LINEARNA ALGEBRA NA NATJECANJIMA

Ivan Krijan

rješenja zadataka

1. (Vandermonde) Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ i $A = \left(x_i^{j-1}\right)_{1\le i,j\le n}$. Odredite $\det A$.

Rješenje. $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$, ključno je primijetiti da ako za neke $i \neq j$ vrijedi $x_i = x_j$, onda je $\det A = 0$ (ima dva ista retka). Neka je $\det A = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdje je $p \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Lako vidimo da je $\deg p = \frac{n(n-1)}{2}$, naime, svaki monom je nastao kao umnožak od po točno jednog elementa iz svakog od stupaca dane matrice. Promatrajmo p kao polinom u varijabli x_1 s koeficijentima iz $\mathbb{C}[x_2, x_3, \ldots, x_n]$. Vidimo da je svaki od elemenata $x_2, x_3, \ldots, x_n$ njegova nultočka. Dakle, polinom p je djeljiv sa svakim od polinoma $x_k - x_1$, za $k = 2, 3, \ldots, n$. Slično, promatramo li polinom p kao polinom u varijabli x_i vidimo da je on djeljiv sa svim faktorima oblika $x_j - x_i$, $i \neq j$. Zaključujemo da $\prod\limits_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i) \mid p$. No, umnožak s lijeve strane je polinom stupnja $\frac{n(n-1)}{2}$ iz čega zaključujemo da je

$$\det A = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i),$$

gdje je $c \in \mathbb{C}$. Uspoređivanjem koeficijenata uz $1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 \cdot \ldots \cdot x_n^{n-1}$ vidimo da je $c = 1$. ✓

2. (Cirkularna matrica) Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ i

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix},$$

dokažite da je $\det A = \prod\limits_{j=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi^{jk} a_k \right)$, gdje je $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, primitivni n-ti korijen iz jedinice.

Rješenje. Dovoljno je dokazati da su $\lambda_j = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi^{jk} a_k$, za $j = 0, 1, \ldots, n-1$ sve svojstvene vrijednosti matrice A. Lako vidimo da su

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^{n-1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^2 \\ \xi^{2\cdot 2} \\ \vdots \\ \xi^{2\cdot(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^{n-1} \\ \xi^{(n-1)\cdot 2} \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{bmatrix}$$

svojstveni vektori za A te da oni tvore linearno nezavisan skup vektora u $\mathbb{C}^n$. Kako ih ima n, ti vektori određuju potpun skup svojstvenih vrijednosti matrice A. Doista, linearna nezavisnost ovih vektora slijedi iz činjenice da je determinanta matrice čiji su stupci $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ upravo Vandermondeova determinanta, kako je ξ n-ti primitivni korijen iz jedinice slijedi da su brojevi $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}$ međusobno različiti pa je determinanta spomenute matrice $\neq 0$. Odnosno, rang

te matrice je potpun. Pokažimo još da ovi vektori uistinu jesu svojstveni vektori matrice A te da vektor v_j odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_j. Za $j = 0, 1, \ldots, n-1$ imamo:

$$Av_j = \begin{bmatrix} a_0 & + & a_1\xi^j & + & a_2\xi^{j\cdot 2} & + & \ldots & + & a_{n-1}\xi^{j\cdot(n-1)} \\ a_{n-1} & + & a_0\xi^j & + & a_1\xi^{j\cdot 2} & + & \ldots & + & a_{n-2}\xi^{j\cdot(n-1)} \\ a_{n-2} & + & a_{n-1}\xi^j & + & a_0\xi^{j\cdot 2} & + & \ldots & + & a_{n-3}\xi^{j\cdot(n-1)} \\ & & & & & & \vdots & & \\ a_1 & + & a_2\xi^j & + & a_3\xi^{j\cdot 2} & + & \ldots & + & a_0\xi^{j\cdot(n-1)} \end{bmatrix} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \xi^{jk} a_k\right) v_j,$$

ovime smo gotovi. ✓

3. (Putnam 1999., B5) Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i $A = \left(\cos\frac{2(i+j)\pi}{n}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Odredite $\det(A+I)$.

Rješenje. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sve svojstvene vrijednosti matrice A, tada nam teorem o preslikavanju spektra (vrijedi: $A + I = p(A)$, gdje je $p(x) = x + 1$) govori da su sve svojstvene vrijednosti matrice $A+I$ jednake $\lambda_1+1, \lambda_2+1, \ldots, \lambda_n+1$. Odrediti ćemo sve svojstvene vrijednosti matrice A koristeći istu metodu kao u prethodnom zadatku.

