonalizabilan** ako postoji regularna matrica S i dijagonalna matrica D takva da je $A = S^{-1}DS$. Ovo zapravo znači da postoji neka baza prostora V u kojoj je zapis linearog operatora A dijagonalna matrica. Za svake dvije matrice A i B za koje postoji regularna matrica S takva da je $B = S^{-1}AS$ kažemo da su **slične**.

Svojstva. Kao i prije, V nam je konačnodimenzionalni vektorski prostor (KDVP) nad poljem \mathbb{K} , dimenzije n . Neka su $A, B \in L(V)$ i $S \in \text{GL}(V)$.

- Matrica A je ili regularna ili postoje $C, D \in L(V) \setminus \{0\}$ takvi da je $AC = DA = 0$.
- Ako je $AB = I$, onda je i $BA = I$.
- **Teorem o rangu i defektu.** Vrijedi: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = n$.
- **Trag je invarijanta sličnosti.** Uvijek vrijedi: $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, posebno je

$$\text{Tr}(S^{-1}AS) = \text{Tr}(SS^{-1}A) = \text{Tr}(A).$$

- **Teorem Binet-Cauchy.** Vrijedi: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- **Determinanta i karakteristični polinom su invarijante sličnosti.** Ovo slijedi direktno iz prethodnog teorema; $\det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(A)$ te

$$\det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}IS) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(A - \lambda I).$$

- **Teorem Hamilton-Cayley.** Karakteristični polinom operatora A , k_A , poništava operator A , tj. $k_A(A) = 0$. Valja napomenuti da dokaz ovog teorema nije očit te da sljedeće **NIJE** valjan dokaz: $k_A(A) = \det(A - AI) = \det(0) = 0$, zašto?
- operator (matrica) A je nilpotentan ako postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $A^N = 0$, ako takav N postoji, onda je $N \leq n$.
- Definiramo **minimalni polinom** operatora A , u označi m_A . To je normirani (vodeći koeficijent je 1) polinom nad \mathbb{K} najmanjeg stupnja koji poništava operator A . Jasno je da za svaki operator taj polinom postoji te da je on jedinstveno određen operatom (obratno ne vrijedi!).
 - polinomi k_A i m_A imaju jednake normirane ireducibilne faktore, eventualno se pojavljuju različit broj puta, posebno vrijedi: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : m_A(\lambda) = 0\}$,
 - polinom $p \in \mathbb{K}[x]$ poništava operator A ako i samo ako $m_A \mid p$.
- Za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi da je geometrijska kratnost \leq algebarska kratnost.
- Prepostavimo da se sve nultočke polinoma k_A nalaze u \mathbb{K} , što vrijedi uvijek ako je \mathbb{K} algebarski zatvoreno polje. Vièteove formule (na polinom k_A) nam tada daju da je

$$\det A = \prod_{k=1}^n \lambda_k \quad \text{i} \quad \text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Pod istim uvjetima, sljedeće je međusobno ekvivalentno:

- A je dijagonalizabilan
- za svaku svojstvenu vrijednost, λ , od A vrijedi da je geometrijska kratnost = algebarska kratnost
- kratnost svake nultočke polinoma m_A jednaka je 1.

- **Teorem o preslikavanju spektra.** Neka je $p \in \mathbb{K}[x]$, tada vrijedi da je

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\},$$

vrijedi i $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$, također, ako je A regularan, onda je $\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}$.