Neka je $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ te kao prije $\xi = e^{\mathrm{i}\varphi}$, n-ti primitivni korijen iz jedinice. Koristeći Vandermondeovu determinantu vidimo da su vektori

$$v_1 = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \xi^2 \\ \xi^{2\cdot 2} \\ \xi^{2\cdot 3} \\ \vdots \\ \xi^{2\cdot(n-1)} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \xi^3 \\ \xi^{3\cdot 2} \\ \xi^{3\cdot 3} \\ \vdots \\ \xi^{3\cdot(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni. Koristiti ćemo činjenicu da je $\cos((i+j)\varphi) = \dfrac{1}{2}(\xi^{i+j} + \xi^{-i-j})$. Označimo s $[v]_i$ i-ti element vektora v, tada, za $k, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vrijedi:

$$[Av_k]_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \cdot (\xi^{i+j} + \xi^{-i-j}) \cdot \xi^{k\cdot j}\right) = \frac{1}{2}\left(\xi^i \sum_{j=1}^{n} \xi^{(k+1)\cdot j} + \xi^{-i} \sum_{j=1}^{n} \xi^{(k-1)\cdot j}\right).$$

Primijetimo sljedeće:

$$\xi^n = 1 \Longrightarrow \xi^{k\cdot n} = 1 \Longleftrightarrow (\xi^k - 1)\sum_{j=0}^{n-1} \xi^{k\cdot j} = 0 \Longleftrightarrow (\xi^k - 1)\sum_{j=1}^{n} \xi^{k\cdot j} = 0,$$

gdje posljednja ekvivalencija vrijedi radi činjenice da je $\xi^0 = \xi^n = 1$. Dakle, ako je $\xi^k \neq 1$, onda je $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi^{k\cdot j} = 0$. Ako $k \not\equiv 0 \pmod{n}$, onda je $\xi^k \neq 1$ jer je ξ n-ti primitivni korijen od 1. Sada vidimo da za $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \neq 1$ i $k \neq n-1$ vrijedi da je $\xi^{k+1} \neq 1$ i $\xi^{k-1} \neq 1$ pa je $Av_k = 0$, za sve takve k. Sada zaključujemo da je 0 svojstvena vrijednost matrice A kratnosti barem $n-2$. Ostaje nam još za vidjeti što se točno događa s vektorima v_1 i v_{n-1} (koji su različiti pošto je $n \geq 3$).

$$[Av_1]_i = \frac{1}{2} \cdot \xi^{-i} \cdot n = \frac{n}{2} \cdot \xi^{n-i} = \frac{n}{2} \cdot \xi^{(n-1)\cdot i} \Longrightarrow Av_1 = \frac{n}{2} v_{n-1},$$

$$[Av_{n-1}]_i = \frac{1}{2} \cdot \xi^{i} \cdot n = \frac{n}{2} \cdot \xi^{i} \Longrightarrow Av_{n-1} = \frac{n}{2} v_1.$$

Sada vidimo je $A(v_1 + v_{n-1}) = \dfrac{n}{2}(v_1 + v_{n-1})$ te $A(v_1 - v_{n-1}) = -\dfrac{n}{2}(v_1 - v_{n-1})$. Dakle, $\dfrac{n}{2}$ i $\dfrac{-n}{2}$ su jedine ne–nul svojstvene vrijednosti od A pa je $\det(A+I) = \left(\dfrac{n}{2} + 1\right)\left(\dfrac{-n}{2} + 1\right) = 1 - \dfrac{n^2}{4}$. ✓

4. (Izborno za VJIMC 2012., 2.1) Neka su A i B realne 2015×2015 matrice takve da je $AB = BA$ i $A^{2015} = B^{2015} = I$. Ako je $\mathrm{Tr}\,(AB) = 2015$, dokažite da je $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$.

   Rješenje. Iz uvjeta zadatka odmah dobivamo $(AB)^{2015} = I$, tj. $(AB)^{2015} - I = 0$ pa vidimo da vrijedi: $\lambda \in \sigma(AB) \Longrightarrow |\lambda| = 1$. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sve svojstvene vrijednosti matrice AB, tada imamo:
$$2015 = |\mathrm{Tr}\,(AB)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 2015.$$
   Dakle, mora vrijediti jednakost, a to se postiže ako i samo ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda \in \mathbb{C}$. No, iskoristimo li ponovno uvjet $\mathrm{Tr}\,(AB) = 2015$ vidimo da mora biti $\lambda = 1$, tj. $\sigma(AB) = \{1\}$, što znači da minimalni polinom, m, od AB ima samo jednu nultočku, 1, a kako mora biti da $m \mid x^{2015} - 1$, zaključujemo da je $m(x) = x - 1$, tj. $AB = I$, odnosno: $B = A^{-1}$. Kako je $A^{2015} = I$ vidimo da su sve svojstvene vrijednosti matrice A modula 1. Kako je A realna matrica vidimo da se sve "prave" kompleskne (one s imaginarnim dijelom $\neq 0$) pojavljuju u kompleksno konjugiranim parovima kao svojstvene vrijednosti od A. Stoga zaključujemo da je spektar od A jednak:
$$1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ -1,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ \lambda_1,\ \overline{\lambda_1},\ \lambda_2,\ \overline{\lambda_2},\ \ldots,\ \lambda_k,\ \overline{\lambda_k}.$$
   Za $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, vrijedi: $\overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, prema teoremo o preslikavanju spektra vidimo da je spektar od B tada jednak:
$$1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ -1,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ \frac{1}{\lambda_1},\ \lambda_1,\ \frac{1}{\lambda_2},\ \lambda_2,\ \ldots,\ \frac{1}{\lambda_k},\ \lambda_k,$$
   a to je isto što i spektar od A. Dakle, posebno, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$. ✓

5. (IMC 2011., 1.2) Postoji li realna 3×3 matrica takva da je $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$ i $A^2 + A^t = I$?

   Rješenje. Ne! Pretpostavimo da takva matrica postoji, tada vrijedi:
$$A = I - (A^2)^t = I - (A^t)^2 = I - (I - A^2)^2 = 2A^2 - A^4.$$
   Dakle, polinom $x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)(x^2+x-1)$ poništava matricu A. Iz toga odmah vidimo da je $\sigma(A) \subseteq \left\{0,\ 1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, a onda dalje $\sigma(A^2) \subseteq \left\{0,\ 1,\ \frac{3\mp\sqrt{5}}{2}\right\}$. Vrijedi: $\mathrm{Tr}\,(A^2) = \mathrm{Tr}\,(I - A^t) = 3$. Kako mora biti $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, lako vidimo da postoje samo dvije mogućnosti za spektar operatora A, to su $(0,\ 0,\ 0)$ i $\left(1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Vidimo da je u prvom slučaju $\mathrm{Tr}\,(A^2) = 0$, a u drugom slučaju je $\mathrm{Tr}\,(A^2) = 4$, odnosno, nikako ne može biti 3. Kontradikcija! ✓

6. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice, dokažite da je $\det(I + AB) = \det(I + BA)$.

   Rješenje. Pretpostavimo najprije da je A regularna, tada:
$$\det(I + AB) = \det(A(I + BA)A^{-1}) = \det(I + BA).$$
   Za svaki $t \in \mathbb{R}$ definirajmo $A_t = A - tI$ i:
$$P(t) = \det(I + A_t B) - \det(I + BA_t).$$
   $P(t) = 0$, za svaki t za koji je A_t regularna matrica, a to je za svaki $t \notin \sigma(A)$, kako $\sigma(A)$ ima samo konačno mnogo elemenata vidimo da polinom P ima beskonačno mnogo nultočaka, što znači da je $P = 0$, konačno je i $P(0) = 0$, što je i trebalo dokazati. ✓

7. Neka je G konačna podgrupa grupe $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$. Pretpostavimo da je $\sum\limits_{A \in G} \mathrm{Tr}\,(A) = 0$. Dokažite da je $\sum\limits_{A \in G} A = 0$.

   Rješenje. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_m$ svi elementi grupe G, definirajmo $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$.
$$\begin{aligned} A^2 &= (A_1 + A_2 + \ldots + A_m)(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) \\ &= A_1(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) + A_2(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) + \ldots + A_m(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) \\ &= m(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = mA, \end{aligned}$$

ovdje smo koristili da vrijedi da je $A_i(A_1+A_2+\ldots+A_m) = A_1+A_2+\ldots+A_m$, za $i = 1, 2, \ldots, m$. Zašto? Naime, G je podgrupa od $\mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$, pretpostavimo da je $A_iA_k = A_iA_l$, vidimo da je to moguće jedino ako je $A_k = A_l$, a kako je G grupa jasno je da je $A_iA_k \in G$. Dakle, sada vidimo da je $A^k = m^{k-1}A$, za sve prirodne k. Kako je $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, vidimo da je $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$, za sve prirodne k. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sve svojstvene vrijednoti matrice A. Tada vrijedi da je $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = 0$, za sve prirodne k. No, to je moguće jedino ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, zašto? Dakle, $\sigma(A) = \{0\}$, što znači da je minimalni polinom od A oblika x^k, u svakom slučaju je $A^n = 0$, a iz toga konačno slijedi: $A = \frac{1}{m^{n-1}}A^n = 0$. ✓

8. Dokažite da je $\det(I + A^2) \geq 0$ za svaku realnu $n \times n$ matricu.

   Rješenje. $\det(I+A^2) = \det((I+iA)(I-iA)) = (\text{A realna, tj. } \overline{A} = A) = |\det(I+iA)|^2 \geq 0$. ✓

9. Dokažite: $\det(I + \lambda A^2) \geq 0$, za svaku realnu antisimetričnu $n \times n$ matricu A i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Rješenje. Za $\lambda \geq 0$ možemo postupiti isto kao u prethodnom zadatku, ukoliko je $\lambda < 0$, neka je $\lambda = -\alpha^2$, gdje je $\alpha > 0$. Tada je:

$$\det(I - \alpha^2 A) = \det((I - \alpha A)(I + \alpha A)) = \det((I + \alpha A)^t(I + \alpha A)) = (\det(I + \alpha A))^2 \geq 0.$$

   Iskoristili smo da je $A^t = -A$ i da je $I + \alpha A$ realna matrica. ✓

10. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice takve da postoje $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvi da je $aA + bB = AB$, dokažite da je $AB = BA$.