- Opet, ako se sve nultočke od k_A nalaze u \mathbb{K} (što vrijedi automatski ako je \mathbb{K} algebarski zatvoreno), onda je operator A **normalan**, odnosno $AA^* = A^*A$, ako i samo ako postoji svojstveni vektori od A koji čine ortonormiranu bazu za V .
- ako je operator A **hermitski** (u realnom slučaju kažemo simetričan), tj. $A^* = A$, onda je A normalan i sve svojstvene vrijednosti od A su realne.
- ako je operator A **unitaran** (odnosno ortogonalan), tj. $A^{-1} = A^*$, onda je A normalan i sve svojstvene vrijednosti od A su modula 1.
- operator A je normalan ako i samo ako je **unitarno sličan** nekoj dijagonalnoj matrici D , tj. ako postoji unitarna matrica U takva da je $A = U^*DU$.
- **Komutativne familije.** Neka je \mathbb{K} algebarski zatvoreno polje.
 - Neka je $\mathcal{S} \subset L(V)$ skup matrica koje međusobno komutiraju, tada postoji regularna matrica S takva da je SAS^{-1} gornje trokutasta matrica, za svaki $A \in \mathcal{S}$. Odnosno, matrice iz skupa \mathcal{S} su **simultano triangulirajibilne**.
 - Neka je $\mathcal{S} \subset L(V)$ skup **dijagonalizabilnih** matrica koje međusobno komutiraju, tada postoji regularna matrica S takva da je SAS^{-1} dijagonalna matrica, za svaki $A \in \mathcal{S}$. Odnosno, matrice iz skupa \mathcal{S} su **simultano dijagonalizabilne**.
- **adjunkta matrice**, to je matrica $\tilde{A} = ((-1)^{i+j} A_{i,j})^t$, gdje je $A_{i,j}$ (i, j)-ta **minora** (algebarski komplement) matrice A , tj. determinanta $(n-1) \times (n-1)$ matrice koja je dobivena od matrice A izbacivanjem njenog i -tog retka i j -tog stupca. Vrijedi da je $\tilde{A}A = \det(A)I$.

Zadaci.

1. (Vandermonde) Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ i $A = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$. Odredite $\det A$.

2. (Cirkularna matrica) Neka su $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ i

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

dokažite da je $\det A = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \xi^{jk} a_k \right)$, gdje je $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, primitivni n -ti korijen iz jedinice.

3. (Putnam 1999., B5) Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i $A = (\cos \frac{2(i+j)\pi}{n})_{1 \leq i, j \leq n}$. Odredite $\det(A + I)$.

4. (Izborni za VJIMC 2012., 2.1) Neka su A i B realne 2018×2018 matrice takve da je $AB = BA$ i $A^{2018} = B^{2018} = I$. Ako je $\text{Tr}(AB) = 2018$, dokažite da je $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

5. (IMC 2011., 1.2) Postoji li realna 3×3 matrica takva da je $\text{Tr}(A) = 0$ i $A^2 + A^t = I$?

6. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice, dokažite da je $\det(I + AB) = \det(I + BA)$.

7. Neka je G konačna podgrupa grupe $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Prepostavimo da je $\sum_{A \in G} \text{Tr}(A) = 0$. Dokažite da je $\sum_{A \in G} A = 0$.

8. Dokažite da je $\det(I + A^2) \geq 0$ za svaku realnu $n \times n$ matricu.

9. Dokažite: $\det(I + \lambda A^2) \geq 0$, za svaku realnu antisimetričnu $n \times n$ matricu A i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.
10. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice takve da postoje $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvi da je $aA + bB = AB$, dokažite da je $AB = BA$.
11. Postoje li realne $n \times n$ matrice A i B takve da je $AB - BA = I$?
12. (Putnam 1986., B6) Neka su A, B, C i D realne $n \times n$ matrice takve da su matrice AB^t i CD^t simetrične i $AD^t - BC^t = I$, dokažite da je $A^t D - C^t B = I$.
13. (VJIMC 2010., 2.3) Neka su A i B $n \times n$ matrice s cjelobrojnim koeficijentima takve da su matrice
- $$A, \quad A + B, \quad A + 2B, \quad \dots, \quad A + 2nB$$
- invertibilne i inverzi im imaju cjelobrojne koeficijente. Dokažite da je i $A + (2n+1)B$ invertibilna matrica te da joj inverz ima cjelobrojne koeficijente.
14. Neka su A i B kompleksne $n \times n$ matrice. Neka je A regularna i $ABA^{-1} = B^2$. Dokažite da za svaku svojstvenu vrijednost, λ , od B vrijedi $\lambda = 0$ ili $\lambda^k = 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$.
15. Neka su A, B, C realne $n \times n$ matrice takve da je
- $$ABC + AB + BC + AC + A + B + C = 0.$$
- Dokažite da matrice A i $B + C$ komutiraju ako i samo ako matrice A i BC komutiraju.
16. Neka je A $n \times n$ matrica koja na glavnoj dijagonali ima 0, a na svim ostalim mjestima 1, odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostvore matrice A .
17. Neka je n neparan prirodan broj i neka je S realna $n \times n$ ortogonalna matrica takva da je $\det S \geq 0$. Dokažite da je $1 \in \sigma(S)$. Vrijedi li tvrdnja i za paran n ?
18. Neka je A realna, simetrična, pozitivno definitna $n \times n$ matrica i neka je $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da limes $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\langle A^{m+1}y, y \rangle}{\langle A^my, y \rangle}$ postoji i da se nalazi u $\sigma(A)$.
19. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice takve da je matrica $A + B$ invertibilna. Dokažite da je $A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.
20. Neka je A matrica tipa $2^{2015} \times 2^{2015}$ koja na glavnoj dijagonali ima 0, a na svim ostalim mjestima ima ± 1 . Dokažite da je A regularna.
21. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice za koje je $\text{Tr}(AA^t + B^tB) = \text{Tr}(AB^t + A^tB)$. Dokažite da je $A = B$.
22. Neka su A i B realne 3×3 matrice za koje je $\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Dokažite da je $\det(xA + yB) = 0$ za sve realne brojeve x i y .
23. Postoji li $p \in \mathbb{R}[x]$ parnog stupnja takav da je funkcija, $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = p(X)$, surjekcija?
24. (Izborni za VJIMC 2009., 1.1) Neka je n neparan prirodan broj i A realna $n \times n$ matrica takva da je $A^2 = 0$ ili $A^2 = I$. Dokažite da je $\det(A + I) \geq \det(A - I)$.
25. Neka je $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ kompleksna matrica takva da je $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| < 1$, za svaki i . Dokažite da je matrica $I - A$ regularna.
26. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da postoji $k \in \mathbb{N}$ za koji je $kA^{k+1} = (k+1)A^k$. Dokažite da je $A - I$ regularna i odredite joj inverz.