    Rješenje.

$$AB - aA - bB + abI = abI \iff \frac{1}{ab}(A - bI)(B - aI) = I \iff (B - aI)(A - bI) = abI,$$

    izmnožimo li posljednje dobijemo $aA + bB = BA$. ✓

11. Postoje li realne $n \times n$ matrice A i B takve da je $AB - BA = I$?

    Rješenje. Ne! Recimo da postoje, tada: $0 = \mathrm{Tr}\,(AB - BA) = \mathrm{Tr}\,(I) = n$. Kontradikcija! ✓

12. (Putnam 1986., B6) Neka su A, B, C i D realne $n \times n$ matrice takve da su matrice AB^t i CD^t simetrične i $AD^t - BC^t = I$, dokažite da je $A^tD - C^tB = I$.

    Rješenje. Uvjeti koje zapravo imamo su:

$$\left.\begin{array}{ll} AD^t - BC^t = I, & -AB^t + BA^t = 0, \\ CD^t - DC^t = 0, & -CB^t + DA^t = I. \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

    $\Longrightarrow \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Donji desni blok nam daje: $A^tD - C^tB = I$. ✓

13. (VJIMC 2010., 2.3) Neka su A i B $n \times n$ matrice s cjelobrojnim koeficijentima takve da su matrice

$$A, \quad A + B, \quad A + 2B, \quad \ldots, \quad A + 2nB$$

    invertibilne i inverzi im imaju cjelobrojne koeficijente. Dokažite da je i $A + (2n+1)B$ invertibilna matrica te da joj inverz ima cjelobrojne koeficijente.

    Rješenje. Pretpostavimo da je $X \in M_n(\mathbb{Z})$ takva da X^{-1} postoji i da je $X^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$. Jasno je da matrica s cjelobrojnim koeficijentima ima cjelobrojnu determinantu, stoga, iz činjenice da je $1 = \det I = \det(XX^{-1}) = \det(X)\det(X^{-1})$ zaključujemo da je $\det X = \pm 1$, jer postoje samo dva načina da se 1 prikaže kao umnožak dva cijela broja, to su $1 \cdot 1$ i $(-1) \cdot (-1)$.

    Neka je $p \in \mathbb{Z}[k]$ definiran s $p(k) = \det(A + kB)$, jasno je da je $\deg p \leq n$. Prema prethodnoj opservaciji vidimo da polinom p u točkama $0, 1, 2, \ldots, 2n$ (kojih ima $2n+1$) postiže ili vrijednost

1 ili vrijednost -1. To znači da neku od tih vrijednosti postiže u barem $n+1$ (različitih) točaka. Označimo tu vrijednost s μ. Ovo znači da polinom $p-\mu$ koji je stupnja $\leq n$ ima barem $n+1$ nultočaka, što znači da je $p-\mu=0$, odnosno $p=\mu$. Dakle, posebno vrijedi da je i $p(2n+1)=\mu$. Kako je $\mu=\pm 1\neq 0$ vidimo da je $X=A+(2n+1)B$ regularna. Činjenicu da je $X^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})$ možemo dokazati na više načina. Možemo primijetiti da je koeficijent uz I u karakterističnom polinomu od X jednak $\mu=\pm 1$ pa vidimo da je X^{-1} zapravo polinom u varijabli X, a to ima cjelobrojne koeficijente pošto ih matrica X ima. Drugi pristup je iskoristiti adjunktu matrice X:

$$X^{-1}=\frac{1}{\det X}\widetilde{X}=\frac{1}{\mu}\widetilde{X},$$

to je očito cjelobrojno jer je $\mu=\pm 1$ i $\widetilde{X}$ ima cjelobrojne koeficijente jer je to matrica čiji elementi su determinante podmatrica matrice X, koja ima cjelobrojne koeficijente. ✓

14. Neka su A i B kompleksne $n\times n$ matrice. Neka je A regularna i $ABA^{-1}=B^2$. Dokažite da za svaku svojstvenu vrijednost, λ, od B vrijedi $\lambda=0$ ili $\lambda^k=1$ za neki $k\in\mathbb{N}$.

    Rješenje. Neka je $\lambda\in\sigma(B)$ i neka je $\lambda\neq 0$. Postoji $0\neq v\in\mathbb{C}^n$ takav da je $Bv=\lambda v$,

    $$BA^{-1}v=A^{-1}B^2v=A^{-1}(\lambda^2 v)=\lambda^2A^{-1}v,$$

    kako je $v\neq 0$ i A^{-1} je regularna imamo da je $A^{-1}v\neq 0$, što znači da je $\lambda^2\in\sigma B)$. Dakle, vidimo da je $\lambda^{2^k}\in\sigma(B)$, za svaki $k\in\mathbb{N}$. No, $\sigma(B)$ je konačan skup pa moraju postojati različiti k, $l\in\mathbb{N}$ (BSO $k<l$) takvi da je $\lambda^{2^k}=\lambda^{2^l}$, a ovo znači da je $\lambda^{2^l-2^k}=1$. ✓

15. Neka su A, B, C realne $n\times n$ matrice takve da je

    $$ABC+AB+BC+AC+A+B+C=0.$$

    Dokažite da matrice A i $B+C$ komutiraju ako i samo ako matrice A i BC komutiraju.

    Rješenje.

    $$\begin{aligned} ABC+AB+BC+AC+A+B+C&=0 && \Longleftrightarrow\\ (A+I)(B+I)(C+I)&=I && \Longleftrightarrow\\ (B+I)(C+I)(A+I)&=I && \Longleftrightarrow\\ BCA+BC+BA+CA+B+C+A&=0. \end{aligned}$$

    Oduzimanjem prve i zadnje jednakosti dobivamo $A(BC)-(BC)A=(B+C)A-A(B+C)$. ✓

16. Neka je A $n\times n$ matrica koja na glavnoj dijagonali ima 0, a na svim ostalim mjestima 1, odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore matrice A.

    Rješenje. Riječ je o cirkularnoj matrici (pogledati zadatak 2.) pa odmah točno znamo koje su svojstvene vrijednosti i koji su odgovarajući svojstveni vektori. ✓

17. Neka je n neparan prirodan broj i neka je S realna $n\times n$ ortogonalna matrica takva da je $\det S\geq 0$. Dokažite da je $1\in\sigma(S)$. Vrijedi li tvrdnja i za paran n?

    Rješenje. S je ortogonalna što znači da je $SS^t=I$, to znači da je $\det(S)\det(S^t)=1$, vrijedi da je $\det(S^t)=\det(S)$ pa je $(\det(S))^2=1$, a kako je $\det S\geq 0$ vidimo da je $\det S=1$. Znamo da su ortogonalnoj matrici sve svojstvene vrijednosti modula 1 i da se sve komplekne ne-realne pojavljuju u kompleksno konjugiranim parovima, što će reći da je njihov umnožak jednak 1. Preostaje neparno mnogo pojavljivanja svojstvenih vrijednosti 1 i -1 čiji umnožak mora biti 1. To znači da moramo imati parno -1, odnosno neparno 1, što posebno znači da je barem jedna 1, tj. $1\in\sigma(S)$. Za paran n tvrdnja očito ne mora vrijediti, npr. imamo matricu $-I$, gdje je I 2×2 identiteta. ✓

18. Neka je A realna, simetrična, pozitivno definitna $n \times n$ matrica i neka je $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da limes $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\langle A^{m+1}y,\, y\rangle}{\langle A^m y,\, y\rangle}$ postoji i da se nalazi u $\sigma(A)$.

Rješenje. A je realna i simetrična, to znači da je ortogonalno slična nekoj dijagonalnoj matrici. Također, imajmo na umu i da je A pozitivno definitna. Dakle, postoji ortogonalna matrica S takva da je $A = SDS^t$, gdje je $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots \lambda_n)$ (svojstvene vrijednosti od A) i pri čemu je (A je pozitivno definitna) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$. Postoji $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$ takav da je $y = Sz$, neka je $k \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ najmanji takav da je $z_k \neq 0$. Imamo:

$$\frac{\langle A^{m+1}y,\, y\rangle}{\langle A^m y,\, y\rangle} = \frac{\langle A^{m+1}Sz,\, Sz\rangle}{\langle A^m Sz,\, Sz\rangle} = \frac{\langle S^t A^{m+1} Sz,\, z\rangle}{\langle S^t A^m Sz,\, z\rangle} = \frac{\langle D^{m+1}z,\, z\rangle}{\langle D^m z,\, z\rangle} =$$

$$= \frac{\lambda_k^{m+1} z_k^2 + \lambda_{k+1}^{m+1} z_{k+1}^2 + \ldots + \lambda_n^{m+1} z_{m+1}^2}{\lambda_k^m z_k^2 + \lambda_{k+1}^m z_{k+1}^2 + \ldots + \lambda_n^m z_n^2} = \lambda_k \cdot \frac{z_k^2 + \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{m+1} z_{k+1}^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{m+1} z_n^2}{z_k^2 + \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^{m} z_{k+1}^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{m} z_n^2}.$$

Kako je $\lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$ vidimo da posljedni izraz teži u λ_k, kada $m \to \infty$. ✓

19. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice takve da je matrica $A + B$ invertibilna. Dokažite da je $A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.