27. Neka su $A, B \in M_3(\mathbb{R})$. Dokažite da je $\det(AB - BA) = \frac{1}{3} \text{Tr}((AB - BA)^3)$.

Domaća zadaća. Od studenata se očekuje da za **domaću zadaću** odaberu i riješe barem **6 zadataka**. **Rok** za predaju zadaće je na predavanju **11.05.2018**.

1. Neka je $F_0 = 0, F_1 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. F_n je Fibonaccijev niz. Ako je $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pokažite da je $M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, za sve $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Dokažite da je $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$, za sve cijele $m, n \geq 0$.
 - (b) Dokažite da je $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$, za sve prirodne n .
2. Neka je V realan vektorski prostor i neka su f, f_1, f_2, \dots, f_n linearni operatori $V \rightarrow \mathbb{R}$. Ako je $f(x) = 0$ za sve x takve da je $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0$, dokažite da je f prikaziv kao linearna kombinacija od f_1, f_2, \dots, f_n .
3. Neka su A i B realne 2×2 matrice takve da je $(AB - BA)^n = I$, za neki prirodan broj n . Dokažite da je n paran i da je $(AB - BA)^4 = I$.
4. Neka su A i B $n \times n$ matrice koje **ne komutiraju** i za koje postoji realni brojevi p, q, r , različiti od 0, takvi da je $pAB + qBA = I$ i $A^2 = rB^2$. Dokažite da je $p = q$.
5. (a) Neka je A $n \times n$ ($n > 1$) invertibilna matrica s realnim, pozitivnim koeficijentima. Dokažite da A^{-1} sadrži najviše $n^2 - 2n$ koeficijenata jednakih 0.

 (b) Koliko 0-koeficijenata ima inverz $n \times n$ matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}?$$

6. Neka su A i B $n \times n$ matrice za koje je $AB - B^2A^2 = I$ i $A^3 + B^3 = 0$. Dokažite da je $BA - A^2B^2 = I$.
7. Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi koji nisu svi jednaki 1. Neka su x, y, z i t realni brojevi takvi da je $a^x = bcd, b^y = cda, c^z = dab$ i $d^t = abc$. Koliko je

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -t \end{vmatrix}?$$

8. Postoje li cijelobrojne 2×2 matrice A, B i C takve da je $\det A = \det B = \det C = 1$ i $A^4 + B^4 = C^4$?
9. Neka je p prost broj te neka su A i B realne $n \times n$ matrice takve da je $A^{p-1} = B^p = I$ i $AB = BA$. Dokažite da je $A + B + I$ regularna matrica.