Rješenje 1. Ukoliko su A i B invertibilne matrice imamo:

$$A(A+B)^{-1}B = (A^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(B^{-1})^{-1} = (B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1} = (A^{-1}+B^{-1})^{-1},$$

analogno dobijemo da je $B(A+B)^{-1}A = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ i gotovi smo. Da bismo tvrdnju dokazali općenito iskoristimo činjenicu da su skupovi $\sigma(A)$ i $\sigma(B)$ konačni, to znači da postoji $\varepsilon > 0$ takav da su matrice $A_\epsilon = A - \epsilon I$ i $B_\epsilon = B + \epsilon I$ regularne za sve $0 < \epsilon < \varepsilon$. Sada je

$$A_\epsilon (A+B)^{-1} B_\epsilon = B_\epsilon (A+B)^{-1} A_\epsilon.$$

U ovoj jednakosti sada možemo pustiti $\epsilon \to 0$ i gotovo. ✓

Rješenje 2.

$$(A+B)(A+B)^{-1}B = IB = B \iff A(A+B)^{-1}B + B(A+B)^{-1}B = B,$$
$$B(A+B)^{-1}(A+B) = BI = B \iff B(A+B)^{-1}A + B(A+B)^{-1}B = B.$$

Oduzimanjem ove dvije jednakosti dobivamo $A(A+B)^{-1}B - B(A+B)^{-1}A = 0$. ✓

20. Neka je A matrica tipa $2^{2015} \times 2^{2015}$ koja na glavnoj dijagonali ima 0, a na svim ostalim mjestima ima ± 1. Dokažite da je A regularna.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, to znači da je $\det A = 0$, pokažimo da je to nemoguće. Kako je sve cjelobrojno možemo gledati koeficijente (a time i determinantu) matrice A modulo 2. To znači zapravo da matrica A na svim mjestima ima 1, osim na glavnoj dijagonali gdje ima 0. No, ovakva matrica je regularna, naime, za $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2^{2015}$, zbrojimo li sve retke osim i-tog vidimo da dobijemo vektor e_i (i-ti element kanonske baze). To znači da retci matrice A razapinju cijeli prostor $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^{2015}}$. Dakle, $\det A \equiv 1 \pmod 2$, tj. nikako ne može biti $\det A = 0$. ✓

21. Neka su A i B realne $n \times n$ matrice za koje je $\operatorname{Tr}(AA^t + B^tB) = \operatorname{Tr}(AB^t + A^tB)$. Dokažite da je $A = B$.

Rješenje. Primijetimo najprije da za svaku $n \times n$ matricu $X = (x_{i,j})$ vrijedi da je $\operatorname{Tr}(XX^t) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{i,j}^2$. Dakle, da bismo dokazali da je $A = B$ (tj. $A - B = 0$) dovoljno je pokazati da je $\operatorname{Tr}((A-B)(A-B)^t) = 0$. No, to slijedi direktno iz uvjeta zadatka pošto je:

$$\operatorname{Tr}\left((A-B)(A-B)^t\right) = \operatorname{Tr}\left(AA^t\right) + \operatorname{Tr}\left(BB^t\right) - \operatorname{Tr}\left(AB^t\right) - \operatorname{Tr}\left(BA^t\right) =$$

[iskoristimo da je $\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(YX)$] $= \operatorname{Tr}(AA^t + B^tB) - \operatorname{Tr}(AB^t + A^tB) = 0$. ✓

22. Neka su A i B realne 3×3 matrice za koje je $\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Dokažite da je $\det(xA + yB) = 0$ za sve realne brojeve x i y.

Rješenje. Možemo zapisati $\det(xA + yB) = cy^3 + c_1(x)y^2 + c_2(x)y + c_3(x)$, gdje je $c \in \mathbb{R}$, a c_i je polinom stupnja $\leq i$, za $i = 1, 2, 3$.

- $y = 0$, imamo da je $c_3(x) = \det(xA) = x^n \det A = 0$, za svaki realni x, to znači da je $c_3 = 0$.
- $y = x$, imamo da je $cx^3 + c_1(x)x^2 + c_2(x)x = \det(xA + xB) = x^n \det(A + B) = 0$.
- $y = -x$ pa dobijemo $-cx^3 + c_1(x)x^2 - c_2(x)x = \det(xA - xB) = x^n \det(A - B) = 0$.

Zbrajanjem posljednje dvije jednakosti dobijemo da je $2c_1(x)x^2 = 0$, za svaki realni x, tj. $c_1 = 0$. Uvrstimo sada $x = 0$ pa imamo $cy^3 + c_2(0)y = \det(yB) = y^n \det(B) = 0$. Kako ovo vrijedi za svaki realni y, vidimo da mora biti $c = 0$ i $c_2(0) = 0$. Konačno, imamo da je $\det(xA + yB) = c_2(x)y$, stavimo li opet $x = y$ dobijemo da je $c_2(x)x = 0$, za svaki realni x pa je, konačno, $c_2 = 0$. ✓

23. Postoji li $p \in \mathbb{R}[x]$ parnog stupnja takav da je funkcija, $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = p(X)$, surjekcija?

Rješenje 1. (naizgled točno rješenje, koje zapravo to nije) Ne! Pretpostavimo da postoji. Kako je p parnog stupnja, on sigurno nije surjekcija (s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$), stoga postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ koji nije u slici od p, tj. $p(x) \neq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Promotrimo matricu αI, jasno je da je $\alpha \in \sigma(\alpha I)$. Kako je f surjekcija, postoji $X \in M_n(\mathbb{R})$ tako da je $\alpha I = f(X) = p(X)$. Sada, prema teoremu o preslikavanju spektra imamo da postoji $x \in \sigma(X)$ takav da je $p(x) = \alpha$. Kontradikcija. No, je li ovo zapravo kontradikcija? **NIJE!** Naime, moguće je da postoji kompleksna svojstvena vrijednost, z, od X takva da je $p(z) = \alpha$, ovo nikako nije kontradikcija pošto je svaki nekonstantni polinom p surjektivan s $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$. Čak i ako primijetimo da je α jedina svojstvena vrijednost od αI i to kratnosti n, ni to nas ne vodi u kontradikciju. Dajmo i konkretan primjer, neka je $p(x) = x^2$, jasno je da $-1 \notin p(\mathbb{R})$. No, vrijedi da je:

$$p\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dakle, ovim postupkom ne možemo doći do rješenja. ✗

Rješenje 2. (točno rješenje) Ne! Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je polinom p normiran, tj. da mu je vodeći koeficijent jednak 1. Kako je polinom p parnog stupnja, postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $q(x) = p(x) + \alpha > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Neka je $Y \in M_n(\mathbb{R})$ bilo kakva s negativnom determinantom. Pretpostavimo sada da je naša funkcija f surjekcija. To znači da postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $Y - \alpha I = f(X) = p(X)$. Polinom q nema realnih nultočaka, a sve kompleksne ne-realne nultočke dolaze u kompleksno konjugiranim parovima. Neka je $z = a + bi$ nultočka polinoma q, vidimo da je $(x - z)(x - \overline{z}) = (x - a)^2 + b^2$. Zaključujemo da se polinom q faktorizira ovako:

$$q(x) = \prod_{k=1}^{m} \left[(x - a_k)^2 + b_k^2\right],$$

gdje su $a_k \pm ib_k$, a_k, $b_k \in \mathbb{R}$, $b_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ nultočke polinoma q. Sada je

$$\det\left(\prod_{k=1}^{m} \left[(X - a_k I)^2 + b_k^2 I\right]\right) = \det(q(X)) = \det Y < 0.$$

Ovo je kontradikcija! Naime, za $k = 1, 2, \ldots, m$ vrijedi:

$$\det\left[(X - a_k I)^2 + b_k^2 I\right] = b_k^{2n} \det\left[\left(\frac{1}{b_k} X - \frac{a_k}{b_k} I\right)^2 + I\right] \geq 0,$$

ova zadnja nejednakost je zapravo zadatak 8. ✓

24. (Izborno za VJIMC 2009., 1.1) Neka je n neparan prirodan broj i A realna $n \times n$ matrica takva da je $A^2 = 0$ ili $A^2 = I$. Dokažite da je $\det(A+I) \geq \det(A-I)$.

Rješenje 1.

- $A^2 = 0$. $\det(A+I) = \det\left(I + A + \left(\frac{1}{2}A\right)^2\right) = \det\left(\left(I + \frac{1}{2}A\right)^2\right) \geq 0$, a s druge strane je $\det(A-I) = (-1)^n \det\left(I - A + \left(\frac{1}{2}A\right)^2\right) = (n \text{ je neparan}) = -\det\left(\left(I - \frac{1}{2}A\right)^2\right) \leq 0$.
- $A^2 = I$. $\det(A+I) = \frac{1}{2^n}\det(I + 2A + I) = \frac{1}{2^n}\left(I + 2A + A^2\right) = \frac{1}{2^n}\det\left((I+A)^2\right) \geq 0$. $\det(A-I) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \det\left(I - 2A + A^2\right) = \frac{-1}{2^n}\det\left((I-A)^2\right) \leq 0$. ✓

Rješenje 2. Koristimo teorem o preslikavanju spektra i činjenicu da je n neparan. Ukoliko je $A^2 = 0$, onda je $\sigma(A) = \{0\}$ pa je $\det(A+I) = 1^n = 1$, dok je $\det(A-I) = (-1)^n = -1$. Ako je $A^2 = I$, onda je $\sigma(A) \subseteq \{-1, 1\}$ pa je $\det(A+I) = 0^k \cdot 2^l$, gdje su k i l nenegativni cijeli brojevi takvi da je $k + l = n$ (k je kratnost svojstvene vrijednosti -1, a l svojstvene vrijednosti 1 matrice A). Ovdje ćemo uzeti da je $0^0 = 1$. S druge strane je $\det(A-I) = (-2)^k \cdot 0^l$. Sada, ako je $k \neq 0$ i $l \neq 0$ vidimo da je $\det(A+I) = \det(A-I) = 0$. Ako je $k = 0$, onda je $l = n$ pa je $\det(A+I) = 2^n > 0 = \det(A-I)$. Konačno, ako je $l = 0$, onda je $k = n$ i imamo $\det(A+I) = 0 > -2^n = (-2)^n = \det(A-I)$. ✓

25. Neka je $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ kompleksna matrica takva da je $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| < 1$, za svaki i. Dokažite da je matrica $I - A$ regularna.

Rješenje 1. Tvrdimo da je $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$ inverz od $I - A$. Jasno, da bismo to dokazali, nužno je i dovoljno pokazati da izraz $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$ ima smisla, tj. da navedeni red konvergira. Kako je $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| < 1$, za svaki i, vidimo da postoji $0 < a < 1$ takav da je $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| < a$, za svaki i. Označimo s $a_{i,j}^{(m)}$ elemente matrice A^m. Vrijedi da je

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}^{(2)}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| < a^2.$$

Iz ovoga indukcijom lako dobijemo da je $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}^{(m)}\right| < a^m$, za sve $m \in \mathbb{N}$ i sve j. No, ovo sad znači da za sve i, j imamo da je $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \left|a_{i,j}^{(m)}\right| \leq \sum\limits_{m=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}^{(m)}\right|\right) < 1 + a + a^2 + \ldots = \frac{1}{1-a} < +\infty$. Dakle, red $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$ konvergira apsolutno na svakoj koordinati matrice, a to posebno znači da konvergira na svakoj koordinati, tj. taj izraz ima smisla. ✓

Rješenje 2. Matrica $I - A$ je regularna ako i samo ako $1 \notin \sigma(A)$ pa dokažimo to. Pretpostavimo suprotno, tj. $1 \in \sigma(A)$, to znači da postoji $0 \neq x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ takav da je $Ax = x$. Neka je $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $|x_k| \geq |x_j|$, za sve j. Kako je $x \neq 0$, vidimo da mora biti $|x_k| > 0$. No, usporedimo li k-te koordinate dobivamo:

$$|x_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| \, |x_k| = |x_k| \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| < |x_k| \,,$$

što je kontradikcija. ✓

26. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da postoji $k \in \mathbb{N}$ za koji je $kA^{k+1} = (k+1)A^k$. Dokažite da je $A - I$ regularna i odredite joj inverz.

Rješenje 1. Kako 1 nije nultočka polinoma $kx^{k+1} - (k+1)x^k$ vidimo da $1 \notin \sigma(A)$ pa je matrica $A - I$ regularna. Promotrimo identitet

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1},$$

deriviramo li ga dobijemo:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + kx^{k-1} = \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(x-1)^2},$$

iz čega vidimo da je

$$(A - I)^2 \left(I + 2A + 3A^2 + \ldots + kA^{k-1}\right) = kA^{k+1} - (k+1)A^k + I = I.$$

Konačno: $(A - I)^{-1} = (A - I)\left(I + 2A + 3A^2 + \ldots + kA^{k-1}\right) = kA^k - A^{k-1} - \ldots - A - I.$ ✓

Rješenje 2. Primijetimo da je $(kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1) : (x - 1) = kx^k - x^{k-1} - \ldots - x - 1$, sada je:

$$I = kA^{k+1} - (k+1)A^k + I = (A - I)(kA^k - A^{k-1} - \ldots - A - I).$$

Dakle, $(A - I)$ je regularna i $(A - I)^{-1} = kA^k - A^{k-1} - \ldots - A - I.$ ✓

27. Neka su A, $B \in M_3(\mathbb{R})$. Dokažite da je $\det(AB - BA) = \frac{1}{3}\operatorname{Tr}((AB - BA)^3)$.

Rješenje. Teorem Hamilton-Cayley (za matricu $AB - BA$) nam govori da je:

$$(AB - BA)^3 - \underbrace{\operatorname{Tr}(AB - BA)}_{=0}(AB - BA)^2 + c(AB - BA) - \det(AB - BA)I = 0,$$

gdje je c neka realna konstanta. Uzmemo li trag lijeve i desne strane gornje nejednakosti dobivamo da je $\operatorname{Tr}\left((AB - BA)^3\right) + c \cdot 0 - \det(AB - BA) \cdot 3 = 0.$ ✓